قلم را آن زبان نبود که سرّ عشق گوید باز
ورای حد تقریر است شرح آرزومندی
درین بازار اگر سودی ست با درویش خرسند است
خدایا منعمم گردان به درویشی و خرسندی

فصل اول: تانسور تنش

Tension Tensor

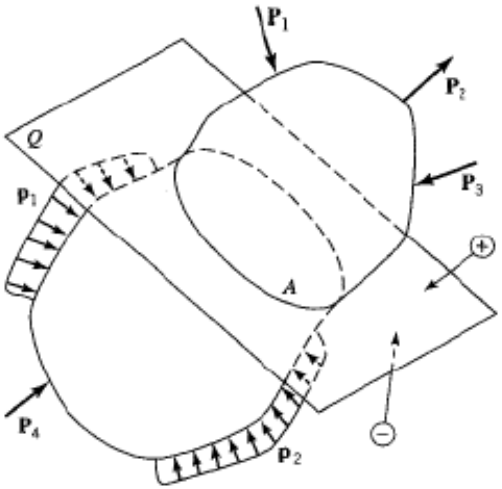
اکبر اقبالی

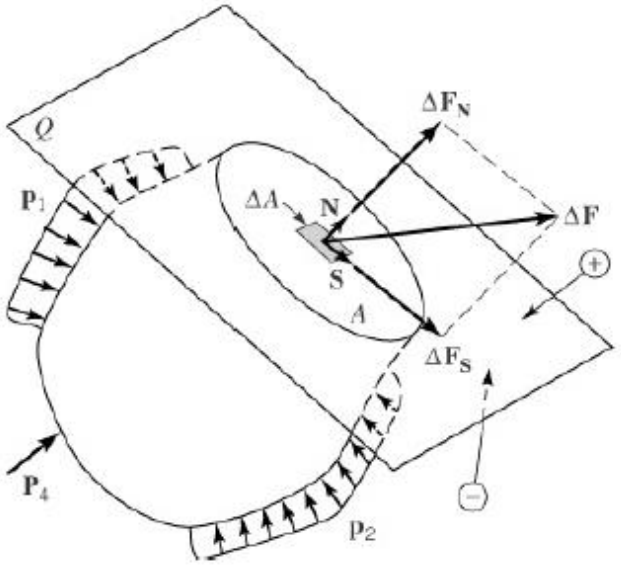
WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1392

تحلیل تنش

- تنش در یک سمت صفحه مثبت و در سمت دیگر منفی است
- المان صفحه ای را بصورت dA در نظر می گیریم
- تنش ها را به دو مولفه نرمال و مماس بر صفحه تجزیه می کنیم





$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_N^2 + \Delta F_S^2}$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

تحلیل تنش

- تنش با فرض بسیار کوچک بودن صفحه تعریف می شود

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \qquad \vec{\sigma_N} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F_N}}{\Delta A} \qquad \vec{\sigma_S} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F_S}}{\Delta A}$$

- جنس تنش از نیرو در واحد سطح
- تنش در هر نقطه با دو مشخصه تعریف می شود: صفحه و جهت
- در هر نقطه می توان بی نهایت تنش تعریف کرد

- در فضا سه راستای مستقل وجود دارد
- در هر نقطه با داشتن تنش در سه راستا، وضعیت تنش مشخص می شود

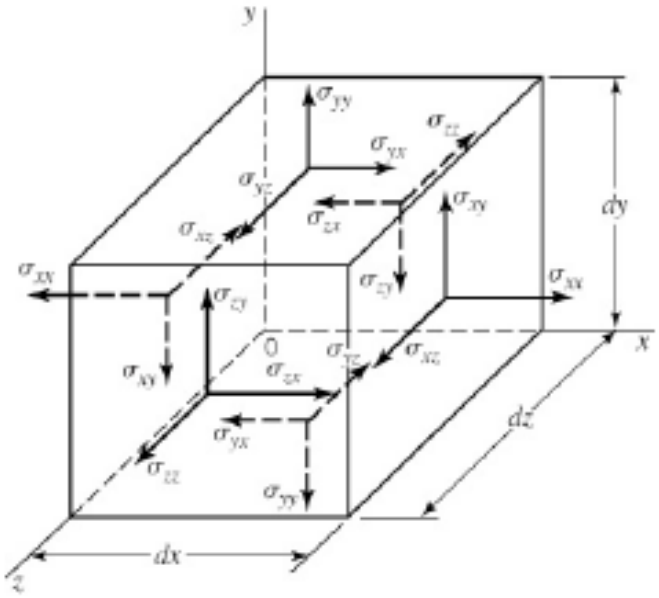
تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

