تستهای تکمیلی فصل ۷ ـ مبحث دنباله و سری (سؤالات سطح ۱)

مبحث دنباله‌ها

۱. دنباله $a_n = \dfrac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) صعودی اکید
۲) نزولی اکید
۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

حل: گزینه ۱ درست است. از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم، همه جملات مثبت هستند

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}}{\dfrac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1 \implies$$ a_n صعودی اکید است.

۲. دنباله $\{\sqrt[n]{(1-\frac{2}{n})^3}\}$ همگرا به کدام عدد است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) 1
۲) e^{-6}
۳) e^{-2}
۴) e^{-3}

حل: گزینه ۱ درست است. چون $(1-\frac{2}{n})^3 \to 1$ پس حد برابر ۱ است.

۳. دنباله اعداد $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ همگرا به کدام عدد است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) 0
۲) e^{-1}
۳) e^{-2}
۴) 1

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ و $\dfrac{1}{n} \to 0$ حدبرابر $1^0 = 1$ است.

۴. اگر $a_n = \text{Arccot}\dfrac{1}{n}$، مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) 0
۲) $\dfrac{\pi}{4}$
۳) $\dfrac{\pi}{2}$
۴) π

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\dfrac{1}{n} \to 0$ پس $a_n \to \cot^{-1}(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

۵. اگر $a_n = n\text{Arctan}(\dfrac{1}{n})$ حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟ (آمار ۸۰)

۱) 0
۲) 1
۳) e
۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به قواعد هم ارزی $a_n \sim n\times\dfrac{1}{n} \to 1$.

۶. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) -1
۲) 0
۳) $\dfrac{1}{2}$
۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است. با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها:

$$\sqrt{n^2+n}-n \sim (n+\frac{1}{2})-n \to \frac{1}{2}$$

۷. $\sqrt{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای، نفت ۸۱)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه ۲ درست است. عبارت داده شده را در $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{عبارت} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\times\sqrt{n+\frac{1}{2}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}$$

۸. حد دنباله $a_n = \dfrac{n^2\tan^{-1}(n)}{2-[\frac{n^2}{3}]}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) ∞ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $-\frac{3\pi}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. توجه کنید که $\tan^{-1}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$ پس $a_n \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}n^2}{-\frac{n^2}{3}} \to -\dfrac{3\pi}{2}$

۹. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$ برابر کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) 1 ۲) e^2 ۳) e^3 ۴) e^6

حل: گزینه ۴ درست است. حد به‌صورت 1^∞ است. پس با توجه به نکته ۲۰ در صفحه ۷۸:

$$(1+\frac{2}{n})^{3n} \sim e^{3n\times\frac{2}{n}} \to e^6$$

۱۰. حد دنباله $a_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ برابراست با: (MBA ۸۱)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. حد به‌صورت 1^∞ است.

$$a_n \sim e^{n^2(\cos\frac{1}{n}-1)} \sim e^{n^2(-\frac{1}{2n^2})} \to e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

۱۱. دنباله اعداد $\ldots,(\frac{4}{6})^4,(\frac{3}{5})^3,(\frac{2}{4})^2,(\frac{1}{3})^1$ به کدام عدد همگراست؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) e ۲) e^2 ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{1}{e^2}$

حل: گزینه ۴ درست است. دنباله موردنظر به‌صورت $a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$ است و بنابراین حد آن 1^∞ است.

$$a_n \sim e^{n(\frac{n}{n+2}-1)} = e^{-\frac{2n}{n+2}} \to e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

۱۲. مقدار حد $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+\sqrt[5]{n}\cos n}{3n^{\frac{6}{5}}}$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: گزینه ۱ درست است. توجه کنید که $\cos n$ کراندار و $\sqrt[5]{n}$ رشد کمتری نسبت به $2n$ دارد.

$$\text{عبارت} \sim \frac{2n}{3n^{\frac{6}{5}}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{n}} \to 0$$

۱۳. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n+7^n+9^n}{9^n}$ برابر است با: (سیستم ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\dfrac{7}{3}$ ۴) $+\infty$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قوانین رشد عبارت هم ارز $\dfrac{9^n}{9^n}$ و لذا حد برابر یک است.

۱۴. دنباله با جمله عمومی $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$ چگونه است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) همگرا به ۱ ۲) همگرا به ۱− ۳) همگرا به ۰ ۴) واگرا

حل: گزینه ۴ درست است. اگر اندیس‌های $n=4k+1$ را درنظر بگیریم $a_n=\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=0$ و اگر زیردنباله $n=4k$ را درنظربگیریم $a_n=\cos(2k\pi)=1$ پس دو زیردنباله از a_n، حدود متفاوت دارند و لذا a_n واگراست.

۱۵. در دنباله‌ای با جمله‌عمومی $a_n=\begin{cases} e^{-n} & \text{زوج } n \\ \dfrac{\sin n}{n} & \text{فرد } n\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟ (سیستم ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱− ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. برای n زوج $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=0$ و برای n فرد $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ و چون زیردنباله فرد و زوج کلیه اعداد طبیعی را ایجاد می‌کنند، پس بنا به تذکر ۳ در صفحه ۴۹۲، $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

۱۶. کدامیک از دنباله‌های زیر همگرا هستند؟

۱) $[\sin\dfrac{n\pi}{2}]$ ۲) $[\dfrac{n+2}{n}]\cos n\pi$

۳) $[\dfrac{n^2}{n^2+1}]\sin\dfrac{n\pi}{2}$ ۴) هر سه دنباله واگرا هستند.

حل: گزینه ۳ درست است. با وجود اینکه $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ همگرا نیست (زیردنباله‌هایی همگرا به ۱± و ۰) اما چون $0<\dfrac{n^2}{n^2+1}<1$ پس $a_n=[\dfrac{n^2}{n^2+1}]\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$ و لذا همگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها: توجه کنید که دنباله گزینه (۱) به‌اعداد ۱± و ۰ میل می‌کند پس همگرا نمی‌باشد. در گزینه (۲) چون از مرتبه‌ای به بعد $[\dfrac{n+2}{n}]=[1+\dfrac{2}{n}]=1$ و $\cos(n\pi)=(-1)^n$ پس دنباله مطرح شده $(-1)^n$ است که به ۱± میل می‌کند، پس واگراست.

۱۷. حد دنباله $a_n=\dfrac{3^{-n+2}+2^{-n+1}}{3^{-n+1}+2^{-n}}$ برابراست با:

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. $3^{-n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ و $2^{-n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ همگرا به صفر هستند و با توجه به نکته ۱۷ در صفحه ۷۳ سرعت به صفر رفتن 3^{-n} از 2^{-n} بیشتر بوده و لذا: $a_n\sim\dfrac{2^{-n+1}}{2^{-n}}=2\to 2$

۱۸. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷، ریاضی ۸۰، MBA ۸۲)

۱) ۳ ۲) $3e$ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: گزینه ۱ درست است. باتوجه به قوانین رشد $\sqrt[n]{2^n+3^n}\sim\sqrt[n]{3^n}\to 3$.

۱۹. حد دنباله $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^{3n} + 6^{\frac{n}{2}}}$ برابراست با:

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۶   ۴) ۸

حل: گزینه ۴ درست است. برای مقایسه رشد عبارت‌های نمایی باید اختلاف توان‌ها اعدادی ثابت باشند.

$$3^n + 2^{3n} + 6^{\frac{n}{2}} = 3^n + 8^n + (\sqrt{6})^n \sim 8^n \implies \text{حد} = 8$$

۲۰. کدام گزاره درست است؟ (سیستم ۸۲)

۱) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 1$ ۲) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = 1$ ۳) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 0$ ۴) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

حل: گزینه ۴ درست است. از قوانین رشد حد در گزینه (۱) برابر صفر و در (۲) برابر $+\infty$ است و $\sqrt[n]{2} \to 1$.

۲۱. $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قاعده (۲) در صفحه ۴۸۹:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 \sim \frac{\frac{1}{4}n^4}{n^4} \to \frac{1}{4}$$

۲۲. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۱، آمار ۸۲)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. عبارت داده‌شده را به‌صورت $\dfrac{1^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + \cdots + n^{-\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$ می‌نویسیم که همان قاعده (۲) در صفحه ۴۸۹ به‌ازای $p = -\frac{1}{2}$ است پس حد برابر $2 = \frac{1}{p+1}$ است.

۲۳. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۴، عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $\frac{1}{e^2}$ ۴) e^2

حل: گزینه ۱ درست است. باتوجه به اینکه $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ پس حد برابر $\frac{1}{e}$ است.

۲۴. حد $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ دلخواه برابراست با: (معدن ۷۷، مکانیک سنگ ۷۹)

۱) صفر اگر $|x| < 1$ و ∞ اگر $|x| > 1$

۲) صفر اگر $|x| \leq 1$ و e اگر $|x| > 1$

۳) صفر اگر $|x| \leq 1$ و e اگر $1 < |x| \leq e$ و ∞ اگر $|x| > e$

۴) صفر

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به (۴) در صفحه ۴۸۹، $|x|^n$ نمایی و رشد کمتری از $n!$ دارد. البته برای $|x| < 1$ عبارت $|x|^n$ مستقیماً حدی برابر صفر دارد.

۲۵. به‌ازای کدام مقادیر x، دنباله باجمله عمومی $a_n = \binom{m}{n} x^n$ همگرا است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $x \in \mathbb{R}$ ۲) فقط در $x = 0$

۳) فقط برای $x > 0$ ۴) فقط برای هر x که $|x| < 1$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به اینکه در تعریف $\binom{m}{n}$ اگر $m < n$ حاصل صفر است و اینکه m ثابت و n متغیر است، برای n بزرگ $a_n = 0$ و لذا همواره حد آن صفر است.

۲۶. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \sqrt{e} + \sqrt[3]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{n-1}}\right)$ برابر است با: (ریاضی ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) ∞

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $a_n = e^{\frac{n-1}{n}}$ آنگاه $a_n \to e$ و عبارت داده شده برابر $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ یعنی میانگین حسابی a_n است پس حد آن برابر e است.

۲۷. اگر $a_k = \frac{k!}{k^k}$ آنگاه $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

حل: گزینه ۳ درست است. نسبت را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{(k+1)k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \sim e^{k\left(\frac{k}{k+1}-1\right)} = e^{-\frac{k}{k+1}} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$$

۲۸. حد دنباله $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$ برابراست با: (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) 0 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است. این دنباله را a_n می‌نامیم. پس $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ و $a_0 = 1$. با توجه به گزینه‌ها این دنباله همگراست و لذا حد آنرا ℓ می‌گیریم.

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \sqrt{2\lim_{n\to+\infty} a_n} \implies \ell = \sqrt{2\ell} \implies \ell = 0 \text{ و } 2$$

و چون جملات دنباله مثبت و صعودی هستند، $\ell = 2$ قابل قبول است.

بررسی دقیق‌تر: برای اطمینان از وجود حد در ابتدا باید بررسی کنیم که دنباله کراندار و یکنواست. توجه کنید که $a_1 = \sqrt{2} < 2$ و لذا $a_2 = \sqrt{2a_1} < \sqrt{2\times 2} = 2$ و با استقرا دیده می‌شود که $0 < a_n < 2$ و لذا این دنباله کراندار است. ضمناً $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n.a_n} = a_n$ و بنابراین a_n صعودی می‌باشد.

۲۹. تابع $f(x)$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}x - \frac{\pi}{4} & x \geq 1 \\ 3x - 3 & x < 1 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} nf\left(\frac{n+1}{n}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 3 ۴) 0

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به‌اینکه $f(1) = 0$ پس حد داده شده به صورت $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(1+\frac{1}{n}) - f(1)}{\frac{1}{n}}$

است و چون $0 < \frac{1}{n}$ پس حد مورد نظر برابر $f'_+(1)$ است.

$$x > 1 \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies f'_+(1) = \frac{1}{2}$$

مبحث سری‌های عددی

۳۰. جواب سری $\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)}$ کدامیک از مقادیر زیر است؟ (سیستم ۸۰)

۱) ۰٫۹۸۷ ۲) ۰٫۹۹۹ ۳) ۱٫۰۰۱ ۴) ۱٫۱۱۱

حل: گزینه ۲ درست است. سری به‌صورت تلسکوپی است.

$$\text{سری} = \sum_{k=1}^{999}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1000} = 0.999$$

۳۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$ به چه عددی همگرا می‌شود؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) 1 ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) -1

حل: گزینه ۳ درست است. عبارت داخل مجموع به‌صورت $\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ نوشته می‌شود. با انتخاب $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ سری به‌صورت تلسکوپی است و چون

$$a_\infty = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$$

پس $\text{سری} = a_1 - a_\infty = 1 - \sqrt{2}$.

۳۲. مجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ کدام است؟ (سیستم ۷۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{25}{48}$ ۴) $\frac{27}{48}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه ۲۵۷ کسر به صورت $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)$ تجزیه می‌شود.

$$\text{سری} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{n+4}}_{a_{n+4}}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 4\times\frac{1}{\infty}\right) = \frac{25}{48}$$

توجه کنید که چون اختلاف اندیسها برابر ۴ واحد است، چهار جمله از اول و چهار جمله از آخر نوشته می‌شود.

۳۳. حاصل $\cdots + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{1\times 3} = I$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۶)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2}$$

۳۴. مقدار $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{8}$

حل: گزینه ۲ درست است. مخرج را به صورت $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ می‌نویسیم. با توجه به تجزیه مثال (۱۰ ـ ج) در صفحه ۵۰۰:

$$\text{مجموع}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_{n+1}}\Big)=\frac{1}{2}(a_2-a_\infty)=\frac{1}{4}$$

۳۵. مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. این سری هندسی با $q=\frac{2}{3}$ است و لذا حاصل آن برابر $2=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$ است.

۳۶. حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{6}{5}$

حل: گزینه ۳ درست است. مجموع مورد نظر هندسی است.

$$\text{سری}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{1-(-\frac{1}{5})}=\frac{5}{6}$$

۳۷. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_3 x)^n$ همگرا باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}<x<3$ ۲) $-3<x<3$ ۳) $1<x<3$ ۴) $x<3$

حل: گزینه ۱ درست است. این سری هندسی با قدرنسبت $\log_3 x$ است پس شرط همگرایی این است که:

$$-1<\log_3 x<1 \implies 3^{-1}<x<3^1 \implies \frac{1}{3}<x<3$$

۳۸. سری $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)$ (ریاضی ۸۱)

۱) به $\frac{3}{10}$ همگراست. ۲) به ۱۰ همگراست. ۳) به $\frac{10}{3}$ همگراست. ۴) واگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. این سری مجموع دو سری تلسکوپی و هندسی است.

$$\text{سری}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\infty}\right)+\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$

۳۹. برای کدام مقدار p سری $\sum_{n=1}^{\infty}n^{3p+3}$ همگراست؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $p<-\frac{3}{4}$ ۲) $p<-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}<p<-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}<p<-\frac{4}{3}$

حل: گزینه ۲ درست است. سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-3p-3}}$ یک p سری است پس برای همگرایی:

$$-۳p - ۳ > ۱ \implies ۳p < -۴ \implies p < -\frac{۴}{۳}$$

۴۰. می‌دانیم $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$. اگر جملاتی که اندیس آنها توانی از ۳ است را از این مجموع حذف کنیم، حاصل برابر است با:

۱) $\frac{۴\pi^۲}{۲۷}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۶} - \frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{\pi^۲ - ۱}{۶}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۹}$

حل: گزینه ۲ درست است. جملات حذف شده به‌صورت زیر است.

$$\frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۹^۲} + \frac{۱}{۲۷^۲} + \cdots = \sum_{k=۱}^{\infty} (\frac{۱}{۹})^k = \frac{\frac{۱}{۹}}{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{۱}{۸} \implies \text{مجموع} = \frac{\pi^۲}{۶} - \frac{۱}{۸}$$

۴۱. سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots$ دارای کدامیک از مشخصات است؟ (هسته‌ای ۸۲)

۱) همگراست. ۲) واگراست. ۳) دارای حد صفراست. ۴) در شرایطی همگراست.

حل: گزینه ۲ درست است. جمله عمومی یعنی $(-۱)^{n+۱}$ به ± ۱ میل می‌کند و لذا واگراست. پس این سری شرط لازم همگرایی را نداشته و بنابراین واگرا خواهد بود.

۴۲. سری $\sum \frac{e^n}{n^۳}$: (معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) همگرا به سمت e^n است. ۲) همگرابه سمت ۱ است.
۳) واگرا است. ۴) همگرابه سمت $e^۲$ است.

حل: گزینه ۳ درست است. چون از قوانین رشد $\frac{e^n}{n^۳} \to +\infty$ پس سری شرط لازم را ندارد و لذا واگراست.

