بسم الله الرحمن الرحيم

محاسبات عددی

ابراهیم شاه ابراهیمی

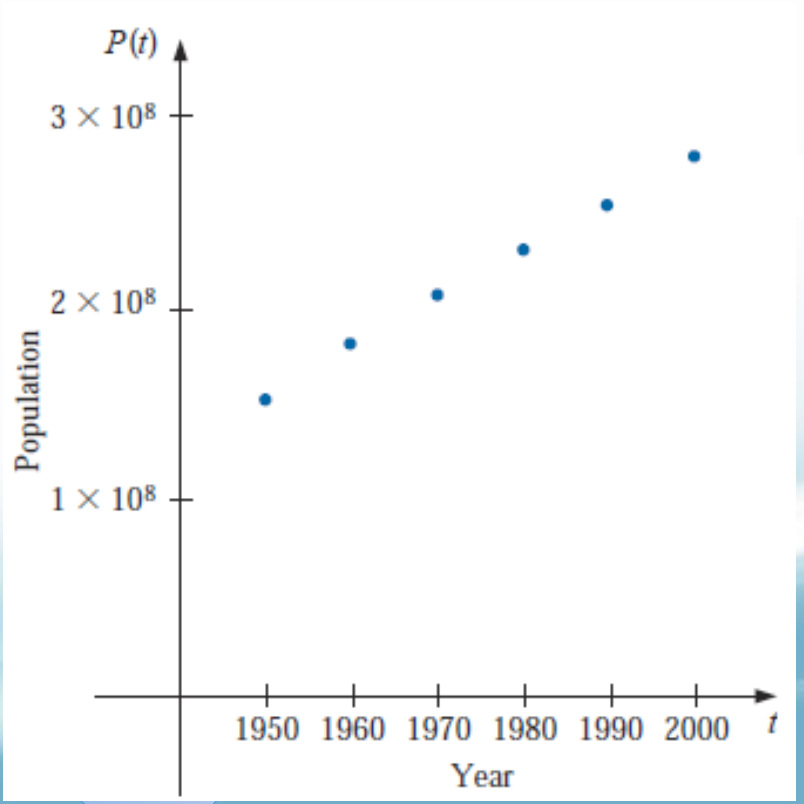
اردیبهشت ۹۹

2 Interpolation and Polynomial Approximation

Introduction

A census of the population of the United States is taken every 10 years.

Year	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population (in thousands)	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633	281,422



In reviewing these data, we might ask whether they could be used to provide a reasonable estimate of the population, say, in 1975 or even in the year 2020. This process is called *interpolation* and is the subject of this chapter.

- Lagrange Interpolating Polynomials
- Newton's Divided-Difference
- Cubic Splines