تانسور تنش

- دیاگرام آزاد یک المان با ابعاد کوچک dx، dy و dz را فرض می کنیم
- هر صفحه با بردار نرمال مشخص می شود که تعیین کننده آن است
- دو نوع نیرو به جسم وارد می شود:

۱) نیروهای سطحی Surface Forces

۲) نیروهای حجمی Body Forces



- زیرنویس اول تنش بیانگر نرمال صفحه می باشد
- زیرنویس دوم تنش بیانگر راستای تنش می باشد
- علامت تنش: ضرب علامت صفحه در علامت راستای تنش

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

تانسور تنش

$$\overrightarrow{\sigma_{xx}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_x}}{\Delta A} \qquad \overrightarrow{\sigma_{xy}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_y}}{\Delta A} \qquad \overrightarrow{\sigma_{xz}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_z}}{\Delta A}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{yx}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_x}}{\Delta A} \qquad \overrightarrow{\sigma_{yy}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_y}}{\Delta A} \qquad \overrightarrow{\sigma_{yz}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_z}}{\Delta A}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{zx}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_x}}{\Delta A} \qquad \overrightarrow{\sigma_{zy}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_y}}{\Delta A} \qquad \overrightarrow{\sigma_{zz}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_z}}{\Delta A}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

انواع کمیت ها و خواص تانسور تنش

- تانسور مرتبه صفر (اسکالر): دارای یک (3^0) متغیر مستقل است
- تانسور مرتبه یک (بردار): دارای سه (3^1) متغیر مستقل است
- تانسور مرتبه دو: دارای نه (3^2) متغیر مستقل است
- تانسور مرتبه n اُم: دارای (3^n) متغیر مستقل است

- تانسور تنش برای یک نقطه از جسم ارائه می شود
- عناصر قطر اصلی تانسور تنش، مولفه های قائم یا نرمال تنش هستند
- سایر عناصر تانسور تنش، مولفه های مماسی یا برشی تنش هستند
- تانسور مفهومی از جنس ریاضی است برای بیان مفهوم تنش فیزیکی
- تانسور تنش متقارن است

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \sigma_{yz}\,dxdydz - \sigma_{zy}\,dxdydz = 0 \Rightarrow \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \sigma_{zx}\,dxdydz - \sigma_{xz}\,dxdydz = 0 \Rightarrow \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$$

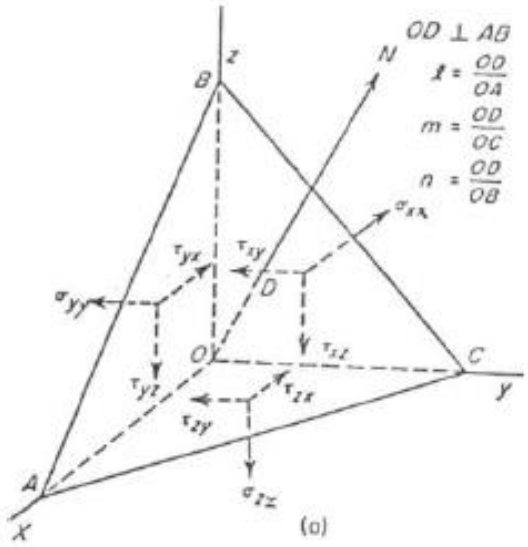
$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \sigma_{yx}\,dxdydz - \sigma_{xy}\,dxdydz = 0 \Rightarrow \sigma_{yx} = \sigma_{xy}$$

