کنترل خطی

جلسه هفتم

استاد : اصفهانیان

رشته :کارشناسی ارشد مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

سرفصل مطالب

پایداری

معیار راوث

شرط اول برای پایدار بودن

شرط دوم برای پایدار بودن

حالتهای خاص

بدست آوردن فرکانس نوساتات

انواع کنترل کننده ها

کنترل کننده تناسبی : p- controler

کنترل کننده تناسبی – انتگرالی : pI- controler

ویژگیهای کنترل کننده تناسبی – انتگرالی : pI- controler

عیب کنترل کننده تناسبی – انتگرالی : pI- controler

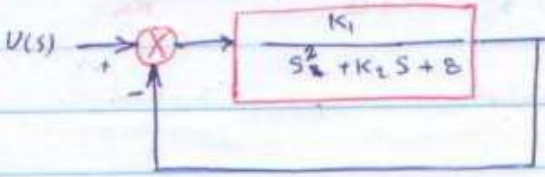
کنترل کننده تناسبی – مشتقی : PD- controller

ویژگیهای کنترل کننده تناسبی – مشتقی : PD- controler

کنترل کننده تناسبی – انتگرالی- مشتقی : PID- controler

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

مثال ۱) :



y_{ss} : خروجی حالت ماندگار

$y_{ss} = 0.6$

$t_s = 2$ sec

$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$

$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_1}{s^2+K_2s+8}}{1+\frac{K_1}{s^2+K_2s+8}} = \frac{K_1}{s^2+K_2s+8+K_1} \Rightarrow Y(s)$$

حلقه بسته

$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s^2+K_2s+8+K_1} \times \frac{1}{s}$$

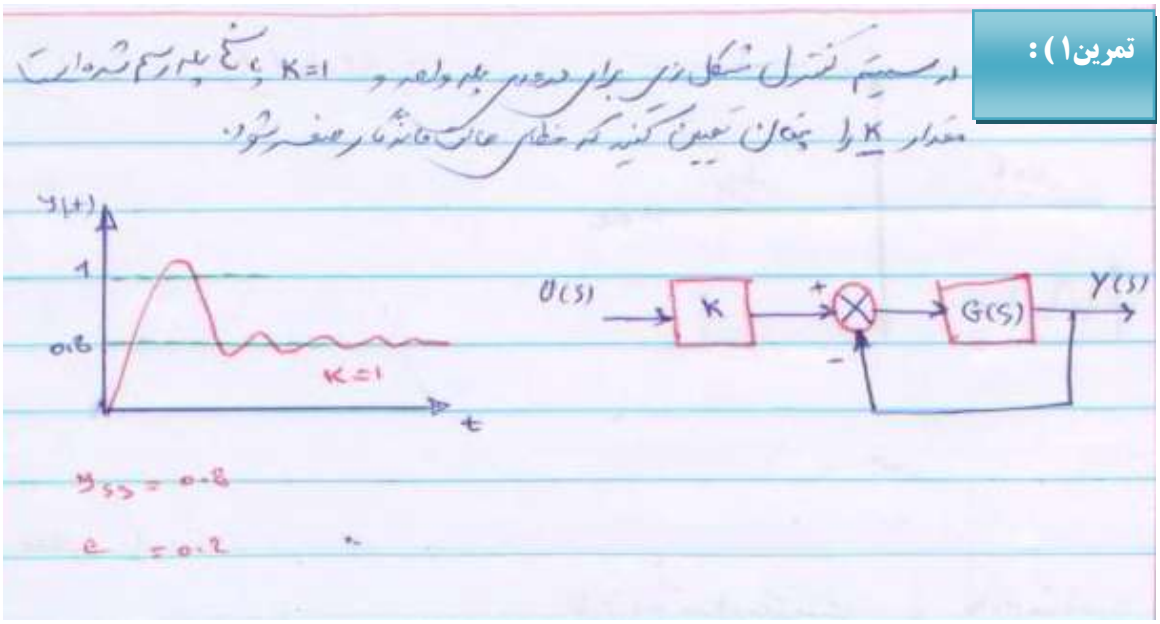
$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \times \frac{K_1}{s^2+K_2s+8+K_1} \times \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{K_1}{8+K_1} = 0.6$$

$\Rightarrow 4.8 + 0.6K_1 = K_1 \Rightarrow 4.8 = 0.4K_1 \Rightarrow \boxed{K_1 = 12}$

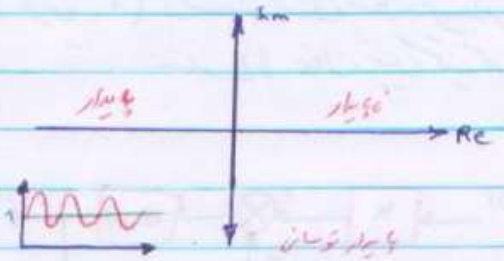
$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \Rightarrow \zeta\omega_n = 2$

$K_2 = 2\zeta\omega_n \Rightarrow \boxed{K_2 = 4}$

تمرین۱) :



پایداری :



معیار راوث :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n s^0$$

شرط اول برای پایدار بودن :

$s^4 + 3s^3 + s + 5$ ← ناپایدار ← چون ضریب s^2 وجود ندارد پس شرط را ندارد.