۴۳. اگر $a_n = (-۱)^n \cos n\pi$، آنگاه دنباله $\{a_n\}$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به‌کدام صورت است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) دنباله همگرا ـ سری همگرا ۲) دنباله همگرا ـ سری واگرا
۳) دنباله واگرا ـ سری همگرا ۴) دنباله واگرا ـ سری واگرا

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\cos(n\pi) = (-۱)^n$ پس $a_n = (-۱)^n(-۱)^n = (-۱)^{۲n} = ۱$ و لذا a_n همگرابه یک است و چون سری، شرط لازم را ندارد، واگراست.

۴۴. هرگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} k_n$ به عدد a همگرا باشد، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (k_n + b)$ به‌ازای $b \neq ۰$ و $b \in \mathbb{R}$ در کدام مورد صدق می‌کند؟ (سیستم ۸۲)

۱) به‌عدد b همگراست. ۲) واگراست.
۳) ممکن است همگرا باشد. ۴) به عدد $a + b$ همگراست.

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\sum_{k=۱}^{\infty} k_n$ همگراست پس $k_n \to ۰$ و $b \neq ۰$ و $k_n + b \to b$ و بنابراین سری داده‌شده شرط لازم همگرایی را ندارد و واگراست.

۴۵. کدامیک از سری‌ها $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ که جملهٔ عمومی آن داده شده است، همگرا هستند؟

۱) $a_n = [\frac{n+2}{n}]$ ۲) $a_n = \cos\frac{1}{n^3}$ ۳) $a_n = [\frac{n^2}{n^2+2}]$ ۴) هر سه واگرا هستند.

حل: گزینه ۳ درست است. جمله عمومی در گزینه (۱) و (۲) همگرا به یک هستند و بنابراین شرط لازم را ندارند و واگرا هستند. در گزینه (۳) توجه کنید که $1 > \frac{n^2}{n^2+2} > 0$ و لذا جمله عمومی $a_n = 0$ است پس سری همگرا به صفر است.

۴۶. سری $\cdots + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ یک سری از نوع (صنایع ۷۴)

۱) واگراست. ۲) شرط لازم همگرایی را ندارد.

۳) همگراست. ۴) هیچکدام

حل: گزینه ۱ درست است. سری به‌صورت $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ است بنابراین شرط لازم همگرایی را دارد ($\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$) ولی چون $p = \frac{1}{2}$ بنا به (۳) در صفحه ۵۰۰، واگراست.

۴۷. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^\alpha}$ در صورتی همگراست که: (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) $\alpha \leq 1$ ۲) $\alpha \geq 1$ ۳) $\alpha < 1$ ۴) $\alpha > 2$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{n}{n^\alpha} \sim \frac{n+1}{n^\alpha}$ پس سری همگراست اگر و تنها اگر $\alpha - 1 > 1$ یعنی $\alpha > 2$.

۴۸. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{1+n^3}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{1+n^2}$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟ (سیستم ۷۹)

۱) همگرا ـ واگرا ۲) همگرا ـ همگرا ۳) واگرا ـ همگرا ۴) واگرا ـ واگرا

حل: گزینه ۱ درست است. از نکته ۸ در صفحه ۵۰۹ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{n\sqrt{n}}{1+n^3} \sim \frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{و} \quad p = \frac{3}{2} > 1 \implies \text{سری همگراست.}$$

$$\frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} \sim \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{و} \quad p = \frac{1}{2} < 1 \implies \text{سری واگراست.}$$

۴۹. اگر $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$ و $b_n = \mathrm{Arcsin}\frac{1}{n}$ آنگاه: (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا است. ۲) $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا است.

۳) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا هستند. ۴) $\sum a_n$ واگرا و $\sum b_n$ همگرا است.

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \sim a_n$ پس بنا به نکته ۸ در صفحه ۵۰۹ این سری همگراست. اما $b_n \sim \frac{1}{n}$ و بنا به نکته ۸ واگراست.

۵۰. کدام سری همگراست؟ (معدن ۸۲)

۱) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+2n}}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3+4n-7}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\frac{1}{\sqrt{n^4+2n}} \sim \frac{1}{n^2}$ بنا به نکته ۸ در صفحه ۵۰۹ سری همگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها: گزینه (۱) با توجه به نکته (۱۰ ــ الف) در صفحه ۵۱۰ واگراست. در گزینه (۳) چون جمله عمومی هم‌ارز $\frac{1}{n}$ است، واگرا می‌باشد. در گزینه (۴) جمله عمومی به $e \neq 0$ میل می‌کند و لذا واگراست.

۵۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$: (معدن ــ آزاد ۸۲)

۱) گاهی همگرا و گاهی واگراست. ۲) واگراست.
۳) همگرا به سمت ۲ است. ۴) همگراست.

حل: گزینه ۲ درست است. به نکته (۱۰ ــ ب) در صفحه ۵۱۰ به ازای $p=1$ مراجعه نمایید.

۵۲. مجموعه $\left\{(x,y):\ \text{سری}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-3}{4n+1}+\frac{2ny^2}{8n^2+4n+1}\right)\ \text{همگراست.}\right\}$ عبارتست از:

۱) بیضی ۲) هذلولی ۳) دایره ۴) یک نقطه

حل: گزینه ۳ درست است. شرط همگرایی این است که جملاتی که ایجاد واگرایی می‌کنند، حذف شوند.

$$\text{جملات ایجاد کننده واگرایی} = \frac{x^2-3}{4n}+\frac{2ny^2}{8n^2}=\frac{1}{4n}(x^2-3+y^2)=0 \implies x^2+y^2=3 \implies \text{دایره}$$

۵۳. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ کدام همگرا و کدام واگرا هستند؟ (مواد ۷۹)

۱) هر دو همگرا ۲) هر دو واگرا
۳) اولی همگرا و دومی واگرا ۴) اولی واگرا و دومی همگرا

حل: گزینه ۴ درست است. در سری اول چون درجه صورت و مخرج یک واحد اختلاف دارند، بنا به نکته ۹ در صفحه ۵۱۰ واگراست. درمورد $a_n=\frac{1}{n!}$ از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0=L<1 \implies \text{این سری همگراست.}$$

۵۴. کدامیک از سری‌های زیر همگراست؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$

حل: گزینه ۱ درست است. از آزمون ریشه در مورد این گزینه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{\sqrt[n]{n!}}\sim\frac{2}{\frac{n}{e}}\to 0=L<1 \implies \text{این سری همگراست.}$$

دقت کنید که سایر گزینه‌ها در شرط لازم همگرایی صدق نمی‌کنند.

$$\frac{2^n}{n^2}\to+\infty \quad \text{و} \quad (1-\frac{1}{n})^n\sim e^{n(1-\frac{1}{n}-1)}\to\frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \cos\frac{1}{n}\to 1$$

۵۵. کدام گزینه درمورد سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$ درست است؟ (مکانیک ۸۲)

۱) سری همگراست.

۲) به‌موجب آزمون ریشه سری همگراست.

۳) به‌موجب آزمون نسبت سری واگراست.

۴) از آزمون نسبت نمی‌توان همگرایی یا واگرایی سری را نتیجه گرفت.

حل: گزینه ۳ درست است. چون جمله عمومی به بینهایت میل می‌کند، سری واگراست که با هریک از آزمون‌های نسبت یا ریشه می‌توان به‌همین نتیجه رسید.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}}=\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)k^k}=\frac{(k+1)^k}{k^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\to e>1 \implies \text{سری واگرا}$$

این سؤال را با توجه به رابطه (۷ــ۲) در صفحه ۴۸۹ با کمک آزمون ریشه نیز می‌توان حل نمود.

۵۶. در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n+5}$ کدام گزینه درست است؟

۱) برای $0<x<1$ سری همگراست.

۲) برای $x>1$ سری همگراست.

۳) برای $x>0$ که $x\neq 1$ سری همگراست.

۴) برای $x\geq 1$ سری همگراست.

حل: گزینه ۲ درست است. از آزمون ریشه برای $x>0$ استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^n+5}}\to\frac{1}{x}<1\implies x>1$$

دقت کنید که وقتی $x=1$ جمله عمومی سری $\frac{1}{6}$ و همگرا به صفر نیست پس سری واگراست.

۵۷. اگر $u_n=\frac{a^n}{n^2+1}$ $(0<a<1)$ و $v_n=\frac{b^n}{n^3+1}$ $(b>1)$ از نظر همگرایی دو سری $s=\sum u_n$ و $t=\sum v_n$ چگونه‌اند؟ (آمار ۸۱)

۱) هر دو همگرا

۲) s همگرا و t واگرا

۳) s واگرا و t همگرا

۴) هر دو واگرا

حل: گزینه ۲ درست است. از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{u_n}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}\to a<1\implies \text{همگراست}\quad,\quad \sqrt[n]{v_n}=\frac{\sqrt[n]{b^n}}{\sqrt[n]{n^3+1}}\to b>1\implies t\ \text{واگراست}$$

۵۸. کدامیک از سری‌های زیر همگرا هستند؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{3}{n}\right)^n$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{4}{n}\right)^n$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$

۴) هر سه واگرا هستند.

حل: گزینه ۳ درست است. همه گزینه‌ها به‌شکل $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ است که برای $x>0$ همگرایی آن را با آزمون ریشه بررسی می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{n}\sqrt[n]{n!}\sim\frac{x}{n}\cdot\frac{n}{e}\to\frac{x}{e}=L<1$$

و بنابراین گزینه (۳) که برای آن $\frac{2}{e}<1$ قابل قبول است.

۵۹. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۲} \frac{n}{(n^۲-۵)\ln^۲ n}$ صحیح است؟ (آمار و ریاضی ۷۸)

۱) واگراست. ۲) بی‌کران است. ۳) همگراست. ۴) متناوب است.

حل: گزینه ۳ درست است. $\frac{۱}{n\ln^۲ n} = \frac{n}{n^۲\ln^۲ n} \sim \frac{n}{(n^۲-۵)\ln^۲ n}$ و چون $p=۲>۱$ با توجه به نکته ۱۱ در صفحه ۵۱۲ سری همگراست.

۶۰. کدامیک از سری‌های زیر همگراست؟ (معدن ۸۱)

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \sin\frac{۱}{n}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \sin\frac{n^۲+۱}{n^۲}$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{\ln n}{n}$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{n}{۲n+۱}$

حل: گزینه ۳ درست است. این گزینه با توجه به مثال ۲۰ در صفحه ۵۱۴ همگراست. توجه کنید که گزینه‌های (۲) و (۴) شرط لازم همگرایی را ندارند و در گزینه (۱) چون $\frac{۱}{n} \sim \sin\frac{۱}{n}$، سری واگراست.

۶۱. سری عددی $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{n+۱}{n^۲}$ کدام‌یک از شرایط زیر را داراست؟ (عمران ۷۲)

۱) یک سری واگراست. ۲) یک سری مطلقاً همگراست.

۳) یک سری همگرا است ولی مطلقاً همگرا نیست. ۴) هیچ اظهار نظر قطعی نمی‌توان دربارهٔ آن کرد.

حل: گزینه ۳ درست است. سری، متناوب است و چون $a_n = \frac{n+۱}{n^۲}$ نزولی و همگرا به صفر است، سری همگراست ولی چون $\frac{۱}{n} \sim a_n$ پس سری قدرمطلق واگراست پس همگرای مطلق نمی‌باشد.

۶۲. اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد، دراین صورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+۱}{n} a_n$ (علوم‌کامپیوتر ۸۰)

۱) همگرای مطلق است. ۲) همگراست اما ممکن است همگرای مطلق نباشد.

۳) ممکن است همگرا نباشد. ۴) همگرای مطلق نیست.

حل: گزینه ۱ درست است. چون $|a_n| \sim |\frac{n+۱}{n} a_n|$ و سری $\sum |a_n|$ همگراست با توجه به آزمون هم‌ارزی سری داده شده همگرای مطلق است.

مبحث سری‌های توانی

۶۳. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{n}{n+۱})^{n^۲} z^n$ چقدر است؟ (عمران، نقشه‌برداری ۷۹)

۱) ۱ ۲) e ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) $\sqrt{e}$

حل: گزینه ۲ درست است. از فرمول ریشه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\frac{n}{n+۱})^n \sim e^{n(\frac{n}{n+۱}-۱)} \to e^{-۱} = \frac{۱}{R} \implies R = e$$

۶۴. شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} n^{3}(2x-3)^{n}$ برابراست با: (علوم کامپیوتر ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. سری را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n}n^{3}(x-\frac{3}{2})^{n}$ می‌نویسیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{2^n n^3}=2\sqrt[n]{n^3}\to 2=\frac{1}{R}\implies R=\frac{1}{2}$$

۶۵. شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{(n^2+1)3^n}$ برابراست با: (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

حل: گزینه ۱ درست است. سری را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n^2+1)3^n}(x+\frac{1}{2})^n$ می‌نویسیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n^2+1)3^n}}=\frac{2}{3\sqrt[n]{n^2+1}}\to\frac{2}{3}=\frac{1}{R}\implies R=\frac{3}{2}$$

۶۶. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(3x)^n}{2^n}$ برابراست با:

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. سری را به‌شکل $\sum_{n=1}\frac{1+3^n}{2^n}x^n$ می‌نویسیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{1+3^n}{2^n}}\to\frac{3}{2}=\frac{1}{R}\implies R=\frac{2}{3}$$

۶۷. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^n x^{2n}$ کدام است؟ (آمار ۷۷)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{9}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $a_n=(\frac{4}{9})^n$ با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۵۲۰:

$$\frac{1}{R^2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{4}{9}\implies R=\frac{3}{2}$$

۶۸. اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n}$ برابر R باشد، شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}\frac{a_n}{n}x^{2n}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $\frac{R}{2}$ ۲) ۰ ۳) R ۴) $2R$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۵۲۰ داریم $\sqrt[n]{|a_n|}\to\frac{1}{R^2}$ و اگر R' شعاع سری موردنظر باشد:

$$\frac{1}{R'^2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{a_n}{n}|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R^2}\implies R'=R$$

۶۹. سری $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ بر کدام یک از مجموعه‌های زیر همگراست؟ (ریاضی ۷۴)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) فقط بر $\{1\}$

۳) فقط بر $\{x : |x| \leq 1\}$ ۴) فقط بر $\{x : |x| > 1\}$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا شعاع همگرایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{e}{n} \to 0 \implies R = \frac{1}{0} = +\infty \implies$$ برکل $\mathbb{R}$ همگراست.

۷۰. فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$ کدام است؟ (آمار ۸۱)

۱) $(1,3)$ ۲) $[1,3]$ ۳) $[1,4)$ ۴) $[1,4]$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا شعاع همگرایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \to 1 = \frac{1}{R} \implies R = 1 \implies |x-2| < 1 \implies 1 < x < 3$$

و در $x = 1, 3$ به‌سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ می‌رسیم که هر دو واگرا هستند.

۷۱. فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۰)

۱) $2 < x \leq 4$ ۲) $4 \leq x < 5$ ۳) $4 < x \leq 5$ ۴) $2 \leq x < 4$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \to 1 \implies R = 1 \implies -1 < x-3 < 1 \implies 2 < x < 4$$

در $x = 4$ سری $\sum \frac{1}{n+1}$ به دست می‌آید که واگراست و در $x = 2$ به سری $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ می‌رسیم که سری متناوب و همگراست.

۷۲. بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۱)

۱) $[2,5)$ ۲) $(1,5]$ ۳) $[1,5)$ ۴) $(2,5]$

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا شعاع همگرایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \implies R = 2 \implies -2 < x-3 < 2 \implies 1 < x < 5$$

$x = 5 : \sum \frac{1}{n+1} \implies$ واگرا و $x = 1 : \sum \frac{(-1)^n}{n+1} \implies$ سری متناوب و همگرا

پس بر $[1,5)$ سری همگراست.

۷۳. مقدار x را طوری پیدا کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$ همگرا باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱، علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ۲) $1 \leq x \leq 3$ ۳) $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$ ۴) $1 < x \leq 3$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{۲}{۳}\sqrt[n]{\frac{۱}{n}} \to \frac{۲}{۳} \implies R = \frac{۳}{۲}$$

پس سری برای $-\frac{۳}{۲} < x < \frac{۳}{۲}$ همگراست و در $x = \pm\frac{۳}{۲}$ باید همگرایی بررسی شود.

$x = -\frac{۳}{۲}$: سری $= \sum(-۱)^{n+۱}\frac{۲^n}{n۳^n}(-\frac{۳}{۲})^n = -\sum\frac{۱}{n} \implies$ واگرا

$x = \frac{۳}{۲}$: سری $= \sum(-۱)^{n+۱}\frac{۲^n}{n۳^n}(\frac{۳}{۲})^n = \sum\frac{(-۱)^{n+۱}}{n} \implies$ سری متناوب و همگرا

پس فاصله موردنظر $-\frac{۳}{۲} < x \le \frac{۳}{۲}$ است. البته با توجه به گزینه‌ها، پس از محاسبهٔ شعاع کافی‌است فقط همگرایی در $x = -\frac{۳}{۲}$ بررسی شود.

۷۴. بازه همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(x-۱)^{۲n}}{n^۲+۱}$ کدام است؟ (شیمی نساجی ۷۹)

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[۰,۱]$

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. با توجه به نکته ۱۴ در صفحه ۵۲۰ وسط بازه همگرایی باید $x_۰ = ۱$ باشد که فقط گزینه (۳) دارای این ویژگی است!!

روش دوم. با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۵۲۰:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{۱}{\sqrt[n]{n^۲+۱}} \to ۱ = \frac{۱}{R^۲} \implies R = ۱ \implies |x-۱| < ۱ \implies ۰ < x < ۲$$

در $x = ۰$ و $x = ۲$ به سری همگرای $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+۱}$ می‌رسیم.

۷۵. فاصله همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۵-۲x)^n}{۳^n(n+۱)}$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) $۱ \le x < ۴$ ۲) $۲ \le x < ۵$ ۳) $۳ \le x < ٦$ ۴) $۱ < x \le ۴$

حل: گزینه ۴ درست است. سری را به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۲)^n}{۳^n(n+۱)}(x-\frac{۵}{۲})^n$ می‌نویسیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{۲^n}{۳^n(n+۱)}} \to \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{R} \implies R = \frac{۳}{۲} \implies |x-\frac{۵}{۲}| < \frac{۳}{۲} \implies ۱ < x < ۴$$

$x = ۱ : \sum\frac{۱}{n+۱} \implies$ سری واگراست. و $x = ۴ : \sum\frac{(-۱)^n}{n+۱}$ سری متناوب و همگرا

پس بازه همگرایی $۱ < x \le ۴$ است.

۷۶. اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^{۲n}$ برابر ۴ باشد، فاصله همگرایی سری $\sum\frac{a_n}{n+۱}x^{n+۱}$ کدام است؟ (آمار، ریاضی ۷۸)

۱) $(-۱٦,۱٦)$ ۲) $(-۴,۴)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(-۱,۱)$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۵۲۰ داریم $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{۱}{R^۲} = \frac{۱}{۱٦}$. اگر شعاع همگرایی سری موردنظر R' باشد.

$$\frac{۱}{R'} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+۱}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{۱}{۱۶} \Longrightarrow R' = ۱۶ \Longrightarrow -۱۶ < x < ۱۶$$

تذکر۱. دقت کنید که با توجه به ضابطه a_n ممکن است، نقاط $x = \pm ۱۶$ نیز جز بازه همگرایی باشند.

۷۷. سری $\cdots + \frac{x^۴}{۴^۲} - \frac{x^۳}{۳^۲} + \frac{x^۲}{۲^۲} - \frac{x}{۱^۲}$ در فاصله $-۱ \leq x \leq ۱$ **(مکانیک ـ آزاد ۷۶)**

۱) واگراست. ۲) همگراست.

۳) بجز $x = ۱$ همگراست. ۴) بجز $x = -۱$ همگراست.

حل: گزینه ۲ درست است. باید بازه همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{n^۲}$ را تعیین کنیم. برای تعیین شعاع همگرایی:

$$a_n = \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۲} \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{۱}{\sqrt[n]{n^۲}} \to ۱ = \frac{۱}{R} \Longrightarrow R = ۱$$

پس سری برای $|x| < ۱$ همگراست. در $x = ۱$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۲}$ حاصل می‌شود که همگرای مطلق است. در $x = -۱$ به سری $-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}(-۱)^n}{n^۲}$ می‌رسیم که همگراست. پس سری بر بازه $[-۱, ۱]$ همگرا می‌باشد.

۷۸. بازه همگرایی سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(x+۳)x^k}{k!}$ کدام است؟ **(هسته‌ای ۷۸)**

۱) $(-۱, ۱)$ ۲) $(-۳, ۳)$ ۳) $(۳, +\infty)$ ۴) $(-\infty, +\infty)$

حل: گزینه ۴ درست است. سری را می‌توان به‌صورت ضرب $(x+۳)$ در سری توانی $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ درنظرگرفت. شعاع همگرایی این سری $\frac{۱}{R} = \lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\frac{۱}{k!}} = ۰$ و بنابراین $R = +\infty$ است. پس شعاع حاصل ضرب نیز $+\infty$ و بازه همگرایی $\mathbb{R}$ است.

۷۹. بازه همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} ne^{-nx}$ کدام است؟ **(معدن ۸۱)**

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $[۰, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۰)$ ۴) $(-\infty, ۰]$

حل: گزینه ۱ درست است. این سری، توانی نیست، ریشه n ام جمله عمومی را تشکیل می‌دهیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-x}\sqrt[n]{n} \to e^{-x} = L < ۱ \Longrightarrow x > ۰$$

ضمناً حالت $L = ۱$ یا $x = ۰$ را باید بررسی کنیم که سری $\sum n$ به دست می آید که واگراست.

سری تیلور و مک لورن

۸۰. ضریب جمله $x^۴$ در بسط مک لورن $f(x) = \cos x$ کدام است؟ **(سیستم ۸۲)**

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به فرمول (۲) در صفحه ۵۳۰ ضریب $x^۴$ برابر $\frac{۱}{۲۴} = \frac{۱}{۴!}$ است.

۸۱. ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $\tan x$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{4!}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\tan x$ تابعی فرد است، ضریب x^4 درآن صفر است.

۸۲. ضریب x^5 در بسط مک لورن تابع $\ln(1+x)$ کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱، مکانیک ۸۲)

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{5!}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{5!}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به فرمول (۵) در صفحه ۵۳۰ ضریب x^n برابر $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ است پس ضریب x^5 برابر $\frac{1}{5}=\frac{(-1)^6}{5}$ خواهد بود.

۸۳. ضریب x^3 در بسط $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ در نقطه $x=0$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷، مواد ۷۸)

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل: گزینه ۱ درست است. تابع موردنظر $\sinh^{-1} x$ است و با توجه به فرمول (۱۰) در صفحه ۵۳۰ ضریب x^3 برابر $-\frac{1}{6}$ است.

۸۴. ضریب x^2 در بسط مک لورن $\sqrt[3]{1+x}$ برابر است با: (ریاضی ۷۶، نساجی ـ آزاد ۸۲)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

حل: گزینه ۱ درست است. در بسط دوجمله‌ای ضریب x^2 عبارتست از $\frac{r(r-1)}{2!}$ و در اینجا $r=\frac{1}{3}$ پس ضریب $-\frac{1}{9}$ است.

۸۵. ضریب x^3 در بسط مک لورن تابع $f(x)=(1+x)^{-2}$ برابر است با: (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) -4 ۲) $\frac{1}{3!}$ ۳) 0 ۴) $-\frac{1}{3!}$

حل: گزینه ۱ درست است. در بسط دوجمله‌ای ضریب x^3 برابر $\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}$ است و دراینجا $r=-2$ پس ضریب x^3 برابر -4 است.

۸۶. در بسط مک لورن $f(x)=xe^{-x}$ ضریب x^4 کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $-\frac{1}{12}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

حل: گزینه ۲ درست است. کافی‌است ضریب x^3 در بسط e^{-x} را محاسبه کنیم. جمله توان سه در e^x برابر $\frac{x^3}{3!}$ است پس در e^{-x} برابر $-\frac{1}{6}x^3=\frac{(-x)^3}{3!}$ خواهد بود.

۸۷. ضریب x^4 در بسط مک لورن تابع $y=x\sin 2x$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

حل: گزینه ۲ درست است. باید ضریب x^3 در بسط $\sin 2x$ محاسبه شود، پس با جایگذاری $2x$ در فرمول (۱) در صفحه ۵۳۰:

$$\text{جمله شامل } x^3 = -\frac{1}{3!}(2x)^3 = -\frac{4}{3}x^3$$

۸۸. ضریب $x^{۲}$ در بسط مک لورن تابع $y=\cos^{۲} ۲x$ کدام است؟ (ژئوفیزیک، سیستم ۸۱)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\cos^{۲} ۲x = \frac{۱}{۲}(۱+\cos ۴x)$ کافی‌است ضریب $x^{۲}$ را در $\frac{۱}{۲}\cos ۴x$ محاسبه کنیم. در فرمول (۲) در صفحه ۵۳۰ بجای x از $۴x$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{جمله شامل } x^{۲} = \frac{۱}{۲}\Big(-\frac{(۴x)^{۲}}{۲!}\Big) = -۴x^{۲}$$

۸۹. ضریب $x^{۳}$ در بسط عبارت $x\cos x-\sin x$ به سری مک لورن برابرکدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. کافی است ضریب $x^{۲}$ در بسط $\cos x$ و ضریب $x^{۳}$ در بسط $\sin x$ را از هم کم کنیم.

$$\text{ضریب } x^{۳} = (-\frac{۱}{۲!})-(-\frac{۱}{۳!}) = -\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

۹۰. ضریب $x^{۲}$ در بسط به سری مک لورن مشتق $\mathrm{Arcsin}(x)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۳ درست است. کافی است از جمله شامل $x^{۳}$ در $\sin^{-۱} x$ مشتق بگیریم

$$\text{جمله شامل } x^{۳} = \frac{۱}{۶}x^{۳} \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{۱}{۲}x^{۲}$$

۹۱. هرگاه داشته باشیم $\forall x \;,\; |x|<۱ : \frac{۱}{۱-x} = ۱+x+x^{۲}+\cdots$ آنگاه سری نامتناهی $\forall x \;,\; |x|<۱ : x-\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۱}{۵}x^{۵}-\frac{۱}{۷}x^{۷}+\cdots$ بسط مک لورن کدام تابع است؟ (شیمی نساجی ۸۱)

۱) $f(x)=\tan^{-۱} x$ ۲) $f(x)=\frac{x}{۱-x^{۲}}$ ۳) $f(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{(۱-x^{۲})^{۲}}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به فرمول (۹) در صفحه ۵۳۰، جواب $\tan^{-۱} x$ است.

۹۲. سری تیلور تابع $\ln(۱+x^{۲})$ کدامیک از عبارات زیراست؟ (سیستم ۷۸)

۱) $x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{x^{۶}}{۳}-\frac{x^{۸}}{۴}+\cdots$ ۲) $x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۲!}+\frac{x^{۶}}{۳!}-\frac{x^{۸}}{۴!}+\cdots$

۳) $x-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}-\frac{x^{۴}}{۴!}+\cdots$ ۴) $x^{۲}-\frac{x^{۶}}{۳!}+\frac{x^{۱۰}}{۵!}-\frac{x^{۱۴}}{۷!}+\cdots$

حل: گزینه ۱ درست است. کافی است در فرمول (۵) در صفحه ۵۳۰، یعنی بسط $\ln(۱+x)$ بجای x قراردهید $x^{۲}$.

۹۳. سری مک لورن تابع $\ln(\frac{۱+x}{۱-x})$، $-۱<x<۱$ عبارت است از: (معدن ۷۷، مکانیک سنگ ۷۹)

۱) $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = -۲(\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۴}+\cdots+\frac{x^{۲n}}{۲n}+\cdots)$

۲) $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\cdots+\frac{(-۱)^{k-۱}}{k}x^{k}+\cdots$

۳) $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = -x+\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}+\cdots+\frac{(-۱)^{k}}{k}x^{k}+\cdots$

۴) $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = ۲(x+\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۵}+\cdots+\frac{x^{۲n-۱}}{۲n-۱}+\cdots)$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول.

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

روش دوم. تابع مورد نظر $2\tanh^{-1}$ است. فرمول (۱۱) در صفحه ۵۳۰ را ملاحظه کنید.

۹۴. بسط مک لورن تابع $\frac{1}{(1-x)^2}$ وقتی که $|x| < 1$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۷۸، آمار ۸۰)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

حل: گزینه ۲ درست است. از بسط مک لورن $\frac{1}{1-x}$ مشتق می‌گیریم.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

۹۵. سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ بسط مک لورن کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{(1-x)^2}$ ۲) $\frac{1}{(1+x)^2}$ ۳) $\frac{1}{1-x^2}$ ۴) $\frac{1}{(1+x)^2}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به اینکه $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (برای $|x| < 1$) پس با مشتق‌گیری داریم

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

۹۶. بسط تیلور e^x حول $x = a$ به کدام صورت است؟ (معدن ۸۱)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ ۲) $e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ ۳) $e^a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{na}(x-a)^n}{n!}$

حل: گزینه ۳ درست است. چون جملات بسط باید به‌صورت $x - a$ باشد:

$$e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$$

۹۷. ضریب x^3 در بسط مک لورن تابع $f(x) = e^x \sin x$ برابر است با: (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. بسط e^x و $\sin x$ را تا توان ۳ نوشته و در هم ضرب می‌کنیم.

$$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots)(x - \frac{x^3}{6} + \cdots) \implies \text{ضریب } x^3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

۹۸. اگر $f(x) = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots$ آنگاه $f'(1)$ کدام است؟ (ریاضی ۷۹)

۱) e ۲) $2e$ ۳) π ۴) 2π

حل: گزینه ۲ درست است. توجه کنید که:

$$f(x) = x(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots) = xe^x \implies f'(x) = (x+1)e^x \implies f'(x) = 2e$$

۹۹. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$: (تکنولوژی نساجی ۸۲)

۱) 0 ۲) $\ln 2$ ۳) $2\ln 2$ ۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. مجموع داده شده $\cdots - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1$ همان بسط $\ln(1+x)$ به‌ازای $x = 1$ است پس حاصل $\ln 2$ می‌باشد.

۱۰۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 1}{n!}$ کدام است؟ (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $4e - 1$ ۲) $8e - 1$ ۳) $5e - 1$ ۴) $7e + 1$

حل: گزینه ۴ درست است. باید $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ را ایجاد نماییم.

$$\text{مجموع} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1\right) \xlongequal{n\to n+1} 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} - (e-1)$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - e + 1 = 4\left(0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\right) + 4e - e + 1 = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 3e + 1$$

$$\xlongequal{n\to n+1} 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3e + 1 = 4e + 3e + 1 = 7e + 1$$

۱۰۱. مقدار $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}$ کدام است؟ (آمار ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۴ درست است. چون $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ پس $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ و

$$\text{مجموع داده شده در صورت سؤال} \xlongequal{n\to n+2} e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{n!} = 4e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 4e^{-2}\cdot e^2 = 4$$

۱۰۲. شعاع همگرایی سری مک لورن تابع $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(2x^2+1)}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. باید حداقل فاصله ریشه‌های مخرج از $x = 0$ محاسبه شود. ریشه‌های مخرج عبارتند از:

$$(x^2-1)(2x^2+1) = 0 \implies x = \pm 1\,,\ \pm\frac{i}{\sqrt{2}} \implies x = 0 \text{ فاصله از } = 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و کمترین فاصله $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است.

تستهای تکمیلی فصل ۷ ـ مبحث دنباله و سری (سؤالات سطح ۲)

۱. دنباله $\{x_n\}$ را با فرض $x_n = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ در نظر بگیرید. مقدار $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ عبارت است از: (آمار ۷۶)

۱) صفر   ۲) e ۳) e^2 ۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به خواص انتگرال معین:

$$x_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

چون رشد لگاریتم از چندجمله‌ای کمتر است $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$

۲. اگر m عدد طبیعی باشد، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+m}{(n+m+1)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{mm!}$ ۲) $\frac{1}{(m+1)!}$ ۳) $\frac{1}{m}$ ۴) $\frac{1}{m!}$

حل: گزینه ۴ درست است. سری به صورت تلسکوپی تبدیل می‌شود.

$$\text{سری} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m+1)-1}{(n+m+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+m)!}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{(n+m+1)!}}_{a_{n+1}} = a_0 - a_\infty = \frac{1}{m!}$$

۳. مشتق پنجم تابع $f(x) = \frac{x-2}{1+x^2}$ در $x = 0$ برابر است با:

۱) ۱۲۰   ۲) -120 ۳) ۷۲۰   ۴) -720

حل: گزینه ۱ درست است. می‌دانیم ضریب x^5 در بسط مک‌لورن f برابر $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ است. پس باید ضریب x^5 را در بسط مک‌لورن $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}$ محاسبه کنیم. چون $\frac{2}{1+x^2}$ تابعی زوج است پس ضریب x^5 در آن صفر است. عبارت $\frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1-(-x^2)}$ سری هندسی با جمله اول x و قدر نسبت $-x^2$ است و لذا:

$$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots \implies x^5 \text{ ضریب } = 1 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \implies f^{(5)}(0) = 5! = 120$$

۴ اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، کدامیک از سری‌های زیر الزاماً همگرا هستند؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ ۴) هر سه ممکن است واگرا باشند.

