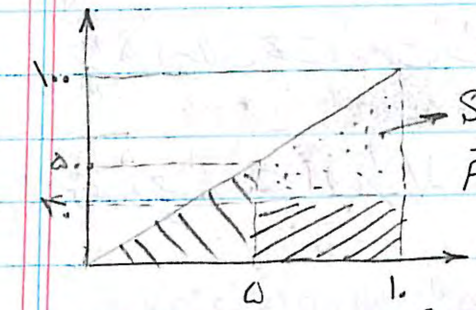
مثال: جسمی به جرم 10kg قرار دارد و نیروی افقی $F_{(t)}=10t$ به آن وارد می‌شود.

سرعت جسم پس از ۱۰ ثانیه چقدر است؟ $\mu_s=0/5$ $\mu_k=0/4$

$\mu_s N = f_{s_{max}} \to f_{s_{max}} = 50N \to t = 5s$ $\quad f_k = 0/4\times 100 = 40N$



$\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$ تکانه خطی $\vec p = m\vec v$

$\vec F = m(\frac{d\vec v}{dt}) + \vec v(\cancel{\frac{dm}{dt}})$

$F_{(t)} \leftarrow \vec F dt = m dv \to \int_{t_1}^{t_2} F_t dt = m\int_{v_1}^{v_2} dv$

$\to m(\Delta \vec v) = \int F dt \to$ مساحت زیر نمودار نیرو بر حسب زمان

$S_{eff} = (\frac{10+60}{2})5 = 175$ $\quad m\Delta v = 175 \to v = 17/5$

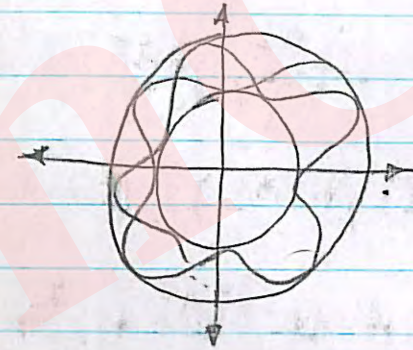
ابتدا $\leftarrow F dt = m dv$ $\quad F = F_t - f$ $\quad t<5^s$: $F = F_{(t)} - f_s = 0$ ؛ $t>5^s$: $F = F_{(t)} - f_k$

$(t<5): F dt = (F_{(t)} - f_s)dt = \underbrace{F_t dt}_{S_1} - \underbrace{f_s dt}_{S_1} = 0$

$r' = \frac{dr}{d\theta} = \frac{d(\frac{1}{u})}{d\theta} = \frac{d(\frac{1}{u})}{du}\cdot\frac{du}{d\theta} \to r' = -\frac{1}{u^2}u'$ $\quad u_{(\theta)} = \frac{1}{r_{(\theta)}}$

$\frac{l^2}{m^2r^4} + \frac{l^2}{m^2r^2} = v_0^2 \to \frac{l^2}{m^2}(u'^2+u^2) = v_0^2 \to 2u'u'' + 2uu' = 0 \to u'' + u = 0 \to$

$u_{(\theta)} = A\sin(\theta+\phi_0)$ $\quad v_0^2 = \frac{A^2 l^2}{m^2} \to A = \frac{mv_0}{l} \to r_\theta = \frac{l}{mv_0\sin(\theta+\phi_0)}$



$r = r_0 + A\sin\omega t$ $\quad \theta = \alpha t$

$r\ r_0\ A\sin\omega t$

$\theta\ \theta_0\sin(\alpha t+\phi_0)$

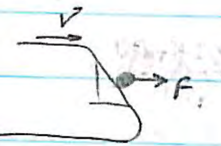
$(t > 5):\ F\,dt = (F_t - f_k)\,dt = m\,dv \rightarrow$

$$\underbrace{\int F_t\,dt}_{J_{eff} + J_2} - \underbrace{\int f_k\,dt}_{J_2} = m\int dv \rightarrow J_{eff} = m\Delta v$$

مثال: قطاری با سرعت $10\,\frac{m}{s}$ در حال حرکت است. یک تکه گل را به جرم یک kg با سرعت $5\,\frac{m}{s}$ در خلاف جهت به سمت شیشه‌ی قطار پرتاب می‌کنیم. گرمای آزاد شده در این برخورد چقدر است؟ (ناظر راننده‌ی قطار) (ناظر پرتاب کننده) $\Delta E = \sum W_{F_{ext}}$

ناظر داخل قطار: $\Delta K = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -112{,}5\ J \qquad |\Delta K| = Q \Rightarrow Q_1 = 112{,}5$

ناظر روی زمین: $\Delta K = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 37{,}5\ J \neq Q_1$



$F\Delta T = m\Delta\vec{v} \Rightarrow F\Delta T = m(v+u)$

$\Delta K = Q_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m(0 - (v+u)^2) \rightarrow Q_1 = \frac{1}{2}m(v+u)^2$

$W_F = Q_2 + \Delta K \Rightarrow Q_2 = W_F - \frac{m}{2}(v^2 - u^2)$

$W_F = F\Delta x = Fv\Delta t = \frac{m(v+u)}{\Delta t}\cdot v\Delta t = mv(v+u)$

$Q_2 = mv(v+u) - \frac{m}{2}(v^2 - u^2) = m(v+u)\left(v - \left(\frac{v-u}{2}\right)\right) \Rightarrow$

$Q_2 = \frac{m}{2}(v+u)^2$

$\Delta x <$ ناظر قطار: $\Delta x = 0$ ؛ ناظر ساکن: $\Delta x = v\Delta t$

مثال: دیواری با جرم بی‌نهایت و با سرعت v در حال حرکت است. گلوله‌ای با سرعت u به دیوار برخورد می‌کند. با توجه به شکل سرعت برگشت گلوله را با توجه به کشسان بودن برخورد را حساب کنید.

ناظر روی دیوار: $W_F = 0 \rightarrow v_1 = v_2$

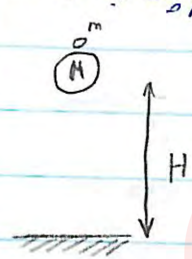
$v_1 = v + u = v_2 \qquad$ ناظر ساکن: $v_2 = v + (u+v) = u + 2v$

$F\Delta T = m(\Delta\vec{v}) \Rightarrow F\Delta T = m(v_2 - (-u)) \Rightarrow F = \frac{m(v_2+u)}{\Delta T}$

$Fv\Delta T = \frac{m(v_2+u)}{\Delta T}\cdot v\Delta T = vm(v_2+u) = \frac{1}{2}m[v_2^2 - u^2] \Rightarrow$

$2v(v_2+u) = (v_2+u)(v_2-u) \rightarrow v_2 = u + 2v$

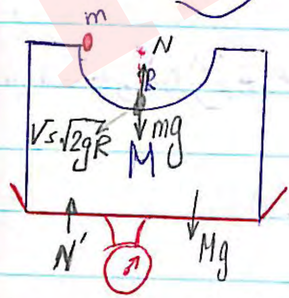
مثال: دو گلوله‌ی m و M را از ارتفاع H از سطح زمین رها می‌کنیم. پس از برخورد شان با سطح زمین گلوله‌ی m تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$v_2 = 2v + v = 3v = 3\sqrt{2gh} = \sqrt{2gH'} \Rightarrow H' = 9H$$

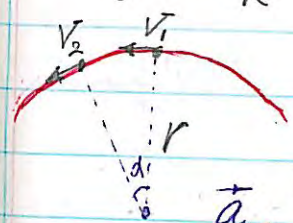
مثال: گلوله را از بالا رها می‌کنیم. Max و min عددی را که ترازو نشان می‌دهد را بیابید.



$$N' = Mg + N$$

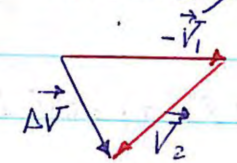
$$\sum \vec{F}_r = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N - mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow$$

$$N = mg\left(1 + \frac{2R}{R}\right) \rightarrow N = 3mg \rightarrow N' = g(M + 3m)$$



$$V_1 = V_2 = V$$

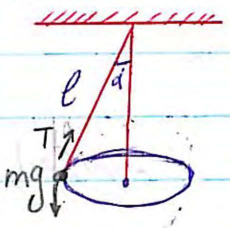
سرعت ثابت:



$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)}{t} \qquad \Delta V = \alpha V$$

$$\alpha r = Vt \rightarrow t = \frac{r\alpha}{V} \qquad a = \frac{\Delta V}{t} \rightarrow a = \frac{\alpha V}{\frac{r\alpha}{V}} \rightarrow a_r = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r$$

مثال: در شکل مقابل گلوله‌ی m را به انتهای نخی بسته ایم. میله را با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌دهیم. ω را بیابید.



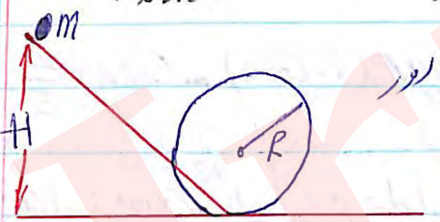
سرعت ثابت $\rightarrow \sum F_T = 0$ شعاعی: $\sum \vec{F}_r = \frac{mV^2}{r} = m\omega^2 r$

$$\sum F_r : T\sin\alpha = m\omega^2 r \quad (I) \qquad \sum F_T : T\cos\alpha - mg = 0 \rightarrow$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} \quad (I) \rightarrow mg\tan\alpha = m\omega^2 r \rightarrow \omega^2 = \frac{g\tan\alpha}{r} \rightarrow$$

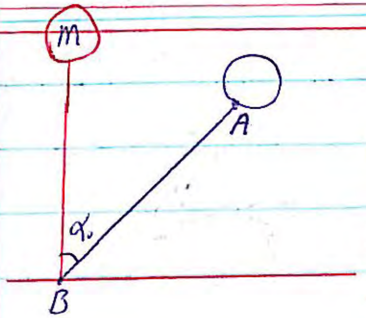
$$\omega^2 = \frac{g\tan\alpha}{l\sin\alpha} \rightarrow \omega^2 = \frac{g\cos\alpha}{l}$$

مثال: گلوله را از چه ارتفاعی رها کنیم تا یک دور کامل دور دایره بگردد؟



$$H_{min} = ?$$

$$\sum F_T = -mg\sin\alpha \qquad \sum F_r = \frac{mV^2}{R} \rightarrow N - mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{R}$$



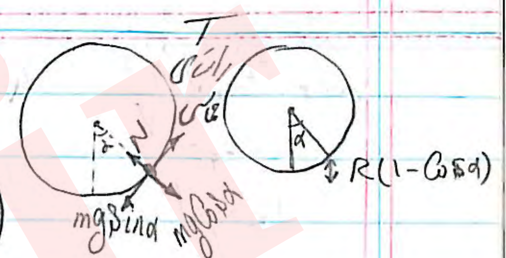
سطح جدا می شود.

الف) مقدار α_0 را بیابید

ب) شتاب گلوله در این لحظه چقدر است؟

قانون پایستگی تکانه خطی: در هر راستای مشخص اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک مجموعه صفر باشد، تکانه خطی مجموعه در همان راستا ثابت می ماند.

$$V^2 - V_0^2 = 2g(H-R+R\cos\alpha)$$



$$\sum F_r: N = mg\cos\alpha + \frac{m}{R}\left(2g(H-R+R\cos\alpha)\right)$$

$$\to N = 3mg\cos\alpha + \frac{2mg}{R}(H-R)$$

در اوج دایره:

$$\sum F_r: mg + N = \frac{mV^2}{R} \to V^2 = Rg$$

$$V^2 = 2g(H-R+R\cos\alpha) \to V^2 = 2g(H-2R)$$

$$Rg = 2g(H-2R) \to H = \frac{5}{2}R$$

$$\sum F_r: N + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{R} \to V^2 = gR\cos\alpha$$

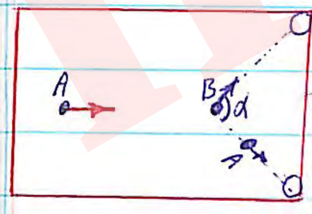
$$V^2 = 2gR(1-\cos\alpha) \to gR\cos\alpha = 2gR(1-\cos\alpha) \to \cos\alpha = \frac{2}{3}$$

مثال: مطابق شکل از جرم میله ای که گلوله به انتهای آن بسته شده صرف نظر می کنیم. مجموعه را از حالت قائم رها می کنیم. در زاویه α_0 قسمت پایینی میله از

$$m_1 V_0 = (P_B)_x + (P_A)_x \longrightarrow x: m_1 V_0 = m_1 V_1 \cos\alpha_1 + m_2 V_2 \cos\alpha_2$$

$$y: 0 = -m_1 V_1 \sin\alpha_1 + m_2 V_2 \sin\alpha_2$$

مثال: دو توپ بیلیارد با جرم یکسان در نظر می‌گیریم. A را به سمت B شلیک می‌کنیم.



اگر A و B به دو گوشه میز بروند α را بدست آورید.

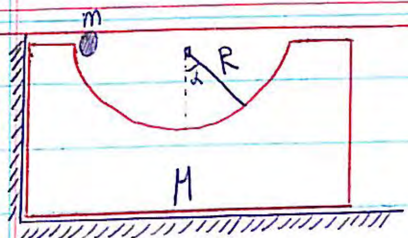
$$m_A \vec{V}_0 = m_A \vec{V}_1 + m_B \vec{V}_2 \longrightarrow \vec{V}_0 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

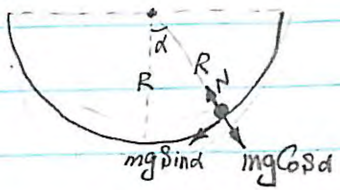
$$\vec{V}_0^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 \qquad \frac{1}{2} m_A \vec{V}_0^2 = \frac{1}{2} m_B \vec{V}_2^2 + \frac{1}{2} m_A \vec{V}_A^2 \longrightarrow$$

$$\vec{V}_0^2 = \vec{V}_2^2 + \vec{V}_1^2 \longrightarrow 2\vec{V}_1\vec{V}_2 = 0 \longrightarrow \alpha = 90^\circ$$

مثال: مطابق شکل جسم m را از بالای تکیه رها می‌کنیم. بیشترین سرعت M

را بیابید.



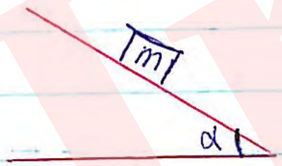


$$\begin{cases} m\sqrt{2gR} = m\vec{V}_1 + M V_{Max} \longrightarrow V = \sqrt{2gR} - \frac{M}{m} V_{Max} \\ mgR = \frac{1}{2} m \vec{V}_1^2 + \frac{1}{2} M V_{Max}^2 \longrightarrow mgR = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{2gR} - \frac{M}{m} V_{Max}\right)^2 + \frac{1}{2} M V_{Max}^2 \end{cases}$$

$$mgR = \frac{1}{2} m \left(2gR + \frac{M^2 V_{Max}^2}{m^2} - \frac{2 M V_{Max}\sqrt{2gR}}{m}\right) + \frac{1}{2} M V_{Max}^2 \longrightarrow$$

$$V_{Max}\left(\frac{M^2}{2m} + \frac{m}{2}\right) = M\sqrt{2gR} \longrightarrow V_{Max} = \frac{2mM\sqrt{2gR}}{M^2 + m^2}$$

مثال: اتومبیلی بر روی سطح شیب‌داری حرکت می‌کند. در دو حالت زیر سرعت مجاز

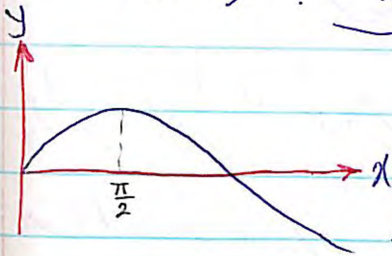


برای جلوگیری از لغزش چرخ‌ها را مشخص کنید.

الف) اصطکاک نداریم. ب) ضریب اصطکاک ایستایی μ است.

الف) $(f_s)_{max} = \frac{mv^2}{r} = 0 \to v = 0$

مثال: ذره‌ای بر روی منحنی $y = A\sin x$ حرکت می‌کند اگر ضریب اصطکاک ایستایی در کل مسیر μ باشد بیشترین سرعت مجاز برای ذره چقدر باشد تا لغزش رخ ندهد؟ ذره کل مسیر را با اندازه‌ی سرعت ثابت حرکت می‌کند

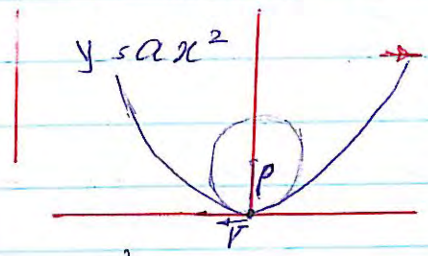


$y = a\sin x \to \dot y = a(\dot x \cos x)$

$\to \ddot y = a\left(\cos x(\ddot x) + \dot x(-\dot x \sin x)\right)$

$\to \ddot y = a(-v^2 \sin x) \to \ddot y = -a v^2 \qquad \frac{v^2}{\rho} = +v^2 a \to \rho = +\frac{1}{a}$

$(f_s)_{max} = \frac{mv^2}{\rho} \to \mu m g = m v^2 a \to v_{max} = \sqrt{\frac{\mu g}{a}}$



$\to \dot y = a(2x\dot x) \to \ddot y = 2a(x\ddot x + \dot x^2)$

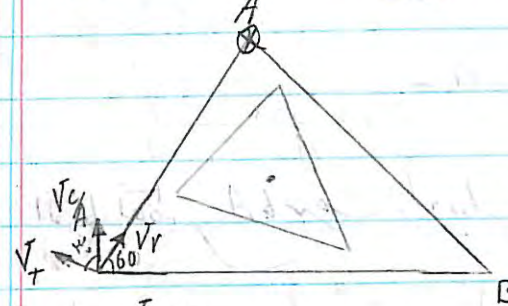
$a_x = 0 \leftarrow$ ثابت v_x

$a_y = \frac{v^2}{\rho} \qquad x = y = 0 \to \ddot y = 2a\dot x^2 \to \frac{v^2}{\rho} = 2a v^2 \to \rho = \frac{1}{2a}$

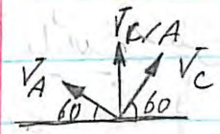
مثال: یک حلقه‌ی لاستیکی به شعاع اولیه‌ی r_0 و ضریب سختی k در نظر بگیرید. حول محور حلقه سرعت زاویه‌ای ω را در حلقه به وجود می‌آوریم. تغییر شعاع را برای حلقه به دست آورید.

$t=0 \to c=\ell_0 \qquad t=\infty \to x=x' , x+x'=\ell_0 \to x=x'=\frac{\ell_0}{2}$

مثال: در شکل 3 لاک پشت در گوشه های مثلث رو به یکدیگر با سرعت حرکت می کنند. سرعت هر لاک پشت نسبت به لاک پشت بعدی را بدست آورده و مشخص کنید مثلث لاک پشت ها با چه سرعت زاویه ای در حال چرخش هستند؟ ضلع مثلث a و سرعت V و شروع حرکت همزمان است.