$s^3 + 2s^2 + 4s$ ← ناپایدار ← چون ضریب s^0 وجود ندارد.

$-3s^3 - 2s^2 - 5s - 7$ ← چون همگی ضرایب علامت منفی دارند پس شرط اول برقرار است.

شرط اول لازم است ولی جهت پایدار شدن کافی نیست

شرط دوم برای پایدار بودن :

تشکیل جدول راوث

+	s^n	a_0	a_2	a_4 ...
+	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5 ...
−	s^{n-2}	b_1	b_2	
+	s^{n-3}	c_1		
+	⋮			
+	s^1			
+	s^0			

تعداد تغییر علامت در ستون اول = تعداد ریشه‌های ناپایدار

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

شرط دوم پایداری آن است که تمام اعداد موجود در ستون اول جدول راست مثبت باشند در غیر این صورت تعداد تغییر علامت ها در این ستون برابر با تعداد ریشه های ناپایدار خواهد بود.

مثال ۲) :

$$9s^7 + 3s^6 + 48s^5 + 14s^4 + 64s^3 + 14s^2 + 14s + 2$$

s^7	9	48	64	14
s^6	3	14	14	2
s^5	6	22	8	0
s^4	3	10	2	0
s^3	2	4	0	0
s^2	4	2	0	0
s^1	3	0	0	0
s^0	2	0	0	0

$$\frac{3\times 48 - 9\times 14}{3} = 6$$

$$\frac{3\times 64 - 9\times 14}{3} = 22$$

نکته:

چون در هر خط ریشه هیچ تغییر علامتی نداشتند پس این سیستم پایدار است و هر خط ریشه در سمت چپ محور عمود قرار می گیرد.

حالت خاص ۱ :

* وجود عدد صفر فقط در اولین درایه یک سطر.

بجای صفر یک عدد نزدیک آن قرار می دهیم و جدول را ادامه و حل می کنیم
چون فقط علامت برسی شده برای ما مهم است نه مقدار آن

اگر در ستون اول جدول یک صفر ایجاد شد و پس از آن در ستون اول تغییر علائم نشد سیستم حتما حداقل دو ریشه موهومی دارد.

مثال ۳) :

$$1s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2$$

شرط اول برقرار است – سراغ شرط دوم می رویم :

+	s^5	1	4	3	
+	s^4	2	8	2	
+	s^3	ε	2	0	
–	s^2	$\frac{8\varepsilon-4}{\varepsilon}$	2	0	
+	s^1	$\frac{16\varepsilon-8-2\varepsilon^2}{8\varepsilon-4}$	0	0	
+	s^0	2	0	0	

$$\frac{8\times 0.01-4}{0.01} \approx \frac{-3.92}{0.01} = -392$$

سیستم ناپایدار است – چون علامت دو ریشه نابرابر می باشد.

حالت خاص ۲)

* تمامی درایه‌های یک سطر صفر شوند.

مثال ۴) :

$$s^6 + 3s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 11s^2 + 9s + 6$$

+	s^6	1	6	11	6
+	s^5	3	12	9	0
+	s^4	2	8	6	0
+	s^3	~~0~~ 8	~~0~~ 16	0	0
+	s^2	4	6	0	0
+	s^1	4	0	0	0
+	s^0	6	0	0	0

هادی $2s^4 + 8s^2 + 6$

شنق ← $8s^3 + 16s$

چون همه علامت‌ها مثبت است پس همان

پایدار است در نتیجه ریشه‌ها هستند چپ‌نیم صفحه‌ی s و هیچ کدام در سمت راست نیستند

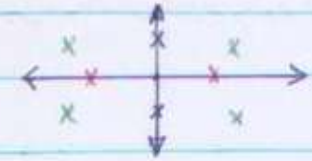
اگر سطری صفر شود سطر بالای آن را معادله کمکی تشکیل داده و از آن شنق می‌گیریم

ضرایب جملات شنق نوشته شده را جای صفرها جایگزین می‌کنیم.