مولفه های تنش درصفحه اختیاری

- مولفه های تنش در هر صفحه عبارتند از:

$$\begin{cases} \vec{T_x} = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k} \\ \vec{T_y} = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k} \\ \vec{T_z} = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k} \end{cases}$$

- برای هر صفحه دلخواه با بردار نرمال غیر واقع در سه راستای اصلی خواهیم داشت:



$$\begin{cases} n_x = OD/OA \\ n_y = OD/OB \\ n_z = OD/OC \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{OBC} = n_x dA \\ S_{OAB} = n_y dA \\ S_{OAC} = n_z dA \end{cases}$$

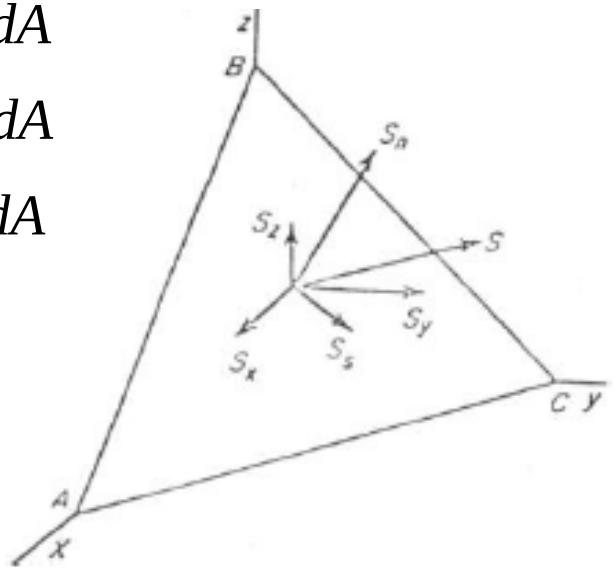
تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

مولفه های تنش درصفحه اختیاری

- مولفه های تنش را می توان هم در سه راستای اصلی و هم به دو مولفه نرمال و مماسی تجزیه کرد.
- برای معادله تعادل در سه راستای اصلی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_x dA = \sigma_{xx} n_x dA + \sigma_{yx} n_y dA + \sigma_{zx} n_z dA \\ S_y dA = \sigma_{xy} n_x dA + \sigma_{yy} n_y dA + \sigma_{zy} n_z dA \\ S_z dA = \sigma_{xz} n_x dA + \sigma_{yz} n_y dA + \sigma_{zz} n_z dA \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} S_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ S_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ S_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases}$$



- شکل اندیسی معادلات فوق عبارتست از:

$$S_i = n_j \sigma_{ji}$$

مولفه های تنش درصفحه اختیاری

- در نهایت بردار تنش در صفحه مورد نظر برابر است با:

$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$$

- حال برای محاسبه تنش نرمال و مماسی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_N = \vec{N} . \vec{S} \rightarrow \vec{S}_N = S_N \left(n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \right) \\ \vec{S}_s = \vec{S} - \vec{S}_N \rightarrow S_s = \sqrt{S^2 - S_N^2} \end{cases}$$

$$S_N = n_i n_j \sigma_{ij}$$

- حال اگر تنش برشی صفرباشد و تنش کلی برابر با تنش نرمال باشد، تنش مورد نظر، تنش اصلی خواهد بود.

مولفه های تنش درصفحه اختیاری

- برای زمانی که تنش کلی برابر با تنش نرمال باشد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_x = n_x S\,, & S_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ S_y = n_y S\,, & S_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ S_z = n_z S\,, & S_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\sigma_{xx} - S) n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z = 0 \\ \sigma_{xy} n_x + (\sigma_{yy} - S) n_y + \sigma_{zy} n_z = 0 \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + (\sigma_{zz} - S) n_z = 0 \end{cases}$$

- شکل اندیسی عبارتست از:

$$n_i \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} S \right) = 0$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

مولفه های تنش درصفحه اختیاری

- جواب معادلات فوق را م توان از دترمینان معادل زیر نیز محاسبه کرد:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - S) & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - S) & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - S) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij} S\right| = 0$$

- ازمحاسبه دترمینان فوق، یک معادله درجه سه با خصوصیات زیر حاصل می گردد:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) - (\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{13}\sigma_{31}) \\ I_3 = \left|\sigma_{ij}\right| \end{cases}$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

مولفه های تنش درصفحه اختیاری

- سه حالت برای حل معادله فوق وجود دارد:

۱. اگر معادله سه جواب متمایز داشته باشد، سه تنش اصلی و سه راستای مشخص خواهیم داشت.

۲. اگر معادله دو جواب متمایز داشته باشد، یک راستای مشخص خواهیم داشت و تنش های تکراری می توانند در هر دو راستای عمود برهم و عمود بر راستای اول قرار داشته باشند.

۳. اگر معادله یک جواب متمایز داشته باشد، سه تنش اصلی می توانند در هر سه راستای عمود بر هم دلخواه قرار داشته باشند (تنش هیدرواستاتیک).

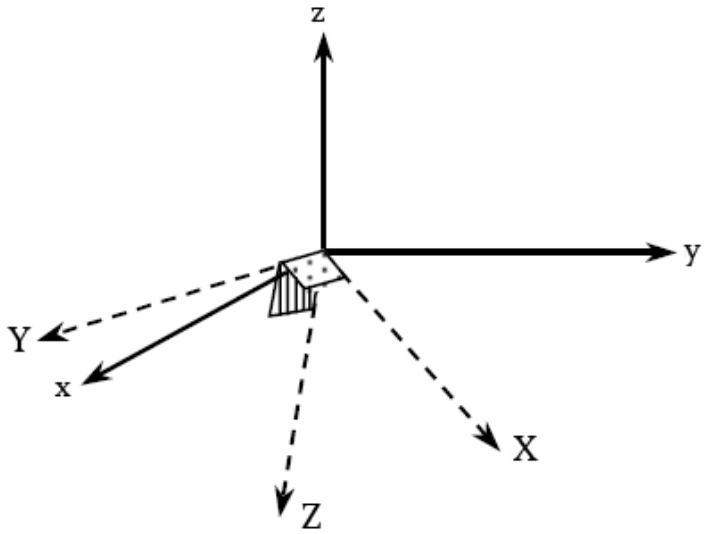
- راستای هر تنش اصلی بدست آمده (مانند σ_1) از حل معادلات زیر محاسبه می شود:

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{xx}-\sigma_1) & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy}-\sigma_1) & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz}-\sigma_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{\sigma}_1 = \sigma_1 \left(n_{x1}\vec{i} + n_{y1}\vec{j} + n_{z1}\vec{k} \right)$$

Transformation of Stress تبدیل تنش

- مختصات (x,y,z) برای قبل از چرخش محورها و مختصات (X,Y,Z) برای بعد از چرخش می باشد.
- کسینوس زوایای بین محورها را بصورت زیر در نظر می گیریم:



$$R = \begin{pmatrix} n_{Xx} = Cos(X,x) & n_{Xy} = Cos(X,y) & n_{Xz} = Cos(X,z) \\ n_{Yx} = Cos(Y,x) & n_{Yy} = Cos(Y,y) & n_{Yz} = Cos(Y,z) \\ n_{Zx} = Cos(Z,x) & n_{Zy} = Cos(Z,y) & n_{Zz} = Cos(Z,z) \end{pmatrix}$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

Transformation of Stress تبدیل تنش

- با توجه به ماتریس کسینوس های هادی، اگر σ' تنش در مختصات (X,Y,Z) و σ تنش در مختصات (x,y,z) باشد، رابطه میان آنها عبارتست از:

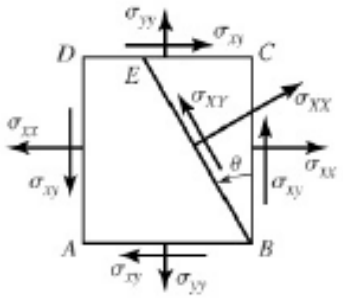
$$\sigma' = R.\sigma.R^T$$

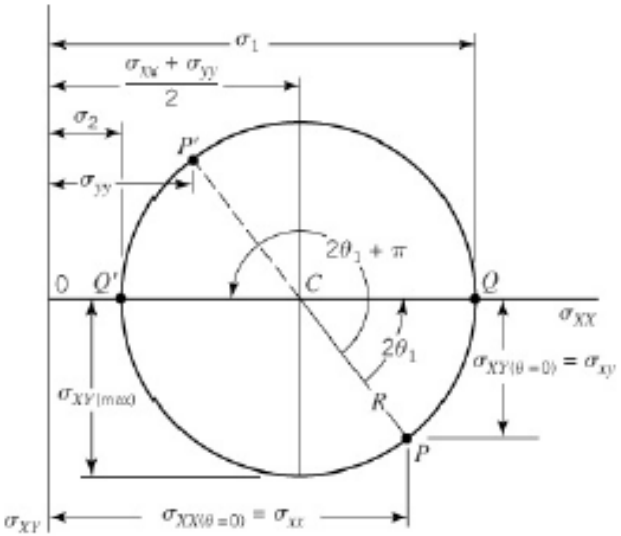
$$\begin{pmatrix} \sigma'_{XX} & \sigma'_{YX} & \sigma'_{ZX} \\ \sigma'_{XY} & \sigma'_{YY} & \sigma'_{ZY} \\ \sigma'_{XZ} & \sigma'_{YZ} & \sigma'_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_{Xx} & n_{Xy} & n_{Xz} \\ n_{Yx} & n_{Yy} & n_{Yz} \\ n_{Zx} & n_{Zy} & n_{Zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{Xx} & n_{Yx} & n_{Zx} \\ n_{Xy} & n_{Yy} & n_{Yz} \\ n_{Xz} & n_{Yz} & n_{Zz} \end{pmatrix}$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

دایره موهر دو بعدی





یاداوری :

دایره مور دو بعدی بعدی

Center $\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right),0\right]$

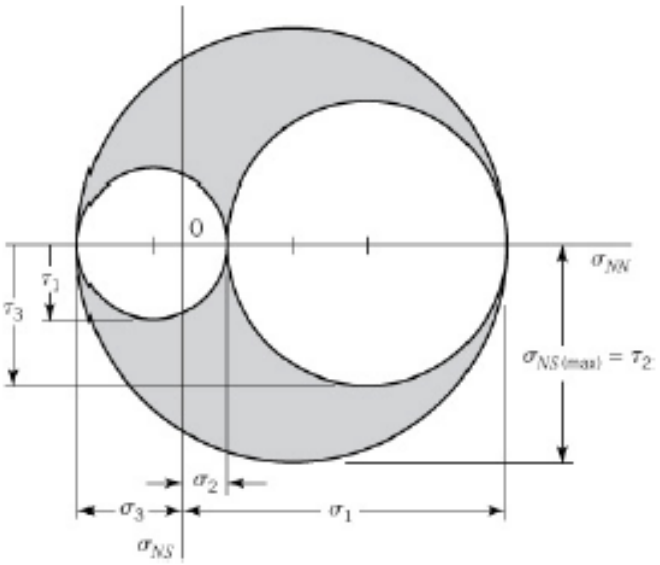
Radius $R=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\sigma^2_{xy}}$

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\sigma^2_{xy}}$$

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\sigma^2_{xy}}$$

$$\tau_{max}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\sigma^2_{xy}}$$