$\vec V_{C/A} = \vec V_C - \vec V_A$

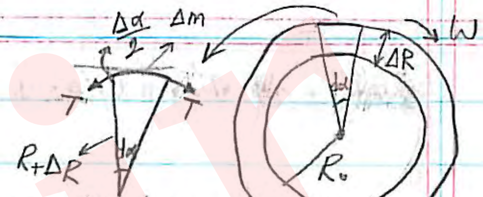


$V_r = (\sqrt3 V)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right) = \frac{3V}{2} \qquad V_T = (\sqrt3 V)\left(\frac12\right) = \frac{\sqrt3}{2}V$

$\Delta r = V_r t \to a = \frac32 Vt \to t = \frac{2a}{3V}$

ضلع مثلث $L_{(t)} = a - V_r t \qquad V_T = \omega \ell \to \omega = \frac{\sqrt3 V}{2a - 3Vt}$

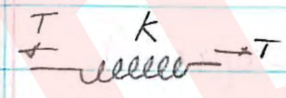
$2T\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = (\Delta m)\,\omega^2(R_0+\Delta R)$



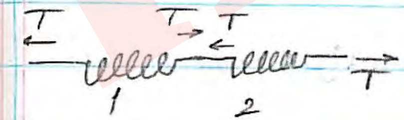
$\Delta m = \frac{M\alpha}{2\pi} \to \alpha T = \frac{M\alpha}{2\pi}\omega^2 R_0 \to T = \frac{M\omega^2 R_0}{2\pi}$

$K' = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)K$ هوک: $F = K'\Delta x \to T = \frac{2\pi K}{\alpha}\left((R_0+\Delta R)\alpha - R_0\alpha\right) \to$

$T = 2\pi K\Delta R = \frac{M\omega^2 R_0}{2\pi} \to \Delta R \simeq \frac{M\omega^2 R_0}{4\pi^2 K}$



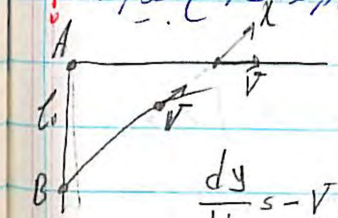
$T = K\Delta x \to \Delta x = \frac{T}{K}$



$\Delta x_1 = \frac{T}{K_1} \qquad \Delta x_2 = \frac{T}{K_2} \qquad K_1=K_2=K'$

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{2T}{K'} \to K' = 2K$

مثال: دو جسم A و B با سرعت یکسان در حال حرکت اند پس از مدت زمان زیاد Δx؟

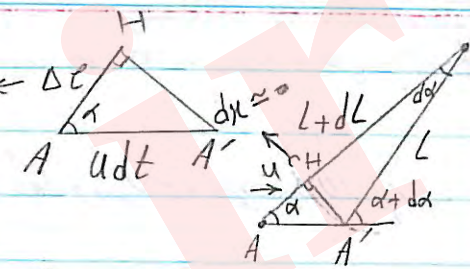


$\frac{dx'}{dt} = V\cos\theta - V \qquad \frac{dx}{dt} = V - V\cos\theta$

$\frac{dy}{dt} = -V\sin\theta \qquad \frac{dx'}{dt}+\frac{dx}{dt}=0 \to x+x'=C$

$\cos\alpha = \frac{vdt}{udt} = \frac{v}{u} \to$

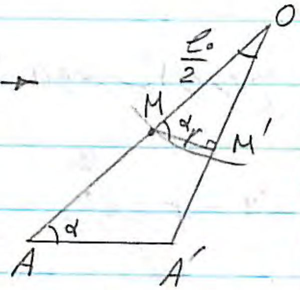
$u = \frac{v}{\cos\alpha}$



مثال: در مثال قبل بردار سرعت نقطه‌ی وسط طناب را بدست آورید.

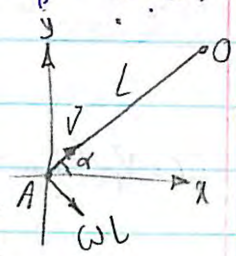
$\cos\alpha = \frac{\ell_0}{2r} \to r = \frac{\ell_0}{2\cos\alpha} \to \dot r = \frac{\dot\ell_0}{2\cos\alpha} \to$

$u' = \frac{v}{2\cos\alpha}$ / $MM' = \frac{AA'}{2} \to V_M = \frac{V_A}{2} = \frac{V}{2\cos\alpha}$



الف) نقطه‌ی A با سرعت زاویه‌ای ω دور O می‌چرخد. ω را بر حسب α بیابید. سپس بردار شتاب نقطه‌ی A را بدست آورید.

$(V_A)_x = \frac{V}{\cos\alpha} = \omega l\sin\alpha + V\cos\alpha$

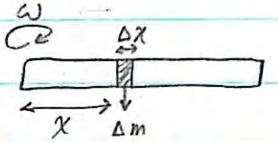


$(V_A)_y = V\sin\alpha - \omega L\cos\alpha = 0 \to \omega = \frac{V\tan\alpha}{L} = \frac{V\tan\alpha}{\ell_0 - Vt}$

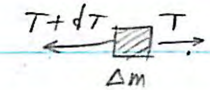
$\omega = \frac{d\theta}{dt} \to \frac{V\tan\alpha}{\ell_0 - Vt} = \frac{d\alpha}{dt} \to V\int_0^t \frac{1}{\ell_0 - Vt}\,dt = \int_\alpha^\theta \frac{1}{\tan\alpha}\,d\alpha$

مثال: میله‌ی همگنی به طول L و به جرم m با سرعت زاویه‌ای ω در سطح افقی حول محوری که از انتهایش می‌گذرد می‌چرخد. کشش میله به فاصله‌ی x از محور چرخش چقدر است؟

$\sum F_r: (T+dT) - T = \Delta m\,\omega^2\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to$



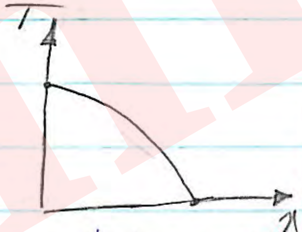
$dT = \frac{M\omega^2}{\ell}(x\,dx) \to \int_{T_x}^{0} dT = \frac{M\omega^2}{\ell}\int_x^{\ell} x\,dx$



$-T_x = \frac{M\omega^2}{\ell}\left(\frac{\ell^2 - x^2}{2}\right) \to T_x = \frac{M\omega^2}{2\ell}(x^2 - \ell^2)$

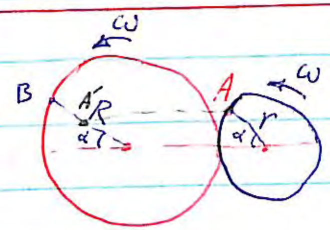
$T = T_{Max} \to T_{Max} = \frac{M\omega^2 l}{2}$ $\qquad \frac{dT}{dx} = \left(\frac{M\omega^2}{\ell}\right)x$

$x = 0 \to \frac{dT}{dx} \simeq 0 \to$ نمودار $(T-x)$ $\to$

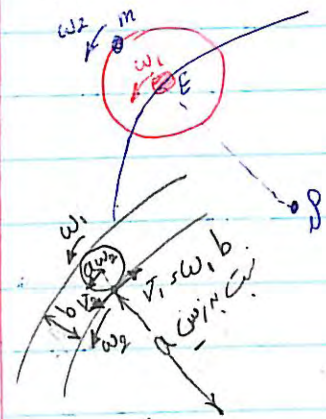


مثال: دو نقطه‌ی A و B به ترتیب دارای بردار سرعت V_1 و V_2 می‌باشند. با ارائه‌ی یک روش ترسیمی مرکز دوران را بیابید.

$\vec{V}_{A'/A} = 0 \qquad \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_{B/A'} + \vec{V}_{A'/A} \longrightarrow \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_{B/A'}$



$\vec{V}_{B/A'} = (R-r)\,\omega = \vec{V}_{B/A}$



مثال: مسیر ماه از دید ناظر در خورشید را رسم کنید.

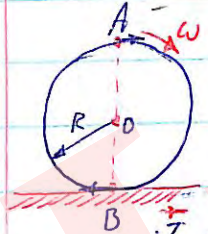
$1,5 \times 10^{11} = S \to E \qquad 4 \times 10^{8} = E \to m$

الف) $V_1 < V_2$:

ب) $V_1 > V_2$:

یک سال $\qquad \omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2}$

۲۸ روز $\qquad \omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$



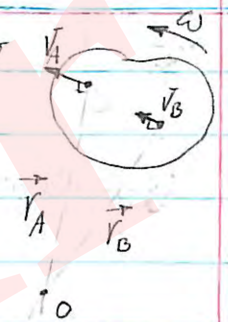
مثال: غلتش ناب:

$\vec{V}_{A/O} = R\omega \qquad -R\omega = \vec{V}_{B/O}$

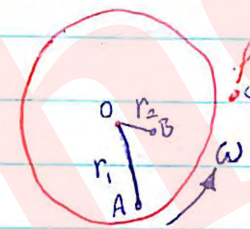
$\vec{V}_{B/O} = \vec{V}_B + (-\vec{V}_0) \to (-R\omega)\,\hat{i} = \vec{V}_B + (-\vec{V}_0) \qquad V_{B_1} = V_{B_2} = 0$

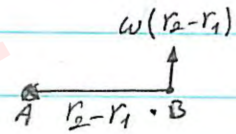
$\to \vec{V}_0 = (R\omega)\,\hat{i} \qquad \vec{V}_{A/O} = \vec{V}_A + (-\vec{V}_0) \to V_A = (2R\omega)\,\hat{i}$

V انتقالی $= 0$



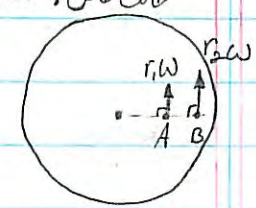
مثال: مطابق شکل ~~دیسک~~ دیسکی حول محورش در حال چرخش است. A و B نقاطی از دیسک می‌باشند. حرکت B از دید A چگونه است؟





$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \longrightarrow$

حالت خاص: $\alpha = 0$

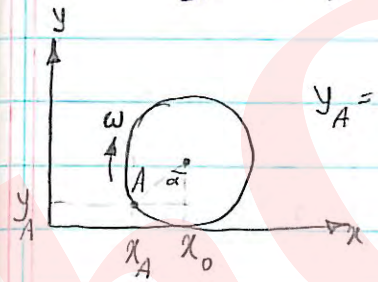


جهت $(\vec{V}_{B/A}) = ؟ \qquad V_{B/A} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,\omega$

مثال: حرکت B از دید A چگونه است؟

منحنی سیکلوئید:

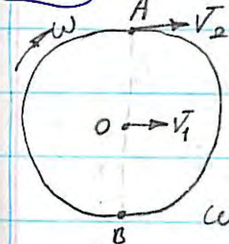
مثال: معادله‌ی مسیر نقطه‌ی A را برحسب t و ω و R بدست آورید.



$y_A = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\omega t)$ $\quad x_A = x_0 - R\sin\alpha \to$

$x_A = \omega R t - R\sin\alpha \to x_A = R(\omega t - \sin\omega t)$

مثال: چرخی به شعاع R بر روی یک سطح افقی با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخش است. سرعت مرکز آن V_1 و سرعت بالاترین نقطه‌ی آن V_2 است. اگر $2V_1 < V_2$ سرعت پایین‌ترین نقطه را برحسب V_1 و V_2 بدست آورده و سپس مسیر حرکت نقطه‌ای روی چرخ را به‌طور حدودی رسم کنید.



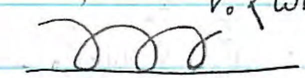
$\vec V_{A/O} = \vec V_A - \vec V_O \to \omega R = \vec V_2 - \vec V_1 \to$

$\omega = \frac{\vec V_2 - \vec V_1}{R}$

$\vec V_{B/O} = \vec V_B - \vec V_O \to -\omega R = V_B - V_1 \to$

$V_B = 2V_1 - V_2 \to V_B < 0$

$V_0 < \omega R$

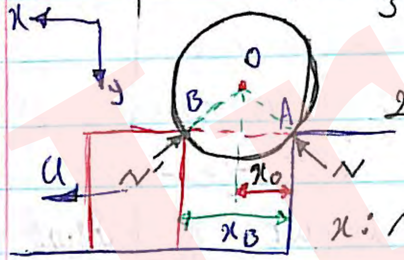


$V_0 > \omega R$

مثال: شتاب و سرعت نقطه‌ی A را بیابید.

مثال: یک کره بر روی یک لبه به نحوی قرار دارد که نقطه‌ی تماسش با سطح افقی بر روی لبه‌ی دیوار قرار گرفته است. در چه زاویه‌ای دیوار را ترک خواهد کرد!

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$



ادامه: (45

$2x_0 = x_B \to V_x = \frac{V_B}{2} = \frac{u}{2} \to a_{x_0} = 0$

$x: N_x - N'_x = ma_x \quad y: -mg + N_y + N'_y = ma_y$

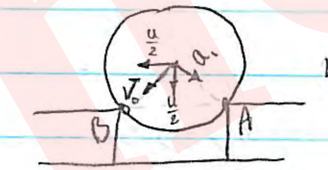
$y_0^2 + \left(\frac{x_B}{2}\right)^2 = R^2 \to 2y_0\dot y_0 + \frac{1}{4} \times 2x_B \times \dot x_B = 0 \to 4y_0\dot y_0 = -x_B\dot x_B$

$$\dot{y}_0 = \frac{-x_B u}{4y_0} \qquad 4(\dot{y}_0^2 + y_0\ddot{y}_0) = -(\dot{x}_B^2 + \ddot{x}_B x_B) \rightarrow 4\left(\frac{u^2}{4} + \frac{R\ddot{y}_0}{\sqrt{2}}\right) = -u^2 \rightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} R\ddot{y}_0 = -2u^2 \rightarrow \ddot{y}_0 = \frac{-\sqrt{2}u^2}{2R} \qquad \ddot{y}_0 = -g + \frac{1}{m}(2N_y) \rightarrow$$

$$\frac{-2}{m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}N\right) + g = \frac{\sqrt{2}u^2}{2R} \rightarrow N = \frac{\frac{-\sqrt{2}u^2}{2R} + g}{\frac{\sqrt{2}}{m}} \qquad N > 0 \rightarrow 2gR > \sqrt{2}u^2$$

درحرکت دورانی داشتیم که نیروهای رو به مرکز دوران مثبت اند ولی این جا مرکز دوران مرکز دایره نیست.

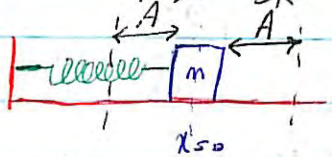


$$V_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}u \qquad a_1 = \frac{V_0^2}{R}$$

راه حل دوم:

$$A: \sum F_r = \frac{mg\sqrt{2}}{2} - N = ma_1 = m\left(\frac{u^2}{2R}\right) \rightarrow$$

$$N = m\left(\frac{g\sqrt{2}}{2} - \frac{u^2}{2R}\right)$$



حرکت نوسانی در یک بعد: (A) دامنه ی نوسان

$$kx = m(-a) \rightarrow \boxed{\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0} \qquad x_{(t)} = a\sin\omega t \quad x_{(t)} = b\cos\omega t$$

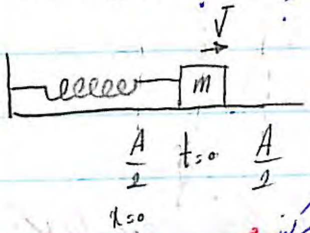
هارمونیک ساده

(فقط توابع سینوسی و کسینوسی و ترکیبی هستند که در معادله ی بیرون صدق می کنند.)

$$x_{(t)} = a\sin\omega t + b\cos(\omega t) \rightarrow \ddot{x} = -a\omega^2\sin\omega t \rightarrow a\sin\omega t\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \leftarrow x_{max}: a = A$$

مثال: ذره ای مطابق شکل در مبدأ زمان در فاصله $\frac{A}{2}$ و در جهت مثبت در حال حرکت است.

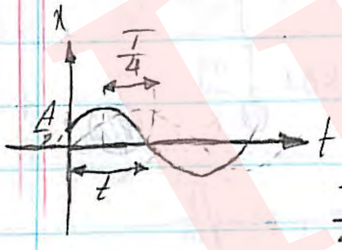


الف) معادله ی مکان برحسب زمان متحرک را بدست آورید.

ب) در چه زمانی نوسانگر برای اولین بار از حالت تعادل عبور می کند.

الف) فاز اولیه $(t=0): x = \frac{A}{2} = A\sin(\omega t + \phi_0) \rightarrow \frac{1}{2} = \sin(\phi_0) \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{4} =$

$$(x=0)(t=t_1)\ \sin(\omega t + \phi_0) = 0 \rightarrow \omega t + \frac{\pi}{6} = \pi \rightarrow \omega t = \frac{5\pi}{6} \rightarrow t = \frac{5\pi}{6\left(\frac{2\pi}{T}\right)} = \frac{5(T)}{12}$$

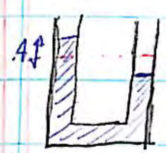


$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ب) زمان تناوب T

$$\frac{T}{4} < t_1 < \frac{T}{2}$$

مثال: درون لوله ی U شکل مایعی با چگالی ρ ریخته ایم. سطح مایع در یکی از شاخه ها را به اندازه ی کوچک A پایین آورده و سپس رها می کنیم. دوره ی تناوب نوسانات کم دامنه ی این مایع را بدست آورید.



$\Delta P_{max} = 2\rho g A$ $\quad F = \Delta P \cdot S$

$2\rho g x S = -m\ddot{x} \to \ddot{x} + (\frac{2\rho g S}{m})x = 0 \to \ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\quad m = \rho S L$

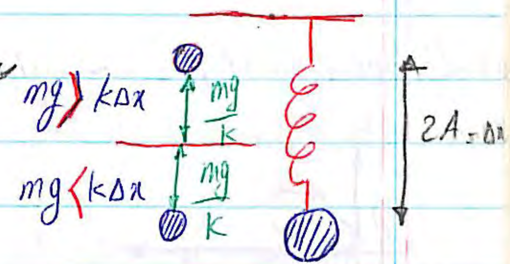
$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\rho g S}{m}$

مثال: گلوله ای به جرم m را به انتهای فنری قائم با ضریب سختی k بسته و رها می کنیم. چه مدت طول می کشد تا جسم به پایین ترین نقطه ی ممکن برسد؟

حالت تعادل: $mg = k\Delta x \to \Delta x = \frac{mg}{k}$

$\Delta U + \Delta K = 0 \to mg\Delta x = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \to$

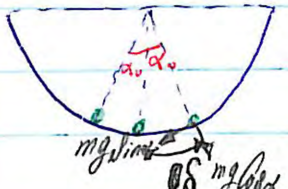
$\Delta x = \frac{2mg}{k}$ $\quad mg - k\Delta x + m\ddot{x} = 0 \to \frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0 \to \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$\omega = \frac{2\pi}{T} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \to t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

چون mg ثابت است بر ω تاثیری ندارد

مثال: یک نیم کره به شعاع R را در نظر بگیرید. گلوله ی کوچکی را نسبت به حالت تعادلش به مقدار δ منحرف کرده و سپس رها می کنیم. دوره ی تناوب نوسانات کم دامنه را برای گلوله بدست آورید. $\delta \ll R$



$F_{(x)} = mg\sin\alpha$

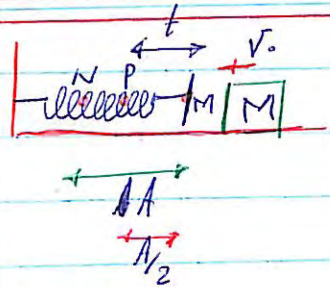
$-mg\sin\alpha = m(R\ddot{\alpha}) \to g\alpha + R\ddot{\alpha} = 0 \to \ddot{\alpha} + (\frac{R}{g})\alpha = 0$

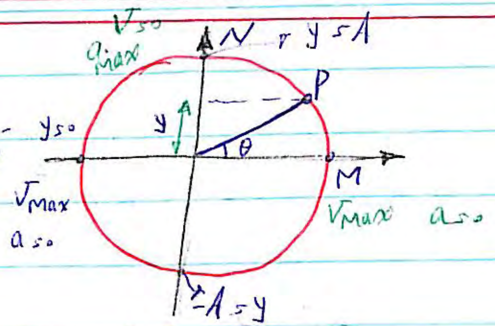
$\to \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

مثال: مطابق شکل جسمی به جرم m را از ارتفاع h از سر فنر آزاد رها می کنیم.

