مسأله های مرحله ی دوم ششمین دوره ی المپیاد ریاضی

دانش آموزان کشور، فروردین ماه ۱۳۶۸

۱. الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی،

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله ای از درجه ی m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} P(k)}{n^{m+1}}$$

دارای حد است.

۲. اگر در چهارضلعی محیطی ABCD، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایره ی محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I، J و O بر یک استقامت اند.

۳. ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشا مانند f از $\mathbb{N}$ (مجموعه ی اعداد طبیعی) به $\mathbb{N}$ است که در شرط

$$f\big(f(n)+f(m)\big)=n+m \quad (n,m \in \mathbb{N})$$

صدق می کند.

۴. دنباله ی $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & : n=1 \\ \left(\frac{2n-3}{2n}\right) a_{n-1} & : n \geq 2 \end{cases}$$

ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$، $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$.

۵. اگر در چهاروجهی $ABCD$ ارتفاع های وارد از هر راس بر وجه مقابل را بـا h_a، h_b، h_c و h_d نمـایش دهـیم، ثابت کنید

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

۶. تعداد ۱۳۶۹^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هر یک از این اعداد بقیه را می توان به ۱۳۶۸ دسته ی مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصلضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساوی اند.