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\sum a_n$ همگراست و $b_n = \frac{1}{n}$ نزولی و همگرا به صفر است، بنا به آزمون آبل سری $\sum \frac{a_n}{n}$ همگرا می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها: توجه کنید که اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست ولی $\sum (-1)^n \frac{a_n}{n} = \sum \frac{1}{n \ln n}$ و $\sum \sqrt{|a_n|} = \sum \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ واگرا می‌باشد و لذا گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

۵. سری با جمله عمومی $u_n = \frac{۲}{n^۲}\left(۱ + \ln(۱+n^۲)\right)$ (عمران ۷۳)

۱) همگراست.
۲) با توجه به مقادیر n گاهی همگرا و گاهی واگراست.
۳) واگراست.
۴) در مورد همگرایی یا واگرایی نمی‌توان اظهارنظر کرد.

حل: گزینه ۱ درست است. توجه کنید که:

$$u_n \sim \frac{۲}{n^۲}.\ln(۱+n^۲) \sim \frac{۲\ln n^۲}{n^۲} = \frac{۴\ln n}{n^۲}$$

حال با توجه به نکته (۱۰ ـ ب) در صفحه ۵۱۰ به ازای $p = ۲$ این سری همگراست.

۶. مشتق سوم تابع $f(x) = (e^x - ۱)\cos x$ در $x = ۰$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱− ۴) ۲−

حل: گزینه ۴ درست است. چون ضریب $x^۳$ برابر $\frac{f'''(۰)}{۳!}$ است، باید ضریب $x^۳$ محاسبه شود.

$$(e^x - ۱)\cos x = \left(x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۶} + \cdots\right)\left(۱ - \frac{x^۲}{۲} + \cdots\right) = ax + bx^۲ + \left(-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}\right)x^۳ + \cdots$$

پس $\frac{f'''(۰)}{۳!} = -\frac{۱}{۳}$ و لذا $f'''(۰) = -۲$.

۷ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت است به طوریکه حد $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ موجود و برابر عدد ℓ و $\ell < ۱$ باشد. چند مورد از گزاره‌های زیر در مورد دنباله a_n همواره درست است؟

الف) همگرا به صفر است. ب) بی‌کران است. ج) نزولی است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه حد دنباله برابر ℓ است، پس برای n های بزرگ (از مرتبه‌ای به بعد) مقادیر $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ نزدیک ℓ بوده و بنابراین از یک کمتر می‌باشند. پس از مرتبه‌ای به بعد داریم:

$\frac{a_{n+۱}}{a_n} < ۱ \implies a_{n+۱} < a_n \implies$ دنباله a_n از مرتبه‌ای به بعد نزولی است.

توجه کنید که در این حالت نمی‌توان قطعاً در مورد نزولی بودن دنباله اظهار نظر کرد. (ممکن است چند جمله اول دنباله صعودی باشند و لذا دنباله نه صعودی و نه نزولی باشد.) چون جملات دنباله مثبت هستند پس عدد صفر کران پایین آن است و بنا بر نتیجه ۴ در صفحه ۴۸۸ این دنباله همگراست. حد آنرا a فرض می‌کنیم. اگر $a \neq ۰$ آنگاه با حد گرفتن از رابطه $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ نتیجه می‌شود $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{a}{a} = ۱$ که تناقض است و لذا این دنباله به عدد صفر همگراست و بنا به قضیه ۱ در صفحه ۴۸۸ کراندار نیز هست.

۸. به ازای کدام مقادیر حقیقی x، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$ همگراست؟ (ریاضی ۷۶)

۱) $\{x : x > ۱\}$ ۲) $\{x : |x| < ۱\}$ ۳) $\{x : x > ۰\}$ ۴) $\{x : x < -۱\}$

حل: گزینه ۲ درست است. ریشه n ام جمله عمومی را تشکیل می‌دهیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n^x}} \to |x| = L$$

پس برای $|x| < ۱$ سری همگراست. در حالت $L = ۱$ نقاط $x = \pm ۱$ را داریم که در آنها به سریهای $\sum \frac{۱}{n}$ و $\sum \frac{(-۱)^n}{n^{-۱}} = \sum n(-۱)^n$ می‌رسیم که سری‌های واگرا هستند.

۹ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2+3n+2} \cos \frac{\pi(2n+3)}{n^2+3n+2}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به فرمول (د ـ ۴) صفحه ۲۴:

$$\sin \frac{\pi}{n^2+3n+2} \cos \frac{\pi(2n+3)}{n^2+3n+2} = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{(2n+4)\pi}{n^2+3n+2} + \sin \frac{(-2-2n)\pi}{n^2+3n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin \frac{2\pi}{n+1} - \sin \frac{2\pi}{n+2}\right) = a_n - a_{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2+3n+2} \cos \frac{\pi(2n+3)}{n^2+3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_\infty = \frac{1}{2}\sin \pi = 0$$

۱۰. اگر $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k}$ مقدار $\lim_{n\to\infty} S_n$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. چون برای $1 \leq k \leq n$ داریم $\frac{2n}{n^2+n} \leq \frac{2n}{n^2+k} \leq \frac{2n}{n^2+1}$ پس

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+1} \implies \frac{2n^2}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{2n^2}{n^2+1}$$

و بنابرقضیه فشردگی، حد برابر ۲ خواهد بود.

روش دوم. چون هر یک از جملات مجموع هم‌ارز $\frac{2}{n} = \frac{2n}{n^2}$ هستند، پس $a_n \sim n \times \frac{2}{n} \to 2$.

۱۱. حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n}{4n^2-1}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) واگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\frac{n}{4n^2-1} = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$ پس مجموع مورد نظر تلسکوپی است و بنا به (۴) در صفحه ۴۹۹:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{4}$$

۱۲ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد و $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} a_k$. در این صورت همواره ...... است. (ریاضی ۷۸)

۱) S_n کراندار ۲) S_n همگرا

۳) S_n واگرا ۴) با شرط $a_n \geq 0$، دنباله S_n واگرا

حل: گزینه ۱ درست است. توجه کنید که $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right) a_k$ حال با توجه به نابرابری کوشی ـ شوارتز:

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n} a_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

چون $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ همگراست پس $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ کراندار است، از طرفی $\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ و لذا کراندار است پس $|S_n|$ و لذا S_n کراندار می‌باشد.

تذکر ۱. توجه کنید که اگر $a_k > 0$ آنگاه دنباله S_n صعودی و چون کراندار است، پس همگراست.

۱۳. دنباله $b_n = \frac{a^n + 2}{2a^n + 3}$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) صعودی
۲) برای $0 < a < 1$ صعودی
۳) برای $a > 1$ صعودی
۴) برای $a > 1$ بی‌کران

حل: گزینه ۲ درست است. تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$ دارای مشتق منفی و لذا برای $x > 0$ نزولی اکید است. با توجه به اینکه $b_n = f(a^n)$ باید یکنوایی a^n را مشخص کنیم. با توجه به نمودار تابع نمایی در صفحه ۳۱ برای $1 > a > 0$ دنباله a^n نزولی و بنا به (۴ ـ ب) در صفحه ۴۸۸ دنباله b_n صعودی است. چون برای $a > 1$ دنباله a^n صعودی است پس b_n نزولی اکید است. ضمناً چون برای $a > 1$ صورت b_n از مخرج آن کوچکتر است، داریم $0 < b_n < 1$ پس b_n کراندار است.

۱۴ حاصل $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ تا دو رقم اعشار کدام است؟ (هسته‌ای ۷۶)

۱) ۰٫۶۸
۲) ۰٫۷۲
۳) ۰٫۷۵
۴) ۰٫۸۱

حل: گزینه ۳ درست است. محاسبه تابع اولیه e^{-x^2} امکان پذیر نیست. پس از بسط مک‌لورن e^{-x^2} انتگرال می‌گیریم. باجایگذاری $t = -x^2$ در بسط $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ داریم $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

سری بالا متناوب است و لذا اگر $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ را به جای مجموع بکار ببریم، خطا از قدرمطلق اولین جمله‌ای که حذف می‌شود یعنی $\frac{1}{(k+1)!(2k+3)}$ کمتر است. چون هدف محاسبه تا دو رقم اعشار است پس:

$$\frac{1}{(k+1)!(2k+3)} < \frac{1}{100} \implies (k+1)!(2k+3) > 100$$

رابطه بالا برای $k \geq 3$ برقرار است و لذا باید S_3 را به عنوان مقدار تقریبی انتگرال در نظر گرفت.

$$S_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \simeq 0/743 \simeq 0/75$$

۱۵. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ دراین صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(1+\sqrt{na_n})}$ (ریاضی ۷۶)

۱) واگراست.
۲) همگرایی آن بستگی به مقادیر خاص a_n دارد.
۳) همگرای مشروط است.
۴) همگرای مطلق است.

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا توجه‌کنید که چون $b_n = \frac{a_n}{n(1+\sqrt{na_n})} > 0$ پس همگرایی و همگرایی مطلق در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ معادل هستند.

$$a_n \geq \frac{1}{2} \implies 1+\sqrt{na_n} \geq 1+\sqrt{\frac{n}{2}} \implies b_n \leq \frac{a_n}{n(1+\sqrt{\frac{n}{2}})} \leq \frac{1}{n\sqrt{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست، سری مورد نظر نیز بنا به آزمون مقایسه همگراست.

۱۶. جواب رابطه بازگشتی $a_n - 9a_{n-2} = 0$ وقتی $a_0 = 6$ و $a_1 = 12$ کدام است؟ (آمار ۸۰)

۱) $a_n = 5(3)^n + n(-3)^n$ ۲) $a_n = 3^n + 5(-3)^n$

۳) $a_n = 5(3)^n + (-3)^n$ ۴) $a_n = 5n(3)^n + (-3)^n$

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. فقط گزینه (۳) در هر دو شرط صدق می‌کند!!

روش دوم. با توجه به نکته ۵ در صفحه ۴۹۸ رابطه بازگشتی متناظر با معادله مشخصه $r^2 - 9 = 0$ است که $r = \pm 3$ ریشه‌های آن هستند و لذا $a_n = A(3)^n + B(-3)^n$ حال شرایط را اعمال می‌کنیم.

$$\begin{cases} 6 = a_0 = A+B \\ 12 = a_1 = 3A - 3B \end{cases} \implies A = 5\ ,\ B = 1 \implies a_n = 5(3)^n + (-3)^n$$

۱۷ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۲ درست است. مخرج کسر را ساده‌تر می‌کنیم.

$$n!+(n+1)!+(n+2)! = n!+n!(n+1)+(n+2)! = n!(1+n+1)+(n+2)!$$

$$= n!(n+2)+(n+2)(n+1)n! = (n+2)n!(1+n+1) = (n+2)^2 n!$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+2)^2 n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$$

که حالت خاص تست ۲ در صفحه ۵۶۳ به ازای $m = 1$ و حاصل آن برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۱۸. برای کدام مقدار p، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p}\right)$ همگراست؟ (ریاضی ۷۹)

۱) $p > 1$ ۲) $p > 2$ ۳) $1 < p < 2$ ۴) $0 < p < 2$

حل: گزینه ۲ درست است. جمله عمومی یعنی a_n را در مزدوج یعنی $\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}} \sim \frac{1}{2n^{\frac{p}{2}}} \implies \frac{p}{2} > 1 \implies p > 2$$

۱۹. حد دنباله $a_n = \frac{n^n[\frac{n}{2}]}{(n+1)^{n+1}}$ برابراست با:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2e}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{2}{e}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه $[\frac{n}{2}] \sim \frac{n}{2}$:

$$a_n \sim \frac{n^n \cdot \frac{n}{2}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \sim \frac{1}{2}e^{(n+1)(\frac{n}{n+1}-1)} \to \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

۲۰ اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا باشد، آنگاه: (علوم کامپیوتر ۷۹)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگراست. ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ همگراست. ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3}$ همگراست. ۴) $\sum a_{2n}$ همگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. توجه کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ همگرا و نامنفی است و لذا بنا به نتیجه ۷ در صفحه ۵۱۵ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n^3}$ همگرای مطلق و لذا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3}$ همگرا است.

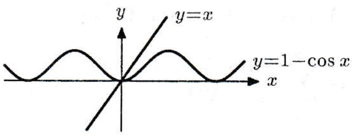
بررسی سایر گزینه‌ها: برای سایر گزینه‌ها مثال نقض وجود دارد. اگر $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست، اما گزینه‌های (۱) و (۴) واگرا هستند. مثال نقض گزینه (۲) نیز $a_n = \frac{1}{\ln n}$ می‌باشد.

۲۱. دنباله بازگشتی $x_{n+1} = 1 - \cos x_n$ و $x_1 = \frac{1}{2}$ مفروض است. چند مورد از گزاره‌های زیر در مورد x_n درست است؟

الف) غیر یکنوا است. **ب) کراندار است.** **ج) همگرا به صفر است.**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. چون $-1 \le \cos x_n \le 1$ پس $0 \le 1 - \cos x_n \le 2$ و لذا دنباله x_n کراندار است. با توجه به شکل خط $y = x$ برای $x > 0$ همواره بالای نمودار $f(x) = 1 - \cos x$ است و لذا می‌توان نوشت $f(x) < x$. بنابراین $x_{n+1} = 1 - \cos x_n = f(x_n) < x_n$ و لذا دنباله x_n نزولی (یکنوا) و



بنا به قضیه ۲ در صفحه ۴۸۸ همگراست. برای محاسبه حد این دنباله فرض کنید $x_n \to \ell$ و با اعمال حد بر رابطه بازگشتی داریم $\ell = 1 - \cos \ell$ و با توجه به شکل تنها نقطه برخورد نمودار $y = x$ و نمودار $f(x)$ نقطه $x = 0$ است و لذا $\ell = 0$.

تذکر۲. توجه کنید که شرط اولیه در وضعیت یکنوایی تأثیر گذار است. برای هر $x_1 > 0$ دلخواه دنباله نزولی و کراندار و لذا همگراست. اگر $x_1 < 0$ واضح است که $x_2 > 0$ و با بحث بالا مشخص می‌شود که از جمله دوم به بعد دنباله نزولی است، اما چون از جمله اول به دوم صعود رخ داده است، این دنباله غیریکنوا خواهد بود.

۲۲. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ برابر است با: (ریاضی ۷۴)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $2e$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به آزمون ریشه و سپس نکته ۲۰ در صفحه ۷۸:

$$\sqrt[n]{2^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sim 2e^{n(-\frac{1}{n})} = 2e^{-1} = \frac{1}{R} \Longrightarrow R = \frac{e}{2}$$

۲۳ سریهای $s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ و $t = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}}$ چه وضعی دارند؟

۱) s همگرای مشروط، t همگرای مطلق ۲) s همگرای مطلق، t واگرا

۳) s همگرای مطلق، t همگرای مطلق ۴) s همگرای مشروط، t همگرای مشروط

حل: گزینه ۱ درست است. در مورد s قدرمطلق به صورت $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ است. جمله عمومی را به صورت $\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n}$ می‌نویسیم پس:

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \sim e^{(n+1)(\frac{n}{n+1}-1)} = e^{-1} \Longrightarrow \text{جمله عمومی} \sim \frac{1}{n}e^{-1}$$

پس چون سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست، سری قدرمطلق نیز واگرا می‌باشد. ولی برای مقادیر بزرگ n داریم $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \sim \frac{1}{n}e^{-1}$ و لذا دنباله نزولی و همگرا به صفر است و لذا سری متناوب s همگراست و بنابراین همگرای مشروط است. برای t چون $\log(\log n) \longrightarrow +\infty$ پس برای مقادیر بزرگ n داریم:

$$\log(\log n) > 100 \Longrightarrow \left(\log(\log n)\right)^{\log n} > 100^{\log n} = n^{\log 100} = n^2 \Longrightarrow \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}} < \frac{1}{n^2}$$

پس قدرمطلق داده شده همگرا و لذا t همگرای مطلق است.

