فصل هفتم
پخش بار اقتصادی
(توزیع بهینه تولید)

بهروز آدینه

بهار ۹۵

مقدمه

فرمول‌بندی مسئله پخش‌بار و راه‌حل‌های آن در فصل قبل مطرح شد. در پخش بار، شین با ولتاژ کنترل شده یکی از انواع شین‌ها است که تولید توان حقیقی و اندازه ولتاژ آن معلوم می‌باشد. در حل پخش‌بار زاویه فاز ولتاژ و تولید توان راکتیو این شین بدست می‌آید. در سیستم‌های قدرت واقعی، نیروگاه‌ها در فواصل یکسان از مراکز بار واقع نشده‌اند و هزینه سوخت آن‌ها نیز متفاوت است. همچنین تحت شرایط بهره‌برداری عادی، ظرفیت تولید بیش از مجموع تقاضای بار و تلفات است. بنابراین، گزینه‌های مختلفی برای برنامه‌ریزی تولید وجود دارد. در یک سیستم قدرت بهم‌پیوسته هدف اینست که برنامه‌ریزی توان-های اکتیو و راکتیو در هر یک از نیروگاه‌ها چنان باشد که هزینه بهره‌برداری حداقل گردد. این بدان معنی است که ژنراتورها مجازند در محدوده معینی توان‌های اکتیو و راکتیو خود را چنان تغییر دهند که تقتضای بار مشخص با حداقل هزینه سوخت تامین شود. این مساله را پخش‌بار بهینه[1] (OPF) می‌نامند. برای بهینه‌سازی پاسخ پخش‌بار سیستم‌های قدرت بزرگ از OPF استفاده می‌گردد. این عمل با حداقل نمودن (کمینه‌سازی) توابع هدف منتخب انجام می‌شود. در حالی که عملکرد سیستم برحسب محدودیت‌های توانایی ژنراتور و خروجی تجهیزات جبران‌ساز در حد قابل‌قبولی حفظ می‌گردد. توابع هدف که توابع هزینه[2] نیز نامیده می‌شوند، ممکن است نمایش‌دهنده هزینه‌های اقتصادی، امنیت سیستم یا اهداف دیگری نیز باشند. برنامه‌ریزی موثر توان راکتیو موجب بهبود بهره‌برداری اقتصادی و امنیت سیستم می‌گردد. محققین بسیاری OPF را مورد مطالعه قرار داده و الگوریتم‌های زیادی را با استفاده از شیوه‌ها و توابع هدف گوناگون ارائه نموده‌اند.

[1] Optimal Power Flow

[2] Cost Functions

بهینه‌سازی توابع غیرخطی

بهینه‌سازی بدون قید پارامترها

بهینه‌سازی توابع غیرخطی ابزار مهمی در طراحی به کمک رایانه بوده و بخشی از طیف گسترده روش-های بهینه‌سازی است که به برنامه‌ریزی غیرخطی[1] موسوم است. نظریه زیربنایی و روش‌های محاسباتی آن در کتاب‌های زیادی مورد بحث قرار گرفته و قصد اصلی آن، کمینه‌سازی تابع هدف غیرخطی با رعایت قیود غیرخطی معادله‌ای (تساوی) و نامعادله‌ای (نامساوی) است.

ابزارهای ریاضی که برای حل مسایل بهینه‌سازی بدون قید پارامترها بکار می‌روند به طور مستقیم از حساب چند متغیره گرفته شده‌اند. شرط لازم برای کمینه‌سازی تابع هدف زیر بوسیله مشتق‌گیری از f نسبت به متغیرها و مساوی قرار دادن آن‌ها با صفر بدست می‌آید:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۱.۶)$$

یعنی:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (۲.۶)$$

[1] Nonlinear programming

یا:

$$\nabla f = 0 \qquad (۳.۶)$$

که در آن:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \qquad (۴.۶)$$

این تابع بردار گرادیان[1] نامیده می‌شود. جملات مربوط به مشتق‌های دوم به صورت زیر هستند:

$$H = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (۵.۶)$$

معادله بالا منجر به یک ماتریس متقارن می‌گردد که ماتریس هسیان[2] تابع f نامیده می‌شود.

هنگامی که مشتق f در نقاط حدی محلی $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ صفر شود، برای اینکه f یک کمینه نسبی داشته باشد، ماتریس هسیان محاسبه شده در نقطه $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ باید یک ماتریس مثبت معین[3] باشد. برای تحقق این شرط لازم است که تمام مقادیر ویژه[4] ماتریس هسیان محاسبه شده در نقطه $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ مثبت باشند.

[1] Gradient vector

[2] Hessian matrix

[3] Positive definite

[4] Eigenvalues

به طور خلاصه، مقدار کمینه بدون قید یک تابع با محاسبه مشتق‌های جزئی آن (نسبت به پارامترهایی که می‌توان آن‌ها را تغییر داد) و مساوی قراردادن آن‌ها با صفر و حل آن‌ها برای تعیین مقادیر این پارامترها بدست می‌آید. در میان مجموعه‌های مقادیر پارامترهای بدست آمده، آن‌هایی که دارای ماتریس مشتق-های جزئی دوم تابع هزینه مثبت معین هستند، مربوط به کمینه‌های محلی[1] می‌باشند. اگر تنها یک کمینه محلی وجود داشته باشد این مقدار، کمینه جامع[2] نیز می‌باشد. در غیر این صورت، برای تعیین کمینه جامع باید هر یک از کمینه‌های محلی تابع هزینه را مورد آزمایش قرار داد.

مثال: کمینه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2+x_2x_3-8x_1-16x_2-32x_3+110$$

حل: با مساوی صفر قرار دادن مشتق‌های اول داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+x_2-8=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1+4x_2+x_3-16=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_3}=x_2+6x_3-32=0$$

یا:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 16\\ 32\end{bmatrix}$$

پاسخ معادلات خطی همزمان بالا به آسانی بدست می‌آید که برابر است با: $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=(3,2,5)$

تابعی که در این نقطه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد عبارتست از: $f(3,2,5)=2$

[1] Local minimum

[2] Global minimum

برای تشخیص کمینه بودن این نقطه، مشتق‌های دوم را محاسبه نموده و ماتریس هسیان به صورت زیـر تشکیل می‌گردد:

$$H\left(\hat{X}\right)=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ۱/۵۵، ۴/۰ و ۶/۲۵ بدست می‌آیند که همگی مثبت هستند. بنـابراین، مـاتریس هسـیان یـک ماتریس مثبت معین بوده و نقطه $(۳,۲,۵)$ کمینه است.

بهینه‌سازی مقید پارامترها

قیود تساوی

این نوع مساله هنگامی رخ می‌دهد که در میان پارامترهای منتخب وابستگی‌های تابعی وجود داشت باشد. هدف کمینه‌سازی تابع هزینه زیر است:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (6.6)$$

قیود تساوری عبارتند از:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k \qquad (7.6)$$

این نوع مسایل را می‌توان با استفاده از روش ضریب لاگرانژ[1] حل نمود. این روش با استفاده از بردار λ[2] با k عنصر از کمیت‌های تعیین نشده، یک تابع هزینه اضافه شده بوجود می‌اورد. تابع هزینه بدون قید مطابق زیر است:

$$L = f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i \qquad (8.6)$$

شرایط لازم برای نقاط کمینه محلی با قید L به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \qquad (9.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i = 0 \qquad (10.6)$$

ملاحظه می‌شود که معادله بالا نشان‌دهنده همان قیود اصلی مساله است.

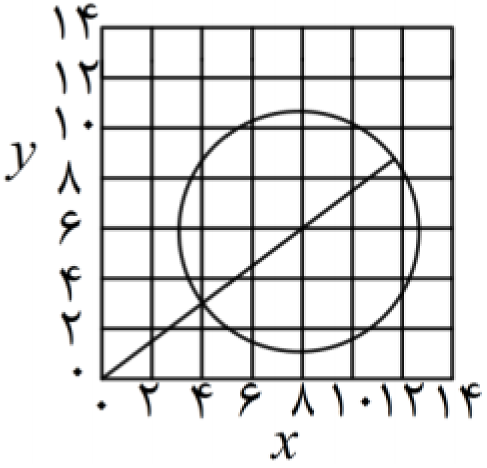
[1] Lagrange multiplier

[2] Lamda

مثال: با استفاده از روش ضریب لاگرانژ برای حل مساله بهینه‌سازی مقید پارامترها، فاصله کمینه از مبـدا مختصات xy را تا دایره‌ای با معادله زیر بدست آورید: $(x-۸)^۲+(y-۶)^۲=۲۵$

حل: فاصله کمینه بوسیله کمینه‌سازی توان دوم فاصله بدست می‌آید و به صورت زیر است:

$$f(x,y)=x^۲+y^۲$$



شکل ۱.٦ تابع مقید برای مثال.

با توجه به شکل دیده می‌شود که فاصله کمینه ۵ بوده و در نقطه $(۴,۳)$ قرار دارد.

با استفاده از ضریب لاگرانژ، تابع $f(x,y)$ با قیودی که در معادله دایره داده شده‌اند کمینه‌سازی می‌شود.

تابع لاگرانژ به صورت زیر تشکیل می‌گردد: $L=x^۲+y^۲+\lambda\left[(x-۸)^۲+(y-۶)^۲-۲۵\right]$

شرایط لازم برای نقاط حدی عبارتند از:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=۲x+\lambda(۲x-۱۶)=۰\Rightarrow ۲x(\lambda+۱)=۱۶\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=۲y+\lambda(۲y-۱۲)=۰\Rightarrow ۲y(\lambda+۱)=۱۲\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-۸)^۲+(y-۶)^۲-۲۵=۰$$

از حل سه معادله بالا نقاط بهینه بدست می‌آیند. در این مساله، می‌توان پاسخ مستقیم را بـه شـرح زیـر بدست آورد:

با حذف λ از دو معادله اول داریم: $y=\frac{۳}{۴}x$

با جایگزینی y در معادله سوم خواهیم داشت: $\frac{۲۵}{۱۶}x^{۲}-۲۵x+۷۵=۰$

جواب‌های معادلات درجه دوم بالا عبارتند از: $x=۴,۱۲$. بنابراین نقاط متناظر حدی $(۴,۳)$ به ازای $\lambda=۱$ و $(۱۲,۹)$ به ازای $\lambda=-۳$ هستند. برای تشخیص این نقاط پس از تعیین مشتق‌های دوم، ماتریس هسـیان محاسبه شده در این نقاط تشکیل می‌گردند. ماتریسی که مقادیر ویژه مثبت داشـته باشـد، یـک مـاتریس مثبت معین بوده و پارامترها مربوط به نقطه کمینه هستند.

در بسیاری از مسائل، حل مستقیم امکان‌پذیر نبوده و معادلات فوق با روش‌های تکراری حل می‌شـوند. روش‌های تکراری گوناگونی برای این کار وجود دارند. ساده‌ترین روش جستجو اینسـت کـه مقـداری برای λ فرض و Δf محاسبه شود. اگر Δf باشد، λ تخمین زده شده مربوط به پاسخ بهینه است. در غیر این صورت، بسته به علامت Δf، مقدار λ افزایش یا کاهش می‌یابد و پاسخ دیگری محاسبه می‌شود. بـا این دو پاسخ، بوسیله برون‌یابی[1] مقدار بهتری برای λ بدست می‌آید و این فرآیند آن‌قدر تکرار مـی‌شـود تا Δf در محدوده دقت تعیین شده قرار گیرد. روشی که به طور محسوسی بـرای بکـارگیری در توابـع پیوسته کارائی بیشتر دارد، روش نیوتن رافسون می‌باشد. یک راه برای بکارگیری روش نیـوتن رافسـون رد این مساله به شرح زیر است. از دو معادله اول x و y محاسبه می‌شوند که عبارتند از:

$$x=\frac{۸\lambda}{\lambda+۱}, y=\frac{۶\lambda}{\lambda+۱}$$

با جایگزینی این مقادیر در معادله سوم، داریم: $f(\lambda)=\frac{۱۰۰\lambda^{۲}}{(\lambda+۱)^{۲}}-\frac{۲۰۰\lambda}{\lambda+۱}+۷۵=۰$

که یک معادله غیرخطی برحسب λ بوده و می‌توان آن را با روش نیوتن رافسون حـل نمـود. ایـن روش یک تقریب متوالی براساس تخمین اولیه برای مجهول مورد نظر و استفاده از بسط سری تیلور می‌باشـد.

[1] Extrapolation

برای حالت یک بعدی داریم:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \frac{-\Delta f(\lambda)^{(k)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^{(k)}} \quad (۱۱.٦)$$

و

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)} \quad (۱۲.٦)$$

این روش با یک تخمین اولیه از مقدار λ شروع شده و در جهت بیشترین شیب[۱] (گرادیان منفی) مقدار جدیدی برای λ بدست می‌آید. این فرآیند در جهت شیب منفی آنقدر ادامه می‌یابد تا $\Delta f(\lambda)$ از مقدار تعیین شده کمتر شود. این الگوریتم به روش گرادیان[۲] موسوم است. گرادیان تابع بالا به صورت زیر است:

[1] Steepest decent

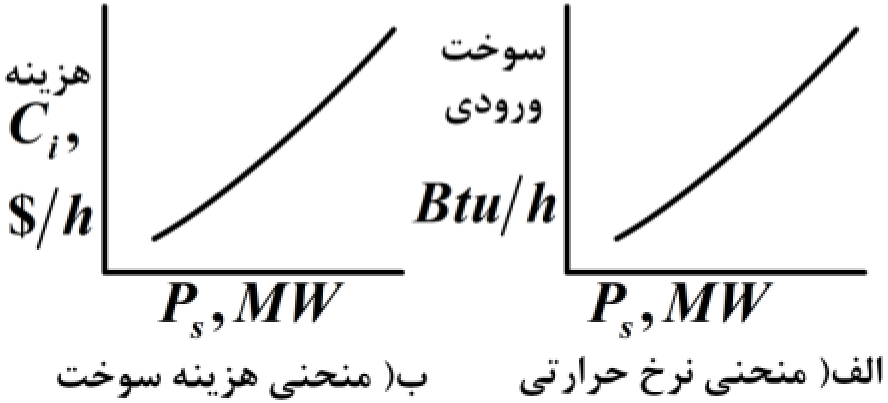
[2] Gradient method

هزینه بهره‌برداری نیروگاه حرارتی[1]

عوامل موثر بر تولید توان با کمترین هزینه عبارتند از: بازده کار ژنراتورها، هزینه سوخت و تلفات انتقال. ژنراتور با بهترین بازده در سیستم، کمترین هزینه را تضمین نمی‌کند زیرا امکان دارد که این ژنراتور در منطقه‌ای قرار گرفته باشد که هزینه سوخت زیاد است. همچنین، اگر فاصله نیروگاه از مرکز بار[2] زیاد باشد، تلفات انتقال می‌تواند به طور چشم‌گیری زیاد شود و از این‌رو امکان دارد که تولید نیروگاه غیراقتصادی گردد. بنابراین، مساله مورد نظر تعیین تولید نیروگاه‌های مختلف به نحوی است که هزینه بهره‌برداری کل کمینه گردد. هزینه بهره‌برداری نقش مهمی در برنامه‌ریزی اقتصادی[3] ایفا می‌کند که در اینجا بررسی می‌گردد.

معمولا ورودی نیروگاه حرارتی برحسب Btu/h و خروجی آن بر حسب MW بیان می‌شود.

منحنی ساده شده ورودی- خروجی یک واحد حرارتی که منحنی نرخ حرارتی[4] نامیده می‌شود. در شکل ۳.٦ (الف) نشان داده شده است. با تبدیل مختصات منحنی نرخ حرارتی از Btu/h به $\$/h$، منحنی هزینه سوخت[5] بدست می‌آید که در شکل ۳.٦ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۳.٦ منحنی‌های نرخ حرارتی و هزینه سوخت.

[1] Thermal plant

[2] Load center

[3] Economic scheduling

[4] Heat rate

[5] Fuel cost

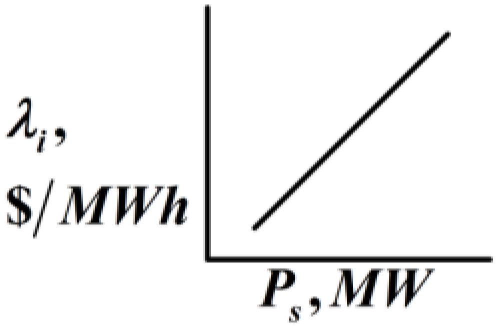
در اکثر موارد می‌توان هزینه سوخت ژنراتور i را به صورت زیر با تابع درجه دوم برحسب توان حقیقی تولید شده آن ژنراتور نمایش داد:

$$C_i = \alpha_i + \beta_i P_i + \gamma_i P_i^{۲} \qquad (۲۱.۶)$$

با رسم مشتق منحنی هزینه سوخت برحسب توان حقیقی مشخصه مهم زیر بدست می‌آید که این منحنی هزینه سوخت افزایشی[1] نامیده می‌شود و در شکل ۴.۶ نشان داده شده است.

$$\frac{dC_i}{dP_i} = ۲\gamma_i P_i + \beta_i \qquad (۲۲.۶)$$

منحنی هزینه سوخت افزایشی نشان دهنده اینست که افزایش بعدی تولید توان چقدر هزینه خواهد داشت. هزینه بهره‌برداری کل شامل هزینه سوخت و هزینه نیروی انسانی، قطعات یدکی و نگهداری است. این هزینه‌ها درصد ثابتی از هزینه سوخت فرض شده و معمولا در منحنی هزینه سوخت افزایشی گنجانده می‌شود.



شکل ۴.۶ منحنی نوعی هزینه سوخت افزایشی.

[1] Incremental fuel-cost

توزیع اقتصادی بار بدون در نظر گرفتن تلفات و محدودیت‌های ژنراتور

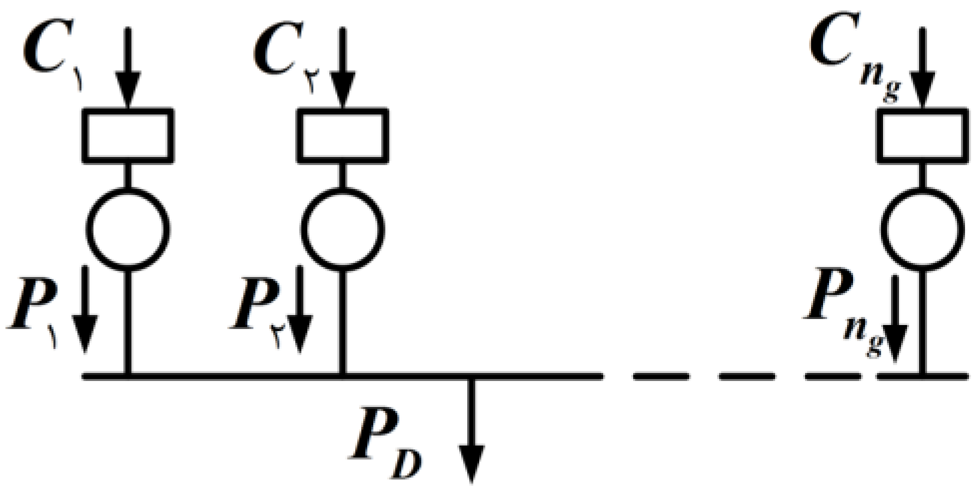
ساده‌ترین نوع ماسله توزیع اقتصادی بار حالتی است که از تلفات خطوط انتقال چشم‌پوشی شود، یعنی مدل مساله، آرایش سیستم و امپدانس خطوط را در نظر نمی‌گیرد. در واقع، این مدل فرض می‌کند که سیستم فقط دارای یک شین بوده و تمامی ژنراتورها و بارها به این شین متصل هستند (مانند شکل ٥.٦). چون تلفات انتقال چشم‌پوشی شده است، تقاضای کل (P_D) با مجموع تولید تمامی ژنراتورها برابر است. فرض می‌شود که تابع هزینه (C_i) هر یک از نیروگاه‌ها معلوم باشد. مساله مورد نظر پیدا کردن تولید توان حقیقی هر یک از نیروگاه‌ها به نحوی است که تابع هدف (یعنیهزینه تولید کل) که با معادله زیر تعریف شده است، کمینه گردد:

$$C_t = \sum_{i=1}^{n_g} C_i = \sum_{i=1}^{n_g} \alpha_i + \beta_i P_i + \gamma_i P_i^2 \qquad (٢٣.٦)$$

قید این مساله عبارتست از:

$$\sum_{i=1}^{n_g} P_i = P_D \qquad (٢٤.٦)$$

که در آن C_t هزینه تولید کل، C_i هزینه نیروگاه iام، P_i تولید نیروگاه iام، P_D تقاضای بار کل و n_g تعداد نیروگاه‌های قابل استفاده در توزیع اقتصادی بار است.



شکل ٥.٦ نیروگاه‌های متصل شده به یک شین مشترک.

یک روش نوعی حل مساله، اضافه نمودن قیود به تابع هدف مورد نظر با اعمال ضریب لاگرانژ به صورت زیر است:

$$L = C_t + \lambda\left(P_D - \sum_{i=1}^{n_g} P_i\right) \qquad (۲۵.۶)$$

کمترین مقدار این تابع بدون قید در نقطه‌ای بدست می‌آید که مشتق‌های جزئی آن نسبت به متغیرهای آن تابع صفر باشد، یعنی:

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = 0 \qquad (۲۶.۶)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad (۲۷.۶)$$

شرط اول که در معادله (۲۶.۶) داده شده است، منجر به رابطه زیر می‌گردد: $\frac{\partial C_t}{\partial P_i} + \lambda(0-1) = 0$

هزینه تولید کل برابر است با: $C_t = C_1 + C_2 + \cdots + C_{n_g}$

در نتیجه خواهیم داشت: $\frac{\partial C_t}{\partial P_i} = \frac{\partial C_i}{\partial P_i} = \lambda$

بنابراین شرط توزیع بهینه این است که:

$$\frac{\partial C_i}{\partial P_i} = \lambda \qquad i = 1, \ldots, n_g \qquad (۲۸.۶)$$

به عبارت دیگر:

$$\beta_i + ۲\gamma_i P_i = \lambda \qquad i = ۱,\ldots, n_g \tag{۲۹.۶}$$

شرط دوم که در معادله (۲۷.۶) داده شده است، منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$\sum_{i=۱}^{n_g} P_i = P_D \tag{۳۰.۶}$$

معادله (۳۰.۶) دقیقا همان قیدی است که باید اعمال می‌گردید. به طور خلاصه، هنگامی که از تلفات چشم‌پوشی شود و ژنراتورها محدودیتی نداشته باشند، برای اقتصادی‌ترین حالت بهره‌برداری، تمام نیروگاه‌ها باید با هزینه تولید افزایشی مساوی کار کنند و قید تساوی معادله (۳۰.۶) نیز برقرار باشد.

برای تعیین پاسخ رابطه (۲۹.۶) برای P_i به صورت زیر حل می‌شود:

$$P_i = \frac{\lambda - \beta_i}{۲\gamma_i} \tag{۳۱.۶}$$

روابط ارائه شده توسط معادله (۳۱.٦) به معادلات هماهنگی[1] موسوم هستند. همه ایـن معـادلات تـابعی از λ می‌باشند. به منظور بدست آوردن یک پاسخ تحلیلـی بـرای λ مـی‌تـوان P_i را از رابطـه (۳۱.٦) در معادله (۳۰.٦) قرار داد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n_g} \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i} = P_D \qquad (۳۲.٦)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$= \lambda = \frac{P_D + \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\beta_i}{2\gamma_i}}{\sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{2\gamma_i}} \qquad (۳۳.٦)$$

برای بدست آوردن برنامه‌ریزی بهینه تولید، مقدار λ را که از رابطه (۳۳.٦) بدست آمده است، در معادله (۳۱.٦) قرار می‌دهیم.

[1] Coordination equations

پاسخ توزیع اقتصادی بار با چشم‌پوشی از تلفات به صورت تحلیلی ارائه گردید. چنانچه تلفات در نظر گرفته شود، معادلات بدست آمده، غیرخطی بوده و باید به صورت تکراری حل شوند. بنابراین، در اینجا یک روش تکراری معرفی شده و رابطه (۳۱.٦) با این روش حل خواهد شد. در روش جستجوی تکراری، ابتدا با دو مقدار برای λ شروع کرده و مقدار بهتر λ بوسیله درون‌یابی بدست می‌آید. این فرآیند آن‌قدر ادامه می‌یابد تا ΔP_i در محدوده دقت از پیش تعیین شده قرار گیرد. بهرحال، همان‌طور که قبلا ذکر گردید، حل سریع با استفاده از روش گرادیان بدست می‌آید. برای این کار، رابطه (۳۲.٦) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(\lambda) = P_D \qquad (۳٤.٦)$$

با بسط تیلور سمت چپ معادله بالا حول نقطه کار $\lambda^{(k)}$ و چشم‌پوشی از جملات مرتبه دوم و بالاتر خواهیم داشت:

$$f(\lambda)^{(k)} + \left(\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right)^{(k)} \Delta\lambda^{(k)} = P_D \qquad (۳۵.٦)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \frac{\Delta P^{(k)}}{\left(\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right)^{(k)}} = \frac{\Delta P^{(k)}}{\sum\left(\frac{dP_i}{d\lambda}\right)^{(k)}} \qquad (۳٦.٦)$$

یا:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \frac{\Delta P^{(k)}}{\left(\dfrac{df(\lambda)}{d\lambda}\right)^{(k)}} = \frac{\Delta P^{(k)}}{\sum \dfrac{۱}{۲\gamma_i}} \qquad (۳۷.۶)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda^{(k+۱)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)} \qquad (۳۸.۶)$$

که در آن:

$$\Delta P^{(k)} = P_D - \sum_{i=۱}^{n_g} P_i^{(k)} \qquad (۳۹.۶)$$

این فرآیند آن‌قدر ادامه می‌یابد تا $\Delta P^{(k)}$ کوچکتر از مقدار دقت از پیش تعیین شده گردد.

مثال: توابع هزینه سوخت سه نیروگاه حرارتی برحسب $\$/h$ به صورت زیر داده شده‌اند:

$$C_۱ = ۵۰۰ + ۵.۳P_۱ + ۰.۰۰۴P_۱^۲$$
$$C_۲ = ۴۰۰ + ۵.۵P_۲ + ۰.۰۰۶P_۲^۲$$
$$C_۳ = ۲۰۰ + ۵.۸P_۱ + ۰.۰۰۹P_۳^۲$$

که در آن $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ برحسب MW بوده و بار کل (P_D) آن‌ها ۸۰۰MW می‌باشد. با چشم‌پوشی از تلفات و محدودیت‌های ژنراتورها توزیع بهینه و هزینه کل برحسب $\$/h$ را برای موارد زیر محاسبه کنید:

(الف) روش تحلیلی.

(ب) روش تکراری با استفاده از روش گرادیان.

