

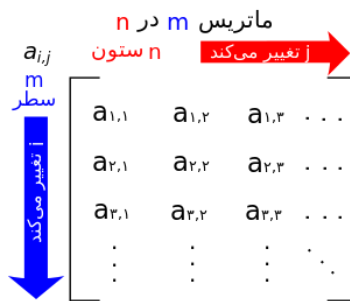
# جزوه ماتریس

ابراهیم شاه ابراهیمی

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۰۹۱۹۵۴۱۴۸۶۲



$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

سطر اول ستون اول  $\rightarrow$  درایه  $a_{11}$

سطر اول ستون دوم  $\rightarrow$  درایه  $a_{12}$

سطر دوم ستون اول  $\rightarrow$  درایه  $a_{21}$

سطر دوم ستون دوم  $\rightarrow$  درایه  $a_{22}$

درایه های قطر اصلی ۱ و بقیه درایه ها صفر .  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ماتریس واحد

همه درایه ها صفر .  $O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ماتریس صفر

جمع و تفریق ماتریس ها : مانند جمع و تفریق اعداد .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$$

(مثال)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2X = I \quad \text{ماتریس } X \text{ را بیابید .}$$

پاسخ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$



نکته :

اگر عددی در ماتریس ضرب یا تقسیم شود ، در تک تک درایه ها ضرب یا تقسیم میشود .

ضرب ماتریس ها :  $A \times B \neq B \times A$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \text{سطر اول در ستون دوم} & \text{سطر اول در ستون اول} \\ \text{سطر دوم در ستون دوم} & \text{سطر دوم در ستون اول} \end{array} \right]$$

(مثال)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = A \times A \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس :  $A^{-1}$ 

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

دترمینان :  $ad - bc$ 

نکته :

شرط وارون پذیری ماتریس : دترمینان  $0 \neq$ 

(مثال)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4 \times 6 - 7 \times 2} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$



نکات :

$$A \times A^{-1} = I$$

$$A \times I = A$$

$$A \times B \neq B \times A$$

شرط وارون پذیری ماتریس :  $ad - bc \neq 0$ 

$$(A^{-1})^{-1} = I$$

$$B^{-1} \times A^{-1} = (AB)^{-1}$$

تجربی ۹۵

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  باشند، وارون ماتریس  $A \times B$ ، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

پاسخ :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B)^{-1} = \frac{1}{-24 - (-28)} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

تجربی ۹۴

اگر  $A = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$  باشند، ماتریس  $(A - B)^{-1}$ ، کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

پاسخ :

$$A - B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{4 - (-6)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

تجربی ۹۳

ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$  مفروض است. اگر  $A \times B$  ماتریس واحد باشد. مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس  $B$ ، کدام است؟

۲٫۵ (۴)

۲ (۳)

۱٫۵ (۲)

۱ (۱)

اگر  $A \times B = I$ ، آن‌گاه  $B = A^{-1}$ ، در نتیجه،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B = A^{-1} = \frac{1}{2 \times 7 - 3 \times 4} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \text{ مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس } = \frac{7}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2$$

## تجربی خارج ۹۵

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشند، به ازای کدام مقدار  $a$  ماتریس  $A + 2B$  وارون پذیر نیست؟

-۳، ۵ (۴)

-۷، ۴ (۳)

-۵، ۷ (۲)

-۷، ۵ (۱)

پاسخ :

$$A + 2B = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix}$$

شرط وارون ناپذیری

$$\rightarrow \text{دترمینان} = 0 \rightarrow (a-2)(a+4) - 3 \times 9 = 0$$

$$\rightarrow a^2 + 2a - 8 - 27 = 0 \rightarrow a^2 + 2a - 35 = 0 \rightarrow (a+7)(a-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ a = 5 \end{cases}$$

## تجربی خارج ۹۱

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  ماتریس  $B$  از معادله  $A \cdot B = 2I$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

پاسخ :

$$A \times B = 2I \rightarrow B = 2A^{-1}I = 2A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - 4 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A^{-1} = 2 \left( \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

## تجربی ۸۷

اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس  $A^2 + A$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

$$A^2 = A \times A \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 + A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -12 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ -16 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{دترمینان } ad - bc = (-10 \times 18) - (12 \times -16) = -180 + 192 = 12$$