نتیجه:

این حالت نشان دهنده آن است که ریشه‌های در صفحه متقارنا وجود دارند که یا

هر دو مختلط قرینه هستند.



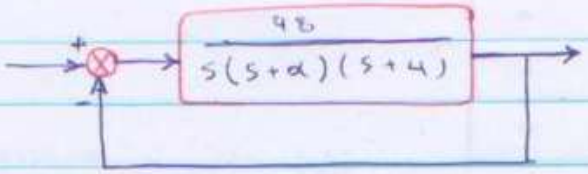
ریشه های معادله کمکی همان ریشه های معادله مشخصه اصلی نیز می باشند.
در واقع ریشه های معادله کمکی به صورت متقارن نسبت به صفر تشکیل فرد می دهند.

$2s^4 + 8s^2 + 6 = 0$ معادله دوم فاقد s و s^3 می باشد

طبق جدول راوث نوشته شده همین طور نوشته می شود

همیشه باید توان معادله کمکی زوج باشد چون ریشه های متقارن بدست آید.
چون کامله صفر در توان های فرد اتفاق نمی افتد

مثال۵) :



بازخورد چه مقداری از α سیستم شکل روبرو نوسانی است و فرکانس نوسانات را در این حالت بدست آورید.

$\frac{C}{1+GH}$ ابتدا باید معادله مشخصه را بدست آوریم

$$G(s) = \frac{48}{s(s+\alpha)(s+4)+48}$$

$$s^3 + (4+\alpha)s^2 + 4\alpha s + 48$$ معادله مشخصه :

برای اینکه حالت نوسانی داشته باشد یک سطر صفر شود

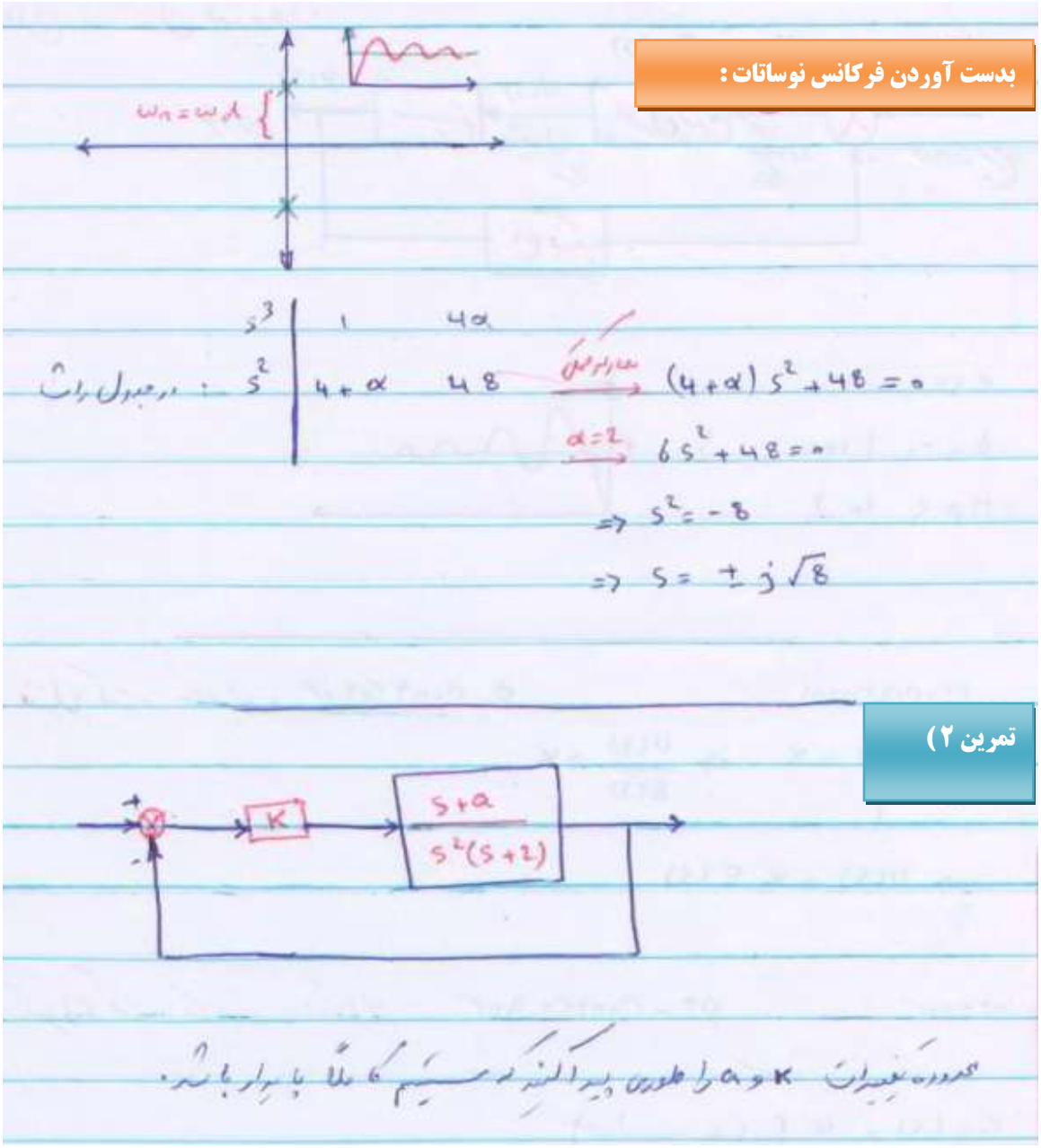
s^3	1	4α
s^2	$4+\alpha$	48
s^1	$\frac{(4+\alpha)(4\alpha)-48}{4+\alpha}$	0
s^0	48	0