۲۴. مقدار سری $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{[[\cos\frac{3}{n}\pi+2]]}{3^n}$ کدام است؟([[ ]] نماد جز صحیح است.) (آمار ۸۱)

۱) $\frac{1}{35}$ ۲) $\frac{2}{35}$ ۳) $\frac{1}{34}$ ۴) $\frac{4}{35}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به‌اینکه برای $n \geq 6$ داریم $0 < \frac{3\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$ پس $[\cos\frac{3\pi}{n}+2] = 2$ و برای $n=5$ داریم $1 \leq \cos\frac{3\pi}{n}+2 < 2$ پس $[\cos\frac{3\pi}{2}+2] = 1$ و بنابراین:

$$\text{سری} = \frac{1}{35} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{35} + \frac{\frac{2}{3^6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{35}$$

۲۵. سری $\sum_k \frac{\log(k+1)-\log(k)}{\tan^{-1}(\frac{2}{k})}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟ (آمار ۷۹)

۱) همگرا به ۱ است. ۲) واگراست. ۳) همگرا به ۲ است. ۴) همگرا به $\log 2$ است.

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۶۸ در $x=1$ داریم $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \sim \frac{x-1}{\ln 10}$

$$\text{جمله عمومی} = \frac{\log(\frac{k+1}{k})}{\tan^{-1}(\frac{2}{k})} \sim \frac{1}{\ln 10} \times \frac{\frac{k+1}{k}-1}{\frac{2}{k}} \to \frac{1}{2\ln 10} \neq 0 \Longrightarrow$$ شرط لازم را ندارد و واگراست.

۲۶ دنباله‌های مثبت u_n و v_n را درنظربگیرید. اگر $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ آنگاه (MBA ۸۲)

۱) همگرایی $\sum u_n$ همگرایی $\sum v_n$ را نتیجه می‌دهد.

۲) همگرایی $\sum v_n$ همگرایی $\sum(u_n+v_n)$ را نتیجه می‌دهد.

۳) همگرایی $\sum \frac{u_n}{v_n}$ همگرایی $\sum v_n$ را نتیجه می‌دهد.

۴) همگرایی $\sum u_n$ همگرایی $\sum(u_n+v_n)$ را نتیجه می‌دهد.

حل: گزینه ۲ درست است. رابطه داده شده را به صورت $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ می‌نویسیم که نشان می‌دهد، دنباله $\frac{u_n}{v_n}$ نزولی است و بنابراین برای هر n داریم $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_1}{v_1}$ که آنرا به صورت $u_n \leq \frac{u_1}{v_1}v_n$ می‌نویسیم. حال اگر $\sum v_n$ همگرا باشد، با استفاده از آزمون مقایسه $\sum u_n$ نیز همگرا بوده و لذا $\sum(u_n+v_n)$ نیز همگرا است.

۲۷. دنباله $\left(\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right)$ $a_n = \operatorname{sgn}$، دنباله‌ای ... است.(sgn تابع علامت است.)

۱) بی‌کران ۲) واگرا ۳) همگرا به ۱− ۴) همگرا به صفر

حل: گزینه ۳ درست است. $\frac{2n^2}{n^2+1}-2 \to 0$ اما تابع $\operatorname{sgn}(x)$ در $x=0$ ناپیوسته است و باید نوع صفر تعیین شود.

$$\frac{2n^2}{n^2+1}-2=\frac{-2}{n^2+1}<0 \implies a_n=-1 \implies a_n \to -1$$

۲۸. کدام گزاره درمورد دنباله $a_n=\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}\right)$ صحیح است؟ (ریاضی ۸۲)

۱) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ ۲) واگراست. ۳) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$ ۴) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}=1$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $b_n=\sqrt[n]{n}$، a_n میانگین حسابی b_n است و چون $b_n\to 1$ پس $a_n\to 1$.

۲۹ حد دنباله $a_n=(1+\sin 1)(1+\sin^2 1)(1+\sin^4 1)\cdots(1+\sin^{2^n} 1)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{1+\sin 1}$ ۲) $\frac{1}{1-\sin 1}$ ۳) $\frac{1}{1+\cos 1}$ ۴) $\frac{1}{1-\cos 1}$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا حد دنباله $b_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ را برای $|x|<1$ محاسبه می‌کنیم. b_n را در $1-x$ ضرب و از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$(1-x)b_n=\underbrace{(1-x)(1+x)}_{1-x^2}(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{1-x^4}(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\cdots=1-x^{2^{n+1}} \implies b_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

وقتی $n\to+\infty$ آنگاه $|x|^{2^{n+1}}=|x|^{+\infty}=0$ و لذا حد b_n برابر $\frac{1}{1-x}$ است. با جایگذاری $x=\sin 1$ گزینه (۲) حاصل می‌شود.

۳۰. مقدار $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}$ عبارت است از:

۱) $\frac{e}{e-1}$ ۲) $\frac{e-1}{e}$ ۳) $\ln\frac{e}{e-1}$ ۴) $\ln\frac{e-1}{e}$

حل: گزینه ۳ درست است. مجموع مورد نظر را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ می‌نویسیم. پس با تعریف $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ پاسخ سؤال برابر $f(\frac{1}{e})$ است. برای یافتن $f(x)$ کافی است از رابطه (۱۲) در صفحه ۵۳۱ یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ انتگرال بگیریم.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x x^n\, dx\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x)$$

$$\Longrightarrow\ f\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) = -\ln\frac{e-1}{e} = \ln\frac{e}{e-1}$$

۳۱. ضریب x^3 در بسط مک لورن $\ln(1+x+x^2)$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. کافی‌است بسط $\ln(1+y)$ به‌ازای $y = x + x^2$ را تا جمله y^3 بنویسیم.

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + \cdots$$

بنابراین ضریب x^3 در جمله $-\frac{1}{2}(x+x^2)^2$ برابر $-1 = 2 \times -\frac{1}{2}$ و در جمله $\frac{1}{3}(x+x^2)^3$ برابر $\frac{1}{3}$ و لذا در کل عبارت برابر $-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + 1-$ است.

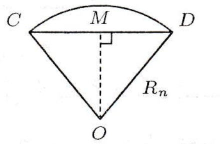
۳۲ **پاره‌خط AB به طول a را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. مقابل هر پاره‌خط جزء کمانی از دایره به زاویه مرکزی $\frac{\pi}{n}$ رادیان در نظر می‌گیریم. مجموع طول کمانهای مذکور وقتی $n \to +\infty$ برابر است با:** (مکانیک ۷۰)

۱) a ۲) π ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{\pi}{a}$

حل: گزینه ۱ درست است. پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی که طول هر یک $\frac{a}{n}$ است تقسیم کرده و نقاط تقسیم را $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ می‌نامیم.

روش اول. واضح است که وقتی تعداد تقسیمات زیاد باشد، طول هر یک از کمانهای $AA_1, A_1A_2, \cdots A_{n-1}B$ به پاره‌خطهای متناظر $AA_1, A_1A_2, \cdots A_{n-1}B$ نزدیک می‌شود و لذا مجموع طول کمانها برابر مجموع طول پاره‌خطها یعنی a می‌شود.

روش دوم. یکی از پاره‌خطها (که طول آن $\frac{a}{n}$ است) را در نظر گرفته و آن را با CD نمایش می‌دهیم. کمانی از دایره که روی این پاره‌خط ساخته می‌شود دارای رأس O و زاویه مرکزی $\frac{\pi}{n}$ است.



برای محاسبه طول کمان CD باید شعاع دایره محاسبه شود. وسط CD را M می‌نامیم. OM نیمساز زاویه O است و لذا در مثلث قائم‌الزاویه OMD زاویه MOD برابر $\frac{\pi}{2n}$ بوده و اگر شعاع دایره $OD = R_n$ باشد:

$$\sin\frac{\pi}{2n} = \frac{MD}{OD} = \frac{\frac{a}{2n}}{R_n} \Longrightarrow R_n = \frac{a}{2n}\csc\frac{\pi}{2n}$$

$$CD \text{ طول کمان } = (\text{زاویه}) \times (\text{ شعاع }) = \frac{\pi}{n} \times R_n = \frac{a\pi}{2n^2}\csc\frac{\pi}{2n}$$

$$s = \text{ مجموع طول کمانها } = n \times (CD \text{ طول کمان}) = \frac{a\pi}{2n}\csc\frac{\pi}{2n}$$

وقتی $n \to +\infty$ داریم $\csc\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2n}} = \frac{2n}{\pi}$ و لذا $\lim\limits_{n\to+\infty} s = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a\pi}{2n}.\frac{2n}{\pi} = a$.

۳۳. فرض کنید $0 < a_n < 1$ و سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. کدامیک از سری‌های زیر همواره همگرا هستند؟

(مکانیک ۷۹)

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1-a_n)}$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ ۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ ۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-a_n}{n}$

حل: گزینه ۳ درست است. چون سری $\sum a_n$ همگراست پس $a_n \to 0$ و لذا $\frac{a_n}{1-a_n} \sim a_n$ پس این سری همگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها: چون $a_n \to 0$ پس گزینه‌های (۱) و (۴) هم‌ارز $\frac{1}{n}$ و لذا واگرا هستند و گزینه (۲) به ازای دنباله $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ واگرا خواهد بود.

۳۴ **اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و $a_n \geq 0$، کدام سری در حالت کلی همگرا نیست؟** **(ریاضی ۷۶)**

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ ۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ ۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$

حل: گزینه ۴ درست است. قرار دهید $a_n = \frac{1}{n^2}$ در این صورت $\sum a_n$ همگرا ولی $\sum \sqrt{a_n} = \sum \frac{1}{n}$ واگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه (۱) با توجه به همگرایی $\sum a_n$ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ نیز همگرا بوده و بنا به نتیجه ۷ در صفحه ۵۱۵، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ نیز همگراست. در مورد گزینه (۲) برای هر n داریم $0 \leq \frac{a_n}{2^n} \leq a_n$ و بنابر آزمون مقایسه همگراست. برای گزینه (۳) چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، با توجه به نتیجه ۸ در صفحه ۵۱۹ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n.\frac{1}{n^2}}$ همگرا می‌باشد.

۳۵. سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ مفروض است. هرگاه S_n مجموع n جمله اول سری باشد، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ برابر است با: **(آبیاری و زه‌کشی ۸۱)**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. حد موردنظر برابر مقدار سری است. جمله عمومی را به شکل تلسکوپی می‌نویسیم. به این صورت که جمله عمومی را در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$a_n = \frac{n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1) - n(n+1)^2} = \frac{n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_n - a_{n+1}$$

$$\text{سری} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_\infty = 1$$

۳۶. مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ کدام است؟ (انرژی، آمار ـ آزاد ۸۲)

۱) $3e$ ۲) $4e$ ۳) $5e$ ۴) e

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. باید $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ را ایجاد نماییم.

$$\text{مجموع} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} \xlongequal{n\to n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e \xlongequal{n\to n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + e$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3e \xlongequal{n\to n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 4e = 5e$$

روش دوم. با توجه به تست ۸۲ در صفحه ۵۳۷:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = (x^2 + x)e^x \xRightarrow{\frac{d}{dx}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^{n-1}}{n!} = (x^2 + x + 2x + 1)e^x$$

$$\xRightarrow{\times x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{n!} = (x^3 + 3x^2 + x)e^x \xRightarrow{x=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$$

۳۷. مقدار $\lim_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۷۴، آمار ۸۱)

۱) $\ln 3 - 1$ ۲) $\ln 4 - 1$ ۳) $\ln 3 + 1$ ۴) $\ln 4 + 1$

حل: گزینه ۲ درست است. این سؤال را در تست ۱۰۶ در صفحه ۳۵۳ با کمک تبدیل به مجموع ریمان و مفهوم انتگرال معین حل نمودیم. برای حل آن با روشهای مطرح شده در بحث دنباله‌ها عبارت زیر رادیکال $\frac{n+1}{n}.\frac{n+2}{n}.\dots.\frac{n+n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$ است که با ضرب کردن صورت و مخرج آن در $1\times 2\times\cdots\times n = n!$ به صورت $\frac{(2n)!}{n^n \times n!}$ نوشته می‌شود. پس با توجه به دستور استرلینگ:

$$\text{عبارت تحت لگاریتم} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n \times n!}} = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{(\frac{2n}{e})^2}{n.\frac{n}{e}} = \frac{4}{e}$$

$$\Longrightarrow \text{حد مورد نظر} = \ln\frac{4}{e} = \ln 4 - \ln e = \ln 4 - 1$$

۳۸ حاصل $\sum_{k=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{1}{k^2+k+1}$ عبارت است از:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\tan^{-1} 2$ ۴) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. از فرمول (ج ـ ۵) در صفحه ۲۹ استفاده می‌کنیم.

$$\text{سری} = \sum_{k=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan^{-1}(k+1) - \tan^{-1}(k)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۳۹. دنباله a_n با رابطه بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^n}$ تعریف می‌شود. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟

۱) واگراست. ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به رابطه بالا چند جمله اول دنباله a_n را می‌نویسیم.

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad a_3 = a_2 + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \quad \text{و} \quad \cdots$$

پس $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{3})^k$ و لذا a_n یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ و جمله اول یک است پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

۴۰. اگر x عددی گنگ باشد $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}(\cos n!\pi x)^m$ برابر است با: (ریاضی ۷۴)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا برای n ثابت و دلخواه $\lim\limits_{m\to+\infty}(\cos n!\pi x)^m$ را محاسبه می‌کنیم. چون x گنگ است پس $n!x$ برای هیچ مقدار n عددی صحیح نمی‌باشد و بنابراین $\cos(n!\pi x) \neq \pm 1$ پس $-1 < \cos(n!\pi x) < 1$ و برای هر $-1 < a < 1$ داریم $a^{+\infty} = 0$ و لذا حد مورد نظر نیز برابر صفر است.

تذکر۳. توجه کنید که اگر $x \in \mathbb{Q}$ آنگاه x برابر $\frac{p}{q}$ است حال برای مقادیر بزرگ n و مثلاً $n = 2q$ عدد $n!x$ یک عدد صحیح و زوج است و لذا $\cos(n!\pi x) = 1$ پس مقدار حد مورد سؤال در این حالت برابر یک خواهد بود.

۴۱ بازه همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}x^{2n}$ عبارت است از:

۱) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ ۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ۳) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا توجه کنید که $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ و با توجه به تست ۵۲ در صفحه ۵۲۳:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to 4 = \frac{1}{R^2} \implies R = \frac{1}{2} \implies |x| < \frac{1}{2} \implies -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

حال باید وضعیت سری را در $x = \frac{1}{2}$ بررسی کنیم. در این نقطه به سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ می‌رسیم که $c_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. با هر یک از سه روش زیر ثابت می‌شود که این سری واگراست. ابتدا توجه کنید که c_n در این تست و b_n در تست ۶۱ در صفحه ۵۲۵ برعکس هم هستند.

روش اول. چون با توجه به تست ۶۱ در صفحه ۵۲۵، $b_n \sim \sqrt{n\pi}$ پس $c_n = \frac{1}{b_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}$ و لذا این سری واگراست.

روش دوم. با توجه به روش دوم در تست ۶۱ در صفحه ۵۲۵:

$$c_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}$$

چون سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ واگراست، بنا به آزمون مقایسه سری مورد نظر نیز واگراست.

روش سوم. از آزمون رابه استفاده می‌کنیم. در واقع $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{c_{n+1}}{c_n}$ و لذا:

$$n\left(1-\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=n\left(1-\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}\right)=\frac{2n^2+2n}{4(n+1)^2}\to\frac{1}{2}=A$$

چون $1 > \frac{1}{2} = A$ بنا به آزمون رابه این سری واگراست.

با توجه به گزینه‌ها نیازی به بررسی همگرایی در $x=-\frac{1}{2}$ نیست و گزینه (۴) پاسخ سؤال است. اما برای حل کامل این تست توجه کنید که در این نقطه به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ که واگراست.