الف) در چه فاصله ای از سر آزاد فنر جسم به حداکثر سرعت خود می رسد؟

ب) بیشترین شتاب جسم در طول حرکتش چقدر است؟



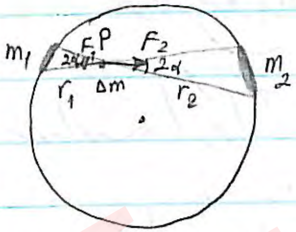


$y = A\sin\theta = \frac{A}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ $\quad t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \rightarrow t = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}$

سوال: زمین را کره فرض کرده ایم یک پوسته جرم دار در نظر بگیرید ثابت کنید

میدان گرانشی درون پوسته صفر است . [illegible]

$S = 2\pi r^2(1-\cos\alpha)$



$F_1 = G\frac{m_1 \cdot \Delta m}{r_1^2}$ $\quad F_2 = G\frac{m_2 \cdot \Delta m}{r_2^2}$

$m_1 = 6 \cdot S_1 \quad , \quad m_2 = 6 S_2 \rightarrow m_1 = 6 \cdot 2\pi r_1^2(1-\cos\alpha) \, , \, m_2 = 6 \cdot 2\pi r_2^2(1-\cos\alpha)$

$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \rightarrow F_1 = F_2 \rightarrow \sum F = 0$ $\quad 6 = \frac{m}{S}$

ج) از لحظه شروع تماس m چه مدت طول خواهد کشید که سرعت جسم Max شود؟

الف) $k\Delta x - mg = 0 \rightarrow \Delta x = \frac{mg}{k}$

ج) $y = \frac{mg}{k} = A\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{mg}{Ak} \rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{mg}{Ak}\right)$

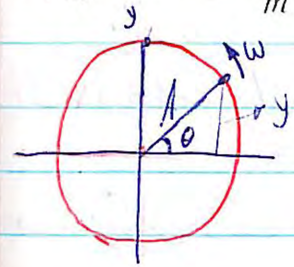
$t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \rightarrow t = \sin^{-1}\left(\frac{mg}{Ak}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$

ب) $k\Delta x - m\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{k}{m}x$ $\quad mg(h+x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow$

$-\frac{1}{2}kx_0^2 + mgx_0 + mgh \rightarrow x_0 = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{-k}$

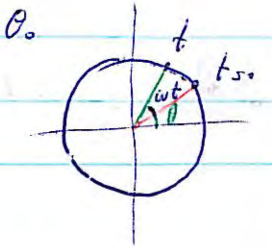
$F - mg = ma_{Max} \rightarrow kx_0 = m(g + a_{Max}) \rightarrow a_{Max} = \frac{kx_0}{m} - g \rightarrow$

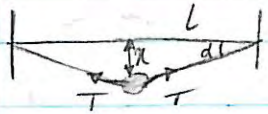
$a_{Max} = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{m} - g \rightarrow a_{Max} = \sqrt{g^2 + \frac{2kgh}{m}}$



$y = A\sin\theta$ $\quad \theta = \omega t + \theta_0$

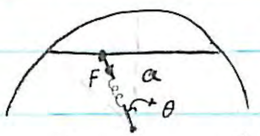
$y = A\sin(\omega t + \theta_0)$





$F_x = 2T\sin\alpha \qquad T = k\left[L\sqrt{1+\left(\frac{x}{L}\right)^2} - L^2\right]$

مثال: تونلی در زمین حفر کرده ایم که فاصله اش از مرکز زمین a است. ω را بیابید.

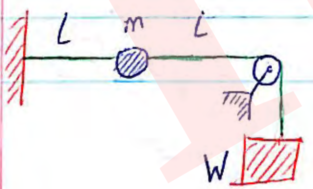


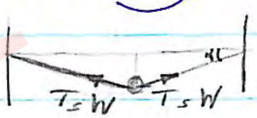
$F = k\left(\frac{a}{\cos\theta}\right) \qquad F_x = F\sin\theta \rightarrow F_x = ak\tan\theta$

$k = \frac{GmM_e}{R_e^3} \qquad \tan\theta = \frac{x}{a} \rightarrow F_x = kx \rightarrow kx = -m\ddot{x} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow$

$\omega = \frac{1}{R_e}\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$

مثال: در شکل مقابل ω را برای نوسانات کوچک بیابید.



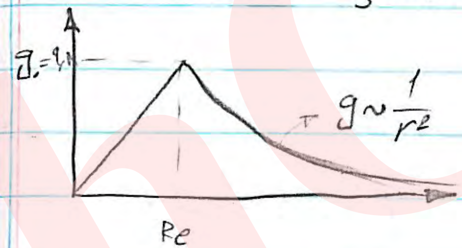


$\sin\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{y}{L}$

$F = \frac{GmM}{r^2} = ma \qquad a \neq g_0$ M: مرکز جرم درون پوسته

$g = \frac{GM}{r^2} \qquad \begin{matrix} M & \frac{4}{3}\pi r^3 \\ M_e & \frac{4}{3}\pi R_e^3 \end{matrix} \rightarrow M = M_e\left(\frac{r}{R_e}\right)^3 \rightarrow g = \left(\frac{GM_e}{R_e^3}\right)r$

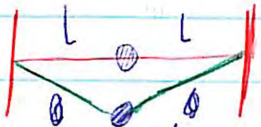
$r < R_e$



$ma = mg_{(r)} \rightarrow$

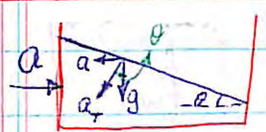
$a = -\left(\frac{GM_e}{R_e^3}\right)r \rightarrow \ddot{r} + \left(\frac{GM_e}{R_e^3}\right)r = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e^3}}$

مثال: گلوله ای به جرم m به وسیله ی دو فنر که خاصیت کشسانی دارند به دو نقطه مهار شده است. از گرانش صرف نظر کنید. k, m, l

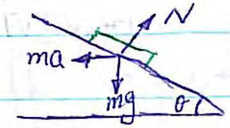


الف) چه شرطی باید برقرار باشد تا حرکت جسم به صورت هارمونیک ساده درآید!

ب) در این حالت بسامد زاویه ای نوسان را بیابید.

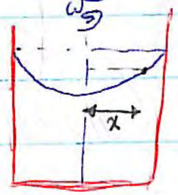


$\tan\theta = \frac{a}{g}$



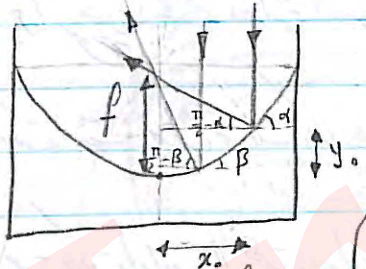
$\begin{cases} N\sin\theta = ma \\ N\cos\theta = mg \end{cases} \longrightarrow \tan\theta = \frac{a}{g}$

مثال: مطابق شکل یک ظرف استوانه‌ای شکل را در نظر بگیرید که در آن مایعی با چگالی ρ پر شده است. ظرف را حول محور استوانه با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخانیم. معادله‌ی سطح مایع را بدست آورید.



$\frac{\omega^2 x}{g} = \tan\theta = \frac{dy}{dx} \longrightarrow \int x\,dx = \frac{g}{\omega^2}\int dy \longrightarrow$

$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$



فاصله‌ی کانونی را بدست آورید.

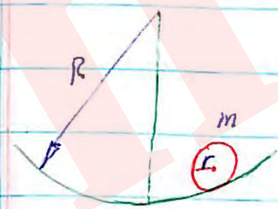
$\begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{f-y_0}{x_0} \\ \tan\alpha = \frac{\omega^2 x_0}{g} \\ y_0 = \frac{\omega^2}{2g}x_0^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}-\beta) = \frac{f-y_0'}{x_0'} \\ \tan\beta = \frac{\omega^2 x_0'}{g} \\ y_0' = \frac{\omega^2 x_0'^2}{2g} \end{cases}$

$\begin{cases} y-y_0 = (x-x_0)\cot(2\alpha) \\ y-y_0' = (x-x_0')\cot(2\beta) \\ x=0 \quad y=f \end{cases}$

$-2T\sin\alpha = m\ddot{y} \longrightarrow -2T\left(\frac{y}{l}\right) = m\ddot{y} \longrightarrow \ddot{y} + \frac{2W}{mL}y = 0 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2W}{mL}}$

مثال: حلقه‌ای نازک و یکنواخت به جرم m و شعاع r در سطح داخلی یک استوانه‌ی افقی ثابت به شعاع R بدون لغزش می‌غلتد. دوره‌ی تناوب نوسانات کم دامنه‌ی حلقه را بیابید.



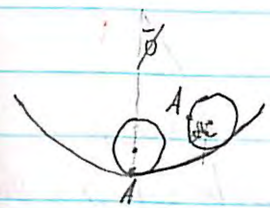
$k + U = C \longrightarrow mv^2 + kx^2 = C \longrightarrow kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \longrightarrow$

$kx + m\ddot{x} = 0$

$\dot{\theta} = \omega \quad \dot{\phi} = \omega'$

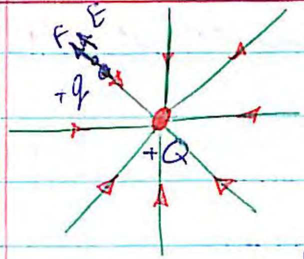
$k = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{mr^2\omega^2}{2} = mr^2\omega^2$

$U = mg(R-r)(1-\cos\phi)$

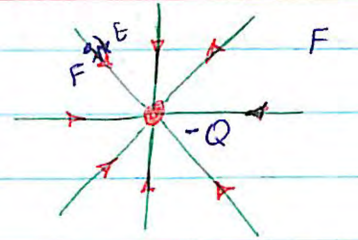


$R\phi = r(\theta+\phi) \longrightarrow r\dot{\theta} = \dot{\phi}(R-r) \longrightarrow$

فقط آینه‌های سهموی هستند که دارای کانون هستند.



$$\vec{F} = q\vec{E}$$

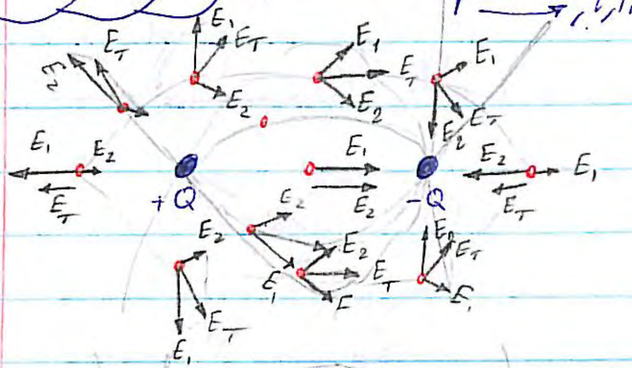


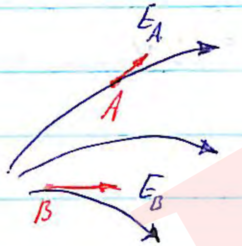
برای بارهای نقطه‌ای

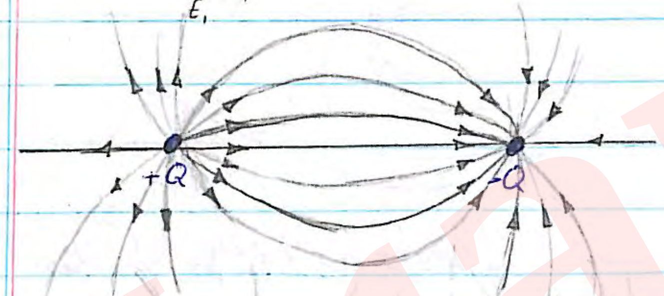
$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

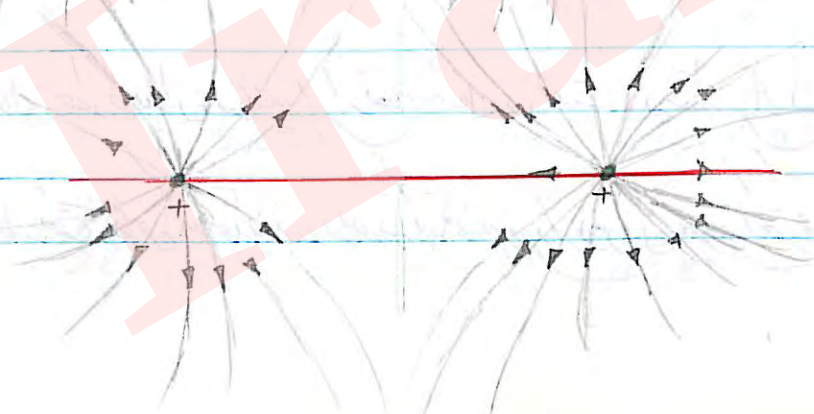
میدان ← E ، فاصله از بار ← r

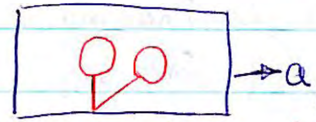
$$k = 9\times10^9 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$







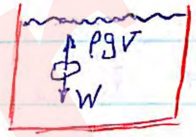


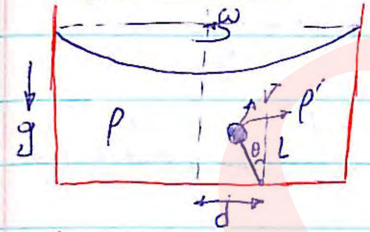


شتاب برآیند

$$F = -\rho a_T V$$

چگالی مایع ← ρ ، حجم جسم ← V



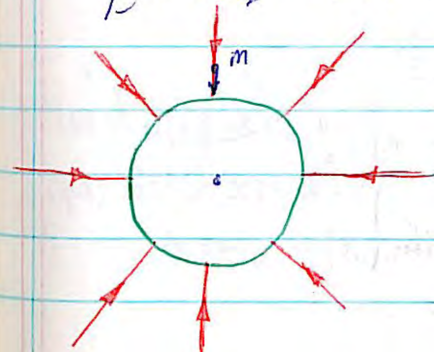


θ را بدست آورید.

$$\begin{cases}(F-T)\cos\theta = \rho V g \\ (F-T)\sin\theta = (\rho' V)\omega^2(d - L\sin\theta)\end{cases}$$

میدان الکتریکی و خطوط میدان:

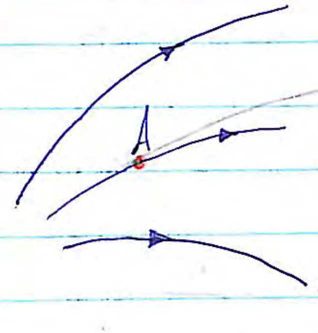
برای تعیین جهت میدان الکتریکی از بار آزمون استفاده می‌کنیم که باری بسیار کوچک و مثبت است بدین ترتیب که در هر نقطه از فضا بار آزمون را قرار داده و سپس رها می‌کنیم



جهت حرکت اولیه بار جهت میدان را نشان می‌دهد.

تراکم خطوط ∝ شدت میدان

میدان حرکت خواهد کرد!



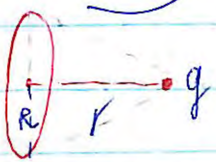
لزوما در میدان حرکت نخواهد کرد، زیرا سرعت در راستای میدان همواره نیست و نیرو و شتاب در راستای میدان است.

شار الکتریکی و قانون گاوس:

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\,(ds)\cos\theta = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

مثال: بار نقطه‌ای q بر روی محور حلقه‌ای به شعاع R و در فاصله‌ی r از مرکز حلقه واقع است. شار عبوری از حلقه را بدست آورید.

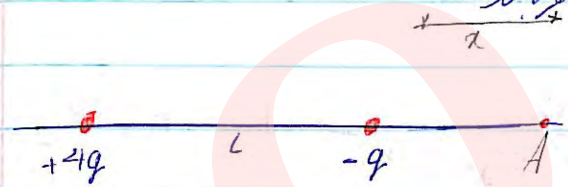


$$d\phi = E\,ds\cos\alpha = (2\pi r\,dr)\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+r^2)}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}}\right) \longrightarrow$$

$$\phi = \frac{qR}{2\varepsilon_0}\int \frac{r\,dr}{(r^2+R^2)^{3/2}} \qquad dr = \frac{du}{2r} \longrightarrow \frac{qR}{4\varepsilon_0}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \phi \longrightarrow$$

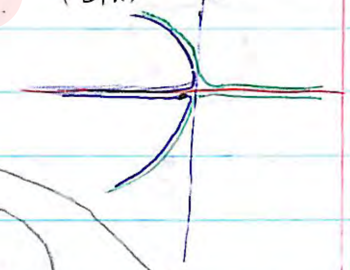
$$\phi = \frac{-qR}{2\varepsilon_0}\,u^{-1/2}\Big|_0^r \longrightarrow \phi = \frac{qR}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)$$

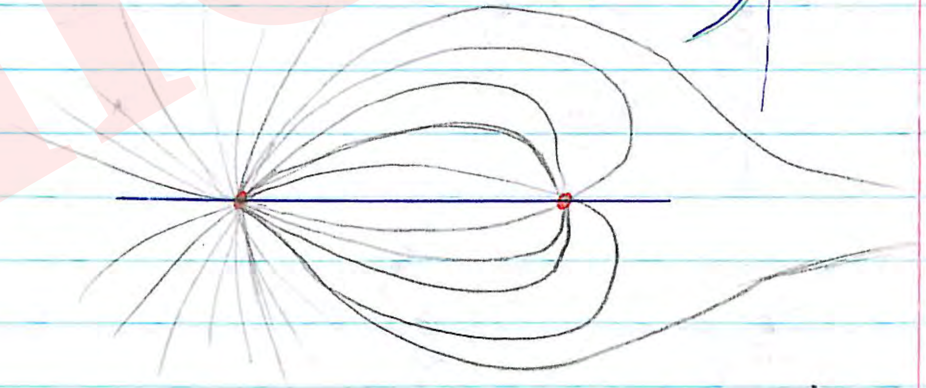
مثال: مطابق شکل دو بار نقطه‌ای $+4q$ و $-q$ در فاصله‌ی L از هم قرار دارند. مکان نقطه‌ای را بیابید که شدت میدان الکتریکی در آنجا صفر باشد.



$$E_1 + E_2 = 0 \longrightarrow \frac{4Q}{(L+x)^2} = \frac{Q}{x^2} \longrightarrow$$

$$4x^2 = L^2 + x^2 + 2Lx \longrightarrow (L-x)^2 = 0 \longrightarrow L = x$$





تعداد خطوط $4q$، 4 برابر تعداد خطوط $-q$ است.

