فصل ۳

توابع چند متغیره

۳-۱ تمرینات تشریحی

۱. نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در مبدأ پیوسته نیست.

۲. نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در طول هر خطی در مبدأ دارای حد است ولی در کل در $(0,0)$ دارای حد نیست.

۳. فرض کنید تابع حقیقی f سه بار مشتق پذیر و تابع $g(x,y,z)=f(xyz)$ باشد.
الف) مطلوب است محاسبهٔ $g_{xz}(1,1,1)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}(1,1,1)$ در صورتی که $f'(1)=1$ و $f''(1)=-1$.
ب) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $g(x,y,z)=k$ را در نقطهٔ $(1,1,1)$ به دست آورید.

۴. تابع $f(x,y)=\begin{cases} y\cos x & y\geq 0 \\ x+y & y<0\end{cases}$ مفروض است،
الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مشتق پذیری f را در مبدأ بررسی کنید.

۵. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

مطلوبست $f_{xy}(۰,۰)$.

۶. مشتق جهتی تابع $f(x,y)=e^{\sin(x-y)}$ را در نقطهٔ $(۱,۱)$ و در جهت بردار $\overrightarrow{a}=۸\overrightarrow{i}-۵\overrightarrow{j}$ بیابید. حداکثر میزان افزایش تابع در $(۱,۱)$ در چه جهتی است؟

۷. تابع f با ضابطهٔ زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & y\leqslant x^۲\\ \\ -y\sin x & y>x^۲\end{cases}$$

در خصوص مشتق پذیری f در نقطهٔ $P=(۰,۰)$ بحث کنید.

۸. تابع $z=f(x,y)$ بطور ضمنی توسط معادلهٔ $\sin(x+z)+\sin(y+z)=۰$ تعریف شده است. نشان دهید که :

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-۱$$

۹. تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=y^۲-x^۲$ مفروض است.
الف) مطلوب است توصیف سطح نمایش f.
ب) نشان دهید که منحنی $۰\leq t\leq ۲\pi$ $C:\begin{cases}x(t)=\sin t\\ y(t)=\cos t\\ z(t)=\cos ۲t\end{cases}$ روی این سطح قرار دارد.
ج) نقطه یا نقاطی از منحنی C را تعیین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط تماماً بر روی سطح فوق باشد.

۱۰. تابع $f(x,y)=x^۲+۲y^۲-۴y$ مفروض است،
الف) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ مشخص شده توسط $z=f(x,y)$ در نقطه $(۱,۱,-۱)$ واقع بر آن را بنویسید.
ب) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f را روی ناحیهٔ $D=\{x^۲+y^۲\leq ۴\}$ به دست

آورید.
ج) اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y) = ۳x^۳ + y^۲ - ۹x + ۴y$ را به دست آورده، با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع آنها را معین کنید.

۱۱. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{x}\sin(xy) & x \neq ۰ \\ y & x = ۰ \end{cases}$ مفروض است.
الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مطلوبست محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$.
ج) مشتق‌پذیری f را در مبدأ بررسی کنید.

۱۲. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مطلوب است تعیین مشتق جزئی f در مبدأ در جهت بردار یکهٔ $v = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ ($a^۲ + b^۲ = ۱$).
ج) مطلوب است تعیین $\nabla f(۰,۰) \cdot v$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
د) با استفاده از تعریف نشان دهید f در مبدأ مشتق پذیر نیست.

۱۳. فرض کنید که

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y+xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) نشان دهید که تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) در صورت وجود $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ را بیابید.
ج) نشان دهید که تابع f در مبدأ مشتق پذیر نیست.

۱۴. اکسترمم های تابع $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ را با قید $۲x^۲ + ۳y^۲ + z^۲ = ۱$ بیابید.

۱۵. اکسترممهای مطلق تابع $f(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۲ - ۱}$ را روی ناحیهٔ D با تعریف

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ - ۴x + ۳ \leqslant ۰\}$$

پیدا کنید.

۱۶. مطلوب است تعیین مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y,z)=x^{۲}-۲x+y^{۲}-۲$ در ناحیهٔ $D=\{(x,y);x^{۲}+y^{۲}\leq ۴\}$

۱۷. ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=x+y+z$ را با شرط $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۳a^{۲}, a>۰$ به دست آورید و با استفاده از آن نتیجه بگیرید:

$$x+y+z\leq\sqrt{۳(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})}$$

۱۸. معادلهٔ کلیهٔ خطوطی را مشخص کنید که از نقطهٔ $P=(۲,۰,۰)$ می‌گذرند و کاملاً بر رویهٔ $۹x^{۲}+۴y^{۲}-۳۶z^{۲}=۳۶$ قرار می‌گیرند.

۱۹. تابع $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin(\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}) & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) نشان دهید که f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۲۰. تابع $f(x,y)=\begin{cases}x\sin(\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۱+x^{۲}+y^{۲}}) & |x|<|y|\\ y & |y|\leq|x|\end{cases}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید f در نقطهٔ $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ را بدست آورید.

ج) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

۲۱. برای ماتریس $A=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$ ماکزیمم $detA$ را بر روی کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ به دست آورید.

۲۲. فرض کنید $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\mid x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}\leq a^{\frac{۲}{۳}}\}$ ($a>۰$ ثابت). اکسترممهای مطلق تابع $f(x,y)=a^{\frac{۱}{۳}}(xy)^{\frac{۲}{۳}}$ را بر روی ناحیهٔ بسته و کراندار D بدست آورید.

۲۳. فرض کنید S رویهٔ حاصل از دوران هذلولی $x^{۲}-z^{۲}=۱$ حول محور z و $P=(۱,۱,۱)$ نقطه‌ای روی S باشد. اگر $l_۱,l_۲$ خطوط گذرنده از P با بردارهای هادی $v_۱,v_۲$ باشند، مطلوب است مقدار $v_۱.v_۲$ ($v_۱,v_۲$ یکه می‌باشند.)

۲۴. سه عدد مثبت x، y و z را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات آنها عدد ثابت ۴ باشد و برای آنها مقدار عبارت $۲x+y+۲z$ مینیمم شود.

۲۵. فرض کنید که

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin \pi xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

الف) مشتقات سویی f در مبدأ در چه جهاتی موجود است؟
ب) نشان دهید که f در مبدأ مشتق پذیر نیست.
ج) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=f(x,y)$ را در نقطهٔ $P=(۱,۱,۰)$ واقع بر این رویه پیدا کنید.

۲۶. خم C به معادلهٔ $y=e^{-x^۲}$ مفروض است.
الف) بردارهای مماس یکانی و قائم بر C را در نقطهٔ $p_۰=(۰,۱)$ به دست آورید.
ب) معادلهٔ دایرهٔ بوسان خم فوق را در $p_۰$ مشخص نمائید.
ج) رویهٔ S به معادلهٔ $y=e^{-(x^۲+z^۲)}$ را رسم کنید.
د) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ $(۰,۱,۰)$ را به دست آورید.

۲۷. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}۴-x^۲-y^۲ & x>۰\\ ۴-۲x-۲y & x\leqslant ۰\end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) وجود $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ را بررسی کنید.
ج) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟
د) آیا مشتق سوئی f در $(۰,۰)$ در سوی $v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ وجود دارد؟ چرا؟

۲۸. رویهٔ S به معادلهٔ $y=\frac{x^۲+z^۲}{۱+x^۲+z^۲}$ مفروض است.
الف) مطلوبست تعیین منحنی حاصل از برخورد رویهٔ S با صفحهٔ $y=k$ (بر روی مقادیر مختلف k بحث کنید.)
ب) ثابت کنید که S یک رویهٔ دوار بوده، محور دوران و یکی از منحنی‌های مولد آنرا تعیین نمایید.

۲۹. فرض کنید f تابعی با ضابطهٔ زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & x+y > 0 \\ \\ x^2 & x+y \leqslant 0 \end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مقادیر $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ را در صورت وجود تعیین نمایید.

۳۰. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در مبدأ مختصات مشتق پذیر نیست.
ب) مشتق سوئی f در مبدأ مختصات و در سوی بردار یکهٔ $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ را تعیین نمایید.($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ثابت)
ج) بردار یکهٔ $\overrightarrow{v}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که مشتق سوئی f در مبدأ و در سوی آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۳۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر و z به عنوان تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y به صورت ضمنی توسط معادلهٔ $f(\frac{xy}{x^2+y^2}, z) = 0$ داده شده باشد. ثابت کنید که z در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

۳۲. هذلولی $x^2 - z^2 = 1$ در صفحهٔ xoz مفروض است.
الف) مطلوب است معادلهٔ رویهٔ حاصل از دوران منحنی فوق حول مجور xها.
ب) برای نقطهٔ $(1,1,1)$ واقع بر رویهٔ فوق نشان دهید که دقیقا دو خط راست وجود داشته که از این نقطه گذشته و کاملا بر رویهٔ فوق قرار گرفته اند.

۳۳. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\sin y & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته است.
ب) مطلوب است تعیین ضابطهٔ مشتقات جزئی f در تمام نقاط صفحه.

۳۴. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در مبدأ مشتق پذیر نیست.
ب) مشتق سوئی f را در مبدأ و در سوی بردار یکهٔ $\overrightarrow{u}$ تعیین کنید.
ج) جهتی را تعیین نمایید که با حرکت در آن جهت از مبدأ مختصات، مقدار تابع با بیشترین سرعت شروع به افزایش نماید.

۳۵. فرض کنید f تابعی با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد به طوریکه برای هر x و y داشته باشیم $(\frac{\partial f}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial f}{\partial y})^۲ = ۲$. اگر $g(u,v) = f(uv, \frac{۱}{۲}(u^۲ - v^۲))$ آنگاه
الف) ثابت α را به گونه‌ای بیابید که

$$\alpha \left((\frac{\partial g}{\partial u})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial v})^۲ \right) = u^۲ + v^۲.$$

ب) مطلوب است محاسبهٔ $\frac{\partial^۲ g}{\partial u \partial v}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f.

۳۶. نقطهٔ $P_۰ = (۰,۰,۴)$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ در صفحهٔ xoy مفروضند. خطوط گذرنده بر نقاط دایرهٔ فوق و نقطهٔ $P_۰$ تشکیل یک مخروط می دهند. معادلهٔ این مخروط را به دست آورید.

۳۷. استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و صفحهٔ $z = my$ (m یک عدد حقیقی ثابت) مفروضند.
الف) معادلات پارامتری خم C حاصل از برخورد استوانه و صفحه را بیابید.
ب) انحنای خم C را در نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ تعیین کنید و m را به قسمی به دست آورید که انحنای منحنی C بیشترین مقدار را داشته باشد.

۳۸. تابع $f(x,y) = xye^{xy}$ مفروض است.
الف) با استفاده از تعریف، نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است.
ب) اکسترمم‌های f را روی ناحیهٔ بسته و کراندار زیر به دست آورید:

$$\{(x,y) \mid x^۲ + y^۲ \leqslant ۲\}.$$

۳۹. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر است و z تابعی مشتق پذیر از x و y که در معادلهٔ $f(cx - az, cy - bz) = ۰$ صدق می کند (a و b و c اعداد حقیقی ثابت هستند). ثابت کنید:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

۴۰. فرض کنید S رویهٔ حاصل از دوران هذلولی $y^۲ - x^۲ = ۱$ در صفحهٔ xoy حول محور yها باشد.
الف) معادلهٔ S را بیابید و آنرا رسم کنید.
ب) محدودهٔ تغییرات m را طوری بیابید که فصل مشترک S با صفحهٔ $x + my = ۱$ یک بیضی باشد.

۴۱. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر مفروض است:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & y \neq ۰ \\ x & y = ۰ \end{cases}$$

الف) نشان دهید تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) وجود $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(۰,۰)$ را بررسی کنید.