۴۲. اگر $\tan\alpha=\frac{1}{4}$ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)^n$ برابراست با:

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۳ درست است. سری مورد نظر، هندسی با قدرنسبت زیر است.

$$q=-\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=-\tan\alpha \Longrightarrow \text{سری}=\frac{-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{5}$$

۴۳ مقدار $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx$ تا سه رقم اعشار کدام است؟ (مواد ۷۸)

۱) ۰/۷۸۴ ۲) ۰/۹۱۸ ۳) ۰/۹۴۶ ۴) ۰/۹۷۲

حل: گزینه ۳ درست است. محاسبه تابع اولیه $\frac{\sin x}{x}$ امکان پذیر نیست پس بسط مک‌لورن آنرا نوشته و انتگرال می‌گیریم.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\Longrightarrow\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

سری مورد نظر متناوب است و اگر $S_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$ را به جای مجموع به کار ببریم، خطا از قدرمطلق اولین جمله‌ای که حذف می‌شود یعنی $\frac{1}{(2k+3)(2k+3)!}$ کمتر خواهد بود و چون هدف محاسبه تا ۳ رقم اعشار است:

$$\frac{1}{(2k+3)(2k+3)!}<\frac{1}{1000}\Longrightarrow(2k+3)(2k+3)!>1000$$

نابرابری بالا برای $k\geq 2$ برقرار است و لذا باید S_2 را به عنوان تقریب انتگرال در نظر بگیریم.

$$S_2=\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}=1-\frac{1}{3\times 3!}+\frac{1}{5\times 5!}\simeq 0/946$$

۴۴. اگر $m>0$ عددی ثابت باشد، حد دنباله $a_n=\sin\sqrt{n+m}-\sin\sqrt{n}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است. از فرمول (د ـ ۱) در صفحه ۲۳ استفاده می‌کنیم.

$$a_n=2\sin\frac{\sqrt{n+m}-\sqrt{n}}{2}\cos\frac{\sqrt{n+m}+\sqrt{n}}{2}$$

و چون $\circ \to \frac{m}{\text{۲}(\sqrt{n+m}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+m}-\sqrt{n}}{\text{۲}}$ و دنباله $\cos\frac{\sqrt{n+m}+\sqrt{n}}{\text{۲}}$ کراندار است پس حد a_n حاصل ضرب صفر در کراندار و برابر صفر است.

۴۵ حاصل $p = \prod_{k=\text{۱}}^{\infty} \frac{k^\text{۲}+\text{۱}}{\sqrt{k^\text{۴}+\text{۴}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\text{۲}}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{\text{۳}}$

حل: گزینه ۱ درست است. توجه کنید که:

$$k^\text{۴}+\text{۴} = k^\text{۴}+\text{۴}k^\text{۲}+\text{۴}-\text{۴}k^\text{۲} = (k^\text{۲}+\text{۲})^\text{۲}-\text{۴}k^\text{۲} = (k^\text{۲}+\text{۲}-\text{۲}k)(k^\text{۲}+\text{۲}+\text{۲}k)$$

$$= \big((k-\text{۱})^\text{۲}+\text{۱}\big)\big((k+\text{۱})^\text{۲}+\text{۱}\big)$$

$$\Longrightarrow \text{مربع جمله عمومی} = \frac{(k^\text{۲}+\text{۱})^\text{۲}}{k^\text{۴}+\text{۴}} = \frac{(k^\text{۲}+\text{۱})^\text{۲}}{\big((k-\text{۱})^\text{۲}+\text{۱}\big)\big((k+\text{۱})^\text{۲}+\text{۱}\big)} = \frac{a_{k+\text{۱}}}{a_k}$$

به شرط آنکه $a_k = \frac{(k-\text{۱})^\text{۲}+\text{۱}}{k^\text{۲}+\text{۱}}$ و بنا بر نکته ٦ در صفحه ۵۰۰:

$$p^\text{۲} = \prod_{k=\text{۱}}^{\infty}\frac{a_{k+\text{۱}}}{a_k} = \frac{a_\infty}{a_\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} = \text{۲} \Longrightarrow p = \sqrt{\text{۲}}$$

۴٦. اگر $S_n = -\text{۱}+\frac{\text{۲}}{\text{۳}}-\frac{\text{۳}}{\text{۵}}+\cdots+(-\text{۱})^n\frac{n}{\text{۲}n-\text{۱}}$، دنباله S_n چگونه است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) صعودی و کراندار ۲) نزولی و کراندار

۳) همگرا ۴) فقط کراندار

حل: گزینه ۴ درست است. اگر $a_n = (-\text{۱})^n\frac{n}{\text{۲}n-\text{۱}}$ آنگاه S_n مجموع جزیی سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n$ است و چون $a_n \not\to \circ$ سری واگراست. ضمناً چون سری متناوب است، S_n نه صعودی و نه نزولی است پس گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ نادرست هستند و پاسخ گزینه (۴) است.

برای بررسی دقیق‌تر می‌توان کراندار بودن S_n را به این صورت ثابت کرد که برای n فرد:

$$S_{n+\text{۱}} = (-\text{۱}+\frac{\text{۲}}{\text{۳}})+\cdots+(-\frac{n}{\text{۲}n-\text{۱}}+\frac{n+\text{۱}}{\text{۲}n+\text{۱}}) = -(\frac{\text{۱}}{\text{۳}}+\frac{\text{۱}}{\text{۳۵}}+\cdots+\frac{\text{۱}}{\text{۴}n^\text{۲}-\text{۱}})$$

$$= -\sum_{k=\text{۱}}^{\frac{n+\text{۱}}{\text{۲}}} \frac{\text{۱}}{\text{۴}(\text{۲}k-\text{۱})^\text{۲}-\text{۱}}$$

و چون در سری $\sum_{k=\text{۱}}^{\infty}\frac{\text{۱}}{\text{۴}(\text{۲}k-\text{۱})^\text{۲}-\text{۱}}$ جمله عمومی هم ارز $\frac{\text{۱}}{\text{۱٦}k^\text{۲}}$ پس همگراست ولذا $S_{n+\text{۱}}$ کراندار است. برای n زوج داریم $S_{n+\text{۱}} = S_n - \frac{n+\text{۱}}{\text{۲}n+\text{۱}}$ و چون S_n با استدلال بالا کراندار است، پس $S_{n+\text{۱}}$ نیز کراندار خواهد بود.

۴۷. ضریب $x^\text{۳}$ در بسط مک‌لورن تابع $\ln(\text{۱}+\sin x)$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{\text{۱}}{\text{٦}}$ ۲) $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ ۳) ۰ ۴) ۱

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\sin x \sim x$ پس باید بسط لگاریتم تا جمله $x^\text{۳}$ نوشته شود.

$$\ln(\text{۱}+\sin x) = \sin x - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\sin^\text{۲} x + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\sin^\text{۳} x - \cdots.$$

در جمله اول ضریب x^3 برابر $-\frac{1}{6}$، در جمله دوم صفر(چون تابعی زوج است) و در جمله سوم با توجه به اینکه $\frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3$ پس ضریب برابر $\frac{1}{3}$ است. پس ضریب برابر $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$ می‌باشد.

۴۸. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(2n)!}$ برای چه مقادیری از x همگراست؟

۱) فقط $|x| < 1$ ۲) فقط $|x| \geq 1$ ۳) فقط $|x| \leq 1$ ۴) فقط $|x| = 1$

حل: گزینه ۳ درست است. از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|^n}{\sqrt[n]{(2n)!}} \sim \frac{|x|^n}{(\frac{2n}{e})^2} = \frac{e^2}{4}\frac{|x|^n}{n^2}$$

باید حد بالا وقتی $n \to +\infty$ از یک کمتر باشد. اگر $|x| \leq 1$ حد عبارت بالا برابر صفر و برای $|x| > 1$ حد برابر $+\infty$ است پس فقط برای $|x| \leq 1$ سری همگراست.

۴۹ فرض کنید $\sum u_n$ به‌طور مشروط همگرا باشد. اگر $v_n = \begin{cases} u_n & u_n \geq 0 \\ 0 & u_n < 0 \end{cases}$ و $w_n = \begin{cases} -u_n & u_n \leq 0 \\ 0 & u_n > 0 \end{cases}$ آنگاه کدام گزینه در مورد دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ صحیح است؟ (آمار ۷۹)

۱) سری $\sum v_n$ همگرا و سری $\sum w_n$ واگراست.

۲) سری $\sum w_n$ به‌طورمطلق همگرا و سری $\sum v_n$ همگراست.

۳) هر دو سری واگرا هستند.

۴) هر دو سری به‌طورمطلق همگرا هستند.

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. در حالت خاص قرار می‌دهیم $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. سری $\sum u_n$ همگراست ولی $v_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$ و $w_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$ و واضح است که $\sum v_n$ و $\sum w_n$ واگرا می‌باشد.

روش دوم. توجه کنید که چون $v_n, w_n \geq 0$ پس همگرایی مطلق و همگرایی در مورد آنها معادل است. از طرفی $u_n = v_n - w_n$ و چون $\sum u_n$ همگراست، اگر یکی از دو سری $\sum v_n$ و $\sum w_n$ همگرا و دیگری واگرا باشد، تفاضل آنها یعنی $\sum u_n$ نیز واگراست که غیر ممکن است. پس هر دو سری همگرا یا هر دو سری واگرا هستند. اگر هر دو همگرا باشند با توجه به نابرابری مثلث:

$$|u_n| = |v_n - w_n| \leq |v_n| + |w_n| = v_n + w_n$$

پس از آزمون مقایسه، $\sum |u_n|$ همگرا و لذا $\sum u_n$ همگرای مطلق است که نادرست است پس هر دو واگرا هستند.

۵۰. اگر فقط ده جمله از دنباله a_n متعلق به فاصله $[\frac{1}{3}, 2]$ نباشند، کدامیک از دنباله‌های زیر الزاماً همگرا هستند؟

۱) $\sqrt{n}a_n$ ۲) $\frac{n}{n+1}a_n$ ۳) $\frac{a_n}{[\sqrt{n}]}$ ۴) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

حل: گزینه ۳ درست است. باتوجه به‌اینکه $\frac{1}{3} \leq a_n \leq 2$ به‌جز برای ده اندیس n، پس این دنباله کراندار است و $\frac{1}{[\sqrt{n}]} \to 0$ پس گزینه (۳) حاصل ضرب صفر در کراندار و بنابراین همگراست.

۵۱ حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p+3^p+5^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$ برای $p>-1$ برابر است با:

۱) $\frac{2^p}{p+1}$ ۲) $\frac{4^p}{p+1}$ ۳) $\frac{2^p}{p}$ ۴) $\frac{4^p}{p}$

حل: گزینه ۱ درست است. هر یک از جملات مجموع در صورت کسر $(2k-1)^p$ است. جملات زوج به صورت $(2k)^p$ را به آن اضافه و کم می‌کنیم.

$$\text{کسر} = \frac{\left(1^p+2^p+\cdots+(2n)^p\right)-\left(2^p+4^p+\cdots+(2n)^p\right)}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{\left(1^p+2^p+\cdots+(2n)^p\right)-2^p\left(1^p+2^p+\cdots+n^p\right)}{n^{p+1}} \sim \frac{\frac{(2n)^{p+1}}{p+1}-2^p.\frac{n^{p+1}}{p+1}}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{2^{p+1}-2^p}{p+1} = \frac{2^p}{p+1}$$

۵۲. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log x^n}{(\log x)^n}=4$ باشد، x کدام است؟

۱) 10 ۲) 100 ۳) $\sqrt[3]{100}$ ۴) $\sqrt{50}$

حل: گزینه ۲ درست است. سری موردنظر به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\log x)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\log x}{(\log x)^n}$ است پس اگر $t=\frac{1}{\log x}$، سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t} \quad \text{و} \quad |t|<1 \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\frac{1}{(1-t)^2} \implies \frac{1}{(1-t)^2}=4$$

$$\implies t=\frac{1}{2},\frac{3}{2} \implies \log x=2,\frac{2}{3} \implies x=100,\sqrt[3]{100}$$

توجه کنید که به ازای $t=\frac{3}{2}$ سری هندسی همگرا نیست و لذا $x=\sqrt[3]{100}$ غیر قابل قبول است.

۵۳ فرض کنید $a_n=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{2k^2-k-1}{2k^2+k-1}\right)^n$. سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ چه وضعی دارد؟

۱) همگرای مشروط ۲) واگرا ۳) همگرای مطلق ۴) واگرای مشروط

حل: گزینه ۳ درست است. سری قدرمطلق یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را در نظر می‌گیریم و از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

چون $\sqrt[n]{a_n}=\prod_{k=2}^{n}\frac{2k^2-k-1}{2k^2+k-1}$ پس باید حد $\prod_{k=2}^{n}\frac{2k^2-k-1}{2k^2+k-1}$ را بیابیم.

$$\frac{2k^2-k-1}{2k^2+k-1}=\frac{(2k+1)(k-1)}{(2k-1)(k+1)}=\frac{\frac{2k+1}{k+1}}{\frac{2k-1}{k-1}}=\frac{\frac{2k+1}{k(k+1)}}{\frac{2k-1}{k(k-1)}}=\frac{b_{k+1}}{b_k}$$

$$\text{نکته ۶ در صفحه ۵۰۰} \implies \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{b_\infty}{b_2}=\frac{0}{\frac{5}{2}}=0$$

چون $L=0<1$ سری قدرمطلق همگرا و لذا این سری همگرای مطلق است.

خودآزمایی ۷ ـ سطح ۱

۱. دنباله $a_n = \frac{5^n}{n!}$ کدام وضع را دارد؟

۱) نزولی
۲) صعودی
۳) هم صعودی و هم نزولی
۴) نه صعودی و نه نزولی

۲. کدام گزینه در مورد $\lim_{n\to+\infty} \cos(\frac{\pi}{n})$ صحیح است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) حد موجود و برابر یک است.
۲) حد موجود و برابر صفر است.
۳) حد موجود و برابر -1 است.
۴) حد موجود نیست.

۳. در مورد حد دنباله $\sqrt[2n]{1 - \frac{1}{2n}}$ وقتی $n \to +\infty$ کدام یک از احکام زیر درست است؟

(فلسفه ۸۰)

۱) وجود ندارد.
۲) صفر است.
۳) از صفر بزرگتر و از $\frac{1}{2}$ کوچکتر است.
۴) بزرگتر از $\frac{1}{2}$ است.

۴. مقدار $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1})$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) 0
۲) $\frac{1}{2}$
۳) 1
۴) ∞

۵. حد دنباله $a_n = \frac{n^5 \sin(2^n\pi)}{(2-n)(n+1)}$ برابر است با:

۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) صفر
۴) 1

۶. حاصل $\lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{2n})^{2n}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $\frac{1}{e}$
۲) 0
۳) e
۴) 1

۷. $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n-2}{n})^{\frac{n}{2}}$ برابر کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

۱) 0
۲) 1
۳) $\frac{1}{e}$
۴) e

۸. اگر $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = 4$ باشد، مقدار a کدام است؟ (هوافضا ۸۱)

۱) e^2
۲) $2\ln 2$
۳) $\sqrt{4}$
۴) $\ln 2$

۹. حد دنباله $\left(\frac{3n^3 - n + 1}{3n^3 + n + 1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt[3]{3}$
۲) e
۳) $\sqrt[3]{e^2}$
۴) $e^{-\frac{2}{3}}$

۱۰. t یک عدد حقیقی داده شده است. حد $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$ برابر است با: (فلسفه ۸۱)

۱) 1
۲) e^{t^2}
۳) e^{-t^2}
۴) هیچ یک از مقادیر

۱۱. در مورد دنباله a_n با جملهٔ عمومی $a_n = \sqrt[n]{۲^n + ۳^n + ۴^n}$ کدام گزینه است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) واگراست. ۲) همگرا و حد آن برابر ۱ است.

۳) همگرا و حد آن برابر ۴ است. ۴) همگرا و حد آن برابر ۹ است.

۱۲. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{۱۳^n + ۷^n + ۹^n}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۹)

۱) ۱۰ ۲) $\frac{۳۱}{۳}$ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۱۳. دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \dfrac{(\frac{۳}{۲})^n + (\frac{۳}{۴})^n}{(\frac{۴}{۳})^{۲n} + (\frac{۹}{۷})^{۲n}}$ (عمران ــ آزاد ۸۰)

۱) همگرا به یک است. ۲) واگراست. ۳) همگرا به صفر است. ۴) کراندار نمی‌باشد.

۱۴. حاصل حد عبارت $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{۳^{n+۲} - ۳^n - ۵}{۳^{n+۱} + ۳^n - ۱}$ کدام است؟ (عمران ــ آزاد ۸۰)

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

۱۵. اگر a و b مقادیری ثابت بوده و داشته باشیم $a > b > ۱$ آن گاه حاصل حد $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n)^{\frac{۱}{n}}$ کدام است؟
(معدن ۸۰)

۱) a ۲) $\frac{b}{a}$ ۳) $۲ae$ ۴) $\frac{a}{b}e$

۱۶. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{۲^n}{n^۲}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۶)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) ۲

۱۷. حد عبارت $\frac{۱}{n^۲}(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)$ وقتی $n \to +\infty$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) ۰ ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸. حد دنباله $a_n = \dfrac{۱^۵ + \cdots + n^۵}{n^۵} - \dfrac{n}{۶}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۹. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) ∞

۲۰. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{۱}{n}\left(\dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۲}{۳} + \cdots + \dfrac{n}{n+۱}\right)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) حد ندارد.

۲۱. اگر $a_n = \dfrac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}} + \dfrac{۱}{\sqrt{n^۲+۲}} + \cdots + \dfrac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}$ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟ (آمار ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) $\frac{۱}{e}$

۲۲. حد دنباله $a_n = \dfrac{۱}{\sqrt{۲n^۲+۱}} + \cdots + \dfrac{۱}{\sqrt{۲n^۲+n}}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) ۰

۲۳. کدام دنباله زیر همگراست؟([] علامت جز صحیح می‌باشد.) (صنایع ـ آزاد ۷۷)

۱) $\left\{1-2[(-1)^n]\right\}$ ۲) $\left\{n-\left[\frac{2n+1}{2}\right]\right\}$ ۳) $\left\{1+\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ ۴) $\left\{1+[(-1)^n]\right\}$

۲۴. کدام یک از احکام زیر همواره صحیح است؟ (سیستم ۸۲)

۱) هر دنباله صعودی واگراست.

۲) دنباله‌ای که نه صعودی باشد و نه نزولی، واگراست.

۳) هر دنباله صعودی و از بالا کراندار، همگراست.

۴) دنباله‌ای که صعودی و از پایین کراندار باشد، همگراست.

۲۵. دنباله a_n به عدد ۱− همگراست، اگر جملات با اندیس زوج آن را حذف کنیم و به جای آنها جملات دنباله $b_n=\frac{n+1}{n^2+1}$ را جایگذاری کنیم، دنباله حاصل:

۱) همگرا به صفر است. ۲) بی‌کران است. ۳) واگرا ولی کراندار است. ۴) همگرا به $-\frac{1}{2}$ است.

۲۶. اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3 & x\geq 1 \\ 2-x & x<1 \end{cases}$ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۱− ۴) موجود نمی‌باشد.

۲۷. فرض کنید $x_1=1$ و $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ برای $n\geq 2$. کدام گزاره درست است؟ (آمار ۸۲)

۱) دنباله $\{x_n\}$ همگراست. ۲) دنباله $\{x_n\}$ کراندار است ولی همگرا نیست.

۳) دنباله $\{x_n\}$ یکنواست ولی کراندار نیست. ۴) دنباله $\{x_n\}$ واگراست.

۲۸. حاصل $\sum\limits_{k=2}^{511}\log_2\frac{k}{k+1}$ برابر است با:

۱) ۱− ۲) ۹− ۳) ۷− ۴) ۸−

۲۹. حاصل $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$ کدام است؟ (مکانیک و مهندسی پزشکی ۷۶)

۱) e ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۱. مقدار $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۳۲. سری $\cdots+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{1\times 3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۳. حاصل $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{\cos\frac{\pi}{n+2}}{\cos\frac{\pi}{n+3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۱−

۳۴. سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2^n}$ داده شده، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟ (سیستم ۷۴)

۱) سری همگرا به $\frac{3}{2}$ است.
۲) سری همگرا به ۲ است.
۳) سری واگراست.
۴) سری همگرا به ۱ است.

۳۵. مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ کدام است؟ (هوافضا ۸۱)

۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۳۶. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$ کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۳۷. حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \log 8(\log 5)^n$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۸. سری هندسی $s = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ را در نظر بگیرید. (هسته‌ای ـ آزاد ۸۲)

۱) برای $|x| < 2$ سری همگرا می‌شود.
۲) برای $|x| < 0/5$ سری همگرا می‌شود.
۳) برای $|x| < 1$ مقدار سری برابر است با $s = \frac{1}{1-x}$
۴) مجموع سری همواره به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۳۹. سری $\sum_{n=1} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^p}$ برای مقادیر p همگراست؟

۱) فقط $p > 1$ ۲) فقط $p > \frac{5}{2}$ ۳) فقط $p > \frac{5}{3}$ ۴) فقط $p > 2$

۴۰. اگر $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{4}A$ ۲) $\frac{7}{8}A$ ۳) $\frac{9}{8}A$ ۴) $\frac{1}{8}A$

۴۱. اگر $u_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ و $v_n = \cos\frac{1}{n}$ آنگاه از نظر همگرایی $s = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ و $t = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ چگونه‌اند؟
(ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای ۸۱)

۱) هر دو واگرا
۲) هر دو همگرا
۳) s همگرا و t واگرا
۴) s واگرا و t همگرا

۴۲. اگر $\sum a_n < \infty, a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$. آنگاه در مورد $\lim_{n\to+\infty} na_n$ کدام گزینه صحیح است؟ (MBA ۸۲)

۱) $\lim_{n\to+\infty} na_n = 1$
۲) $\lim_{n\to+\infty} na_n = \infty$
۳) $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$
۴) $\lim_{n\to+\infty} na_n$ ممکن است موجود نباشد.

۴۳. به ازای کدام مقادیر p سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^{p+1}}$ همگراست؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $p > \frac{1}{2}$ ۲) $p < \frac{1}{2}$ ۳) $0 < p < 1$ ۴) $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$

۴۴. کدام گزاره در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ صحیح است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) همگراست. ۲) واگراست.

۳) همگرا و مجموع آن صفر است. ۴) همگرا و مجموع آن یک است.

۴۵. کدام سری زیر همگراست؟ (آمار ۷۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+2)}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

۴۶. اگر $A = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ و $B = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ کدام مورد درست است؟ (آمار ۸۲)

۱) $B = +\infty$ و $A = +\infty$ ۲) $A = +\infty$ و $B < +\infty$

۳) $A < +\infty$ و $b < +\infty$ ۴) $A < +\infty$ و $B = +\infty$

۴۷. در مورد همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^{\frac{1}{n}}$ و $a > 0$ کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ۷۶)

۱) اگر $0 < a < 1$ همگراست. ۲) همگراست.

۳) اگر $a > 1$ همگراست. ۴) واگراست.

۴۸. به ازای کدام مقدار p، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ همگراست؟ (ریاضی ۷۴)

۱) $p < 1$ ۲) $p = 1$ ۳) $p > 1$ ۴) $-1 < p < 1$

۴۹. کدام سری همگراست؟ (آمار ۸۲)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2}$

۵۰. کدام گزینه در مورد سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n + \sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n} + 1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ درست است؟

۱) همگرا ـ همگرای مطلق ۲) همگرا ـ همگرای مشروط

۳) واگرا ـ همگرای مطلق ۴) واگرا ـ همگرای مشروط

۵۱. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^4+100)}$ به ترتیب چه رفتاری دارند؟

۱) همگرا ـ واگرا ۲) همگرا ـ همگرا ۳) واگرا ـ همگرا ۴) واگرا ـ واگرا

۵۲. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (مدیریت صنایع ۷۲)

۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ واگراست. ۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ همگراست.

۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ همگرای مشروط است. ۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ همگرای مطلق است.

۵۳. شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ کدام است؟ (کامپیوتر ۷۳)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) e ۴) $+\infty$

۵۴. شعاع همگرایی سری توانی $\sum \frac{۲^n}{n^۲} z^n$ کدام است؟ (آمار ۸۲)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۵. شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) $\frac{۱}{e}$ ۲) e ۳) $\frac{e}{۲}$ ۴) $۲e$

۵۶. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^{۲n}}{(۲n)!} x^n$ کدام است؟ (فیزیک پزشکی ۸۲)

۱) $\frac{۴}{e^۲}$ ۲) $\frac{e^۲}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{e}$ ۴) $\frac{e}{۲}$

۵۷. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۳x+۵)^n}{n^۲+۲^n}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۸. شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰} \frac{x^{۲n}}{۳^{۲n+۱}}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۵۹. مجموعه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} (x-۱)^n$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $(۰,۲)$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱]$

۶۰. حوزه همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{(x-۲)^n}{n+۱}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $(۱,۳]$

۶۱. به ازای چه مقادیر x سری مقابل همگراست؟ $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(x+۲)^n}{\sqrt{n}}$ (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $-۳ \le x \le -۱$ ۲) $-۳ \le x < -۱$ ۳) $-۲ < x < ۲$ ۴) $\frac{۳}{۴} \le x \le ۲$

۶۲. سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} n^۳ x^n$: (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) همگراست به ازای $۱ > |x|$ و واگراست به ازای $|x| > ۱$
۲) همگراست به ازای $۱ < |x|$ و واگراست به ازای $|x| > ۱$
۳) همگراست به ازای تمام x ها
۴) واگراست به ازای تمام x ها

۶۳. بازه همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^n} (x-۱)^n$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۳,۱)$ ۴) $(-۲,۲)$

۶۴. فاصله همگرایی متغیر x و شعاع همگرایی R، برای سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n (x-۱)^n}{۲^n(۳n-۱)}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $R=۱$ و $۰ < x \le ۲$ ۲) $R=-۲$ و $-۳ < x < -۱$
۳) $R=۲$ و $۱ < x < ۳$ ۴) $R=۲$ و $-۱ < x \le ۳$

۶۵. به ازای چه مقادیر x سری مقابل همگراست؟ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n 4^n}$ (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{4}{3} \le x \le \frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3} \le x < \frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4} < x \le \frac{3}{4}$

۶۶. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}(x-2)^n$ (معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) همگراست به ازای $1 \le x \le 3$ ۲) همگراست به ازای $1 \le x \le \infty$
۳) همگراست به ازای $-3 \le x \le 3$ ۴) همگراست به ازای $-1 \le x \le 1$

۶۷. سری $\cdots + \frac{x^3}{3\times4\times5} + \frac{x^2}{2\times3\times4} + \frac{x}{1\times2\times3}$ (معدن ـ آزاد ۷۶)

۱) همگراست فقط هنگامی که $|x| \le 1$ ۲) همگراست فقط هنگامی که $|x| < 1$
۳) همگراست فقط هنگامی که $-1 \le x < 1$ ۴) به ازای تمام x های حقیقی همگراست.

۶۸. به ازای کدام مقادیر x سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n^2}$ همگراست؟ (هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) $1 < x \le 2$ ۲) $1 \le x < 2$ ۳) $1 < x < 2$ ۴) $1 \le x \le 2$

۶۹. اگر $f(0) = 1$ و $f'(x) = 1 + \left(f(x)\right)^{10}$، ضریب x^2 در بسط مک‌لورن این تابع برابر است با:

(ریاضی ۸۱)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۷۰. ضریب x^3 در بسط مک‌لورن تابع $\sin x$ کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{3!}$ ۲) $-\frac{1}{3!}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۷۱. در بسط $y = x\sin x$ به روش مک لورن ضریب x^4 کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۷، هوافضا ۸۱)

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۷۲. ضریب x^6 در بسط مک‌لورن $\cos x$ برابر است با: (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{6!}$ ۲) $-\frac{1}{6!}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{6}$

۷۳. ضریب x^3 در بسط مک لورن تابع $f(x) = \tan x$ برابر است با: (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۷۴. ضریب x^6 در بسط مک‌لورن $\sinh x$ برابر است با: (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{6!}$ ۲) ۰ ۳) $-\frac{1}{6!}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۷۵. در بسط مک لورن $f(x) = \mathrm{Arctan}x$ ضریب x^5 کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $-\frac{1}{15}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۷۶. ضریب x^3 در بسط مک لورن تابع $f(x) = \sin^{-1} x$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۷. ضریب x در بسط مک لورن $\sqrt{1+x}$ برابر است با: (نساجی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) $\frac{1}{2}$

۷۸. در بسط تابع $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ برای $|x|<1$، بر حسب قوای x، ضریب x^3 کدام است؟

(هواشناسی کشاورزی ۷۲)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۷۹. ضریب x^3 در بسط مک لورن e^{-x} کدام است؟ (شیمی نساجی ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3!}$ ۴) $-\frac{1}{3!}$

۸۰. ضریب x^3 در بسط مک لورن $\ln(1-x)$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3!}$ ۳) $-\frac{1}{3!}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۸۱. جمله دوم بسط مک لورن $f(x)=\sin x\cos x$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) $\frac{1}{4}x^2$ ۲) $\frac{2}{3}x^2$ ۳) $-\frac{2}{3}x^3$ ۴) $-\frac{1}{2}x^3$

۸۲. ضریب x^4 در بسط $f(x)=e^x-e^{-x}$ بر حسب قوای صعودی x کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۸۳. در بسط $\ln(\sec x)$ حول $x=0$ ضریب x^4 کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۸۴. چند جمله تیلور از درجه سوم برای تابع $f(x)=\text{Arctan}(e^x-1)$ حول $x=0$ کدام است؟

۱) $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$ ۲) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ ۳) $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ ۴) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

۸۵. بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{\tan^{-1}x}{x}$ کدام است؟ (آمار ۷۶)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

۸۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ برابر است با: (معدن ۷۳)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) e^x ۴) صفر

۸۷. مشتق پنجم تابع $f(x)=x^2(\tan x-\sin x)$ در $x=0$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 60

۸۸. مجموع $\sum_{n=0}\frac{3n+2}{(n+1)!}$ کدام است؟ (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $2e-1$ ۲) $3e+2$ ۳) $2e-3$ ۴) $2e+1$

۸۹. مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\ln 2$ ۳) $\ln\frac{3}{2}$ ۴) $\ln\frac{3}{4}$

۹۰. شعاع همگرایی سری تیلور $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$ حول $x=0$ برابر است با:

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) ∞

خودآزمایی ۷ ـ سطح ۲

۱. ضریب $x^{۳}$ در بسط مک‌لورن تابع $f(x) = \frac{\cos x}{۱ - x}$ عبارت است از:

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲. مقدار $\sum_{n=۲}^{\infty} \ln(۱ - \frac{۱}{n^{۲}})$ برابراست با:

۱) $\ln ۲$ ۲) $\ln ۳$ ۳) $-\ln ۲$ ۴) $-\ln ۳$

۳. ضریب $(x - ۱)^{۳}$ در بسط تیلور $f(x) = x \ln x$ حول $x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴. حاصل $\sum_{k=۲}^{\infty} (-۱)^{k} \frac{۲k^{۲} + ۲k + ۱}{k^{۲}(k^{۲} + ۲k + ۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۵. اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برابر R باشد، شعاع همگرایی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n!}{n^n} a_n x^n$ کدام است؟ (آمار ۷۹)

۱) eR ۲) $\frac{R}{e}$ ۳) R ۴) ∞

۶. اگر $A = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}$ حاصل $B = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}(n + ۱)}$ برابر است با:

۱) $A - \frac{۱}{۲}$ ۲) $A - ۱$ ۳) $A + ۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}A - ۱$

۷. سری $\sum_{n=۱} \frac{x^{\frac{n(n-۱)}{۲}}}{n!}$ برای چه مقادیری از x همگراست؟

۱) همه مقادیر ۲) فقط $|x| \leq ۱$ ۳) فقط $|x| < ۱$ ۴) فقط $|x| \leq ۲$

۸. سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty} (e^{\frac{۱}{n}} - ۱)$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} (۱ - \cosh \frac{۱}{n})$ به ترتیب چه وضعی دارند؟

۱) واگرا ـ واگرا ۲) همگرا ـ همگرا ۳) همگرا ـ واگرا ۴) واگرا ـ همگرا

۹. اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) سری $\sum a_n^{۲}$ همگراست.
۲) سری $\sum (-۱)^n a_n$ همگراست.
۳) سری $\sum a_n^{۴}$ می‌تواند واگرا باشد.
۴) هر سه گزینه درست است.

۱۰. حد دنباله $a_n = \sqrt[n]{\frac{((۲n)!)^{۲}}{n!(۳n)!}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶e}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۳) $\frac{۸e}{۲۷}$ ۴) $\frac{۸}{۲۷}$

۱۱. کدام یک از سری‌های زیر واگرا هستند؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n + ۱}{n^{۳} + n}$ ۲) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n} \ln n}$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n \cos n}{n^{۳} + ۱}$ ۴) هر سه همگرا هستند.

۱۲. فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2 x}}$ عبارت است از:

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-\infty, 0)$ ۳) $(-1, 1)$ ۴) $(0, +\infty)$

۱۳. حاصل $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^2+2)(k^2+2k+3)}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{18}$ ۲) $\frac{1}{17}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{11}$

۱۴. سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$ بر کدام فاصله همگراست؟ (ریاضی ۷۹)

۱) $|x| < 2$ ۲) $(-\infty, +\infty)$ ۳) $|x| < 4$ ۴) $0 < x < 3$

۱۵. m عدد طبیعی و ثابت است. حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^m}\binom{n}{m}$

۱) $\frac{1}{(m-1)!}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{m!}$ ۴) $+\infty$

۱۶. ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $f(x) = \frac{1}{x+1}\ln(x+1)$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{7}{6}$

۱۷. حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \log_3 \frac{n^2+7n+6}{n^2+7n+10}$ برابر است با:

۱) -1 ۲) -3 ۳) $\log_3 2$ ۴) $-\log_3 2$

۱۸. کدام یک از سری‌های زیر همگرا است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n!)^2}{(2n)!}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ۴) هر سه واگرا هستند.