حل: (الف) با استفاده از رابطه (۳۳.٦)، مقدار λ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \frac{۸۰۰ + \frac{۵.۳}{۰.۰۰۸} + \frac{۵.۵}{۰.۰۱۲} + \frac{۵.۸}{۰.۰۱۸}}{\frac{۱}{۰.۰۰۸} + \frac{۱}{۰.۰۱۲} + \frac{۱}{۰.۰۱۸}} = ۸.۵ \ \$/MWh$$

با جایگزینی مقدار λ در معادلات هماهنگی رابطه (۳۱.٦)، توزیع بهینه مطابق روابط زیر بدست می‌آید:

$$P_{۱} = \frac{۸.۵ - ۵.۳}{۲(۰.۰۰۴)} = ۴۰۰.۰۰۰۰$$

$$P_{۲} = \frac{۸.۵ - ۵.۵}{۲(۰.۰۰۶)} = ۲۵۰.۰۰۰۰$$

$$P_{۱} = \frac{۸.۵ - ۵.۸}{۲(۰.۰۰۹)} = ۱۵۰.۰۰۰۰$$

(ب) به منظور حل عددی با استفاده از روش گرادیان، مقدار اولیه $\lambda^{(۱)} = ۶.۰$ را در نظر بگیرید. با استفاده

از معادلات هماهنگی مقادیر توان به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P_۱^{(۱)} = \frac{۶.۰ - ۵.۳}{۲(۰.۰۰۴)} = ۸۷.۵۰۰۰$$

$$P_۲^{(۱)} = \frac{۶.۰ - ۵.۵}{۲(۰.۰۰۶)} = ۴۱.۶۶۶۷$$

$$P_۳^{(۱)} = \frac{۶.۰ - ۵.۸}{۲(۰.۰۰۹)} = ۱۱.۱۱۱۱$$

از آنجایی که $P_D = ۸۰۰ MW$ می‌باشد، با استفاده از معادله (۳۹.٦) خطای ΔP عبارتست از:

$$\Delta P^{(۱)} = ۸۰۰ - (۸۷.۵ + ۴۱.۶۶۶۷ + ۱۱.۱۱۱۱) = ۶۵۹.۷۲۲۲$$

با استفاده از رابطه (۲۷.٦) داریم:

$$\Delta\lambda^{(۱)} = \frac{۶۵۹.۷۲۲۲}{\frac{۱}{۲(۰.۰۰۴)} + \frac{۱}{۲(۰.۰۰۶)} + \frac{۱}{۲(۰.۰۰۹)}} = ۲.۵$$

بنابراین مقدار جدید λ برابر است با: $\lambda^{(۱)} = ۶ + ۲.۵ = ۸.۵$

با ادامه این فرآیند پس از تکرار دوم خواهیم داشت:

$$P_{۱}^{(۲)} = \frac{۸.۵ - ۵.۳}{۲(۰.۰۰۴)} = ۴۰۰.۰۰۰۰$$

$$P_{۲}^{(۲)} = \frac{۸.۵ - ۵.۵}{۲(۰.۰۰۶)} = ۲۵۰.۰۰۰۰$$

$$P_{۳}^{(۲)} = \frac{۸.۵ - ۵.۸}{۲(۰.۰۰۹)} = ۱۵۰.۰۰۰۰$$

و در نتیجه داریم: $\Delta P^{(۲)} = ۸۰۰ - (۴۰۰ + ۲۵۰ + ۱۵۰) = ۰.۰$

از آنجایی که $\Delta P^{(۲)} = ۰.۰$ است، قید تساوی پس از دو تکرار برقرار شده است. بنابراین، توزیع بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{۱} = ۴۰۰ MW, P_{۲} = ۲۵۰ MW, P_{۳} = ۱۵۰ MW, \lambda = ۸.۵ \ \$/MWh$$

و هزینه سوخت کل برابر است با:

$$C_{t} = ۵۰۰ + ۵.۳(۴۰۰) + ۰.۰۰۴(۴۰۰)^{۲} + ۴۰۰ + ۵.۵(۲۵۰) + ۰.۰۰۶(۲۵۰)^{۲} + ۲۰۰ + ۵.۸(۱۵۰) + ۰.۰۰۹(۱۵۰)^{۲}$$
$$= ۶۶۸.۲۵ \ \$/h$$