تست های نمونه

۸۸ خارج تجربی (مشابه ۹۵ خارج)

به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله‌ی ماتریسی  $\begin{bmatrix} m & 2 \\ 3 & m+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix}$  جواب ندارد؟

(۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۸ تجربی (مشابه ۹۵ خارج)

- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $\alpha$ ، معادله ماتریسی  $\begin{bmatrix} \alpha+1 & 2 \\ -1 & \alpha-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ ، جواب دارد؟

(۱)  $\{-1, 1\}$  (۲)  $R - \{0, 1\}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $R$

۹۴ خارج تجربی (مشابه ۹۵)

- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$  باشند، ماتریس  $(A \times B)^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 0/5 & 0 \\ -0/5 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۹۳ خارج تجربی (مشابه ۹۵)

دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. درایه واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس  $B \times A$ ، کدام است؟

(۱)  $-0,9$  (۲)  $-0,1$  (۳)  $0,1$  (۴)  $0,9$

۹۱ تجربی (مشابه ۹۴)

اگر  $X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشد وارون ماتریس  $X$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

۸۶ خارج تجربی (مشابه ۹۱ خارج)

اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه‌ی  $AX = 2I$  ماتریس  $X$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  (۴)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

۸۷ خارج تجربی (مشابه ۸۷)

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس  $(2A), (3A^{-1})$  کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۶

## پاسخ تست های نمونه

۸۸ خارج تجربی (مشابه ۹۵ خارج)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 2 \\ 3 & m+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

شرط وارون ناپذیری  $\rightarrow$  دترمینان  $= 0 \rightarrow m(m+5) - 2 \times 3 = 0$

$$\rightarrow m^2 + 5m - 6 = 0 \rightarrow (m+6)(m-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول  $m = -6$ 

زیرا واضح است که بازای آن معادله جواب خواهد داشت.

۸۸ تجربی (مشابه ۹۵ خارج)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 2 \\ -1 & \alpha-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

شرط وارون پذیری  $\rightarrow$  دترمینان  $\neq 0 \rightarrow (\alpha+1)(\alpha-1) - (2 \times -1) \neq 0$

$$\rightarrow \alpha^2 - 1 + 2 \neq 0 \rightarrow \alpha^2 + 1 \neq 0 \rightarrow \text{بدیهی. یعنی همواره جواب دارد.}$$

۹۴ خارج تجربی (مشابه ۹۵)

نکته: معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$(A \times B)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{2-0} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}$$

۹۳ خارج تجربی (مشابه ۹۵)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A \text{ وارون ماتریس } = (B \times A)^{-1} = \frac{1}{-10-0} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/10 & -9/10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول} = a_{11} = -\frac{1}{10} = -0.1$$

۹۱ تجربی (مشابه ۹۴)

ابتدا ماتریس X را به دست می‌آوریم:

$$X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{2 \times 2 - (-1) \times (-3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۸۶ خارج تجربی (مشابه ۹۱ خارج)

$$AX = 2I \rightarrow X = 2A^{-1}I = 2A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2 \times 3) - (-1 \times 4)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A^{-1} = 2 \left( \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

۸۷ خارج تجربی (مشابه ۸۷)

$$(2A) \cdot (3A^{-1}) = (2 \times 3)(A \times A^{-1}) = 6I$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 6I = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{دترمینان } ad - bc = (6 \times 6) - (0 \times 0) = 36$$

## تست های مشابه و تالیفی

1- اگر  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  آنگاه درایه موجود در سطر و ستون دوم ماتریس  $X^{-1}$  کدام است؟ (پاسخ = -0.4)

2- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$  آنگاه دترمینان ماتریس معکوس  $A^2$  کدام است؟ (پاسخ = 1)

3- اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  وارون ناپذیر باشد، دترمینان ماتریس  $A + I$  کدام است؟ (پاسخ = 6)

4- اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^2 - A$  کدام است؟ (پاسخ = I) ماتریس واحد)

## شاه ابراهیمی - تابستان ۹۵

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Tel : 0919 54 14 862

هرگونه کپی برداری با ذکر منبع بلامانع است .