تمرینات فصل سوم کتاب Chi-Tsong chen

(تمرینات ۵ ، ۸ ، ۱۳، ۱۸ ، ۲۱ ، ۳۱ ، ۳٤)

۵- مرتبه و پوچی ماتریس های زیر را به دست آورید :

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A_۲ = \begin{bmatrix} ٤ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad A_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ \\ ۰ & -۱ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل :

Rank ($A_۱$) = ۳ (تعداد ستون های مستقل)

N ($A_۱$) = $n_{A۱}$ - Rank ($A_۱$) = ۰

Rank ($A_۲$) = ۳ (تعداد ستون های مستقل)

N ($A_۲$) = $n_{A۲}$ - Rank ($A_۲$) = ۰

Rank ($A_۳$) = ۳ (تعداد ستون های مستقل)

N ($A_۳$) = $n_{A۳}$ - Rank ($A_۳$) = ۱

۸- جواب عمومی معادله ی زیر را یافته و تعیین نمایید که چند پارامتر موجود است .

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ \\ ۰ & -۱ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

حل :

N (A) = n - Rank (A) = ٤- ۳ = ۱ (بنابراین ما ۱ پارامتر بیشتر نخواهیم داشت)

ماتریس افزوده ی معادله ی فوق به صورت زیر می باشد :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \quad ☞ \quad \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \quad ☞ \quad x_٤ = ۱ \quad ، \quad x_۳ = c_۱$$

$$\begin{cases} x_۲ + ۲x_۳ = ۰ & ☞ \quad x_۲ = -۲c_۱ \\ x_۱ - x_۳ = -۱ & ☞ \quad x_۱ = c_۱ - ۱ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_٤ \end{bmatrix} = c_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱۳- ماتریس های زیر را به فرم جردن بنویسید (توجه : همه ی ماتریس ها به جز ماتریس $A_٤$ قابل تبدیل به فرم قطری می باشند)

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ٤ & ۱۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \qquad A_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۲ & -٤ & -۳ \end{bmatrix} \qquad A_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A_٤ = \begin{bmatrix} ۰ & ٤ & ۳ \\ ۰ & ۲۰ & ۱٦ \\ ۰ & -۲۵ & -۲۰ \end{bmatrix}$$

حل :

$$\lambda I - A_۱ = \begin{bmatrix} \lambda - ۱ & -٤ & -۱۰ \\ ۰ & \lambda - ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda - ۳ \end{bmatrix} \quad ☞ \quad \det(\lambda I - A_۱) = (\lambda - ۱)(\lambda - ۲)(\lambda - ۳) = ۰$$

$$\lambda_۱ = ۱ \qquad \lambda_۲ = ۲ \qquad \lambda_۳ = ۳$$

چون در این مورد ما ریشه ی تکراری نداریم در اصل همان فرم قطری بدست می آید .

$$\widehat{A_۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_۲) = (\lambda + ۱)(\lambda^۲ + ۲\lambda + ۲) = ۰$$

$$\lambda_۱ = -۱ \qquad \lambda_۲ = -۱ \pm j$$

در اینجا فرم جردن نداشته و فرم قطری – بلوکی داریم .

$$\widehat{A_۲} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A_۳) = (\lambda - ۱)^۲(\lambda - ۲) = ۰$

$\lambda_۱ = ۱$ (۲ تکرار) $\qquad \lambda_۲ = ۲$

$\alpha = n_{A۳} - Rank\,(\lambda I - A_۳) = ۳ - ۱ = ۲$

$$\widehat{A_۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \widehat{A_۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A_٤) = \lambda(\lambda^۲ - ٤۰۰) + ٤۰۰\lambda = ۰ \quad ☞ \quad \lambda^۳ = ۰$

$\lambda_۱ = ۰$ (۳ تکرار)

$\alpha = n_{A٤} - Rank\,(\lambda I - A_٤) = ۳ - ۲ = ۱$

$$\widehat{A_٤} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۸- چند جمله ای های مشخصه و چند جمله ای های مینیمال ماتریس های زیر را پیدا نمایید .

$$A_۱ = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda_۲ \end{bmatrix} \qquad A_۲ = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda_۱ \end{bmatrix}$$

$$A_۳ = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda_۲ \end{bmatrix} \qquad A_٤ = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda_۱ \end{bmatrix}$$

حل :

$$\psi(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i)^{\overline{n_i}}$$

که در فرمول فوق $\overline{n_i}$ درجه ی بزرگترین بلوک جردن متناظر با λ_i می باشد .