دایره موهر سه بعدی

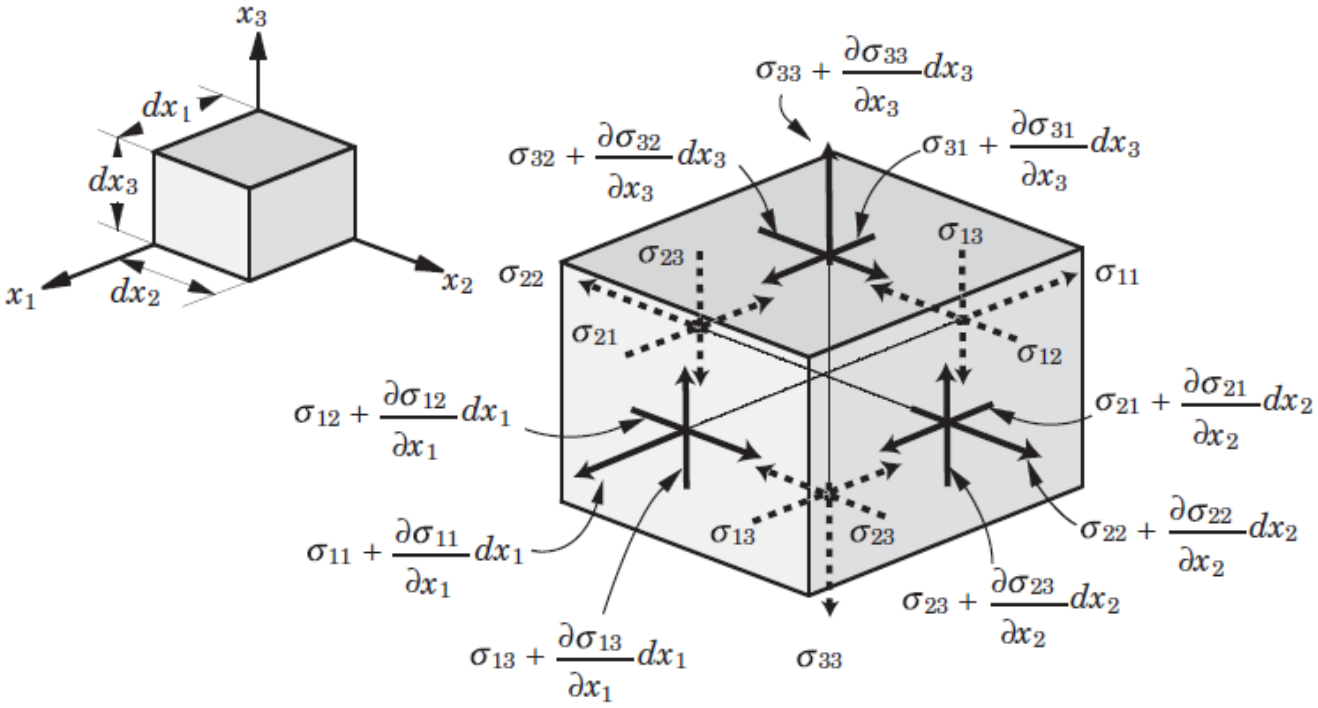


- The best way to draw Mohr's circle in 3-D is first to find the principal stresses.
- Using the three principal stresses, the three circles can then be drawn.

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

معادلات دیفرانسیل تعادل

- برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل تعادل، از یک المان تغییر شکل پذیر استفاده می شود که در آن مقادیر تنش با تغییر مکان، تغییر می شود.
- برایند نیروهای حجمی توسط $\mathbb{B}$ نمایش داده می شود.



معادلات دیفرانسیل تعادل

- با نوشتن معادلات تعادل خواهیم داشت:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow \sigma_{yz} = \sigma_{zy},$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \sigma_{xz} = \sigma_{zx},$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

