به‌نام خدا

تمرین عید ۹۴ جبر:

۱. a,b,c طول اضلاع یک مثلثند. ثابت کنید

$$\sum_{\text{دوری}}(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a} \geq 4(a+b+c)\sqrt{\prod_{\text{دوری}}(a+b-c)}$$

۲.a,b,c اعداد حقیقی مثبتند. ثابت کنید

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(a+c)^2}{b^2+ac}+\frac{(b+a)^2}{c^2+ba} \geq 6$$

۳.x,y,z,t اعداد حقیقی مثبتند بطوری که $xyzt=1$ ثابت کنید

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2} \geq 1$$

۴.a,b,c اعداد حقیقی مثبتند. ثابت کنید

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2(a^4+b^4+c^4)}{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)} \geq 2$$

۵.$a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید

$$\sum_{\text{دوری}}\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

۶. برای اعداد حقیقی و مثبت a,b,c,p با شرط $0 \leq p \leq \frac{3}{2}$ ثابت کنید

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{pa^2+bc}}+\frac{b^2-ac}{\sqrt{pb^2+ac}}+\frac{c^2-ba}{\sqrt{pc^2+ba}} \geq 0$$

۷. فرض کنید a,b,c و x,y,z اعداد حقیقی و نامنفی باشند بطوری که

$$a+b+c=x+y+z$$

ثابت کنید

$$ax(a+x)+by(b+y)+cz(c+z) \geq 3(abc+xyz)$$

۸. برای اعداد حقیقی و نامنفی a, b, c می‌دانیم $ab+bc+ca=3$ نشان دهید

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} \leq 1$$

۹. برای اعداد حقیقی و مثبت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ داریم $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ ثابت کنید

$$\frac{1}{1+(n-1)a_1}+\frac{1}{1+(n-1)a_2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)a_n} \geq 1$$

۱۰. می‌دانیم می‌توان عبارت $a^{2005}+b^{2005}$ را بر حسب چندجمله‌ای با متغیرهای $a+b$ و ab بیان کرد. مجموع ضرایب این چندجمله‌ای را بیابید.

۱۱. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ تکین و از درجه دو باشد. ثابت کنید اگر برای بی‌نهایت مقدار صحیح n مقدار $P(n)$ مربع کامل شود، آنگاه نشان دهید چندجمله‌ای مانند $Q(x) \in \mathbb{Z}[X]$ وجود دارد بطوری که داشته باشیم

$$P(x) = (Q(x))^2$$

۱۲. ثابت کنید هر چندجمله‌ای از درجه چهار را می‌توان به فرم $P\big(Q(x)\big)+R(S(x))$ نمایش داد که در آن چندجمله‌ای‌های $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ از درجه ۲ می‌باشند.

۱۳. چندجمله‌ای $P(x)=(x^2-7x+6)^{2n}+13$ مفروض است که در آن n عددی طبیعی می‌باشد. ثابت کنید $P(x)$ را نمی‌توان به صورت حاصلضرب $n+1$ چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب صحیح نوشت.

۱۴.فرض کنید F, G, H چندجمله‌ای‌هایی با درجه حداکثر $2n+1$ و ضرایب حقیقی باشند بطوری که

۱) برای تمام اعداد حقیقی x داریم : $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$

۲) برای اعداد حقیقی و متمایز $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داریم : $F(x_i) = H(x_i)$ برای $i = 1,2,\ldots,n$

۳) عددی حقیقی و متمایز از اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مانند x_0 وجود دارد بطوری که : $F(x_0)+H(x_0)=2G(x_0)$

ثابت کنید برای هر x حقیقی داریم $F(x)+H(x)=2G(x)$

۱۵. ثابت کنید هیچ چندجمله‌ای مانند $P(x) \in \mathbb{C}[X]$ وجود ندارد بطوری که مجموعه نقاط $\{P(z)| \quad |z|=1\}$ در صفحه اعداد مختلط، تشکیل یک n ضلعی دهد.

۱۶. برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ می‌دانیم

$$f(x^2+x+3)+2f(x^2-3x+5)=6x^2-10x+17$$

مقدار $f(2009)$ را بیابید.

۱۷. تمام توابع یک به یک $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید بطوری که به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم

$$f(f(n))\leq\frac{n+f(n)}{2}$$

۱۸. k عددی طبیعی و ثابت است. تمام توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که داشته باشیم

$$f(f(n)+m)=n+f(m+k)$$

۱۹. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید بطوری که داشته باشیم

$$f((f(x))^2+f(y))=y+xf(x)$$

۲۰. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید بطوری که برای هر x,y حقیقی داشته باشیم

$$f\big(2x-f(y)\big)=\frac{f(x)+3x-2f(y)}{2}$$

۲۱. تمام توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را بیابید بطوری که برای هر x,y طبیعی داشته باشیم

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

- ✓ سوال فوق را برای حالت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نیز بررسی کنید.

۲۲. دستگاه معادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید

$$x(y+z-x^3)=y(x+z-y^3)=z(x+y-z^3)=1$$

موفق باشید

سال نو مبارک

محمد احمدی