

## تمرینات ترکیبیات

- تمرین شماره ۲ تحویلی است.
- ۲۲ مرداد قبل از شروع آزمون ترکیبیات، تمرینات تحویلی این سری توسط سپهر دادخواه<sup>۱</sup> جمع می‌شود.
- در صورتی که به پاسخ درست یک سوال نرسیدید، همان حاصل تلاش‌تان و نتایجی که به دست آورده‌اید را بنویسید؛ اما هرگز تقلب نکنید. هرگونه تقلب در تمرینات باعث افتادن در درس و (احتمالاً) محرومیت از مدال می‌شود. هم‌چنین این نکته را مد نظر داشته باشید که تمرینات با ارفاق تصحیح می‌شوند.

### هندسه‌ی ترکیبیاتی

۱. آیا می‌توان ۱۳۹۴ دایره در صفحه کشید؛ طوری که هر دو دایره در حداکثر یک نقطه تقاطع داشته باشند و هر دایره با دقیقاً پنج دایره‌ی دیگر مماس باشد؟
۲. ثابت کنید یک چندضلعی  $k$  گوشه را نمی‌توان به تعدادی چهارضلعی  $k$  گوشه افزایش داد.
۳. چهار مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت داریم. در هر مرحله می‌توان یکی از مثلث‌ها را از روی ارتفاع وارد بر وتر برد و به دو مثلث قائم‌الزاویه تبدیل کرد. ثابت کنید هم‌واره دو مثلث وجود دارند که هم‌نهشت باشند.
۴. هر نقطه از صفحه را با قرمز یا آبی، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.
  - (ا) ثابت کنید سه نقطه‌ی هم‌رنگ وجود دارد که یکی وسط دوتای دیگر باشد.
  - (ب) ثابت کنید سه نقطه‌ی هم‌رنگ وجود دارد که رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.
  - (پ) ثابت کنید چهار نقطه‌ی هم‌رنگ وجود دارد که رئوس یک مستطیل باشند.
  - (ت) ثابت کنید رنگی وجود دارد که به ازای هر  $d > 0$ ، دو نقطه با فاصله‌ی  $d$  به رنگ مذکور وجود داشته باشند.
۵. هر نقطه از صفحه را با یکی از  $n$  رنگ موجود، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید چهار نقطه‌ی هم‌رنگ وجود دارد که رئوس یک مستطیل باشند.

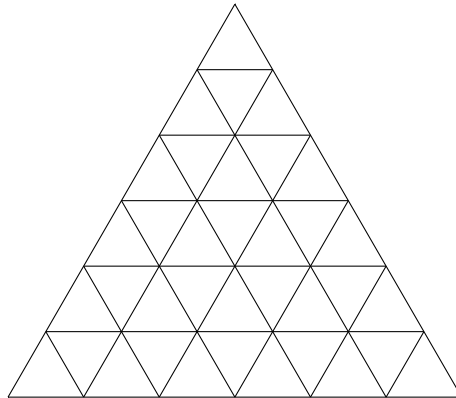
<sup>۱</sup>نماینده‌ی کلاس

<sup>۲</sup>محدب

<sup>۳</sup>مقعر

## تمرینات ترکیبیات

۶. هر نقطه‌ی شبکه‌ای<sup>۴</sup> از صفحه را با قرمز یا آبی، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید رنگی وجود دارد که به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، مثلی با مساحت  $n$  وجود داشته باشد که تمام رئوسش به آن رنگ باشند.
۷. یک  $n$ -ضلعی کوژ داریم که برخی از قطرهای آن کشیده شده است. یک قطر از این قطرها را خوب گوییم؛ هرگاه دقیقن یکی از قطرهای کشیده شده را قطع کند (تقاطع تنها درون چندضلعی محسوب می‌شود و برخورد روی رأسها را تقاطع محسوب نمی‌کنیم). بیشینه‌ی تعداد قطرهای خوب را بیابید.
۸. دو چندضلعی  $P_1, P_2$  با مساحت برابر داریم. ثابت کنید می‌توان چندضلعی  $P_1$  را به تعدادی متناهی تکه برید و این تکه‌ها را کنار هم گذاشت؛ طوری که  $P_2$  ساخته شود.
۹. یک مثلث مشبک، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $n$  است که به صورت معمول به  $n^2$  مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تقسیم شده است. برای مثال، مثلث مشبک به ضلع ۶ مانند شکل زیر است:



ثابت کنید عدد طبیعی  $n$  وجود دارد؛ طوری که در یک مثلث مشبک به ضلع  $n$  بتوان از میان رئوس مثلث‌های کوچک  $1993n$  نقطه انتخاب کرد؛ طوری که هیچ سه‌تا از آنها تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع (نه لزومن با اضلاع موازی اضلاع مثلث اصلی و نه لزومن به ضلع واحد) ندهند.

موفق باشید  
- اسدی

<sup>۴</sup>نقطه‌ی با مختصات صحیح