برای A_1

$$\Delta_1(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) = (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2)$$

$\alpha = n_{A_1} - Rank\ (\lambda_1 I - A_1) = 4 - 3 = 1$ (تعداد بلوک های جردن متناظر با λ_1)

درجه ی بزرگترین بلوک جردن متناظر با λ_1 برابر ۳ می باشد . بنابراین داریم :

$$\psi_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2)$$

برای A_2

$$\Delta_2(\lambda) = \det(\lambda I - A_2) = (\lambda - \lambda_1)^4$$

$\alpha = n_{A_2} - Rank\ (\lambda_1 I - A_2) = 4 - 2 = 2$ (تعداد بلوک های جردن متناظر با λ_1)

درجه ی بزرگترین بلوک جردن متناظر با λ_1 برابر ۳ می باشد . بنابراین داریم :

$$\psi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$$

برای A_3

$$\Delta_3(\lambda) = \det(\lambda I - A_3) = (\lambda - \lambda_1)^4$$

$\alpha = n_{A_3} - Rank\ (\lambda_1 I - A_3) = 4 - 1 = 3$ (تعداد بلوک های جردن متناظر با λ_1)

درجه ی بزرگترین بلوک جردن متناظر با λ_1 برابر ۲ می باشد . بنابراین داریم :

$$\psi_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$$

برای A_4

$$\Delta_4(\lambda) = \det(\lambda I - A_4) = (\lambda - \lambda_1)^4$$

$\alpha = n_{A_3} - Rank\ (\lambda_1 I - A_3) = 4 - 0 = 4$ (تعداد بلوک های جردن متناظر با λ_1)

درجه ی بزرگترین بلوک جردن متناظر با λ_1 برابر ۱ می باشد . بنابراین داریم :

$$\psi_4(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)$$

نکته : منظور از بزرگترین بلوک جردن ، بزرگترین بلوک جردن با توجه به تعداد بلوک های جردن در فرم جردن ماتریس می باشد .

۲۱- ماتریس A به صورت زیر داده شده است . عبارات زیر را به دست آورید .

$A^{۱۰} = ?$ $\qquad$ $A^{۱۰۳} = ?$ $\qquad$ $e^{At} = ?$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل :

$f(\lambda) = \lambda^{۱۰}$ ، $f(\lambda) = \lambda^{۱۰۳}$ ، $f(\lambda) = e^{\lambda t}$

$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda\,(\lambda - ۱)^{۲}$

$h(\lambda) = \beta_{۰} + \beta_{۱}\lambda + \beta_{۲}\lambda^{۲}$

برای $f(\lambda) = \lambda^{۱۰}$ داریم :

$f(۱) = h(۱)$ ☞ $\beta_{۰} + \beta_{۱} + \beta_{۲} = ۱$

$f'(۱) = h'(۱)$ ☞ $\beta_{۱} + ۲\beta_{۲} = ۱۰$ ☞ $\beta_{۱} = -۸$ $\quad$ $\beta_{۲} = ۹$

$f(۰) = h(۰)$ ☞ $\beta_{۰} = ۰$

$h(\lambda) = ۹\lambda^{۲} - ۸\lambda$

با جایگذاری ماتریس A در $h(\lambda)$ ، $A^{۱۰}$ به صورت زیر به دست می آید :

$$A^{۱۰} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای $f(\lambda) = \lambda^{۱۰۳}$ داریم :

$f(۱) = h(۱)$ ☞ $\beta_{۰} + \beta_{۱} + \beta_{۲} = ۱$

$f'(۱) = h'(۱)$ ☞ $\beta_{۱} + ۲\beta_{۲} = ۱۰۳$ ☞ $\beta_{۱} = -۱۰۱$ $\quad$ $\beta_{۲} = ۱۰۲$

$f(۰) = h(۰)$ ☞ $\beta_{۰} = ۰$

$h(\lambda) = ۱۰۲\lambda^{۲} - ۱۰۱\lambda$

با جایگذاری ماتریس A در $h(\lambda)$ ، $A^{۱۰۳}$ به صورت زیر به دست می آید :

$$A^{۱۰۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱۰۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ داریم :

$$\beta_۰ + \beta_۱ + \beta_۲ = e^t$$

$$\beta_۱ + ۲\beta_۲ = e^t \qquad ☞ \qquad \beta_۱ = e^t - ۲ \qquad \beta_۲ = ۱$$

$$\beta_۰ = ۱$$

$$h(\lambda) = \lambda^۲ + (e^t - ۲)\,\lambda + ۱$$

با جایگذاری ماتریس A در $h(\lambda)$، e^{At} به صورت زیر به دست می آید :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & e^t - ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & e^t - ۱ \\ ۰ & ۰ & e^t \end{bmatrix}$$

۳۱- در مثال زیر M را طوری بیابید که معادله ی لیانپونف را ارضا نماید .

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} \qquad B = ۳ \qquad C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

حل :

$$AM + MB = C \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_۱ \\ m_۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_۱ \\ m_۲ \end{bmatrix}۳ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} m_۲ + ۳m_۱ \\ m_۲ - ۲m_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

در نهایت داریم :

$$m_۱ = ۰ \quad ، \quad m_۲ = ۳ \qquad \Longrightarrow \qquad M = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

سوال) آیا معادله ی لیاپونف تکین می باشد ؟

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^۲ + ۲\lambda + ۲ = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -۱ \pm j$$

$$\det(\mu I - B) = \mu - ۳ = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \mu = ۳$$

$\eta_k = \lambda_i + \mu_j$ (مقادیر ویژه ماتریس $\mathcal{A}(M)$)

در این مساله معادله ی لیانپوف تکین نمی باشد زیرا همانطور که ملاحظه می شود هیچ i و j ای یافت نمی شود که $\lambda_i + \mu_j = ۰$ شود .