۴۲. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با تعریف زیر در $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست.

$$f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leqslant |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$$

۴۳. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و رابطهٔ $f(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}) = ۰$، متغیر z را به عنوان تابعی مشتق پذیر از متغیرهای مستقل x و y معرفی کند. نشان دهید

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

۴۴. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد. نشان دهید که تمام صفحات مماس بر سطح S به معادلهٔ $z = xf(\frac{x}{y}, \frac{y}{x})$ از مبدأ مختصات عبور می کنند.

۴۵. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ y}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) مطلوب است تعیین مشتق جهتی f در نقطهٔ $(۰,۰)$ و در جهت بردار یکهٔ $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

ب) بردار یکهٔ $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ را طوری تعیین کنید که با حرکت در جهت $\overrightarrow{u}$، مقدار تابع f با بیشترین سرعت افزایش یابد.

۴۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع دو متغیرهٔ با تعریف زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & y \neq ۰ \\ ۲x & y = ۰ \end{cases}$$

الف) برای بردار یکهٔ $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$، مشتق سوئی $D_u f(۰,۰)$ را محاسبه کنید.
ب) تمام سوهای $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ را بیابید که $D_u f(۰,۰) = ۱$.

۴۷. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع مشتق پذیری باشد که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آن برابر با ۱ نباشد و معادلهٔ $z = f(\frac{x}{y}, z)$ ، z را به عنوان تابعی مشتق پذیر از متغیرهای مستقل x و y معرفی کند. نشان دهید

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

۴۸. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{xy}{x^۲+y^۲}) & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$

مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را بدست آورید.
ج) مشتق سوئی f در $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکهٔ $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را تعیین نمایید.
د) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

۲-۳ تمرینات تستی

۴۹. سطح مشخص شده توسط معادلهٔ $۹x^۲ + y^۲ - ۹z^۲ - ۵۴x - ۴y - ۵۴z + ۴ = ۰$ کدامیک از رویه‌های زیر است؟

الف) مخروط　　ب) بیضیگون

ج) هذلولیگون یک پارچه　　د) هذلولیگون دوپارچه

۵۰. سطح درجهٔ ۲ متشکل از نقاطی که از نقطهٔ $(\circ,\circ,a)$ و صفحهٔ $z=a$ ($a>\circ$ ثابت) به یک فاصله‌اند عبارتست از

الف) سهمیگون $x^{۲}+y^{۲}=۴az$

ب) بیضیگون $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}/a^{۲}=۱$

ج) مخروط $x^{۲}+y^{۲}=az^{۲}$

د) سهمیگون هذلولوی $x^{۲}-y^{۲}=az$

۵۱. رویهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ $۱۶x^{۲}+۹y^{۲}-۱۶z^{۲}-۳۲x-۳۶y+۳۶=\circ$ کدام یک از رویه‌های زیر است؟

الف) بیضیگون ب) هذلولیگون دوپارچه

ج) مخروط د) هذلولیگون یک پارچه

۵۲. رویهٔ $x^{۲}-۲x+۵=(x-۱)^{۲}+۹(y-۲)^{۲}-(z-۳)$ چه نوع رویه‌ای است؟

الف) دوار ب) استونه ای ج) مخروط د) سهمیگون

۵۳. فصل مشترک رویهٔ $z=\frac{y^{۲}}{b^{۲}}-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}$ با صفحهٔ $z=bx+ay$ کدامیک از مجموعه‌های زیر است؟

الف) یک دایره ب) دو خط متقاطع ج) یک بیضی د) یک هذلولی

۵۴. تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۳}-y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}$ مفروض است. کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)=\frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)=۱$ ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)=\frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)=\circ$

ج) $\frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)=۱\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)=-۱$ د) $\frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)=\circ\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)=۱$

۵۵. سطح S به معادلهٔ $x^{۲}+yz=۲$ مفروض است. صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ $(۱,-۱,-۱)$ بر کدامیک از صفحات زیر عمود است؟

الف) $x-y-z=۱$ ب) $x+y+z=۲$

ج) $-x-y+z=۳$ د) $x-y+z=\circ$

۵۶. تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y)=x^{۳}-۳xy$ مفروض است. از نقطهٔ $(۱,۱)$ در صفحه در چه سوئی حرکت نماییم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش بیابد؟

الف) $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ ب) $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ ج) $\mathbf{u}=-\mathbf{i}$ د) $\mathbf{u}=-\mathbf{j}$

۵۷. تابع $f(x,y)=xy^{۲}-x^{۲}y$ در کدامیک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

الف) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=۰$ ب) $x\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}+y\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=۰$

ج) $y\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}-x\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=۰$ د) $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}-\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=۰$

۵۸. فرض کنید $f(x,y)=(x^{۲}+y^{۲})\sin(x+y)$. کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۰$ ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۱$

ج) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=-۱$ د) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود ندارند.