۱۹. حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!}$ برابر است با:

۱) e ۲) $2e$ ۳) $e-2$ ۴) صفر

۲۰. دنباله $a_n = \sqrt[n]{n}$ برای $n \geq 3$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) نزولی و بی‌کران ۲) غیر یکنوا و همگرا ۳) نزولی و کراندار ۴) صعودی و همگرا

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۱ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱	■	□	□	□
۲	□	■	□	□
۳	□	□	□	■
۴	□	■	□	□
۵	■	□	□	□
۶	□	□	■	□
۷	■	□	□	□
۸	□	□	■	□
۹	■	□	□	□
۱۰	□	■	□	□
۱۱	□	□	□	■
۱۲	■	□	□	□
۱۳	□	□	□	■
۱۴	■	□	□	□
۱۵	□	□	■	□
۱۶	□	■	□	□
۱۷	■	□	□	□
۱۸	□	■	□	□
۱۹	□	■	□	□
۲۰	□	□	■	□
۲۱	□	■	□	□
۲۲	□	□	■	□
۲۳	□	□	□	■
۲۴	□	□	■	□
۲۵	□	□	□	■

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۱ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	□	□	■
۲	□	□	■	□
۳	■	□	□	□
۴	□	□	□	■
۵	□	■	□	□
۶	□	■	□	□
۷	□	□	■	□
۸	■	□	□	□
۹	□	□	■	□
۱۰	□	□	■	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۲ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱	■	□	□	□
۲	□	□	■	□
۳	□	□	■	□
۴	□	■	□	□
۵	■	□	□	□
۶	□	□	□	■
۷	□	□	□	■
۸	□	□	■	□
۹	■	□	□	□
۱۰	■	□	□	□
۱۱	□	■	□	□
۱۲	■	□	□	□
۱۳	□	■	□	□
۱۴	■	□	□	□
۱۵	■	□	□	□
۱۶	■	□	□	□
۱۷	□	□	□	■
۱۸	□	□	□	■
۱۹	■	□	□	□
۲۰	■	□	□	□
۲۱	□	■	□	□
۲۲	■	□	□	□
۲۳	■	□	□	□
۲۴	□	□	□	■
۲۵	□	■	□	□
۲۶	■	□	□	□
۲۷	□	□	■	□
۲۸	□	■	□	□
۲۹	□	□	□	■
۳۰	■	□	□	□
۳۱	□	□	□	■
۳۲	□	■	□	□
۳۳	□	□	□	■
۳۴	□	□	■	□
۳۵	□	■	□	□
۳۶	□	□	■	□
۳۷	■	□	□	□
۳۸	□	□	■	□
۳۹	□	■	□	□
۴۰	□	□	□	■
۴۱	□	□	■	□
۴۲	■	□	□	□
۴۳	□	□	□	■
۴۴	□	□	□	■
۴۵	□	■	□	□
۴۶	□	□	■	□
۴۷	■	□	□	□
۴۸	□	□	■	□
۴۹	■	□	□	□
۵۰	□	□	■	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۲ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	■	□	□
۲	□	□	□	■
۳	■	□	□	□
۴	□	□	■	□
۵	■	□	□	□
۶	□	□	□	■
۷	□	□	□	■
۸	□	□	■	□
۹	□	□	■	□
۱۰	■	□	□	□
۱۱	□	□	□	■
۱۲	■	□	□	□
۱۳	□	□	■	□
۱۴	□	□	□	■
۱۵	□	□	■	□
۱۶	■	□	□	□
۱۷	□	□	■	□
۱۸	■	□	□	□
۱۹	□	□	■	□
۲۰	□	□	■	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۳ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	□	□	■
۲	□	□	■	□
۳	□	□	□	■
۴	□	□	□	■
۵	□	■	□	□
۶	□	□	□	■
۷	□	□	□	■
۸	■	□	□	□
۹	■	□	□	□
۱۰	□	■	□	□
۱۱	□	□	□	■
۱۲	□	□	□	■
۱۳	■	□	□	□
۱۴	□	□	□	■
۱۵	□	■	□	□
۱۶	■	□	□	□
۱۷	■	□	□	□
۱۸	■	□	□	□
۱۹	□	□	□	■
۲۰	■	□	□	□
۲۱	□	■	□	□
۲۲	■	□	□	□
۲۳	□	■	□	□
۲۴	□	□	□	■
۲۵	■	□	□	□
۲۶	■	□	□	□
۲۷	□	□	■	□
۲۸	□	□	■	□
۲۹	□	□	■	□
۳۰	■	□	□	□
۳۱	□	□	■	□
۳۲	□	□	□	■

ادامه پاسخ سؤالات خودآزمایی ۳ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۳۳		■		
۳۴	■			
۳۵			■	
۳۶		■		
۳۷				■
۳۸		■		
۳۹		■		
۴۰		■		
۴۱				■
۴۲	■			
۴۳		■		
۴۴			■	
۴۵		■		
۴۶				■
۴۷				■
۴۸			■	
۴۹		■		
۵۰			■	
۵۱	■			
۵۲				■
۵۳				■
۵۴			■	
۵۵			■	
۵۶		■		
۵۷			■	
۵۸			■	
۵۹	■			
۶۰			■	
۶۱			■	
۶۲	■			
۶۳			■	
۶۴	■			
۶۵				■
۶۶				■
۶۷	■			
۶۸	■			
۶۹				■
۷۰		■		
۷۱	■			
۷۲	■			
۷۳			■	
۷۴		■		
۷۵		■		
۷۶			■	
۷۷		■		
۷۸		■		
۷۹				■
۸۰			■	
۸۱		■		
۸۲			■	
۸۳				■
۸۴		■		
۸۵		■		
۸۶				■
۸۷			■	
۸۸	■			
۸۹		■		
۹۰	■			

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۳ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱			■	
۲			■	
۳	■			
۴		■		
۵				■
۶	■			
۷			■	
۸		■		
۹			■	
۱۰	■			
۱۱				■
۱۲			■	
۱۳			■	
۱۴	■			
۱۵			■	
۱۶			■	
۱۷	■			
۱۸				■
۱۹	■			
۲۰		■		
۲۱	■			
۲۲			■	
۲۳			■	
۲۴		■		
۲۵		■		
۲۶				■
۲۷				■
۲۸		■		
۲۹			■	
۳۰		■		
۳۱		■		
۳۲			■	
۳۳				■
۳۴	■			
۳۵				■
۳۶		■		
۳۷			■	
۳۸	■			
۳۹			■	
۴۰			■	

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۴ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱			■	
۲			■	
۳			■	
۴		■		
۵				■
۶		■		
۷		■		
۸		■		
۹			■	
۱۰	■			
۱۱		■		
۱۲				■
۱۳	■			
۱۴	■			
۱۵	■			
۱۶			■	
۱۷	■			
۱۸		■		
۱۹			■	
۲۰			■	
۲۱				■
۲۲		■		
۲۳		■		
۲۴				■
۲۵				■
۲۶	■			
۲۷		■		
۲۸				■
۲۹	■			
۳۰	■			
۳۱				■
۳۲		■		
۳۳			■	
۳۴				■
۳۵				■
۳۶				■
۳۷		■		
۳۸		■		
۳۹				■
۴۰	■			
۴۱		■		
۴۲				■
۴۳			■	
۴۴			■	
۴۵			■	
۴۶	■			
۴۷				■
۴۸		■		
۴۹	■			
۵۰				■
۵۱			■	
۵۲				■
۵۳				■
۵۴	■			
۵۵				■
۵۶	■			
۵۷				■
۵۸				■
۵۹	■			
۶۰			■	
۶۱		■		
۶۲		■		
۶۳			■	
۶۴				■
۶۵	■			
۶۶		■		
۶۷	■			
۶۸			■	
۶۹			■	
۷۰				■
۷۱				■
۷۲			■	
۷۳	■			
۷۴	■			
۷۵			■	
۷۶				■
۷۷		■		
۷۸			■	
۷۹		■		
۸۰	■			
۸۱				■
۸۲			■	
۸۳		■		
۸۴		■		
۸۵	■			
۸۶		■		
۸۷		■		
۸۸		■		
۸۹			■	
۹۰	■			
۹۱		■		
۹۲				■
۹۳			■	
۹۴				■
۹۵				■
۹۶			■	
۹۷	■			
۹۸				■
۹۹			■	
۱۰۰		■		
۱۰۱		■		
۱۰۲	■			
۱۰۳			■	
۱۰۴		■		
۱۰۵	■			
۱۰۶				■
۱۰۷			■	
۱۰۸	■			
۱۰۹		■		
۱۱۰			■	
۱۱۱			■	
۱۱۲	■			
۱۱۳				■
۱۱۴				■
۱۱۵				■
۱۱۶			■	
۱۱۷	■			
۱۱۸		■		
۱۱۹		■		
۱۲۰		■		
۱۲۱		■		
۱۲۲		■		
۱۲۳				■
۱۲۴	■			
۱۲۵			■	
۱۲۶				■
۱۲۷	■			
۱۲۸			■	
۱۲۹				■
۱۳۰	■			

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۴ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	□	□	■
۲	□	□	■	□
۳	■	□	□	□
۴	□	□	■	□
۵	□	□	■	□
۶	■	□	□	□
۷	□	■	□	□
۸	■	□	□	□
۹	■	□	□	□
۱۰	■	□	□	□
۱۱	□	□	■	□
۱۲	□	□	□	■
۱۳	□	□	■	□
۱۴	□	■	□	□
۱۵	■	□	□	□
۱۶	□	□	□	■
۱۷	□	□	■	□
۱۸	□	□	□	■
۱۹	□	■	□	□
۲۰	□	□	■	□
۲۱	□	□	□	■
۲۲	■	□	□	□
۲۳	□	□	□	■
۲۴	□	□	■	□
۲۵	□	■	□	□
۲۶	□	□	□	■
۲۷	□	□	■	□
۲۸	□	□	□	■
۲۹	□	□	□	■
۳۰	□	□	■	□
۳۱	□	□	■	□
۳۲	■	□	□	□
۳۳	□	□	□	■
۳۴	□	□	■	□
۳۵	□	■	□	□
۳۶	□	□	□	■
۳۷	■	□	□	□
۳۸	■	□	□	□
۳۹	□	□	□	■
۴۰	□	□	□	■
۴۱	□	□	■	□
۴۲	■	□	□	□
۴۳	□	□	□	■
۴۴	□	□	□	■
۴۵	□	□	■	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۵ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	□	□	■
۲	■	□	□	□
۳	□	□	□	■
۴	□	■	□	□
۵	□	■	□	□
۶	□	■	□	□
۷	□	□	■	□
۸	□	□	■	□
۹	□	■	□	□
۱۰	□	□	■	□
۱۱	□	□	■	□
۱۲	■	□	□	□
۱۳	□	□	□	■
۱۴	□	■	□	□
۱۵	■	□	□	□
۱۶	□	■	□	□
۱۷	■	□	□	□
۱۸	□	□	□	■
۱۹	□	□	□	■
۲۰	□	□	■	□
۲۱	□	□	□	■
۲۲	□	■	□	□
۲۳	□	□	□	■
۲۴	□	■	□	□
۲۵	□	■	□	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۵ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱	■	□	□	□
۲	■	□	□	□
۳	□	□	□	■
۴	■	□	□	□
۵	□	□	■	□
۶	■	□	□	□
۷	□	■	□	□
۸	□	□	■	□
۹	□	□	■	□
۱۰	□	■	□	□
۱۱	□	□	□	■
۱۲	■	□	□	□
۱۳	□	□	□	■
۱۴	□	□	■	□
۱۵	□	■	□	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۶ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	■	□	□
۲	■	□	□	□
۳	□	□	□	■
۴	□	□	■	□
۵	□	□	■	□
۶	□	□	□	■
۷	□	□	□	■
۸	■	□	□	□
۹	■	□	□	□
۱۰	□	■	□	□
۱۱	■	□	□	□
۱۲	□	□	□	■
۱۳	□	□	■	□
۱۴	□	■	□	□
۱۵	□	■	□	□
۱۶	□	□	■	□
۱۷	□	■	□	□
۱۸	□	■	□	□
۱۹	■	□	□	□
۲۰	□	■	□	□
۲۱	□	□	■	□
۲۲	■	□	□	□
۲۳	□	□	□	■
۲۴	□	□	□	■
۲۵	□	■	□	□
۲۶	□	□	■	□
۲۷	□	■	□	□
۲۸	□	□	■	□
۲۹	■	□	□	□
۳۰	□	□	■	□
۳۱	□	□	■	□
۳۲	■	□	□	□
۳۳	□	□	□	■
۳۴	□	■	□	□
۳۵	■	□	□	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۶ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱	■	□	□	□
۲	□	□	■	□
۳	□	□	□	■
۴	■	□	□	□
۵	□	□	■	□
۶	□	□	□	■
۷	□	□	■	□
۸	□	■	□	□
۹	□	□	□	■
۱۰	□	■	□	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۷ (سطح ۱)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	□	□	■
۲	■	□	□	□
۳	□	□	□	■
۴	□	■	□	□
۵	□	□	■	□
۶	■	□	□	□
۷	□	□	■	□
۸	□	■	□	□
۹	□	□	■	□
۱۰	■	□	□	□
۱۱	□	□	■	□
۱۲	□	□	□	■
۱۳	□	□	■	□
۱۴	□	□	□	■
۱۵	■	□	□	□
۱۶	□	□	■	□
۱۷	□	■	□	□
۱۸	□	□	□	■
۱۹	□	□	■	□
۲۰	□	■	□	□
۲۱	□	■	□	□
۲۲	□	□	■	□
۲۳	□	■	□	□
۲۴	□	□	■	□
۲۵	□	□	■	□
۲۶	□	□	□	■
۲۷	■	□	□	□
۲۸	□	□	□	■
۲۹	■	□	□	□
۳۰	□	□	■	□
۳۱	□	■	□	□
۳۲	■	□	□	□
۳۳	□	□	□	■
۳۴	□	■	□	□
۳۵	■	□	□	□
۳۶	□	■	□	□
۳۷	□	■	□	□
۳۸	□	□	■	□
۳۹	□	□	■	□
۴۰	□	■	□	□
۴۱	■	□	□	□
۴۲	□	□	■	□
۴۳	■	□	□	□
۴۴	□	■	□	□
۴۵	■	□	□	□
۴۶	□	■	□	□
۴۷	□	□	□	■
۴۸	□	□	■	□
۴۹	□	□	□	■
۵۰	□	■	□	□
۵۱	□	■	□	□
۵۲	□	□	■	□
۵۳	□	□	□	■
۵۴	□	□	□	■
۵۵	■	□	□	□
۵۶	■	□	□	□
۵۷	□	□	□	■
۵۸	□	□	□	■
۵۹	■	□	□	□
۶۰	□	□	□	■
۶۱	□	■	□	□
۶۲	■	□	□	□
۶۳	■	□	□	□
۶۴	□	□	□	■
۶۵	□	■	□	□
۶۶	■	□	□	□
۶۷	■	□	□	□
۶۸	□	□	□	■
۶۹	□	■	□	□
۷۰	□	■	□	□
۷۱	■	□	□	□
۷۲	□	■	□	□
۷۳	■	□	□	□
۷۴	□	■	□	□
۷۵	□	□	■	□
۷۶	□	■	□	□
۷۷	□	□	□	■
۷۸	□	■	□	□
۷۹	□	□	□	■
۸۰	□	□	□	■
۸۱	□	□	■	□
۸۲	■	□	□	□
۸۳	□	□	□	■
۸۴	■	□	□	□
۸۵	■	□	□	□
۸۶	□	■	□	□
۸۷	□	□	□	■
۸۸	□	□	□	■
۸۹	□	□	■	□
۹۰	□	■	□	□

پاسخ سؤالات خودآزمایی ۷ (سطح ۲)

	۱	۲	۳	۴
۱	□	□	■	□
۲	□	□	■	□
۳	□	□	■	□
۴	□	□	■	□
۵	■	□	□	□
۶	□	■	□	□
۷	□	■	□	□
۸	□	□	□	■
۹	□	□	■	□
۱۰	□	■	□	□
۱۱	□	□	□	■
۱۲	□	□	□	■
۱۳	□	□	□	■
۱۴	■	□	□	□
۱۵	□	□	■	□
۱۶	□	□	■	□
۱۷	■	□	□	□
۱۸	□	□	■	□
۱۹	□	□	□	■
۲۰	□	□	■	□

CALCULUS 1

Masoud Aghasi
www.aghasi.net

ISBN: 978-964-157-056-1
9 789641 570561