۳٤- مقادیر تکین ماتریس های زیر را پیدا نمایید .

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ٤ \end{bmatrix}$$

حل : برای A داریم

$$M_۱ = A^T A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -۲ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - ٥)(\lambda - ۱)^۲ - (\lambda - ۱) - ٤(\lambda - ۱) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - ۱)(\lambda - ٦) = ۰$$

$$\lambda_۱ = ۰ \qquad \lambda_۲ = ۱ \qquad \lambda_۳ = ٦$$

مقادیر تکین ماتریس A برابر است با :

$$s_۱ = ۰ \qquad s_۲ = ۱ \qquad s_۳ = \sqrt{٦}$$

برای B داریم :

$$M_۲ = B^T B = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٦ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^۲ - ۲٥\lambda + ٦٤ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda_۱ = ۲/۸۹٥۳ \qquad \lambda_۲ = ۲۲/۱۰٤۷$$

مقادیر تکین ماتریس B برابر است با :

$$s_۱ = ۱/۷۰۲ \qquad s_۲ = ٤/۷۰۲$$

تمرینات فصل چهارم کتاب Chi-Tsong chen

مسائل (۱،۲)

۱- یک نوسان می تواند توسط معادله ی زیر تولید شود :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} X$$

نشان دهید که پاسخ آن به صورت زیر می باشد :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} X(۰)$$

حل :

چنانچه ما ماتریس معادله ی نوسان را A فرض نماییم . داریم :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^{۲} + ۱ = ۰ \qquad \Longrightarrow \quad \lambda_{۱} = j \quad ، \quad \lambda_{۲} = -j$$

$$h(\lambda) = \beta_{۰} + \beta_{۱}\lambda \qquad \& \qquad f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} \beta_{۰} + \beta_{۱} j = e^{jt} \\ \beta_{۰} - \beta_{۱} j = e^{-jt} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \beta_{۰} = \dfrac{e^{jt} + e^{-jt}}{۲} = \cos t \\ \beta_{۱} = \sin t \end{cases}$$

حال اگر ماتریس A را در معادله ی $h(\lambda) = \beta_{۰} + \beta_{۱}\lambda$ قرار دهیم ماتریس انتقال حالت بدست می آید :

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

چنانچه ماتریس انتقال حالت را در معادله ی $X(t) = \varphi(t)X(۰)$ قرار دهیم معادله ی مورد نظر بدست می آید .

۲- برای بدست آوردن پاسخ پله واحد معادله ی زیر از دو روش استفاده کنید .

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \end{bmatrix} X$$

حل :

روش ۱

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = ۰ \qquad \Rightarrow \quad (\lambda + ۱)^{۲} + ۱ = ۰$$

$$\lambda_{۱} = -۱ - j \quad ، \quad \lambda_{۲} = -۱ + j$$

$$\begin{cases} h(\lambda) = \beta_{۰} + \beta_{۱}\lambda \qquad \& \qquad f(\lambda) = e^{\lambda t} \\ \beta_{۰} - \beta_{۱} - \beta_{۱} j = e^{-t}\, e^{-jt} = (e^{-t}\cos t) - j(e^{-t}\sin t) \end{cases}$$

$$\beta_{۰} - \beta_{۱} + \beta_{۱} j = e^{-t}\, e^{jt} = (e^{-t}\cos t) + j(e^{-t}\sin t)$$

$$\beta_{۰} = e^{-t}(\sin t + \cos t) \qquad \beta_{۱} = e^{-t}\sin t$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(\sin t + \cos t) & e^{-t}\sin t \\ -۲e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \int_{۰}^{t} \varphi(t-\tau) \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} - \frac{e^{-t}}{۲}(۳\cos t + \sin t) \\ -۱ + e^{-t}(\cos t + ۲\sin t) \end{bmatrix}$$

روش ۲ : تبدیل لاپلاس

$$s\,X(s) - X(۰) = A\,X(s) + B\,u(s)$$

$$[sI - A]\,X(s) = B\,u(s)$$

$$\begin{bmatrix} s & -۱ \\ ۲ & s+۲ \end{bmatrix} X(s) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \frac{۱}{s} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{s} \\ \frac{۱}{s} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad X(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+۲ & ۱ \\ -۲ & s \end{bmatrix}}{(s+۱)^{۲}+۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{s} \\ \frac{۱}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{١}{(s+١)^{٢}+١} + \dfrac{٣}{s(\,(s+١)^{٢}+١\,)} \\ \dfrac{١}{(s+١)^{٢}+١} - \dfrac{٢}{s(\,(s+١)^{٢}+١\,)} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-١}\big(X(s)\big) = \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t + ٣\displaystyle\int_{٠}^{t} e^{-t}\sin t\ dt \\ e^{-t}\sin t - ٢\displaystyle\int_{٠}^{t} e^{-t}\sin t\ dt \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{٣}{٢} - \dfrac{e^{-t}}{٢}(\,٣\cos t + \sin t\,) \\ -١ + e^{-t}(\,\cos t + ٢\sin t\,) \end{bmatrix}$$