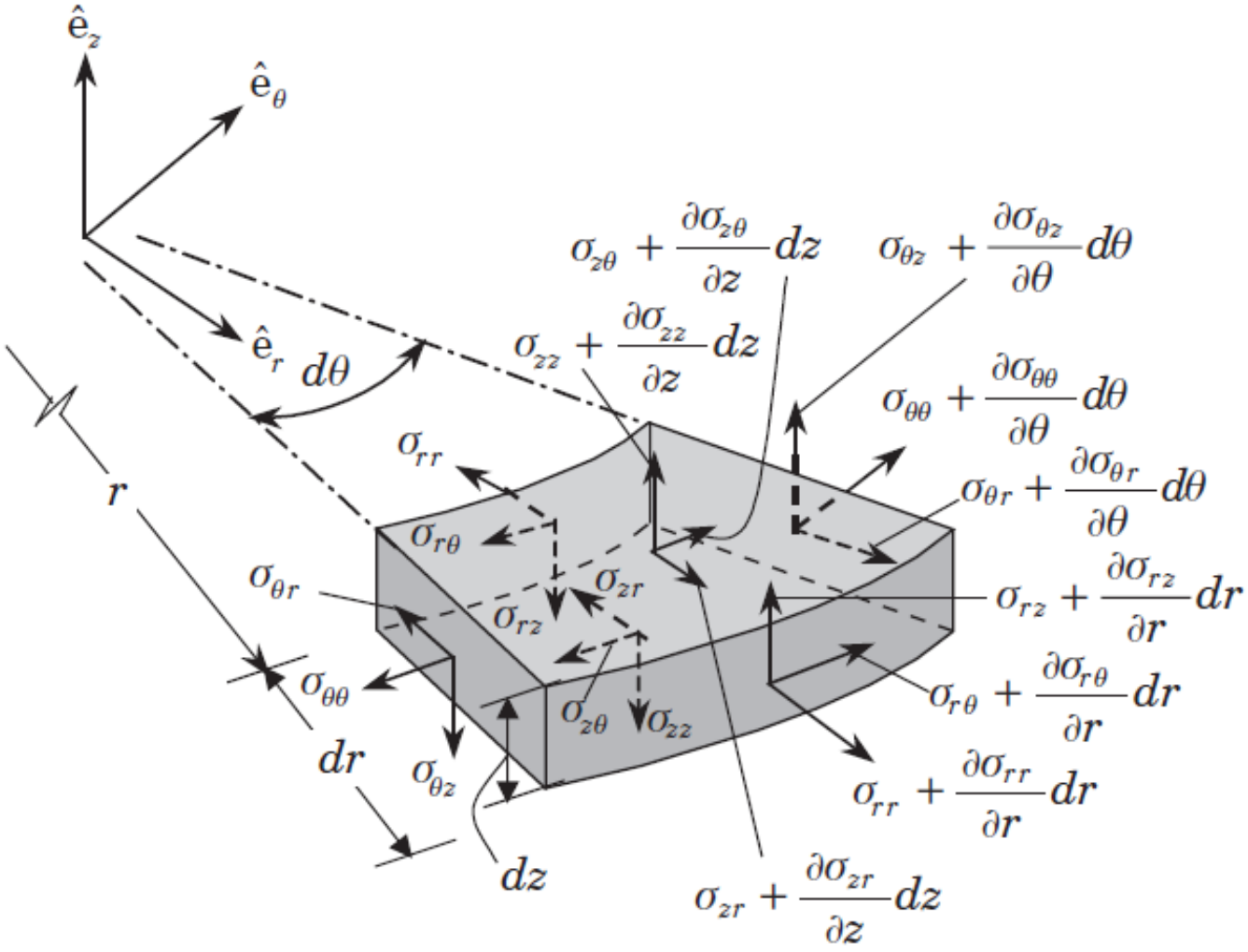
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z = 0$$

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0$$

معادلات تعادل در مختصات استوانه ای



معادلات تعادل در مختصات استوانه ای

$$\sum F_r = 0$$

$$-\sigma_{rr} r.d\theta.dz + \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr\right) r.d\theta.dz - \left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) \sin\frac{d\theta}{2} dr.dz$$

