بسمه تعالی

سؤالات امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده ریاضی

نیم سال اول ۹۷-۱۳۹۶	تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۰۸/۲۹	مدت زمان امتحان: ۹۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	تعداد صفحات: ۱

تذکر مهم:

- هر سؤال را در یک صفحهٔ مجزای دفترچه امتحانی پاسخ دهید.
- حتماً نام و نام خانوادگی، شماره دانشجویی، رشته تحصیلی و نام استاد درس، در دفترچه امتحانی درج شود.

سؤال اول. فرض کنید $z=-1+i\sqrt{3}$. مقدار $z^n+\bar{z}^n$ را محاسبه کنید. (۱۲ نمره)

سؤال دوم. قضیهٔ رُل را بیان و آن را ثابت کنید. (۱۲ نمره)

سؤال سوم. اگر $x>0$ و $0<p\le 1$، نامساوی زیر را ثابت کنید: (۱۲ نمره)

$$(1+x)^p \le 1+px.$$

سؤال چهارم. فرض کنید $a<b<c$. نشان دهید معادلهٔ

$$f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-b}+\frac{3}{x-c}=0$$

دارای حداقل دو ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $[a,c]$ است. (۱۲ نمره)

سؤال پنجم. فقط به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید. (۱۲ نمره)

۱) بدون استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x+\frac{4}{3}x^3}{x\cos(x)-x+\frac{x^3}{2}}$$

۲) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin(2x))^{\tan(2x)}$$

با آرزوی موفقیت

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad \bar{z} = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$ ۱-

$$z^n + \bar{z}^n = 2^n e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 2^n e^{-i\frac{2\pi}{3}n} = 2^n\left(e^{i\frac{2\pi}{3}n} + e^{-i\frac{2\pi}{3}n}\right)$$

$$= 2^n\left(\cos\frac{2\pi}{3}n + i\sin\frac{2\pi}{3}n + \cos\frac{-2\pi}{3}n + i\sin\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$\longrightarrow 2^n\left(\cos\frac{2\pi}{3}n + i\sin\frac{2\pi}{3}n + \cos\frac{2\pi}{3}n - i\sin\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$= 2^n\left(2\cos\frac{2\pi}{3}n\right) = 2^{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$$

۲- قضیه رل : اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(b)=f(a)$ آن‌گاه نشان ، $\exists c\ ;\ f'(c)=0$

اثبات : اگر $f(x)=k$ آن‌گاه تابع ثابت است ، مشتق آن در تمامی نقاط صفر است.

اگر $f(x)\neq k$ آن‌گاه به ازای برخی مقادیر x ، $f(x)>f(a)$ و تابع دارای max مطلق در این بازه است و چون $f(x)>f(a)=f(b)$ پس نقطه Max درون بازه است و بنابه قضیه اکسترمم‌ها ، مشتق نقطه اکسترمم در تابع پیوسته صفر است. پس نقطه c همان اکسترمم است . استدلال مشابه برای حالت $f(x)<f(a)$ داریم. پس هم

$\exists c\ ;\ f'(c)=0$

۳- $f(x)=(1+x)^p-1-px \qquad [0,x]$

$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-p=p\left((1+x)^{p-1}-1\right)\leq 0$

$\Rightarrow f'(x)\leq 0$

بنابه قضیه مقدار میانی : $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{(1+x)^p-1-px}{x}$

$f'(c)\leq 0 \rightarrow \dfrac{(1+x)^p-1-px}{x}\leq 0 \xrightarrow{x>0} (1+x)^p-1-px\leq 0$

$\Rightarrow (1+x)^p\leq 1+px$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x+\frac{4}{3}x^3}{x\cos x-x+\frac{x^3}{2}}=\frac{0}{0}$$ ۱_۵

بسط تیلور $\longrightarrow \underset{x_0=0}{\sin x} \simeq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$

طبق بسط تیلور $\longrightarrow \underset{x_0=0}{\cos x} \simeq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x+\frac{4}{3}x^3}{x\cos x-x+\frac{x^3}{2}}=\dots$$

$$\simeq \lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{8x^3}{6}+\frac{32x^5}{120}-2x+\frac{4}{3}x^3}{x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-x+\frac{x^3}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{32x^5}{120}}{\frac{x^5}{24}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{24\times 32}{120}=6{,}4$$

سپاس ویژه از فرزام کریمی

math-teacher.blog.ir

۲-۵

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\tan 2x} = 1^{\infty}$$: مبهم

$$\rightarrow \lim_{x\to \pi/4} (\sin 2x)^{\tan 2x} = A \rightarrow \ln \lim_{x\to \pi/4} (\sin 2x)^{\tan 2x} = \ln A$$

$$\rightarrow \lim_{x\to \pi/4} \tan 2x \ \ln \sin 2x = \ln A \rightarrow \lim_{x\to \pi/4} \frac{\ln \sin 2x}{\cot 2x} = \ln A$$

$$\xrightarrow{Hop.} \lim_{x\to \pi/4} \frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{-2(1+\cot^2 2x)} = 0 \rightarrow \ln A = 0 \rightarrow A = 1$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی