دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بسمه تعالی

تاریخ امتحان: ۹۷/۰۲/۲۴

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

---

۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید .

$$(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

۲. معادله دیفرانسیل $x = y'^2 + \frac{y}{y'}$ را حل کنید .

۳. مقدار b چقدر باشد تا سهمی های $y = ax^2 + b$.

مسیرهای قائم بیضی های $x^2 + 2y^2 - y = c$ باشند. (a و c اعداد ثابت اند)

۴. الف) نشان دهید که $y_1 = x$ و $y_2 = \frac{1}{x}$ جوابهای معادله دیفرانسیل میباشند.

$$x^3y'' + x^2y' - xy = 0$$

ب) با استفاده از قسمت الف جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$x^3y'' + x^2y' - xy = \frac{x}{1+x}$$

۵. معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را حل کنید.

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2$$

موفق باشید

(پاسخنامه میانترم معادلات - ۹۷/۲/۲۴)

۱) $\underbrace{(x^4 \ln x - 2xy^3)}_{M}dx + \underbrace{3x^2y^2}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 \to$ کامل نیست $\to \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -12xy^2 \xrightarrow{\times \frac{1}{N}} \frac{-12xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x} = f(x)$

$\to$ عامل : $e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4}$ $\xrightarrow{\text{ضرب عامل در معادله}}$ $(\underbrace{\ln x - 2x^{-3}y^3}_{M})dx + \underbrace{3x^{-2}y^2}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -6x^{-3}y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -6x^{-3}y^2 \to$ کامل شد

$C = \int^{*} M dx + \int N dy$

$c = \int \ln x \, dx + \int 3x^{-2}y^2 dy \to \boxed{c = x(\ln x - 1) + x^{-3}y^3}$

---

۲) $x = y'^2 + \frac{y}{y'} \xrightarrow{\times y'} xy' = y'^3 + y \to y = xy' - y'^3 \xrightarrow[y'=c]{\text{معادله کلرو}} \boxed{y = cx - c^3}$

جواب عمومی

$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به c}} 0 = x - 3c^2 \to c = \sqrt{\frac{x}{3}} \xrightarrow{\text{جایگذاری c}} y = x\sqrt{\frac{x}{3}} - \frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}} \to \boxed{y = \frac{2}{3}x\sqrt{\frac{x}{3}}}$

جواب غیرعادی

---

۳) $\begin{cases} y = ax^2 + b \\ x^2 + 2y^2 - y = c \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x + 4yy' - y' = 0 \to 2x = y'(1-4y)$

$\xrightarrow[y' \to -\frac{1}{y'}]{\text{مسیر قائم}} 2x = -\frac{1}{y'}(1-4y) \to \frac{dy}{1-4y} = \frac{-dx}{2x} \to \frac{dy}{4(y-\frac{1}{4})} = \frac{dx}{2x} \xrightarrow[\text{تفکیک پذیر}]{\int}$

$\frac{1}{4}\ln(y - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\ln cx \xrightarrow{\times 4} \ln(y - \frac{1}{4}) = 2\ln(cx) = \ln(cx)^2$

$\to y - \frac{1}{4} = c^2x^2 \to y = c^2x^2 + \frac{1}{4} \xrightarrow{c^2 = a} y = ax^2 + \frac{1}{4} \xrightarrow{y = ax^2 + b} \boxed{b = \frac{1}{4}}$

میانترم معادلات دیفرانسیل

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده صنایع

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردی بهشت ۹۷

(پاسخنامه میانترم معادلات - ۹۷/۲/۲۴)

٤) $x^3y'' + x^2y' - xy = 0$

الف) $\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \\ y'' = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x^3(0) + x^2(1) - x(x) = 0 \checkmark$

$\begin{cases} y = 1/x \\ y' = -\frac{1}{x^2} \\ y'' = \frac{2}{x^3} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x^3\left(\frac{2}{x^3}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) - x\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \checkmark$

$$\xrightarrow{y = c_1y_1 + c_2y_2} \boxed{y_h = c_1x + c_2\frac{1}{x}}$$

ب) $\xrightarrow{\text{روش رونسکی}} \begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \frac{1}{x} \end{cases} \to \omega(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$

$\xrightarrow[\div x^3]{\text{نرمالسازی معادله}} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2(1+x)}$ $\boxed{g(x)}$

$$c_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{\omega(x)}dx = -\int \frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2(1+x)}}{-\frac{2}{x}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(1+x)} = \boxed{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \ln\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$c_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{\omega(x)}dx = \int \frac{x\cdot\frac{1}{x^2(1+x)}}{-\frac{2}{x}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x} = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(1+x)}$$

$$\xrightarrow{y = c_1x + c_2\frac{1}{x}} \boxed{y_p = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)x - \frac{1}{2}\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{y_{\text{کل}} = y_h + y_p}$$

اردیبهشت ۹۷
ابراهیم شاه ابراهیمی

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه

math-teacher.blog.ir

۵) $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2$

کوشی اویلر $\longrightarrow$ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \xrightarrow{\text{همگن}} m(m-1) - 2m + 2 = 0 \rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{y_h = c_1 x + c_2 x^2}$

جواب خصوصی $\longrightarrow$ اپراتور

$m^2 - 3m + 2 = 0 \xrightarrow{\ln x = t} y'' - 3y' + 2 = t^2 - 2t \rightarrow (D^2 - 3D + 2)y = t^2 - 2t$

$\rightarrow y = \dfrac{t^2 - 2t}{D^2 - 3D + 2} \xrightarrow{*} y = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2\right)(t^2 - 2t)$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 - 3D + D^2 \\ \hline -\left(1 - \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\right) & \boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2} \ * \\ \hline \frac{3}{2}D - \frac{1}{2}D^2 & \\ -\left(\frac{3}{2}D - \frac{9}{4}D^2 + \frac{3}{4}D^3\right) & \\ \hline \frac{7}{4}D^2 - \frac{3}{4}D^3 & \\ \vdots & \end{array}$$

$\rightarrow y = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) + \frac{3}{4}(2t - 2) + \frac{7}{8}(2)$

$\rightarrow y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

$\xrightarrow{\ln x = t} \boxed{y_p = \frac{1}{4}\left(2\ln^2 x + 2\ln x + 1\right)}$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

$\boxed{y_{\text{ع}} = y_h + y_p}$

تحلیل میانترم

سوال۱ – معادله مرتبه۱ که با یافتن عامل به کامل تبدیل میشد و کاملا استاندارد بود
سوال۲ – معادله کلرو که زیاد مرسوم نیست
سوال۳ – مسیرهای قائم که پای ثابت میانترم های معادلاته و کاملا استاندارد بود
سوال۴ – معادله مرتبه۲ غیرکوشی اویلر ناهمگن که حتی دو جواب پایه همگن داده شده بود و جواب خصوصی به روش لاگرانژ بدست میومد که کاملا استاندارد بود
سوال۵ – معادله مرتبه۲کوشی اویلر ناهمگن که قسمت خصوصیش به روش اپراتور (پیوست) حل میشد و استاندارد بود