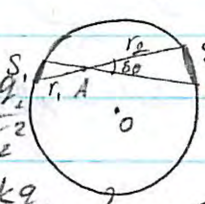
مثال: خطوط میدان در ناحیه‌ای از فضا به شکل زیر است. در نقطه A ذره‌ای جرم دار و با بار مثبت رها می‌کنیم. آیا ذره در صورتی که تنها نیروی وارد بر آن نیروی الکتریکی باشد بر روی

مثال: یک منبع نقطه‌ای نور در فاصله x از مرکز سطح مقطع استوانه‌ای به شعاع R قرار دارد. چه کسری از انرژی تولید شده در منبع به سطح داخلی استوانه می‌رسد؟

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{2\pi r^2(1-\cos\alpha)} = \frac{2}{1-\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{x^2+R^2}}{\sqrt{x^2+R^2}-x}$$

راه حل دوم: $\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{S_1}{S_2} \to \frac{2}{1-\cos\alpha} = \frac{q}{\varepsilon_0 \phi_1} \to \phi_1 = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\right)$

مثال: کره‌ای به شعاع R به طور حجمی با چگالی یکنواخت ρ باردار شده است. شدت میدان الکتریکی را در خارج و داخل کره بدست آورده و نمودار شدت میدان الکتریکی را برحسب فاصله از مرکز کره رسم کنید.



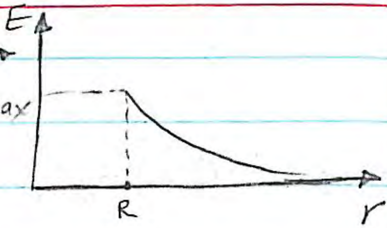
$$\rho = \frac{q_1}{S_1} = \frac{q_2}{S_2} , \quad \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2}$$

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} \quad E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} \to E_1 = E_2$$

$r < R \to E = 0 \qquad r > R \to q = 4\pi R^2 \rho$

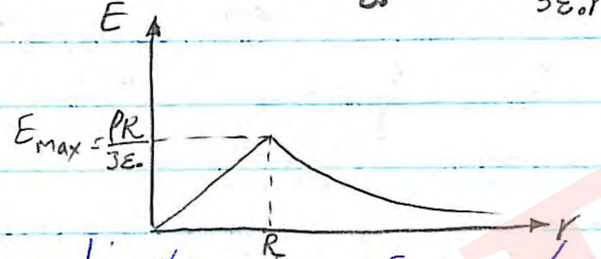
$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = E\int ds \to \frac{q}{\varepsilon_0} = (4\pi r^2)E \to E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$r < R:\ \phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \to$



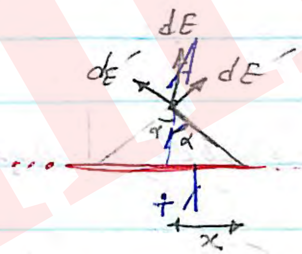
$$E = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$r > R:\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \phi = E(4\pi r^2) = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi R^3)}{\varepsilon_0} \to E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$



مثال: یک لوله مستقیم و بی‌نهایت با چگالی خطی بار λ به طور یکنواخت باردار شده است. مقدار شدت میدان الکتریکی را در فاصله r از سیم بدست آورید.

$$dE' = \frac{k\,dq}{r^2}\cos^2\alpha \qquad dq = \lambda\,dx$$



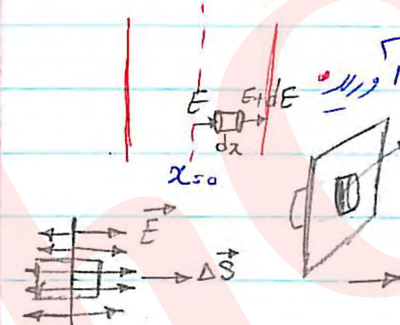
$$dx = \frac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{x}{r} \to \frac{dx}{d\alpha} = \frac{r}{\cos^2\alpha}$$

$$dE' = \frac{k}{r^2}\left(\frac{\lambda r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha \to dE' = \frac{k\lambda}{r}(d\alpha) \qquad dE = dE'\cos\alpha$$

$$dE = \frac{\lambda \cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r}\, d\alpha \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\Big|_0^{\pi/2} \sin\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

مثال: مطابق شکل یک فضای نیمه بی نهایت با چگالی یکنواخت $\rho+$ باردار کرده‌ایم.

نمودار شدت میدان الکتریکی برحسب x بدست آورید.

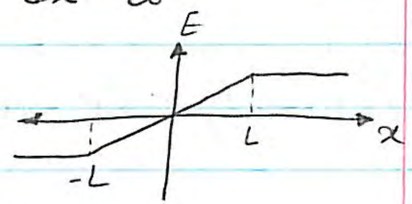


$$q = \sigma \Delta S$$

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} \rightarrow \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} = 2E\Delta S$$

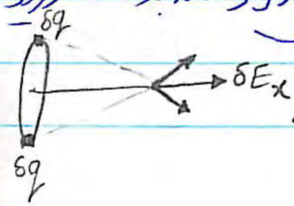
$$\rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$dq = \rho \Delta S\, dx \qquad \frac{\rho \Delta S\, dx}{\varepsilon_0} = dE\, \Delta S \rightarrow \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



مثال: حلقه‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید که با چگالی خطی بار λ بصورت یکنواخت

باردار شده است. میدان را برای محور حلقه و در فاصله x از مرکز حلقه بدست آورید.



$$\sum \delta E_x = E_x = \frac{2kx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \sum q_i \rightarrow$$

$$E_x = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \qquad \delta E_x = \frac{2k(\delta q)}{x^2+R^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}, \quad \sum q_i = \frac{Q}{2}$$

مثال: دو سیم مستقیم و بی نهایت به موازات یکدیگر و در فاصله L از یکدیگر قرار

دارند. چگالی خطی بار آنها به ترتیب $+2\lambda$ و $-\lambda$ می‌باشد.

الف) آیا خطوط میدان 3 بعدی هستند؟ خیر، 2 بعدی است.

ب) مکان نقطه‌ای را بیابید که شدت میدان در آن صفر باشد.

ج) خطوط میدان را رسم کنید. د) اگر از بی نهایت به این دو سیم نگاه

کنیم شکل خطوط میدان را چگونه می‌بینیم؟

ه) خط میدانی مطابق شکل با زاویه α نسبت به خط واصل دو بار از سیم

$+2\lambda$ جدا می‌شود. در بی نهایت با همین امتداد چه زاویه‌ای خواهد ساخت؟

مثال: در مثال حلقه باردار: الف) خطوط میدان را رسم کنید.

$dS = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$ وارد بر هر نیمکره را بیابید

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma\cdot 4\pi R^2\cdot dS\cdot\sigma}{R^2} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}$$

$$dF_{r_\theta} = 0\ ,\ dF_z = dF\cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cdot 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta \rightarrow$$

$$F_z = \frac{\sigma^2\pi R^2}{\varepsilon_0}\int \sin(2\theta)\, d\theta = \frac{\sigma^2\pi R^2}{\varepsilon_0}\Big|_0^{\pi/2} \frac{-\cos(2\theta)}{2} \rightarrow$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}(\pi R^2) \rightarrow \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0}$$

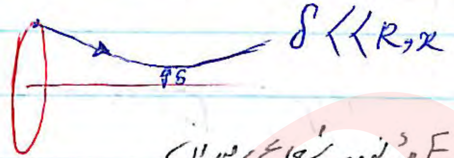
ج) $F \sim \frac{q^2}{r^2} = \frac{Q^2}{m^2} = \frac{c}{m^2}\ \Big|\ \sigma = \frac{Q}{\rho S^2} = \frac{c}{r^2} \rightarrow F \sim \sigma^2 R^2$

$$F \sim \sigma_1\sigma_2 R^2 \rightarrow F = \alpha(\sigma_1\sigma_2 R^2) \xrightarrow{\sigma_1 = \sigma_2} \alpha = \frac{\pi}{2\varepsilon_0} \rightarrow$$

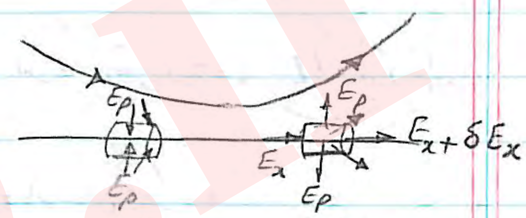
$$F = \frac{\pi}{2\varepsilon_0}\sigma_1\sigma_2 R^2$$

مثال: یک کره فلزی بدون بار در میدان یکنواخت E_0 قرار دارد. خطوط میدان را پس از گذاشتن کره در میدان رسم کنید.

ب) شکل یکی از خطوط و در شکل زیر نشان داده شده است. مقدار x_0 را بدست آورید.



E_p مؤلفه شعاعی میدان



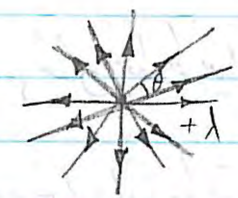
$x = x_0 \therefore E_p = 0$

در نقطه مماس و اطراف آن میدان max است $\leftarrow \frac{dE_x}{dx} = 0$

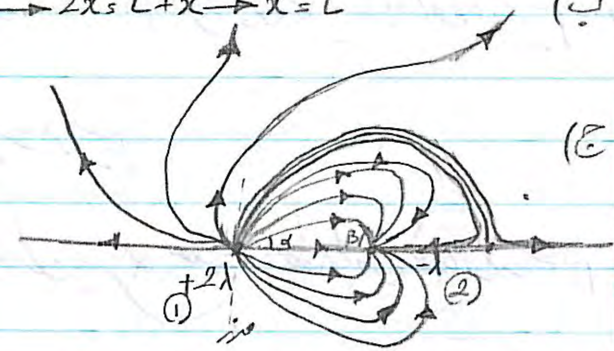
$$(x_0^2 + R^2)^{3/2} = \frac{3}{2}\cdot 2x_0^2(x_0^2 + R^2)^{1/2} \rightarrow 3x_0^2 = x_0^2 + R^2 \rightarrow x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

ب) $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \rightarrow \frac{2\lambda}{L+x} = \frac{\lambda}{x} \rightarrow 2x = L + x \rightarrow x = L$

د)



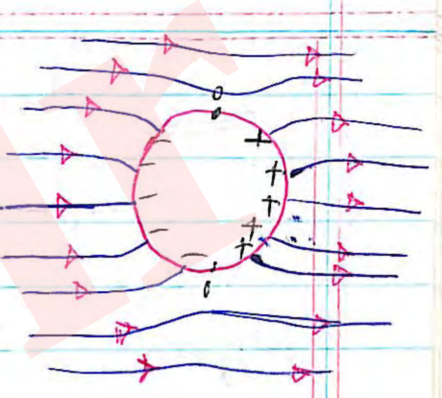
ج)



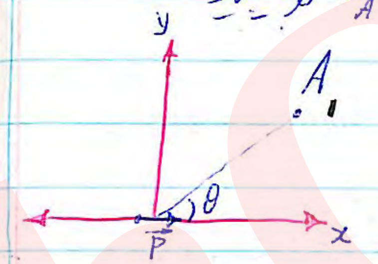
هـ) $N_1 = 2N_2 \quad N_1\alpha = 2\pi = N_2\beta \rightarrow 2\alpha = \beta \quad N' = N_2 \rightarrow \theta = \beta$

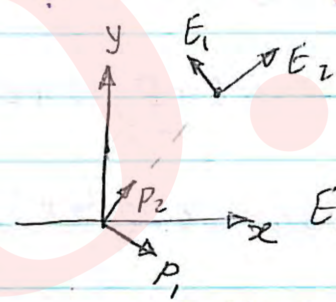
مثال: یک پوسته فلزی با چگالی بار سطحی σ باردار شده است. فشار

$E_A = \frac{\vec P}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$ $\quad E_B = \frac{\vec P}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$ $\quad \vec P = |q|\vec d$



مثال: در شکل مقابل $\vec E_A$ را بیابید.



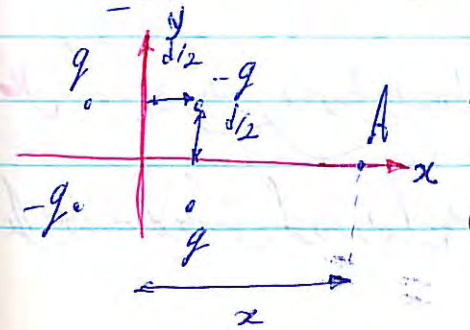


$E_1 = \frac{P_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$E_2 = \frac{P_2}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\qquad \vec E = \frac{KP}{r^3}(2\cos\theta\,\hat r + \sin\theta\,\hat\theta)$

مثال: مطابق شکل ۴ بار نقطه‌ای از فواصل یکسان $\frac{d}{2}$ از محور مختصات قرار گرفته‌اند. نقطه A در فاصله x از مبدأ مختصات قرار گرفته است. $(x \gg d)$

شدت میدان الکتریکی در نقطه A با $\frac{1}{x^n}$ متناسب است. مقدار n را بیابید.



$E' = \frac{kq}{\frac{d^2}{2} + (x-\frac{d}{2})^2}$

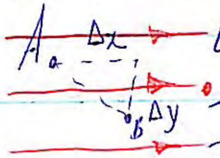
$E_2 = 2E'\sin\alpha$

$E_2 = \frac{k\vec P}{((x-\frac{d}{2})^2 + \frac{d}{2})^{3/2}}$

مثال: کره‌ای رسانا که بار خالص آن صفر است، درون میدان یکنواخت $\vec E$ قرار می‌دهیم. به علت وجود بارهای القایی بر روی سطح رسانا، کره رسانا را می‌توان به صورت یک دوقطبی در نظر گرفت. گشتاور دوقطبی را به دست آورید.

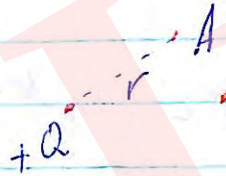
پتانسیل الکتریکی: $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ ← اختلاف پتانسیل الکتریکی

مثال: میدان یکنواخت E را در نظر بگیرید. فاصله افقی نقاط A و B، Δx و فاصله عمودیشان Δy است. اختلاف پتانسیل نقاط A و B را بیابید.



$\Delta U = -F\Delta x = -Eq\Delta x$ $\qquad \Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -E\Delta x$

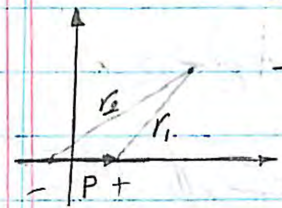
مثال: در شکل مقابل پتانسیل را در فاصله r از بار Q بیابید.



$V_A - V_\infty = \frac{W_{\infty \to A}}{q}$ $\qquad \Delta U = -\int_\infty^r \frac{kqQ}{r^2}dr = \frac{kqQ}{r}$ $\rightarrow V_A = \frac{kQ}{r}$

مثال: پتانسیل حاصل از دو قطبی نشان داده شده در شکل را در نقطه A بدست آورید.

گشتاور دو قطبی برابر با P می باشد. پتانسیل در نقطه A را بدست آورید.

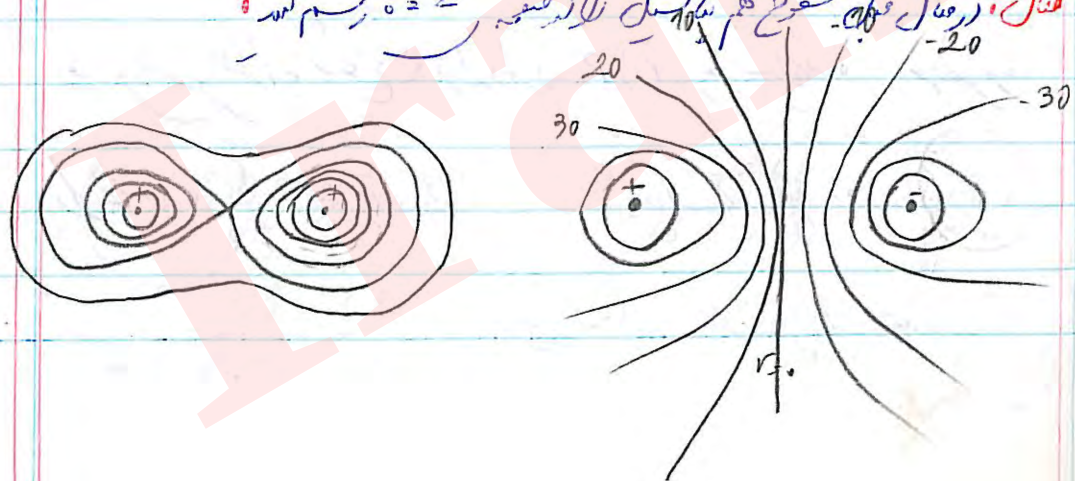


$$-\left(\frac{\vec{d}}{2}\right)+\vec{r}=\vec{r}_1 \to r_1^2=r^2+\frac{d^2}{4}-rd\cos\theta=r^2\left(1-\frac{d}{r}\cos\theta-\frac{d^2}{4r^2}\right)$$

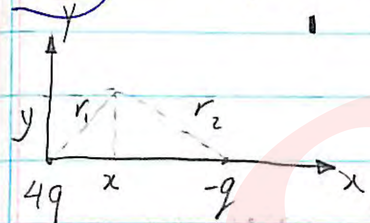
$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{r}\cos\theta+\frac{d^2}{4r^2}\right)^{1/2}}\simeq\frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}\simeq\frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

$$V=kq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{kq}{r}\left(\left(1+\frac{d\cos\theta}{2r}\right)-\left(1-\frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right)=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

مثال: در مثال قبل سطوح هم پتانسیل را در صفحه $z=0$ رسم کنید.