Math-teacher.blog.ir مهندس شاه‌ابراهیمی

مقدمه

فصل۱) ریشه یابی

فصل۲) درونیابی

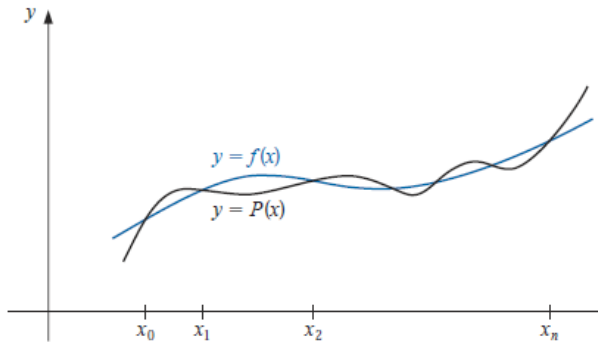
فصل۳) حل عددی انتگرال

فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل

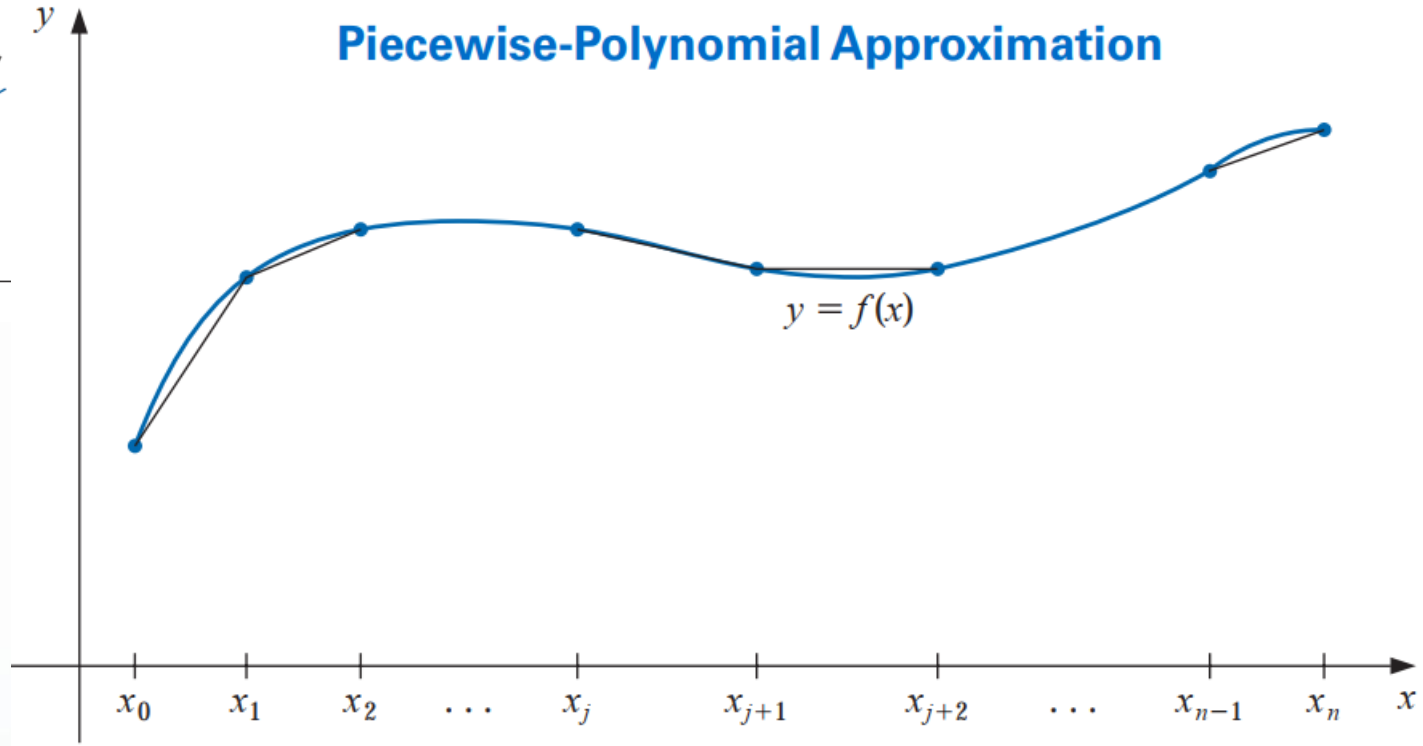
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات

فصل۶) برازش منحنی

Cubic Splines



Piecewise-Polynomial Approximation

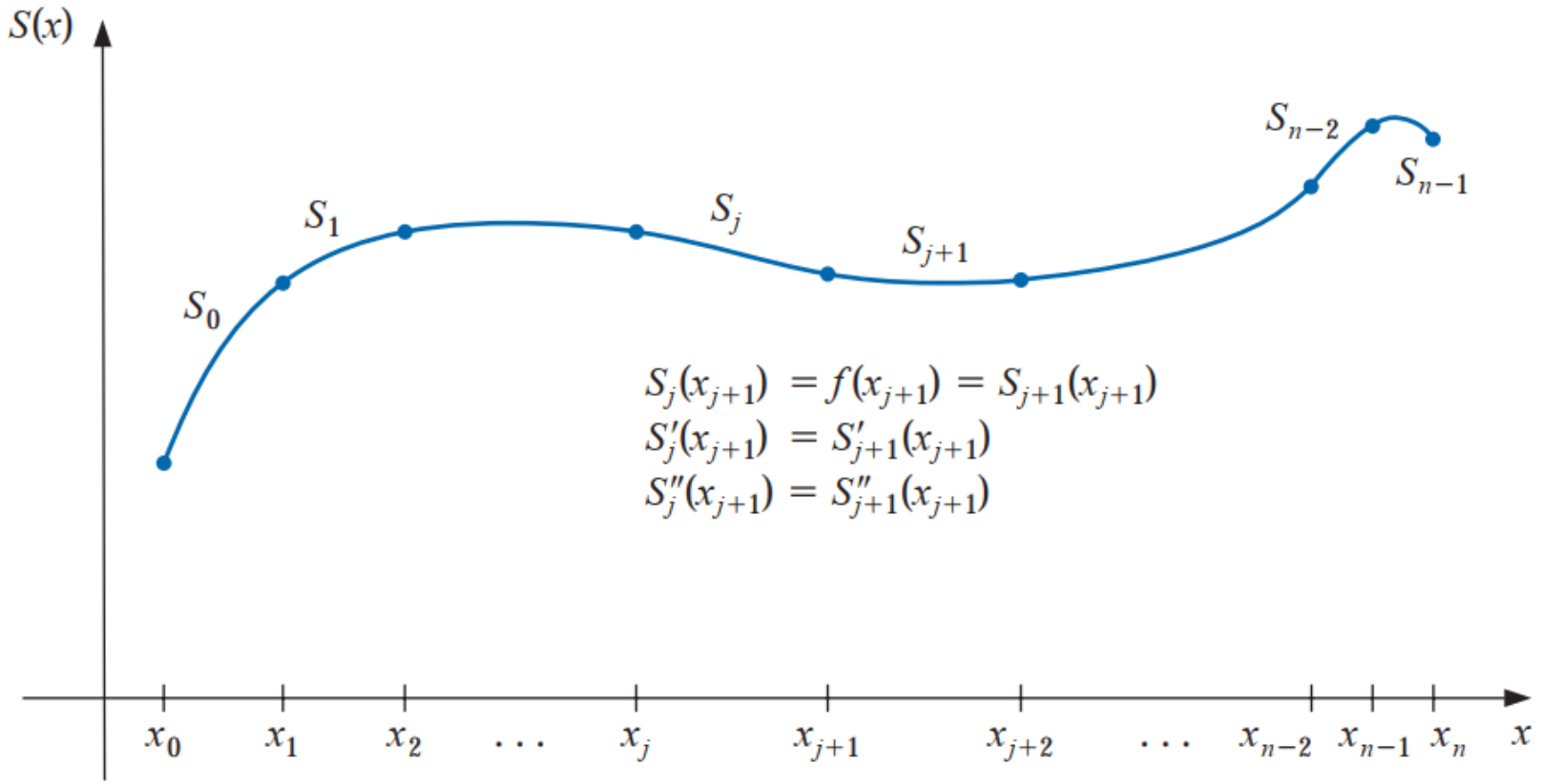


The most common piecewise-polynomial approximation uses cubic polynomials between each successive pair of nodes and is called **cubic spline interpolation**.

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

Math-teacher.blog.ir مهندس شاه‌ابراهیمی

Cubic Splines



$$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$$
$$S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$$
$$S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$$

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

Math-teacher.blog.ir مهندس شاه‌ابراهیمی

Cubic Splines

Example 1 Construct a natural cubic spline that passes through the points $(1, 2)$, $(2, 3)$, and $(3, 5)$.

Solution This spline consists of two cubics The first for the interval $[1, 2]$, denoted

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - 1) + c_0(x - 1)^2 + d_0(x - 1)^3,$$

and the other for $[2, 3]$, denoted $S_1(x) = a_1 + b_1(x - 2) + c_1(x - 2)^2 + d_1(x - 2)^3.$

There are 8 constants to be determined, which requires 8 conditions.

Four conditions come from the fact that the splines must agree with the data at the nodes. Hence

$$2 = f(1) = a_0, \quad 3 = f(2) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0, \quad 3 = f(2) = a_1, \quad 5 = f(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

Two more come from the fact that $S_0'(2) = S_1'(2)$ and $S_0''(2) = S_1''(2)$. These are

$$S_0'(2) = S_1'(2): \quad b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \qquad S_0''(2) = S_1''(2): \quad 2c_0 + 6d_0 = 2c_1$$

The final two come from the natural boundary conditions:

$$S_0''(1) = 0: \quad 2c_0 = 0 \qquad S_1''(3) = 0: \quad 2c_1 + 6d_1 = 0.$$

Math-teacher.blog.ir مهندس شاه‌ابراهیمی

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

Example 1 Construct a natural cubic spline that passes through the points $(1, 2)$, $(2, 3)$, and $(3, 5)$.

Solution Solving this system of equations gives the spline

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & \text{for } x \in [1,2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & \text{for } x \in [2,3] \end{cases}$$

Math-teacher.blog.ir مهندس شاه‌ابراهیمی

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

EXERCISE SET 2.3

Construct the natural cubic spline for the following data.

a.

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

b.

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

c.

x	$f(x)$
−0.5	−0.0247500
−0.25	0.3349375
0	1.1010000

d.

x	$f(x)$
0.1	−0.62049958
0.2	−0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

Math-teacher.blog.ir مهندس شاه‌ابراهیمی

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

پایان جلسه ششم
(پایان فصل۲-قسمت۳)

پایان فصل۲

۵ اردیبهشت ۹۹

با تشکر از توجه شما

مقدمه

فصل۱)
ریشه یابی

فصل۲)
درونیابی

فصل۳) حل
عددی انتگرال

فصل۴) حل عددی
معادله دیفرانسیل

فصل۵)حل عددی
دستگاه معادلات

فصل۶)
برازش منحنی