A10

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y+4}{y+3}$$

حل: داریم

$$y' = -\frac{\overset{a}{1}x + \overset{b}{2}y + \overset{c}{4}}{\underset{a'}{0}x + \underset{b'}{1}y + \underset{c'}{3}} \qquad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

الف. ابتدا جواب (α, β) جواب دستگاه

$$\begin{cases} x+2y+4=0 \\ y+3=0 \end{cases} \rightarrow \beta = y = -3 \xrightarrow{x+2y+4=0} x = 2 = \alpha$$

ب. تغییر متغیر $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y-3 \end{cases}$ و داریم $\rightarrow y' = Y'$

$$Y' = -\frac{(X+2)+2(Y-3)+4}{Y-3+3} \rightarrow Y' = -\frac{X+2Y}{Y}$$

بر طبق جواب مثال قبل جواب معادله با اعمال تغییرات از (در صفحه A8)

$$\ln\left|1+\frac{Y}{X}\right| + \frac{1}{1+Y/X} = -\ln|X| + C$$

$$\rightarrow \ln\left|1+\frac{y+3}{x-2}\right| + \frac{1}{1+\frac{y+3}{x-2}} = -\ln|x-2| + C.$$

صA11

تذکر: اگر در معادله $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ داشته باشیم $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

برای حل آن مانند مثال بعد عمل می‌کنیم.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{2x-2y-1}$$

حل: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overset{a}{1}x \overset{b}{-1}y \overset{c}{+1}}{\underset{a'}{2}x \underset{b'}{-2}y \underset{c'}{-1}}$$

برای حل متغیر تغییر $u = x - y$ را در نظر می‌گیریم و معادله را با این تغییر متغیر بازنویسی می‌کنیم $u' = 1 - y'$ استفاده

$(y' = 1 - u')$

$$1 - u' = \frac{u+1}{2u-1} \Longrightarrow u' = 1 - \frac{u+1}{2u-1} \Longrightarrow$$

$$u' = \frac{2u-1-u-1}{2u-1} \Longrightarrow u' = \frac{u-2}{2u-1} \Longrightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u-2}{2u-1} \Longrightarrow \frac{2u-1}{u-2}\, du = dx$$ جداپذیر

برای حل انتگرال سمت راست وقتی خارج قسمت $2u-1$ بر $u-2$ را بدست بیاوریم

برای این منظور می‌نویسیم

$$\begin{array}{r|l} 2U-1 & U-2 \\ \hline 2U-4 & 2 \\ \hline +3 & \end{array} \Longrightarrow \frac{2U-1}{U-2} = 2 + \frac{3}{U-2}$$

پس می نویسیم

$$\int \frac{2U-1}{U-1}\, dU = \int dx$$

$$\Longrightarrow \int \left(2 + \frac{3}{U-2}\right) dU = x + c$$

$$\Longrightarrow 2U + 3\operatorname{Ln}|U-2| = x + c$$

$$\Longrightarrow 2(x-y) + 3\operatorname{Ln}|x-y-2| = x + c.$$

(4) معادله دیفرانسیل کامل.

معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را کامل گوییم، هرگاه تابعی مانند $U = U(x,y)$ به گونه‌ای موجود باشد که $\begin{cases} U_x = M \\ U_y = N \end{cases}$.

برای درک مطلب به مثال زیر توجه کنید: آیا در معادله $(3x^2y^3+1)\,dx + 3x^3y^2\,dy = 0$ تابع U را می‌توانید حدس بزنید که $U_x = 3x^2y^3 + 1$ ، $U_y = 3x^3y^2$ ؟

A13 صفحه

با کمی دقت می‌توانید تابع $U = x^3y^3 + x$ را بدست آورید. اکنون می‌گوییم معادله داده شده یک معادله دیفرانسیل کامل است و آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(3x^2y^3+1) + (3x^3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$(x^3y^3+x)' = 0$$

- و با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$x^3y^3 + x = c$$

که همان $U = c$ است. خلاصِ کلام جواب معادله دیفرانسیل کامل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ عبارتست از U برابر است با $U = c$.

- روش شناسایی و حل معادله دیفرانسیل کامل

الف - اگر در معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ داشته باشیم $M_y = N_x$ آنگاه معادله حالا کامل است.

ب - جواب معادله کامل برابر است با $U = c$ که برای محاسبه U از روابط $U_x = M$ و $U_y = N$ استفاده می‌کنیم (جزئیات کار را در مثال‌ها نشان داده‌ایم)

ص ۸۱۴

مثال: معادله دیفرانسیل $(3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+y)\,dy$ را حل کنید.

$$\underbrace{(3x^2+4xy)}_{M}\qquad \underbrace{(2x^2+y)}_{N}$$

حل:

الف.

$$\begin{cases} M_y = 4x \\ N_x = 4x \end{cases} \longrightarrow \text{(معادله دارای شکل کامل است)}$$

ب

$$\begin{cases} U_x = M = 3x^2+4xy \xrightarrow{\int dx} U = x^3+\frac{4x^2y}{2}+f(y) \\ U_y = N = 2x^2+y \end{cases}$$

$$U = x^3+2x^2y+f(y) \xrightarrow[U_y=N]{} \cancel{2x^2}+f'(y) = \cancel{2x^2}+y$$

$$\Rightarrow f'(y) = y \Rightarrow f(y) = \frac{y^2}{2}+C$$

پس $U = x^3+2x^2y+\frac{y^2}{2}+C$ و جواب معادله برابر است با

$$x^3+2x^2y+y^2/2 = C.$$

A15 ص

$\frac{5۲}{77ص}$ $(\underbrace{2xy - \tan y}_{M})\,dx + (\underbrace{x^2 - x\sec^2 y}_{N})\,dy = 0$

حل: الف.

$$\begin{cases} M_y = 2x - \sec^2 y \\ N_x = 2x - \sec^2 y \end{cases} \rightarrow M_y = N_x \rightarrow \text{کامل است.}$$

ب.