مثال: دو بار نقطه ای $4q$ و $-q$ در فاصله L از یکدیگر قرار دارند. معادله سطح پتانسیل صفر را برای این مجموعه بدست آورید.



$$V_A=\frac{4kq}{r_1}-\frac{kq}{r_2}=kq\left(\frac{4}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\to$$

$$V_A=kq\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{(L-x)^2+y^2}}\right)=0\to x^2+y^2=16(L-x)^2+16y^2$$

$$0=15x^2+16L^2-32xL+15y^2\to y^2+x^2-\frac{32}{15}Lx+\frac{16}{15}L^2=0\to$$

$$y^2+\left(x-\frac{16}{15}L\right)^2-\left(\frac{16}{15}L\right)^2+\frac{16}{15}L^2=0\to y^2+\left(x-\frac{16}{15}L\right)^2=\frac{16}{225}L^2$$

مثال: یک صفحه بسیار بزرگ رسانا را اگر به زمین متصل کنیم پتانسیل صفر خواهد داشت. یک بار نقطه ای مثبت در بالای این صفحه قرار می دهیم. خطوط میدان را بصورت خط پر و سطوح هم پتانسیل را خط چین رسم کنید.

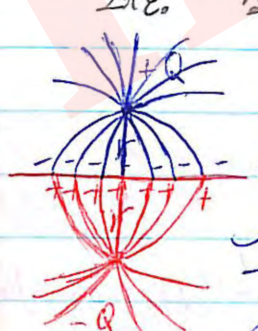
مثال: برای دو بار خطی $\lambda+$ و $\lambda-$ که طول آنها بی نهایت و موازی هم هستند سطوح هم پتانسیل را رسم کنید.

مثال: دو سیم $\lambda+$ و $\lambda-$ در فاصله مشخص از هم قرار دارند معادله سطوح هم پتانسیل را بدست آورید.

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

روش بار تصویر:



$$F = \frac{kQ^2}{(2r)^2}$$

مثال: یک بار نقطه ای به اندازه q در فاصله r از مرکز یک کره فلزی خنثی به شعاع R قرار دارد. $r>R$ پتانسیل کره را بیابید. بار تصویر

$+q \quad \frac{\sum q_i}{R} = 0 \qquad V_0 = \frac{kq}{r} + \frac{\sum q_i}{R} \quad \frac{\sum q_i}{R}$

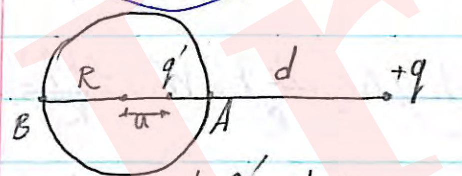
$$\to V = \frac{kq}{r}$$

مثال: اگر در مثال قبل کره را به زمین متصل کنیم اندازه بارهای القایی و نوع توزیع آنها را بدست آورید.

$\to \sum q_i = q' \qquad +q$

$$V_0 = \frac{kq}{r} + \frac{k\sum q_i}{R} = 0 \to q' = -\left(\frac{R}{r}\right)q$$

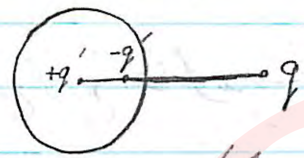
مثال: بار نقطه ای $q+$ در فاصله d از کره ای رسانا که به زمین متصل شده است قرار گرفته است. شعاع کره R می باشد. نیروی وارد بر بار نقطه ای را می توان به ترتیب زیر بدست آورد: ابتدا خطوط میدان را رسم کنیم. می توانیم با جایگزین کردن یک بار نقطه ای به نام بار تصویر کره را برداشته بطوری که خطوط میدان در فضای بیرون کره تغییر نکند. محل و اندازه بار تصویر را بدست آورید.



$$V_A = 0 \to \frac{kq'}{R-a} + \frac{kq}{d-R} = 0$$

$$V_B = 0 \to \frac{kq'}{R+a} + \frac{kq}{d+R} = 0 \to a = \frac{R^2}{d},\quad q' = -\left(\frac{R}{d}\right)q,\quad F = \frac{kq^2R}{d\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2}$$

مثال: اگر در مثال قبل کره به زمین متصل نباشد ولی بار خالص آن صفر باشد آنگاه نیروی وارد بر بار q را بدست آورید.



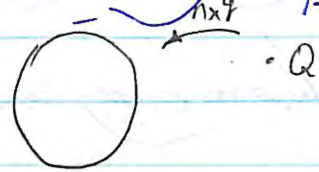
می‌خواهیم پتانسیل روی سطح کره $\frac{kq}{d}$ باشد پس اگر بار $+q'$ را در مرکز کره قرار دهیم داریم:

$$V=\frac{kq'}{R}=\frac{k\cdot\frac{Rq}{d}}{R}=\frac{kq}{d} \qquad F=\frac{kqq'}{d^2}-\frac{kqq'}{(d-\frac{R^2}{d})^2}$$

مثال: دو صفحه رسانای بی‌نهایت را در نظر بگیرید که بر هم عمودند. بار نقطه‌ای $+q$ در فاصله مساوی از هر دو صفحه قرار دارد.

مثال: به یک کره رسانا بار Q می‌دهیم. انرژی پتانسیل الکتریکی کل فضا را بدست آورید.

$Q=n.q$



$$\Delta V_1=0,\ W_1=0 \ / \ \Delta V_2=\frac{kq}{R},\ W_2=\frac{kq^2}{R} \ / \ \Delta V_3=\frac{2kq}{R},\ W_3=\frac{2kq^2}{R}$$

$$W_T=\sum W_i=\frac{kq^2}{R}\left(0+1+2+\dots+(n-1)\right)=\frac{kq^2}{R}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\simeq\frac{kq^2n^2}{2R}$$

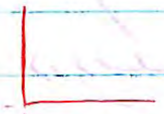
$=\frac{kQ^2}{2R}$

چگالی انرژی - انرژی در واحد حجم $u=\frac{U}{V}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

$$dU=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}(4\pi r^2dr),\quad E=\frac{kQ}{r^2}\to dU=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr\to$$

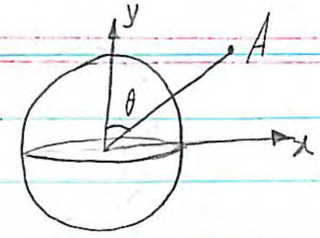
$$\int dU=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}dr\to U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

مثال: چه مقدار انرژی لازم است تا بار q را از محل نشان داده شده در شکل به بی‌نهایت منتقل کنیم.



مثال: حلقه‌ای با چگالی سطحی بار λ به شعاع R در نظر بگیرید. یک کره فلزی به شعاع a در مرکز حلقه قرار دارد $(a\ll R)$ اگر بارش صفر فرض کنید دوره‌ی تناوب نوسانات کم‌دامنه کوچک را بدست آورید.

مثال: کره‌ای فلزی بصورت دو نیم پوسته به چگالی سطحی آنها $+\sigma$ و $-\sigma$ می‌باشد. حداقل نیرویی که دو نیم پوسته را از هم جدا کند.

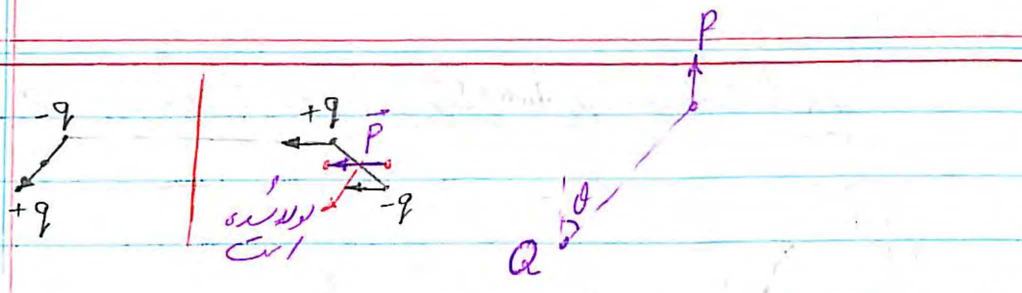


میدان را در نقطه A بیابید.

$dp = dq(2R\cos\alpha)$ $\quad dq = 2\pi\sigma R^2 \sin\alpha \, d\alpha$

مثال: دو دیسک به فاصله b و به شعاع a قرار دارند میدان را در محور و در فاصله

مثال: یک دوقطبی با گشتاور p در فاصله x از یک صفحه رسانای بی‌نهایت قرار دارد به نحوی که راستای دوقطبی بر صفحه عمود است. اگر جرم ذرات مثبت و منفی دوقطبی m و فاصله‌شان از هم d باشد ω را بدست آورید



$$\frac{1}{r'} \simeq \frac{1}{\left(r + \frac{d\cos\theta}{2}\right)} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{2r}\right)$$

$$U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{d\cos\theta}{2r}\right) - \left(1 + \frac{d\cos\theta}{2r}\right)\right] = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{d\cos\theta}{r}\right) =$$

$$-\frac{qQd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow U = \frac{-QP\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -EP\cos\theta = -\vec{E}\cdot\vec{P}$$

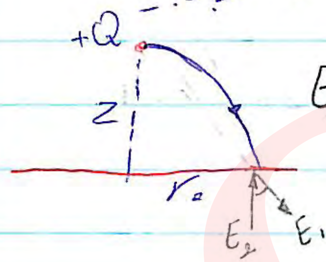
$$\begin{cases} \vec{E}_x = \dfrac{-P_x}{2\pi\varepsilon_0 (2x)^3}\hat{i} & P_x = -P\cos\theta \,, \; P_y = P\sin\theta \\ E_y = \dfrac{P_y}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^3}\hat{j} \end{cases}$$

$$U = -\left(\frac{P^2\cos^2\theta}{16\pi\varepsilon_0 x^3} + \frac{P^2\sin^2\theta}{32\pi\varepsilon_0 x^3}\right) = \frac{-P^2}{16\pi\varepsilon_0 x^3}\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{-P^2}{32\pi\varepsilon_0 x^3}\left(1 + \cos^2\theta\right) \quad \therefore \; U + E = \text{ثابت}$$

مثال: بار نقطه‌ای q در فاصله z از صفحه رسانای بی‌نهایت قرار دارد

خط میدانی به موازات صفحه از بار نقطه‌ای جدا می‌شود. مقدار r_0 را بیابید.



$$E_2 = E_1\cos\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{kQz}{(z^2+r^2)^{3/2}} \to$$

$$\sigma = \frac{Qz}{2\pi(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\frac{Q}{2} = \int \sigma\, ds \to \frac{1}{z} = \int \frac{2r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \to \frac{1}{2z} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2+z^2}}\right) \to$$

$$\frac{1}{2z} = \frac{1}{\sqrt{z^2+r_0^2}} \to r_0 = \sqrt{3}z$$

$$\phi = 2\frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right) = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \to \cos\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = 60$$

$$\tan\alpha = \sqrt{3} = \frac{r_0}{z} \to r_0 = \sqrt{3}z$$

مثال: اگر بارهای نقطه‌ای q_1 و q_2 را در نظر بگیرید به طوری که پتانسیل آنجا به ترتیب V_1 و V_2 باشد انرژی پتانسیل مجموعه چقدر است.

مثال: دو کره‌ی هم مرکز با بارهای q_1 و q_2 به ترتیب شعاع‌های a و b

انرژی

دارند. پتانسیل مجموعه را بدست آورید.

$$\frac{kq_2}{r}$$

q_1 q_2 $$U = \frac{1}{2}\sum q_i V_i = \frac{q_1V_1 + q_2V_2}{2} = \frac{kq_1q_2}{r}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum q_i V_i = \frac{kq^2}{2R}$$

$$E_2 = \frac{k(q_1+q_2)}{r^2} \qquad V_2 = -\int_\infty^b E\,dr = \frac{k(q_1+q_2)}{b}$$

$$\Delta V = -\int E_1\,dr = -\int_b^a \frac{kq_1}{r^2}\,dr \to V_1 = V_2 + kq_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) =$$

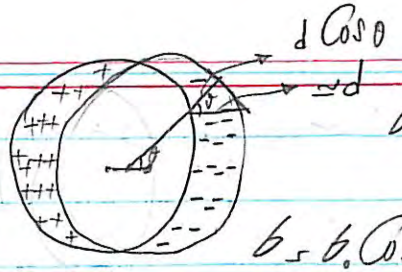
$$\frac{kq_1}{a} + \frac{kq_2}{b} \qquad U = \frac{1}{2}\left[kq_1^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{kq_2(q_1+q_2)}{b}\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1^2}{a} + \frac{q_2^2 - q_1^2 + q_1q_2}{b}\right]$$

مثال: پتانسیل الکتریکی میدان $\vec{E} = a(y\hat{i} + x\hat{j})$ را بیابید.

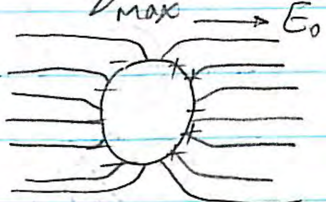
$$\vec{E} = -\nabla\phi = -2ax\hat{i} + 2ay\hat{j} = 2a(-x\hat{i} + y\hat{j}) \to$$

$$E_x = -2ax,\ E_y = 2ay \qquad \frac{E_x}{E_y} = \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \to$$



$$\sigma = \rho \times L \rightarrow \sigma_\theta = \rho(d\cos\theta) \rightarrow \sigma_{max} \rightarrow E_0$$

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$



$$E = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0} = E_0 \rightarrow \sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$$

مثال: دو میله بی نهایت با چگالی خطی $+\lambda$ و $-\lambda$ در فاصله $2d$ از یکدیگر قرار دارند. معادله سطوح هم پتانسیل را بدست آورید.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow$$

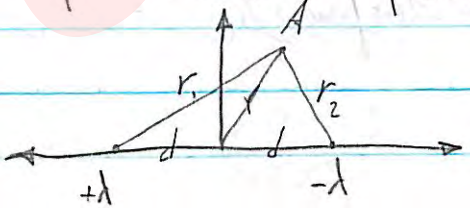
$$V = -\int E\,dr = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r \rightarrow V_A = V_{-\lambda} + V_{+\lambda} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_1 - \ln r_2) = c'$$

$$\rightarrow \frac{(d-x)^2+y^2}{(d+x)^2+y^2} = c \rightarrow d^2+x^2-2xd+y^2 = cd^2+cx^2+2cxd+cy^2$$

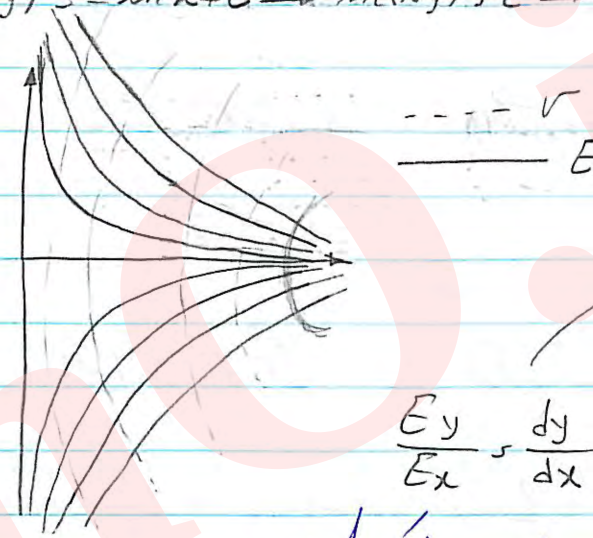
$$\rightarrow x^2(c-1)+2x(c+1)d+y^2(c-1)+(c-1)d^2 = 0 \rightarrow$$

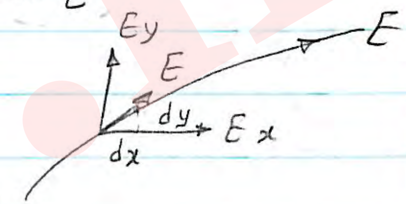
$$x^2+2d\left(\frac{c+1}{c-1}\right)x+y^2+d^2 = 0 \rightarrow \left(x-\left(\frac{c+1}{c-1}\right)d\right)^2+y^2 = \left(\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2-1\right)d^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = d\left(\frac{c+1}{c-1}\right) \\ y_0 = 0 \\ R = d\sqrt{\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2-1} \end{cases}$$



$$\ln(y) = -\ln x + c \rightarrow \ln(xy) = c \rightarrow xy = c' \rightarrow y = \frac{c'}{x}$$

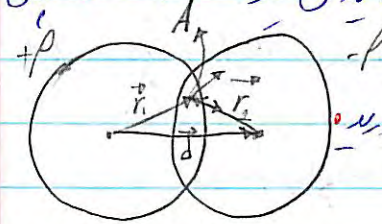




$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$$

مثال: $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ میدان وسط کره را بیابید.

مثال: دو کره با چگالی حجمی یکنواخت $+\rho$ و $-\rho$ باردار شده اند. فاصله مراکز دو کره d می باشد. $(d<R)$ ثابت کنید در فضای مشترک میدان یکنواخت است. سپس جهت و شدت میدان را در این فضا بدست آورید.



$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{d})$$

مثال: دو کره‌ی هم مرکز به شعاع a و b به ترتیب دارای بارهای +q ،
-q می‌باشند. انرژی پتانسیل الکتریکی مجموعه را بدست آورید و سپس
ثابت نشان دهید $\frac{q}{\Delta\phi}$ یک ثابت هندسی است. $r<a , r>b : (E=0)$

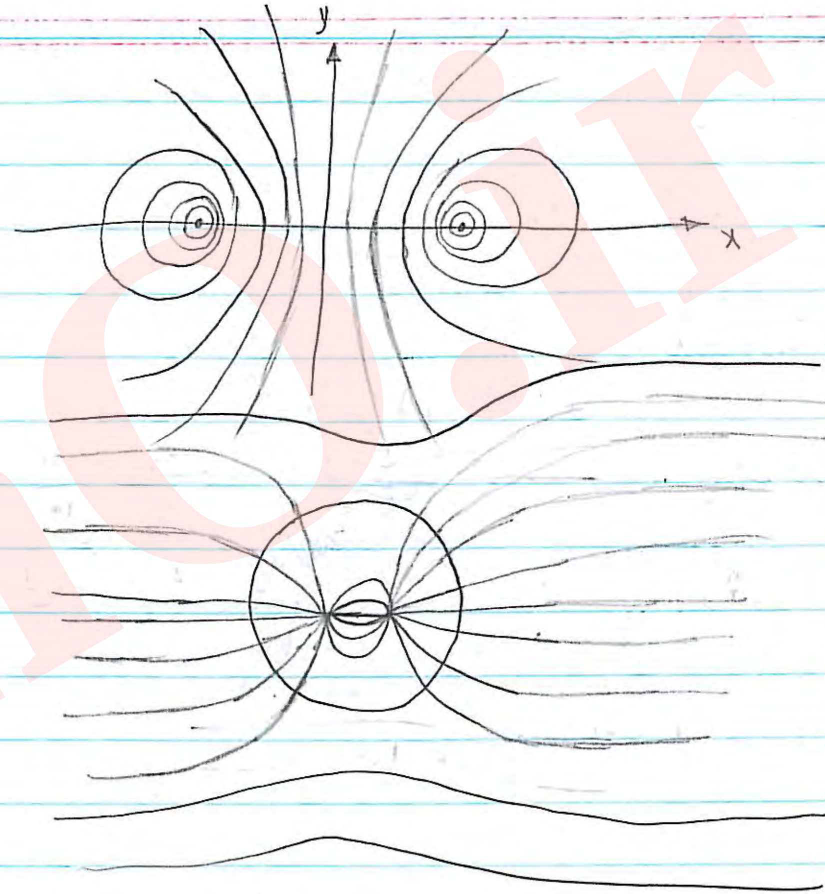
$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad V=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ $\quad dU=q\,dV \to dU=CV\,dV \to$

$U=\frac{1}{2}CV^2 \to U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

مثال: 3 پوسته به شعاع‌های a، b، c به بارهای +q ، -2q ، +3q می‌باشند
نمودار میدان و پتانسیل را برحسب r رسم کنید. اگر پوسته‌ی میانی را به زمین
وصل کنیم بار الکتریکی بر روی سطوح داخلی (و خارجی) هر پوسته چقدر خواهد شد؟

$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$, $E_2=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$, $E_3=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

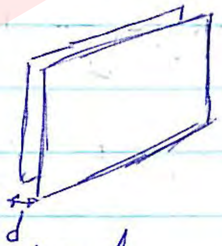


مثال: یک استوانه‌ی بی‌نهایت طویل و خنثی را در نظر بگیرید بطوری که در یک میدان
یکنواخت به شدت $\vec{E}$ قرار داده می‌شود. میدان را در تمام نقاط فضا
بدست آورید.