$\frac{4\alpha(4+\alpha)-48}{4+\alpha} = 0 \Rightarrow 4\alpha^2+16\alpha-48=0$

$\Rightarrow \alpha = 2$ ✓
$\alpha = -6$ ✗

$\alpha = 0$ تابع تبدیل پایدار چون ریشه مخرج در سمت راست صفحه s قرار دارد.

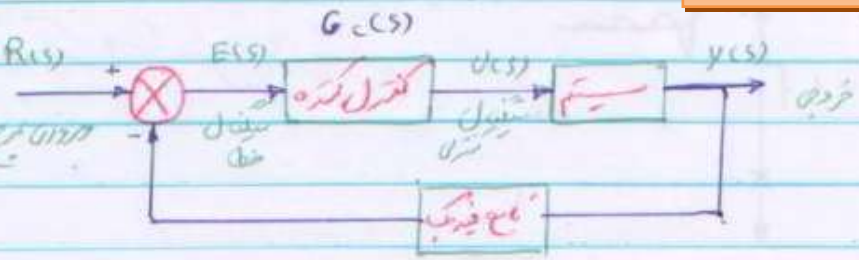
بدست آوردن فرکانس نوسانات :

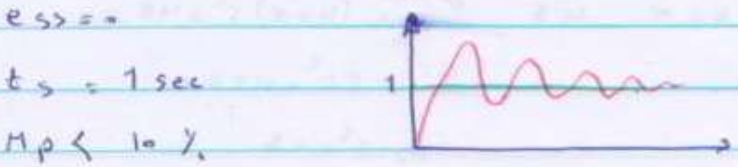


تمرین ۲)

محدوده تغییرات K و a را طوری پیدا کنید که سیستم حلقه بسته پایدار باشد.

انواع کنترل کننده ها :





۱) کنترل کننده تناسبی : p- controler

proportional

$$G_c(s) = K \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K$$

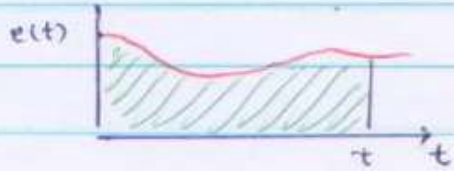
$$\Rightarrow U(s) = K\,E(s)$$

۲) کنترل کننده تناسبی – انتگرالی : pI- controler

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$U(s) = \left[K + \frac{K}{T_i s}\right] E(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} u(t) = K\,e(t) + \frac{K}{T_i}\int_0^t e(t)$$



ویژگیهای کنترل کننده تناسبی – انتگرالی : pI- controler

1 افزایش نوع سیستم (type)
2 افزایش K_p
3 کاهش t_s (زمان نشست) $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$
4 از بین بردن خطای ماندگار به ورودی پله واحد.

عیب کنترل کننده تناسبی – انتگرالی : pI- controler

باعث کاهش پایداری می شود.

۳) کنترل کننده تناسبی – مشتقی : PD- controler

$$G_c(s) = K(1 + T_d s)$$

$$U(s) = [K + K T_d s] E(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} u(t) = K e(t) + K T_d \dot{e}(t)$$

پیش بینی خطا و کاهش زمان نشست

ویژگیهای کنترل کننده تناسبی – مشتقی : PD- controler

1 افزایش پایداری
2 کاهش نوسانات
3 کاهش M_p
4 افزایش ζ
5 افزایش ω_n

۴) کنترل کننده تناسبی – انتگرالی– مشتقی : PID- controler

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$