$U_x = M \rightarrow U = \int M\,dx + f(y) \Rightarrow U = \int (2xy - \tan y)\,dx + f(y)$

$\Rightarrow U = x^2 y - x\tan y + f(y) \xrightarrow{U_y = N} x^2 - x\sec^2 y + f'(y) = x^2 - x\sec^2 y$

$\Rightarrow f'(y) = 0 \Longrightarrow f(y) = C \Longrightarrow U = x^2 y - x\tan y + C$

$x^2 y - x\tan y = C$ جواب معادله

ثابت کنید معادله دیفرانسیل زیر کامل است

$(\underbrace{e^{xy} + xy\,e^{xy}}_{M})\,dx + \underbrace{x^2 e^{xy}}_{N}\,dy = 0$

حل: الف.

$$\begin{cases} M_y = x e^{xy} + x e^{xy} + x^2 y\, e^{xy} = 2x e^{xy} + x^2 y\, e^{xy} \\ N_x = 2x e^{xy} + x^2 y\, e^{xy} \end{cases} \Longrightarrow M_y = N_x \rightarrow \text{معادله کامل است.}$$

$$\begin{cases} U_x = M \rightarrow U = \int M\,dx + f(y) \\ U_y = N \rightarrow U = \int N\,dy + g(x) \rightarrow U = \int x^2 e^{xy}\,dy + g(x) \end{cases}$$

$\rightarrow U = \frac{x^2}{x} e^{xy} + g(x)$

$$U = xe^{xy} + g(y) \xrightarrow{U_x = M} xye^{xy} + e^{xy} + g'(y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$g'(y) = 0 \longrightarrow g(y) = c \longrightarrow U = xe^{xy} + c$$

و جواب معادله عبارتست از

$$xe^{xy} = C.$$

یادآوری

$$\int e^{\alpha y}\,dy = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha y} + c \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

عامل انتگرال ساز

اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد (یعنی $M_y \neq N_x$) در برخی از حالات می توان با ضرب تابع مناسبی به نام عامل انتگرال ساز در طرفین معادله دیفرانسیل ناکامل، آن را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کرد. عامل انتگرال ساز را معمولا با μ نشان می دهیم

الف - اگر $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ آنگاه $\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$.

ب - اگر $\frac{M_y - N_x}{-M} = g(y)$ آنگاه $\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}$.

ج - اگر $\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(z)$ آنگاه $\mu(z) = e^{\int h(z)\,dz}$ که در آن $z = xy$ است.

A17

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{(x+y^2)}_{M}dx \underbrace{-2xy}_{N=-2xy}\,dy = 0$$

حل: توجه کنید که معادله داده شده، همگن نیست، کامل هم نیست زیرا

$$M_y = 2y, \quad N_x = -2y \longrightarrow M_y \neq N_x.$$

حالت الف:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y-(-2y)}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = \frac{-2}{x} = f(x)$$

و

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

حال با ضرب طرفین معادله در x^{-2} به شکل یک معادله کامل می‌رسیم. بنابر

$$x^{-2}(x+y^2)\,dx - 2x^{-2}xy\,dy = 0 \Longrightarrow \underbrace{(x^{-1}+x^{-2}y^2)}_{M}dx \underbrace{-2x^{-1}y}_{N}dy = 0$$

(الف)

$$\begin{cases} M_y = 2x^{-2}y \\ N_x = -2\times(-1)x^{-2}y = 2x^{-2}y \end{cases} \longrightarrow M_y = N_x \longrightarrow \text{معادله کامل}$$

(ب)

$$U_x = M \longrightarrow U = \int M\,dx + f(y) = \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1}y^2 + f(y)$$

$$U_y = N \Longrightarrow -2x^{-1}y + f'(y) = -2x^{-1}y \to f'(y) = 0 \to f(y) = c$$

$$\to U = \ln|x| - y^2/x + C \longrightarrow \ln|x| - y^2/x = C$$ جواب آخر

A18 ص

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}.$$

حل :

$$(3x^2y+y^2)\,dx = -(2x^3+3xy)\,dy \Longrightarrow$$

$$\underbrace{(3x^2y+y^2)}_{M}\,dx + (\underbrace{2x^3+3xy}_{N})\,dy = 0$$

$$\begin{cases} M_y = 3x^2+2y \\ N_x = 6x^2+3y \end{cases} \Longrightarrow M_y \neq N_x \Longrightarrow$$ کامل نیست

$$\frac{M_y-N_x}{-M} = \frac{3x^2+2y-6x^2-3y}{-3x^2y-y^2} = \frac{\cancel{(-3x^2-y)}}{y\cancel{(-3x^2-y)}} = \frac{1}{y}$$

(حالت ب)

عامل انتگرال ساز

$$\xRightarrow{\text{حالت ب}} \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln|y|} = |y|$$

y یا y− فرقی ندارند بعنوان عامل انتگرال ساز در معادله ناکامل ضرب شود. داریم

$$(3x^2y+y^2)\,y\,dx + (2x^3+3xy)\,y\,dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(\underbrace{3x^2y^2+y^3}_{M})\,dx + (\underbrace{2x^3y+3xy^2}_{N})\,dy = 0$$