$V_3 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 c}$ $\qquad V_3 - V_2 = -\int_c^b E_2 \cdot dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^b \frac{dr}{r^2} \to$

$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{c}-\frac{1}{b}\right)$ $\qquad \Delta V_{2,1} = -\int \frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \to$

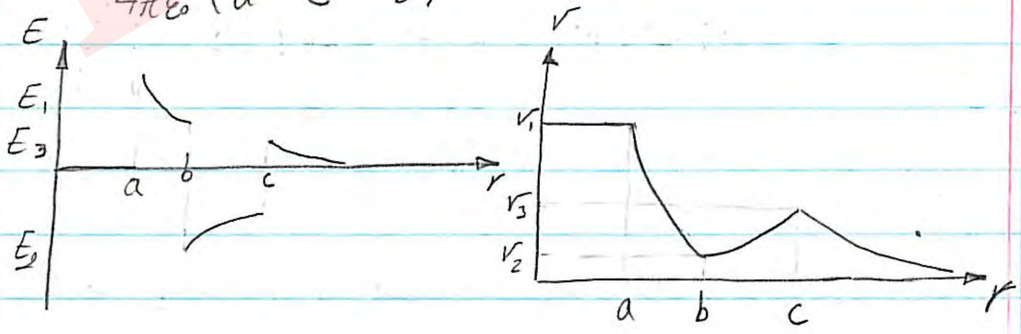
$E = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$ $\qquad \Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$



ظرفیت خازن $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ فاراد (F)

$d \ll A$

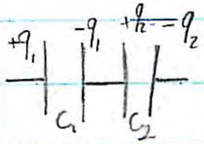
$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{c}-\frac{2}{b}\right)$



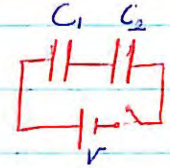
مثال: خازن تخت از دو صفحه ی موازی و مساحت A و فاصله ی بین صفحات d تشکیل شده است. ظرفیت آن را بیابید.

$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

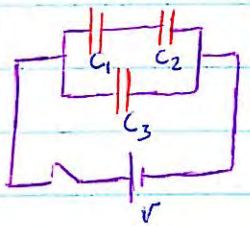
مثال: دو خازن با ظرفیت C_1 , C_2 بدون بار را در نظر بگیرید. آنها را توسط یک کلید با ولتاژ بالای V وصل می کنیم. بار نهایی هر خازن را بدست آورید.



$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$ $\qquad q_1 = q_2 = q$



$V = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \to q = \frac{V}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} \to \boxed{C_T = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ خازن های سری



مثال: بار هر خازن را در حالت تعادل بیابید.

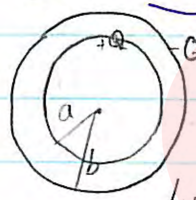
$V_1 + V_2 = V$ $\qquad V_3 = V$ $\to q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2 V}{C_1 + C_2}$

$q_3 = C_3 V$

مثال: خازنی با ظرفیت C را که اختلاف پتانسیل بین صفحات آن V است را در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل خازن را بدست آورید.

$dU = q\,dV$, $q = CV \to U = \frac{1}{2}CV^2$

مثال: دو پوسته هم مرکز به شعاع‌های a و b را در نظر بگیرید به طوری که پوسته خارجی به زمین متصل شده و بار پوسته داخلی q+ می‌باشد. انرژی پتانسیل الکتریکی مجموعه را بیابید.



$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \rightarrow dU = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \rightarrow U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} , \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

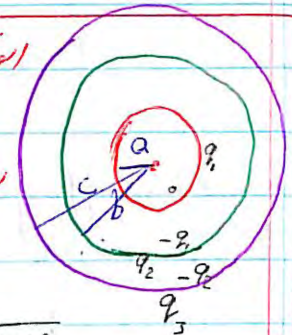
$$\Delta V = -\int E \cdot dr = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V \rightarrow$$

$$U = \frac{q_1 V_1 + q_2 V_2}{2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

مثال: ۳ پوسته نشان داده شده در شکل را به گونه‌ای در نظر بگیرید. پوسته میانی به زمین وصل شده و دو پوسته داخلی و خارجی با یک سیم به هم متصل شده‌اند. به پوسته میانی بار Q می‌دهیم

الف) مقدار بار بر روی سطح داخلی و خارجی هر پوسته چقدر است؟

ب) انرژی پتانسیل مجموعه را بدست آورید.



$$E_3 = \frac{q_A + q_B + q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2} , \quad E_2 = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2} , \quad E_1 = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_3 = \frac{q_a + q_b + q_c}{4\pi\varepsilon_0 c} \qquad V_3 - V_2 = -\frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[(q_a + q_b)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + (q_a + q_b + q_c)\frac{1}{c}\right] \rightarrow$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_a + q_b}{b} + \frac{q_c}{c}\right) \qquad V_1 - V_2 = \frac{-q_a}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} =$$

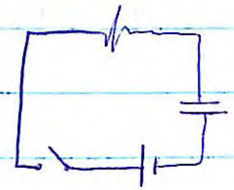
$$\frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \rightarrow V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_a}{a} - \frac{q_a}{b} + \frac{q_a}{b} + \frac{q_b}{b} + \frac{q_c}{c}\right) \rightarrow$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{b} + \frac{q_c}{c}\right)$$

$$V_1 = V_3 , \ V_2 = 0 \rightarrow \frac{q_a}{a} + \frac{Q}{b} = \frac{q_a}{c} + \frac{Q}{c} \rightarrow q_a = -\left(\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}\right)Q$$

$$\rightarrow q_a = \frac{-(c-b)a}{b(c-a)}Q , \quad q_c = \frac{-c^2 Q}{b^2}\left(\frac{b-a}{c-a}\right) , \quad q_b = Q$$

$q_1 = q_2 = q = C_T V = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}$



مدارهای RC

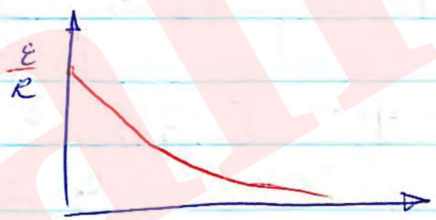
$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0 \qquad I = \frac{dq}{dt}$

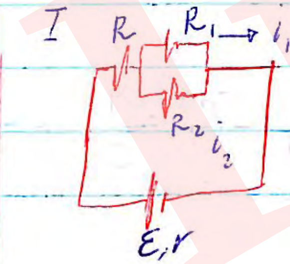
$\mathcal{E} - R\dot{q} - \frac{q}{C} = 0 \qquad t=0,\ q=0 \to A+B=0 \qquad q = Ae^{\alpha t}+B$

$q = A(e^{\alpha t}-1) \qquad t\to\infty \begin{cases} q = C\mathcal{E} \\ I = 0 \end{cases} \qquad C\mathcal{E} = Ae^{\alpha t}+B$

$\alpha<0,\ A=-C\mathcal{E} \qquad q = C\mathcal{E}(1-e^{\alpha t})$

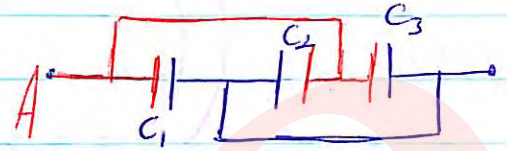
$\mathcal{E} = R(-\alpha C\mathcal{E}e^{\alpha t})+\mathcal{E}(1-e^{\alpha t}) \qquad -\alpha RC\mathcal{E} = \mathcal{E} \to \alpha = -\frac{1}{RC}$





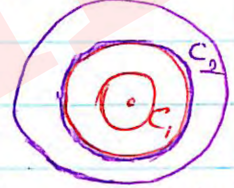
مثال: شدت جریان ها را بیابید.

$U = \frac{1}{2}(q_a V_1 + q_b V_2 + q_c V_3)$

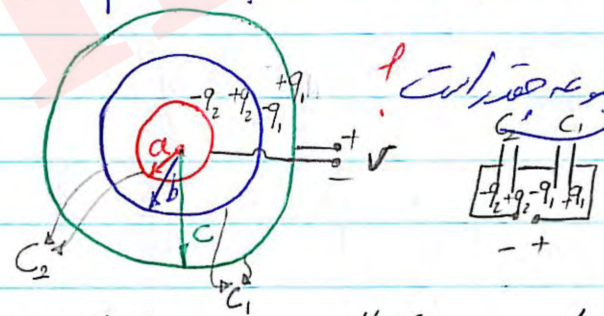


$V_1 = V_2 = V_3 = V_A - V_B$

موازی $C_{1,2,3}$



مثال: 3 پوسته با شعاع های a و b و c بطوری که پوسته داخلی و خارجی به دو سر V وصل شود. الف) ظرفیت معادل را بیابید ب) بار تمام سطوح را بدست آورید ج) انرژی مجموعه چقدر است؟

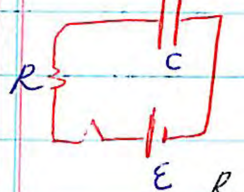


$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} \qquad C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \qquad \frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \to$

$C_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \to C_T = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}$

$$\frac{q}{C} = IR_2\left(\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\right) \rightarrow q = \frac{C\varepsilon R_2}{R_1+R_2}$$

مثال: خازن قبل از بستن کلید بدون بار است. از لحظه‌ای که کلید بسته می‌شود تا شارژ شدن خازن چه مقدار گرما در مقاومت R آزاد خواهد شد؟



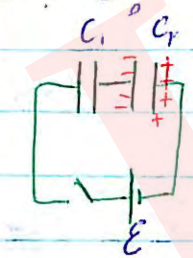
$$I = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad W_R = \int RI^2\,dt =$$

$$R\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{-RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^\infty =$$

$$-\frac{\varepsilon^2 C}{2}(0-1) = \frac{\varepsilon^2 C}{2} \qquad / \qquad W_\varepsilon = W_R + \Delta U_C \rightarrow$$

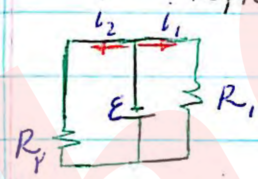
$$(q_{net})\varepsilon = W_R + \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \rightarrow W_R = \frac{C\varepsilon^2}{2}$$

مثال: خازن C_2 قبل از بستن کلید با ولتاژ V_0 باردار شده است. پس از بستن کلید بارهای نهایی هر دو خازن را بدست آورید.



$$\begin{cases} i_1R_1 = i_2R_2 \\ \varepsilon - Ir - IR - i_1R_1 = 0 \\ i_1+i_2 = I \end{cases} \xrightarrow{①,②} I = i_1\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right), \quad \varepsilon = I(r+R)+i_1R_1$$

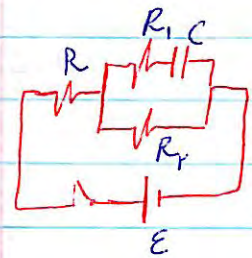
$$\rightarrow i_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1R_2+(R_1+R_2)(r+R)}$$



$$\varepsilon - Ir - i_1R_1 = 0 \qquad \varepsilon - Ir - i_2R_2 = 0$$

$$i_1+i_2 = I \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

مثال: در مدار مقابل بلافاصله پس از بسته شدن کلید جریان تمام شاخه‌ها را بدست آورید.



$$R_T = R + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T} = \frac{\varepsilon}{R+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} \qquad i_2 = I$$

$$\varepsilon - IR - IR_2 = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R+R_2} \qquad V_C = V_{AB} = IR_2 = \frac{q}{C} \rightarrow$$

مثال: کره‌ای رسانا در میدان یکنواخت E قرار دارد. خط میدانی را در نظر بگیرید که در زاویه‌ی θ از کره جدا می‌شود. در فواصل دور فاصله خط میدان از محور را برحسب θ بیابید.

مثال: هواپیمایی با سرعت $|\vec{v}| = v$ در ارتفاع h در حال پرواز است. در زمان $t=0$ در زمان T و قبل از آنکه به زمین برسد منفجر می‌شود. قطعات گلوله در اثر انفجار در همه‌ی جهات رها می‌شود. در زمان t' مکان هندسی قطعات گلوله را بدست آورید.

مثال: ذرات 1، 2 با سرعت‌های ثابت v_1، v_2 حرکت می‌کنند. در یک لحظه‌ی دلخواه از زمان که مبدأ زمان است بردارهای مکان این دو ذره به ترتیب r_{01} و r_{02} می‌باشد. مشخص کنید در چه لحظه‌ای فاصله‌ی 2 ذره Min است. r_{min} را بدست آورید و مشخص کنید در چه شرایطی دو ذره با هم برخورد می‌کنند.

مثال: دو کره‌ی فلزی رسانا به شعاع R در فاصله‌ی d از یکدیگر قرار دارند. $(d \gg R)$ روی یکی بار q و دیگری $-q$ می‌گذاریم.

الف) با فرض اینکه دو بار آنقدر از یکدیگر دورند که روی توزیع بار بر یکدیگر تأثیر ندارند. ب) به خاطر میدان هر کدام از کره‌ها روی کره‌ی دیگر یک دوقطبی به وجود می‌آورد. این دوقطبی را تا مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به $(\frac{d}{R})$ مشخص کنید. ج) با استفاده از (ب) دقت در محاسبه‌ی ظرفیت را تا مرتبه‌ی $(\frac{d}{R})^2$ بهبود دهید.

دو کره با پتانسیل‌های φ_1، φ_2 با شعاع یکسان R در فاصله‌ی یکسان $3R$ از یکدیگر قرار دارند. بار موجود بر روی هر کره را بدست آورید و سپس ظرفیت مجموعه را مشخص کنید.

دو صفحه خازنی در فاصله اولیه d قرار دارند یکی از صفحات ثابت و دیگری

توسط فنری با ضریب سختی k به یک دیوار محکم شده است صفحات را به ولتاژ V

متصل می‌کنیم فاصله ~~اولیه~~ نهایی صفحات را بیابید

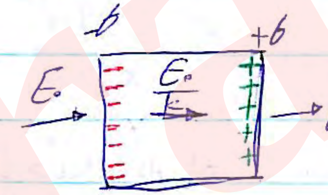
خازن به مساحت A افقی شکل مقابل قرار دارد

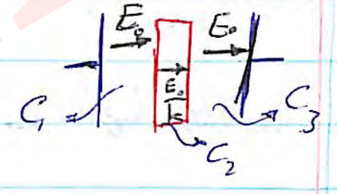
پس بسته شدن کلید ارتفاع آب را بیابید

$$C = \frac{\varepsilon_0 a(a-h)}{d} + \frac{k\varepsilon_0 ah}{d} \to C = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(a-h+kh)$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 - mg\left(\frac{h}{2}\right), \quad \frac{dU}{dh} = 0 \to \frac{\varepsilon_0 a V^2}{2d}\left(a+h(k-1)\right) = \frac{\rho g a h^2 d}{2}$$

$$\frac{E_0}{k} = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to$$

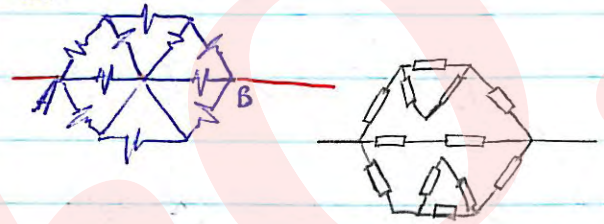


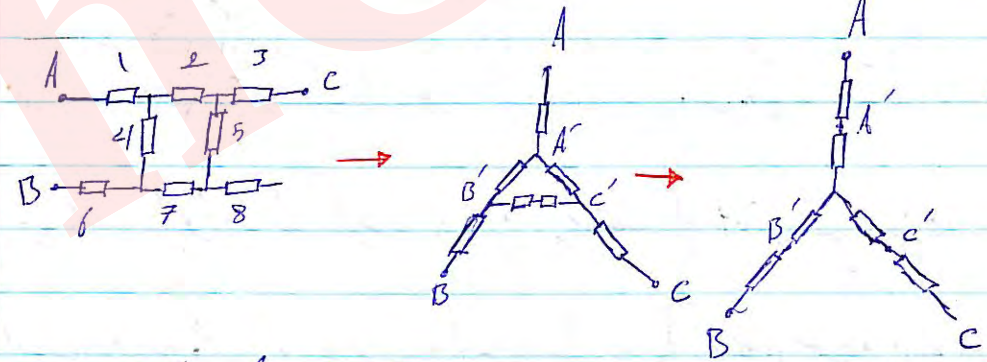


$$\sigma = \varepsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

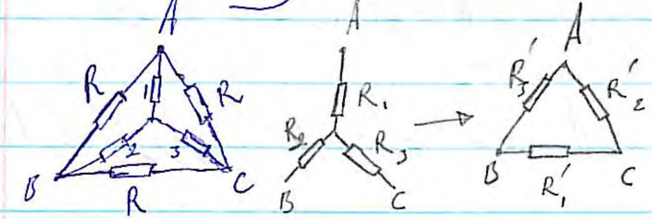
~~با انتقال فاصله d از هم یک بر قرار دارند~~

مثال: مقاومت معادل بین A و B را با شرط اینکه مقاومت ~~...~~ همه آنها R باشد بدست آورید





مثال: در شکل زیر داریم $V_A = V^+$, $V_B = V_C = 0$ ولتاژ نقطه O را بدست آورید



$R_3' = R_1 + R_2$

$R_2' = R_4 + R_3$

$R_1' = R_2 + R_3$

مثال ۵ الف) اگر خط میدانی با زاویه کوچک θ نسبت به محور z از بار $+q$ جدا شود مشخص کنید با چه زاویه‌ای نسبت به همان محور وارد بار $-2q$ خواهد شد؟

ب) در فواصل بسیار دور بر روی محور z میدان، مولفه شعاعی میدان حاصل از این ۴ قطبی را با تقریب اول لازم بیابید.

ج) خطوط میدان را رسم کنید. ت) میدان شعاعی را تا تقریب ۱ بدست آورید.