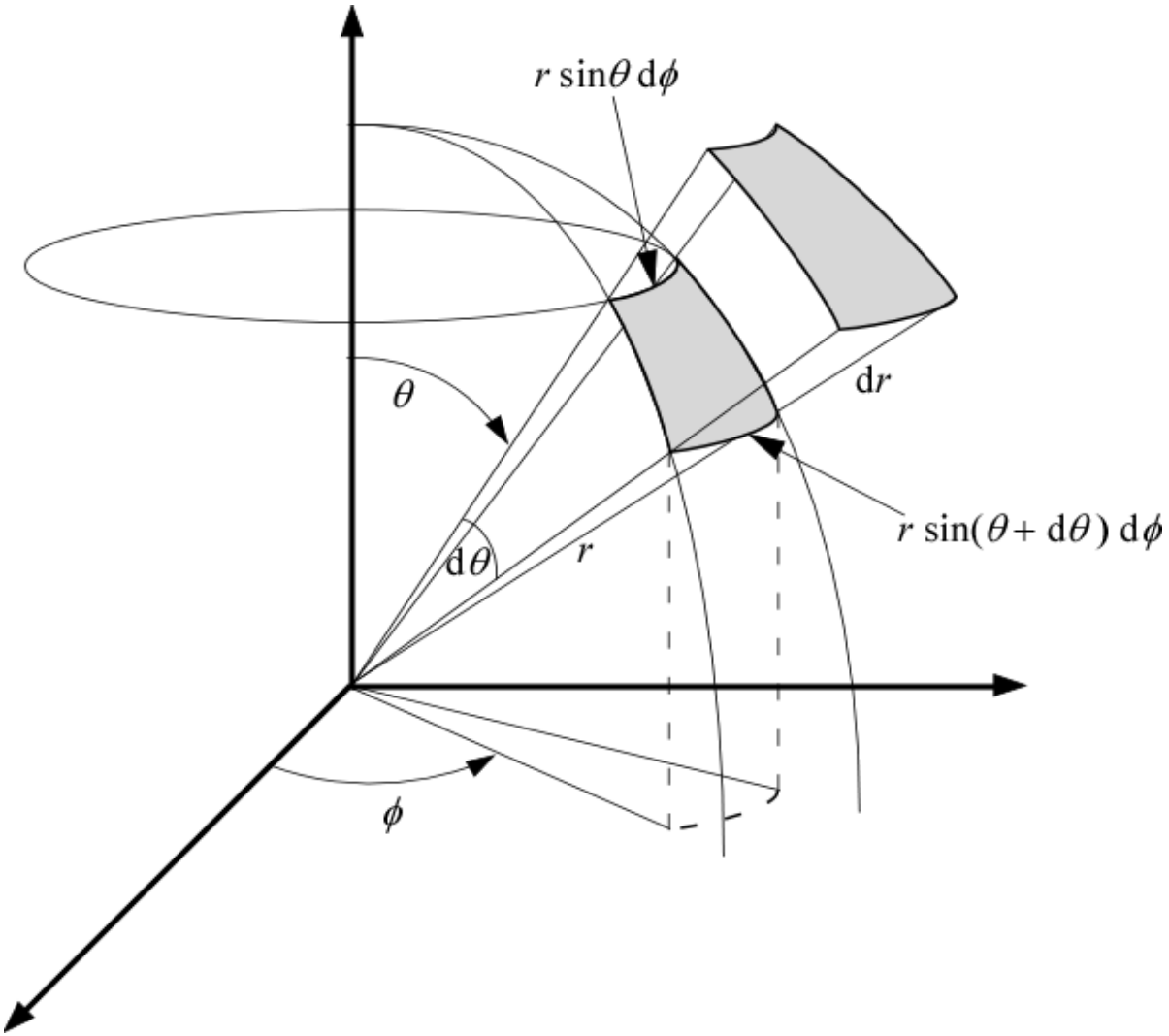
$$-\sigma_{\theta r} dr.dz + \left(\sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta\right) dr.dz - \sigma_{zr} r.d\theta.dr + \left(\sigma_{zr} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} dz\right) r.d\theta.dr$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + B_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + B_z = 0$$

معادلات تعادل در مختصات کره ای



تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

معادلات تعادل در مختصات کره ای

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial \phi}+\frac{1}{r}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\phi\phi}+\sigma_{\theta r}\cot\theta)+B_r=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \phi}+\frac{1}{r}\left[(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\phi\phi})\cot\theta+3\sigma_{r\theta}\right]+B_\theta=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi}+\frac{1}{r}(3\sigma_{r\phi}+2\sigma_{\theta\phi}\cot\theta)+B_\phi=0$$

تحلیل تنش
تانسور تنش
صفحه و تنش
تبدیل تنش
دایره موهر
معادلات تعادل
استوانه ای
کروی

زمانی که امت من دنیا را بزرگ دارند،

خداوند شکوهِ اسلام را از آنان می گیرد.

پیامبر اکرم (ص)