امتحان ریاضی مهندسی(معادلات PDE)

تاریخ : ۹۸/۰۲/۲۲ (مدت امتحان : ۴۵ دقیقه)

(برگه فرمول و ماشین حساب مجاز است)

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

۱-در معادله موج داده شده، $u(x,t)$ را بدست آورده و سپس $u\left(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۴}\right)$ را محاسبه کنید .

$$u_{xx} = u_{tt}$$

$$u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰$$

$$u(x,۰) = u_t(x,۰) = sinx$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\, Sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \xrightarrow{L=\pi} \boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\, Sin(nx)}$$

$$\begin{cases} U_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\, Sin(nx) \\ U_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t)\, Sin(nx) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\, Sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t)\, Sin(nx) \longrightarrow -n^2 G_n(t) = G_n''(t) \longrightarrow G_n''(t) + n^2 G_n(t) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} t^2 + n^2 = 0 \longrightarrow t = \pm ni \longrightarrow \boxed{G_n(t) = C_1 Sin(nt) + C_2 Cos(nt)}$$

$$\longrightarrow \boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_1 Sin(nt) + C_2 Cos(nt)\right) Sin(nx)}$$

$$\xrightarrow{U(x,0)=Sinx} Sin x = \sum_{n=1}^{\infty} C_2\, Sin(nx) \xrightarrow{\text{سری فوریه}} C_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Sin(x)\, Sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Sin(x)\, Sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\left[Cos(x-nx) - Cos(x+nx)\right]dx\right]$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Sin(x-nx)}{1-n} - \frac{Sin(x+nx)}{1+n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \boxed{0}$$

حاصل این انتگرال برای $n\neq 1$ می‌شود صفر

بنابراین برای $n=1$ جداحساب می‌کنم

$$\xrightarrow{n=1} C_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Sin^2(x)\, dx = \boxed{1}$$

$$\xrightarrow{n=1} U(x,t) = \left(C_1 Sin(t) + Cos(t)\right) Sin(x) \longrightarrow U_t(x,t) = \left(C_1 Cos\, t - Sin\, t\right) Sin(x)$$

$$\xrightarrow{U_t(x,0)=Sinx} Sin x = C_1\, Sin\, x \longrightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

$$\longrightarrow \boxed{U(x,t) = (Sin\, t + Cos\, t)\, Sin\, x}$$

$$\xrightarrow[t=\pi/4]{x=\pi/2} U(\pi/2, \pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

۲-معادله دیفرانسیل جزیی مرتبه اول زیر را به کمک تغییرمتغیرهای داده شده حل کنید .

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z \qquad \begin{cases} s=\frac{1}{2}\ln(xy) \\ t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{y}\right) \end{cases}$$

$$z \left\langle \begin{array}{l} s \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \\ t \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{xy}=\frac{1}{2x} \qquad \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{xy}=\frac{1}{2y}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1/y}{\frac{x}{y}}=\frac{1}{2x} \qquad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}}=-\frac{1}{2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{1}{2x}\right)+\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{1}{2x}\right)=\boxed{\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial t}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{1}{2y}\right)+\frac{\partial z}{\partial t}\left(-\frac{1}{2y}\right)=\boxed{\frac{1}{2y}\left(\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial t}\right)}$$

حالت اول

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial t}\right)=z$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial s}=z \rightarrow \frac{\partial z}{z}=\partial s \xrightarrow{\int} \ln(z)=s+c$$

$$\rightarrow z=e^{s+c}$$

$$\rightarrow \boxed{z=e^{\frac{1}{2}\ln xy+c}}$$

$$\rightarrow \boxed{z=\sqrt{xy}\,e^{c}}$$