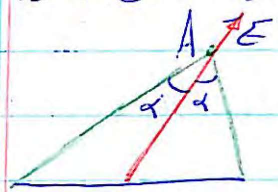
$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(z-d)^2} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{(z+d)^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\left(1-\frac{d}{z}\right)^{-2} + \left(1+\frac{d}{z}\right)^{-2} - 2\right)$$

$$\to E_z = \frac{3qd^2}{2\pi\varepsilon_0 z^4} \qquad -E_z\pi\rho^2 + (E_z+dE_z)\pi\rho^2 + E_\rho 2\pi\rho \times dz = 0$$

$$\to \frac{dE_z}{dz} = \frac{-2E_\rho}{\rho} = \frac{-6qd^2}{\pi\varepsilon_0 z^5} \to E_\rho = \frac{-3qd^2}{\pi\varepsilon_0 z^5}(\vec{\rho})$$

مثال: یک میله با چگالی دلخواه و بصورت خطی باردار شده است. ثابت کنید میدان در هر نقطه دلخواه در راستای نیمساز

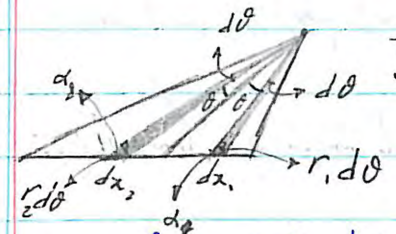
زاویه‌ای است که بین دو خطی که از آن نقطه به دو سر میله وصل می‌شود



$dE_1 \sin\alpha = dE_2 \sin\alpha \to$ بوجود می‌آید

$$+\lambda \qquad \frac{k\,dq_1}{r_1^2} = \frac{k\,dq_2}{r_2^2} \to \frac{dx_1}{dx_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{r_1 d\theta}{dx_1}, \quad \sin(\alpha_2) = \frac{r_2 d\theta}{dx_2} \to \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)$$



$$\frac{r_1}{\sin\alpha_1} = \frac{r_2}{\sin\alpha_2} \to \frac{dx_1}{dx_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

مثال: مربعی از ۴ میله به طول L که با چگالی خطی λ باردار شده است در نظر بگیرید. از مرکز مربع عمود بر سطح آن به اندازه δx بالا می‌رویم. اگر δx در برابر ضلع مربع بسیار کوچک باشد میدان در این نقطه چقدر است؟

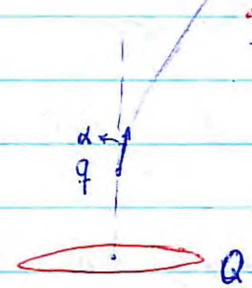
مثال: میله ای به طول $2a$ با چگالی بار خطی $\lambda+$ باردار شده است. مرکز میله در مبدأ مختصات قرار گرفته است.

الف) پتانسیل حاصل از میله را در نقطه دلخواه a با مختصات ρ و z بدست آورید.

ب) معادلات سطوح هم پتانسیل را بدست آورید.

ج) اگر به یک پوسته با معادله حجم $1=\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$ بار q بدهیم رابطه چگالی سطحی بار بر روی این بیضی‌گون را بدست آورید.

مثال: یک حلقه به بار Q زیر یک بار نقطه‌ای با بار q قرار دارد. β را بدست آورید.

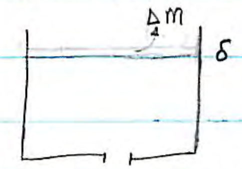


$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2(1-\cos\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \varphi_2 = \frac{q+Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)$$

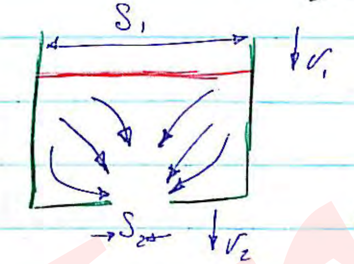
مکانیک سیالات

$$\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{q}{q+Q}}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

مثال: ظرفی استوانه‌ای شکل در نظر بگیرید بطوری که تا ارتفاع h از مایع پر شده است. اگر در کف استوانه سوراخ کوچکی بوجود آوریم مایع با چه سرعتی از آن خارج می‌شود؟



$$\begin{cases} \Delta U = -\Delta m g h \\ \Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v^2 \end{cases} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



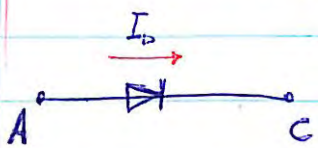
$$\Delta K = \frac{\Delta m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta U = \Delta m g h$$

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$$

مثال: اختلاف فشار بین نقاط A و B را بدست آورید.

نکته: دیود ایده‌آل به شکل زیر رفتار می‌کند

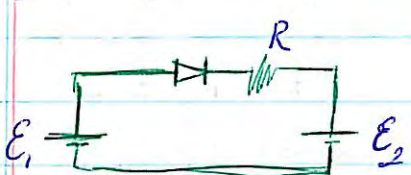


دیود روشن $I_D \neq 0$ $V_{AC} = 0$

دیود خاموش $I_D = 0$ $V_{AC} < 0$

$V_{AC} = V_A - V_C$ $V_A > V_C \to$

مثال: در شکل زیر دیود ایده‌آل بوده ولی باتری $\mathcal{E}_2$ ولتاژ متغیر دارد. $\mathcal{E}_2$ را از صفر تا بی‌نهایت زیاد می‌کنیم. نمودار $\mathcal{E}_2$ را برحسب جریان رسم کنید.



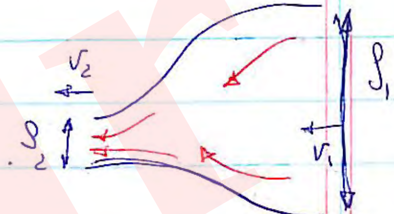
الف) $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$

ب) $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ حالت مرزی $I = 0$ ج) $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$

الف) $I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R}$ $V_{AC} = 0$

ج) $-\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - V_{AC} - IR = 0 \xrightarrow{I=0} V_{AC} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \to V_{AC} < 0$

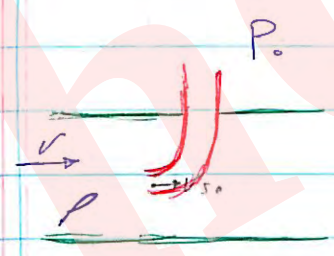
$\dot{m} = \frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$ $S_1 \delta_1 = S_2 \delta_2 = \frac{\dot{m}\,\delta t}{\rho}$



$(P_2 - P_1) \cdot S\delta + \frac{\Delta m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 0 \to$

$(P_1 - P_2) \cdot \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{\Delta m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \to \Delta P = \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2)$

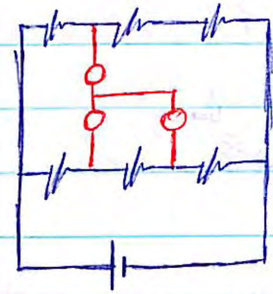
مثال: ارتفاع h را بدست آورید.



قانون برنولی
$$\begin{cases} P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = C \\ P_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = P_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 \end{cases}$$

$P_A = \frac{1}{2}\rho v^2$, $P_B = \rho g h + P_0 \to \frac{1}{2}\rho v^2 = P_0 + \rho g h \to h = \frac{v^2}{2g} + \frac{P_0}{\rho g}$

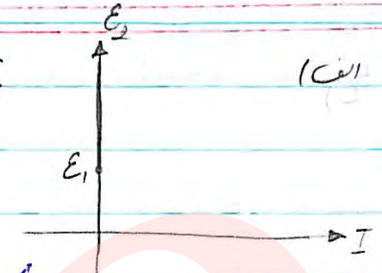
مثال:

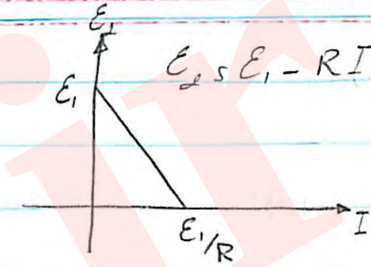


ج) $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - RI$

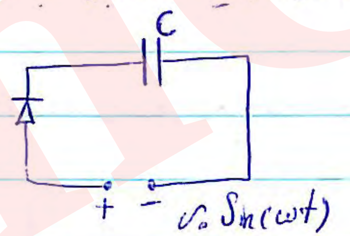
الف)

$\rightarrow V_A < V_C$



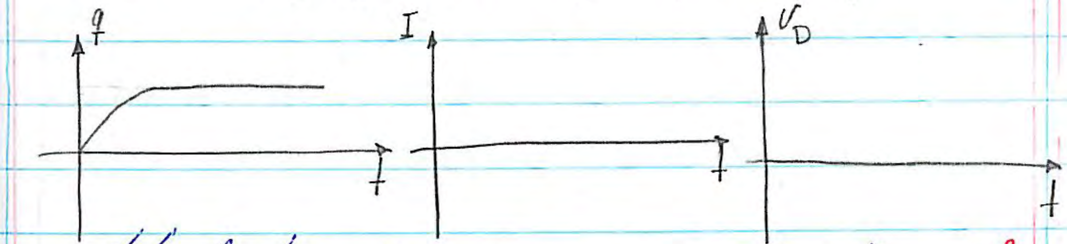


مثال: یک منبع ولتاژ متناوب را به خازنی با ظرفیت C وصل می‌کنیم (۰= ج). نمودار ۱) جریان ۲) بار خازن ۳) ولتاژ دو سر دیود را برحسب زمان رسم کنید.



$0 < t < \frac{T}{4}$: $q = CV_0 \sin\omega t \rightarrow I = C\omega V_0 \cos\omega t$

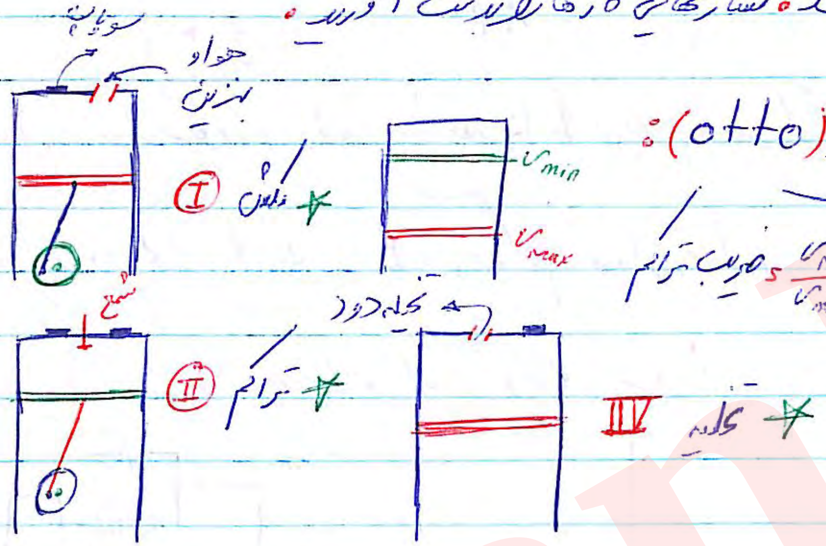
$V_0 \sin(\omega t) + (V_B - V_A) - V_C = 0 \rightarrow V_D = V_0(\sin\omega t - 1)$.

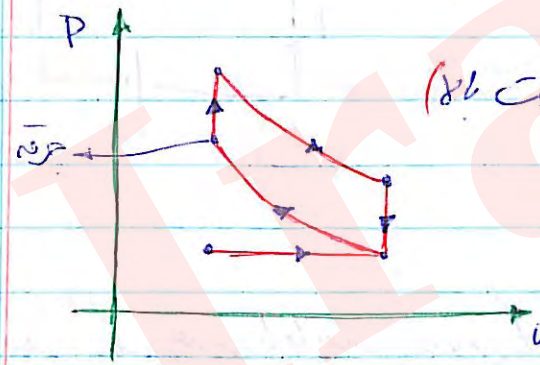


مثال: دو ظرف A و B به حجم‌های V_A و V_B توسط یک شیر به یکدیگر متصل شده‌اند. در A، n_1 مول گاز با دمای T_1 و در B، n_2 مول گاز با دمای T_2 وجود دارد. شیر را باز می‌کنیم تا پس از گذشت زمان طولانی دما به T برسد. فشارهای گازها را بدست آورید.

چرخه اتو (otto):

ضریب تراکم $= \frac{V_{max}}{V_{min}}$



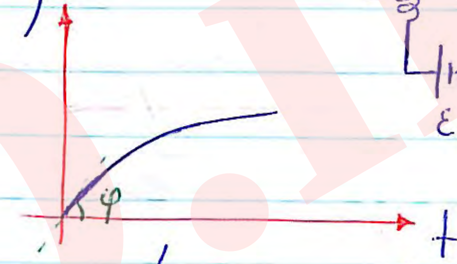


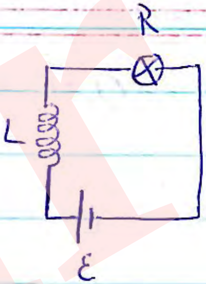
II و IV بی‌دررو هستند (سرعت بالا)

$U = \frac{1}{2} L I^2$, $L = \frac{N^2 k \mu_0 A}{l}$

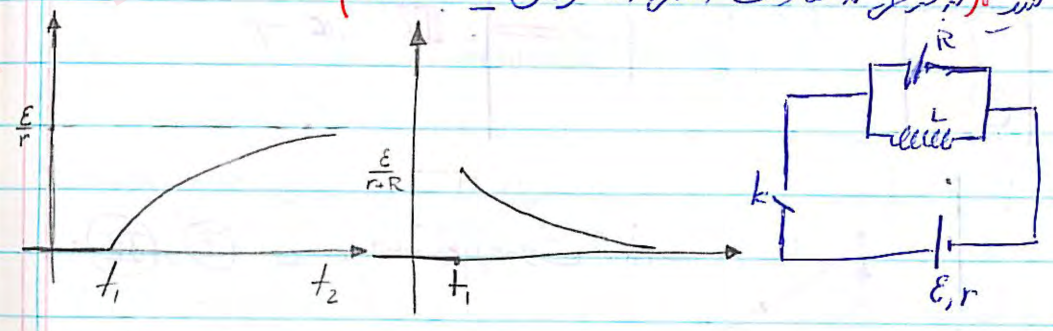
$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

$\tan\varphi = \frac{\varepsilon}{L}$





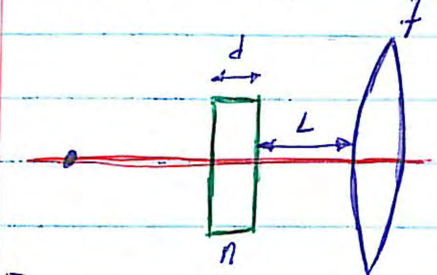
مثال: در مدار شکل زیر در لحظه t_1 کلید k را می‌بندیم. پس از گذشت مدتی طولانی و در لحظه t_2 کلید k را باز می‌کنیم. نمودار i را برحسب زمان رسم کنید. (به شرطی که مقاومت اهمی القاگر آن 0 باشد.)

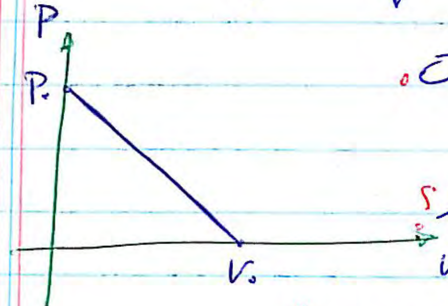


$U = \frac{1}{2} L I^2$

مثال: یک عدسی با فاصله کانونی f که همگرا است در نظر بگیرید به طوری که

یک تیغه شیشه‌ای نازک در مسیر شیء نقطه‌ای نور و عدسی قرار گرفته است. محل تصاویر را در حالات مختلف بدست آورید. $(D > 2f)$

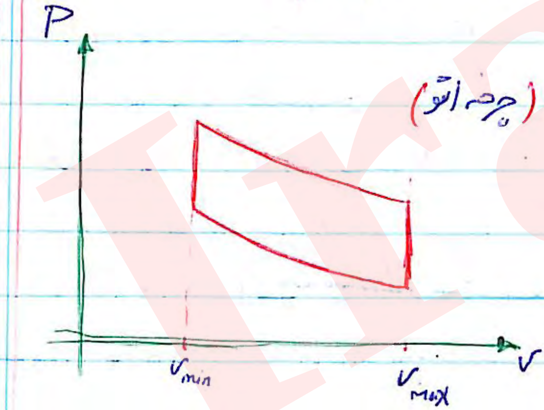




مثال: نمودار P-V فرآیندی به شکل زیر است.

الف) T_{max} در این فرآیند در چه حجمی رخ می‌دهد؟

ب) در چه بازه‌هایی گاز گرما می‌گیرد و از دست می‌دهد؟

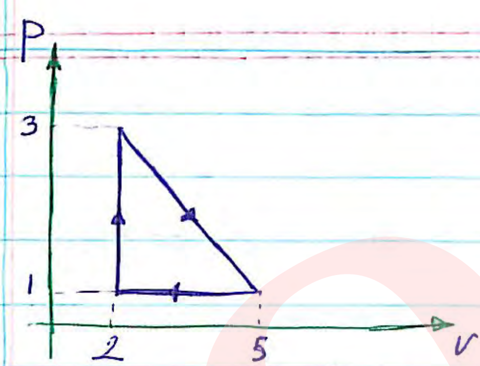


مثال: بازده چرخه را بدست آورید. (چرخه اتو)

$\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$

$\alpha = \frac{V_{MAX}}{V_{min}}$

مثال: بازده چرخه مقابل را بدست آورید.



چگالی جریان: $I=\int \vec{J}\cdot d\vec{s}$, $\vec{J}=\sigma\vec{E}$, $R=\rho\frac{L}{A}$

مثال: از یک رسانا به طول L و سطح مقطع S یک جریان یکنواخت می‌گذرد اگر مقاومت ویژه سیم ρ باشد، رابطه بین ρ و σ را بدست آورید.

$R=\rho\frac{L}{S}$, $J=\frac{I}{S}\to\sigma E=\frac{I}{S}\to\sigma\cdot\frac{V}{L}=\frac{V}{RS}\to\sigma=\frac{1}{\rho}$

مثال: کره‌ای رسانا به شعاع a به پتانسیل V+ متصل است و محیط کره که تا بی‌نهایت ادامه دارد، از ماده‌ای با ضریب رسانایی σ تشکیل شده است. الف) جریانی که از سطح کره خارج می‌شود چقدر است؟

ب) تفاوت مجموعه را بدست آورید.

مثال: یک خازن کروی مطابق شکل در نظر بگیرید. فضای بین دو پوسته از ماده‌ای با مقاومت ویژه ρ پر شده است. چگالی سطحی جریان را در محدوده بین دو پوسته بدست آورید.

مثال: بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز یک کره فلزی بدون بار قرار دارد. اگر پتانسیل در محل بار نقطه‌ای و پتانسیل کره باشد می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}V_1=P_{11}Q_1+P_{12}Q_2\\V_2=P_{21}Q_1+P_{22}Q_2\end{cases}$$

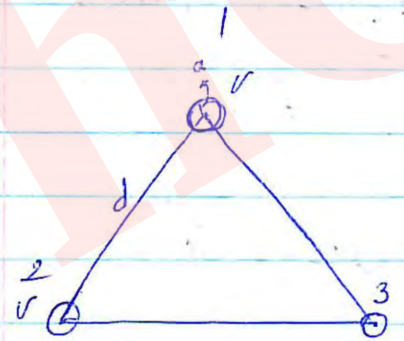
چهار ضریب P را که فقط به هندسه مسئله وابسته است بیابید.

$$Q_1=q,\ Q_2=0\to\begin{cases}V_1=P_{11}q\\V_2=P_{21}q=\frac{kq}{d}\to P_{21}=\frac{k}{d}\to P_{12}=\frac{k}{d}\end{cases}$$

$$q_2=\frac{-Rq}{d} \leftarrow \frac{kq_2}{R}+\frac{kq}{d}=0 \leftarrow q_2\neq 0 \leftarrow V_2=0$$

$$V_2=P_{21}q+P_{22}\times\frac{-Rq}{d} \to P_{22}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

P_{11} قابل تعیین نیست ؛ زیرا P_{11} به شرایط هندسی مسئله وابسته است و ما از هندسه بار نقطه ای q چیزی نمی دانیم.



$$\begin{cases} V_1=P_{11}Q_1+P_{12}Q_2+P_{13}Q_3 \\ V_2=P_{21}Q_1+P_{22}Q_2+P_{23}Q_3 \\ V_3=P_{31}Q_1+P_{32}Q_2+P_{33}Q_3 \end{cases}$$

$$P_{11}=P_{22}=P_{33}=\frac{kq}{a}\times\frac{1}{q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

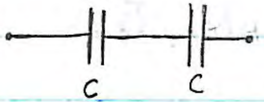
$$Q_2=Q_3=0 \to V=P_{21}q \to P_{21}=\frac{kq}{d}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \to$$

چون Pها فقط به شرایط هندسی مسئله وابسته اند و شرایط هندسی مسئله برای

هر سه جسم یکسان است $\leftarrow$ $P_{ii}=$ ثابت , $P_{ij}=$ ثابت

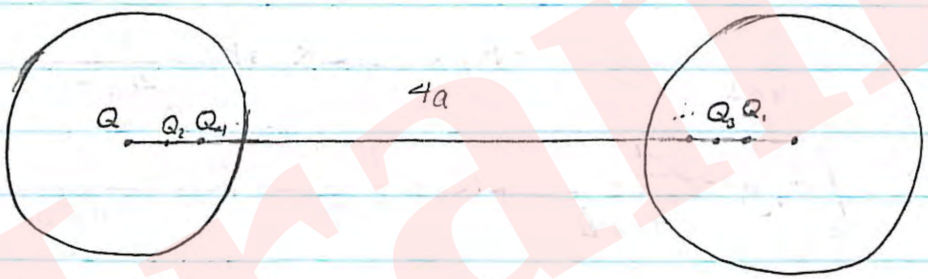
مثال: دو کره رسانا به شعاع a در فاصله d $(d\gg a)$ قرار دارد. ظرفیت مجموعه را بدست آورید.

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \to C=4\pi\varepsilon_0 a$$



$$\to C_T=\frac{C}{2}=2\pi\varepsilon_0 a$$

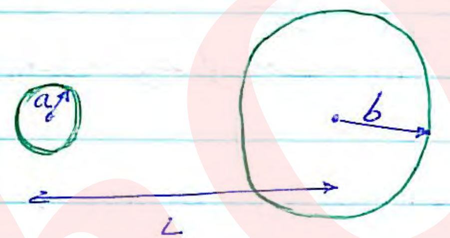
$$C_T=\frac{q}{V-(-V)}=\frac{q}{2V}=\frac{C_{11}V-C_{12}V}{2}=\frac{C_{11}-C_{12}}{2}$$



$$\begin{cases} Q_1=\frac{-aQ}{4a}=\frac{-Q}{4} \\ x_1=\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4} \end{cases} \to \begin{cases} Q_2=\frac{Q}{15} \\ x_2=\frac{4a}{15} \end{cases} \to \begin{cases} Q_3=\frac{-Q}{56} \\ x_3=\frac{15a}{56} \end{cases} \to \begin{cases} Q_4=\frac{Q}{209} \\ x_4=\frac{56a}{209} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = C_{11} V_1 \\ q_2 = C_{21} V_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=2k} Q_i = C_{11} \dfrac{kQ}{a} \\ \sum_{i=2k+1} Q_i = C_{21} \dfrac{kQ}{a} \end{cases}$$

مثال: ضرایب پتانسیل را بیابید.



$L \gg a, b$

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{cases}$$

$$J = \frac{I}{4\pi r^2} = \sigma E \longrightarrow E_1 = \frac{I}{4\pi \sigma r^2} \longrightarrow V_2 = -\int_{r=\infty}^{r=L} \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr$$

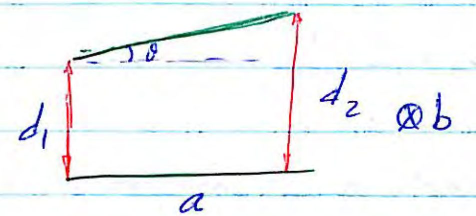
$$\longrightarrow V_2 = \frac{I}{4\pi\sigma L} \longrightarrow \frac{I}{4\pi\sigma L} = R_{21} \times I \longrightarrow R_{21} = R_{12} = \frac{1}{4\pi\sigma L}.$$

$$V_1 = -\int_a^{\infty} E \, dr = \frac{I}{4\pi\sigma a} \longrightarrow R_{11} = \frac{1}{4\pi\sigma a} \longrightarrow R_{22} = \frac{1}{4\pi\sigma b}$$

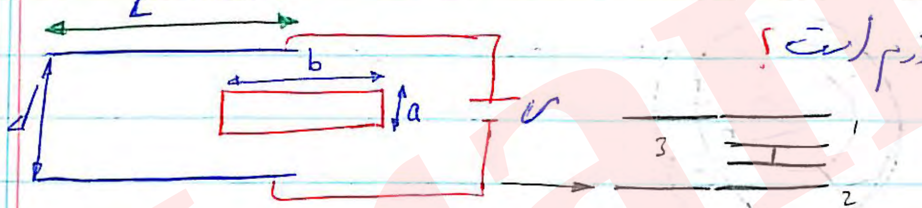
$$R_T = \frac{\Delta V}{I} = \frac{V_1 - V_2}{I} = R_{11} + R_{22} - 2R_{12} \longrightarrow \quad : I_1 = I, \; I_2 = 0$$

$$R_T = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{L}\right)$$

مثال: دو صفحه مستطیل شکل با ابعاد a و b ابتدا بصورت موازی با یکدیگر قرار دارند. حول گوشه صفحه بالایی آن را می‌چرخانیم. ظرفیت مجموعه را بدست آورید.



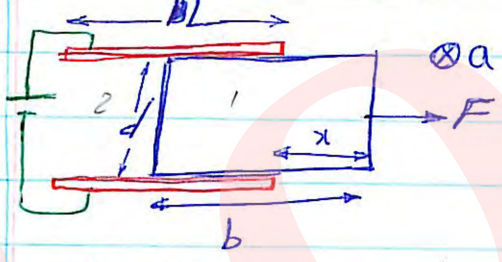
مثال: یک قطعه رسانا بدون بار مطابق شکل بین صفحات خازنی قرار گرفته است. (و ولتاژ بین صفحات ثابت است). چه نیرویی برای بیرون کشیدن قطعه لازم است؟



$$C_T = C_3 + C_{12} = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \longrightarrow C_T = \frac{\varepsilon_0 (L - x) Z}{d} + \frac{\varepsilon_0 Z x}{d - a} \longrightarrow$$

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 Z (dL - aL + a x_0)}{d(d-a)} \longrightarrow U = \frac{CV^2}{2} \longrightarrow dU = \frac{V^2}{2} dC$$

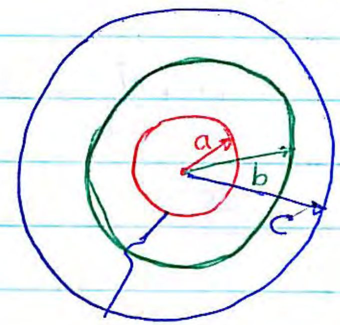
$$\rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx} \rightarrow F = \frac{-V^2}{2}\frac{dC}{dx} \rightarrow F = \frac{-V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 z a}{d(d-a)}$$



مثال: تابع $F(x)$ را بیابید.

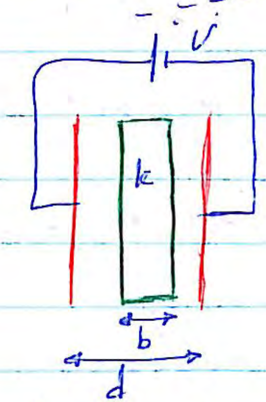
$$F = \frac{(k-1)V^2\varepsilon_0 a}{2d}$$

مثال: سه پوسته فلزی بطوری که پوسته داخلی به پوسته خارجی متصل شده است را در نظر بگیرید. پوسته میانی بار $+q$ و پوسته داخلی و خارجی بار مجموع $+3q$ را دارند. انرژی پتانسیل مجموعه را بدست آورید.



مثال: اگر یک خازن با ضریب دی‌الکتریک k را به ضخامت دی‌الکتریک b

را به ولتاژ V وصل کنیم، Δx تغییر طول دی‌الکتریک را بیابید.



$F = k\Delta x$

مثال: یک حباب که ضریب کشش سطحی آن τ است در نظر بگیرید بطوری‌که فشار محیط P_0 و فشار هوای درون آن P است. اگر در حالت تعادل شعاع R باشد مقدار P را بدست آورید.

$$(2\pi R\tau)\times 2 = (P-P_0)\pi R^2 \rightarrow P = P_0 + \frac{4\tau}{R}$$

مثال: یک لیوان پلاستیکی پر از آب است. می‌خواهیم با سوزن بسیار ریزی سوراخی به قطر D در دیواره‌ی لیوان ایجاد کنیم تا آب بیرون نریزد. حداکثر

ارتفاع آب از سوراخ را بیابید $h = \frac{4\sigma}{\rho g D}$

مثال: قسمتی از مساحت یک مایع را در نظر بگیرید. اگر ابعاد L_1 و L_2 به اندازه‌ی ΔL_1 و ΔL_2 تغییر کنند انرژی پتانسیل حاصل از کشش سطحی را در این مساحت در نظر گرفته شده بدست آورید. $\Delta U = \tau (L_1 \Delta L_2 + L_2 \Delta L_1)$

مثال: یک حباب صابون در نظر بگیرید به طوری که بار یکنواخت Q را روی سطح خود دارد.

الف) اگر ضریب کشش سطحی τ باشد شعاع تعادل را بدست آورید.

ب) حباب اولیه به دو حباب یکسان تبدیل می‌شود. شعاع هر یک از دو حباب را بر حسب شعاع اولیه حباب بدست آورید.

الف)

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \overset{8\pi\tau R^2}{2\tau S} \longrightarrow F = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} - 16\pi\tau R \longrightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{128\varepsilon_0 \tau \pi^2}}$$

باسمه تعالی

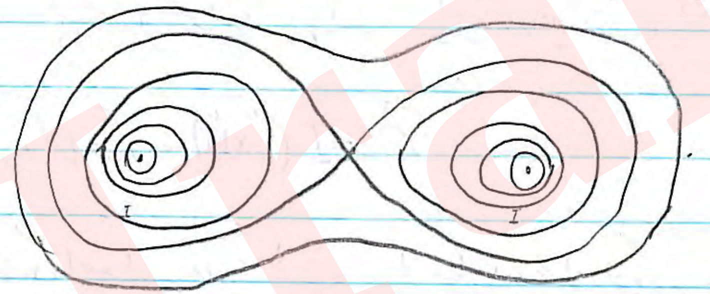
ب) $\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \left(\frac{Q/2}{Q}\right)^2 = \frac{1}{2^2} \longrightarrow R = \frac{R_0}{\sqrt[3]{4}}$

مثال: یک بیضی‌گون را در نظر بگیرید که از رسانای ایده‌آل ساخته شده است. معادله بیضی‌گون $\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ است. اگر بار بیضی‌گون Q باشد، σ را بدست آورید.

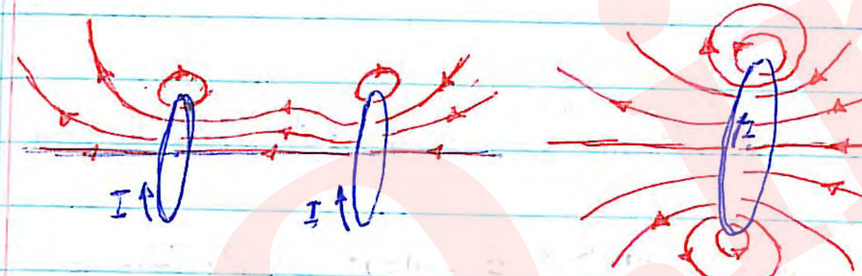
سیم حامل جریان - حلقه حامل جریان - سیملوله

قانون آمپر: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{L} = \mu_0 I$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{L} = B\times 2\pi r = \mu_0 I \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



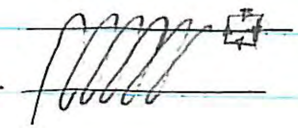
باسمه تعالی



$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

سیم‌لوله ایده‌آل $B = \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right) I$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 N I \rightarrow \int B\,dx = \mu_0 N I \rightarrow$



$B = \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right) I$

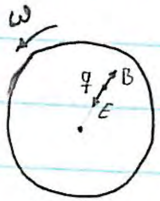
مثال: ثابت کنید اگر یک سیم حامل جریان در میدان یکنواخت B قرار بگیرد

نیروی وارد بر آن: $\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B})$

مثال: یک استوانه فلزی با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش که با خطوط میدان

باسمه تعالی

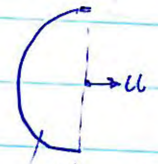
مغناطیسی یکنواخت B موازی است درحال چرخش است توزیع بار در استوانه



چگونه خواهد بود؟ $F_B = F_E \rightarrow$

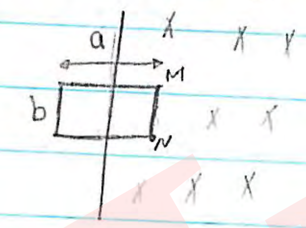
$Eq = q(\omega r)B \rightarrow E = \omega B r \quad , \quad \rho = \frac{-\varepsilon_0 B \omega}{2}$

مثال: یک سیم حلقه فلزی مطابق شکل در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت می‌کند.



اختلاف پتانسیل دو سر سیم حلقه را بدست آورید. $\Delta V = 2uBR$

مثال: اگر قابی را با سرعت ثابت v به داخل یک محیط با میدان مغناطیسی



B دلخواه I را محاسبه کنید. $V_{MN} = \mathcal{E} = Bvb$

$\rightarrow I = \frac{Bvb}{R}$

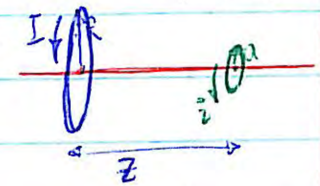
مثال: یک حلقه حامل جریان با جریان I و شعاع R درنظر بگیرید.

الف) میدان را بر روی محور حلقه بدست آورید. $B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$

ب) مطابق شکل دو حلقه هم محور را در نظر بگیرید. نیروی وارد بر حلقه‌ی کوچکتر را بیابید.

$$dB_z \times \pi\rho^2 + B_\rho \times 2\pi\rho\, dz = 0 \rightarrow B_\rho = -\frac{\rho}{2}\frac{dB_z}{dz} \rightarrow B_\rho = -\frac{3\mu_0 R^2 I z\rho}{4(R^2+z^2)^{5/2}}$$

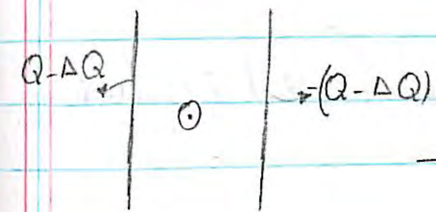
$$d\vec F_z = i(d\vec L \times \vec B_\rho) \rightarrow \vec F_z = -\frac{3\mu_0 i\pi z I R^2 a^2}{2(R^2+z^2)^{5/2}}\hat z$$



مثال: یک تکه‌ی رسانا بین صفحات یک خازن قرار می‌دهیم. تغییر پتانسیل دو سر خازن چقدر است؟

دو شرایط فیزیکی متفاوت می‌گیریم: Q ثابت ، V ثابت

V ثابت



$$P = L\Delta Q \quad , \quad q = CV \rightarrow dq = cdV + Vdc$$

$$\rightarrow -\Delta Q = V\Delta C \rightarrow -\frac{P}{L} = \varepsilon_0 L\,\Delta C \rightarrow$$

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a^3 \varepsilon_0}{L} = \varepsilon_0 L\,\Delta C \rightarrow \Delta C = -\frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{L^2}$$

بسمه تعالی

$$cdV + Vdc = 0 \rightarrow \Delta V = -\frac{V\Delta C}{C} \rightarrow \Delta V = \left(\frac{4\pi a^3}{LA}\right)V \leftarrow \text{Q ثابت}$$

مثال: حلقه‌ای به شعاع r دارای بار Q است. اگر طول بسیار کوچکی از آن را برداریم شدت میدان الکتریکی در محل سابق طول را بدست آورید.

$$m\frac{d\vec v}{dt} = q\vec E \rightarrow \vec v_f - \vec v_i = \frac{q\vec E}{m}\tau \rightarrow \bar{\vec v} = \frac{\vec v_i + \vec v_f}{2} = \vec v_i + \frac{q\vec E}{2m}\tau$$

$$\rightarrow \vec v_D = \frac{q\tau}{2m}\vec E \quad , \quad \vec v_i = 0 \quad , \quad \tau = \bar\tau$$

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F - \alpha\vec v \quad , \quad t \to \infty : \vec v \to \vec v_D \rightarrow \alpha = \frac{2m}{\tau}$$

$$\frac{d\vec v}{dt} + \frac{2}{\tau}\vec v = \frac{\vec F}{m} = \vec f \quad , \quad e^{-\frac{2t}{\tau}}\vec u = \vec v \rightarrow$$

$$\frac{d\vec u}{dt} = e^{\frac{2t}{\tau}}\vec f_{(t)} \rightarrow \vec v_{(t)} = \vec v_{(0)}e^{-\frac{2t}{\tau}} + \int_0^t \vec f_{(t')}e^{\frac{2(t'-t)}{\tau}}dt'$$

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F + \vec A_{(\vec v)} \quad , \quad \vec v = \vec v_{(D)} : \vec F = \frac{2m\vec v_D}{\tau} + \vec A_{(\vec v_D)} = 0 \rightarrow \vec A_{(\vec v_D)} = -\frac{2m\vec v_D}{\tau}$$

برای زمان های دور $\frac{d\vec v}{dt}$ صفر است.