۵۹. فرض کنید $f(x,y)=|۴-x^{۲}-y^{۲}|$. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در نقطهٔ $(۲,۰)$ مشتقپذیر است.

ب) f در نقطهٔ $(۲,۰)$ ناپیوسته است.

ج) f در نقطهٔ $(۲,۰)$ پیوسته است اما مشتقپذیر نیست.

د) مشتقات جزئی f در $(۲,۰)$ پیوسته‌اند.

۶۰. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۴}+y^{۴}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در $(۰,۰)$ ناپیوسته است.

ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ وجود ندارد.

ج) f در $(۰,۰)$ پیوسته است و $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ هر دو وجود دارند.

د) f در $(۰,۰)$ پیوسته است ولی هیچ یک از مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود ندارند.

۶۱. تابع $f(x,y)=\frac{۱}{۱+x^{۲}+y^{۲}}$ و نقطهٔ $P=(۰,۰)$ مفرضند. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در P مشتقپذیر است و $df(P)=۰$.

ب) f در P مشتقپذیر است و $df(P)=dx+dy$.

ج) f در P مشتق‌پذیر نیست ولی پیوسته است.

د) f در P مشتق‌پذیراست ولی پیوسته نیست.

۶۲. تابع $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin(\frac{۱}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در مبدأ پیوسته نیست.
ب) f در مبدأ پیوسته است ولی مستقات جزئی f در این نقطه وجود ندارند.
ج) f در مبدأ پیوسته بوده، مشتقات جزئی آن نیز در این نقطه وجود دارند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.
د) f در مبدأ مشتقپذیر است.

۶۳. با استفاده از دیفرانسیل کل یک تابع دو متغیرۀ مناسب، کدامیک از مقادیر زیر مناسب ترین تقریب برای $\sqrt[۳]{۱/۱+۶/۸}$ است؟

الف) $۲-\frac{۱}{۱۲۰}$ ب) $۲+\frac{۱}{۱۲۰}$ ج) $۲+\frac{۱}{۶۰}$ د) $۲-\frac{۱}{۶۰}$

۶۴. اگر $w(x,y,z)=\begin{cases} (\frac{۱-x}{z})e^{\frac{y}{z}} & z\neq ۰ \\ ۰ & z=۰\end{cases}$ آنگاه مقدار $\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}(۱,۰,۱)$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۶۵. برای تابع $w=e^{xy}\ln(x+z)$ مقدار $\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}(۱,۰,۰)$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) $\frac{۱}{۲}$

۶۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتقپذیر است. اگر z به عنوان تابعی بر حسب x و y توسط معادلۀ $z=f(۲x-۵y)$ داده شده باشد، کدام گزینه درست است؟

الف) $۵\frac{\partial z}{\partial x}-۲\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ ب) $۵\frac{\partial z}{\partial x}+۲\frac{\partial z}{\partial y}=۰$

ج) $۲\frac{\partial z}{\partial x}+۵\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ د) $۲\frac{\partial z}{\partial x}-۵\frac{\partial z}{\partial y}=۰$

۶۷. هرگاه $z=z(x,y)$ تابعی مشتقپذیر از x و y در معادلۀ $\phi(x^۲+z^۲,xy)=۰$ صدق کند، کدام گزینه درست است؟

الف) $xz\frac{\partial z}{\partial x}-yz\frac{\partial z}{\partial y}=-x^۲$ ب) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲$
ج) $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲$ د) $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲$

۶۸. صفحۀ مماس بر رویۀ S به معادلۀ $xy^۲z^۳=۴$ در نقطۀ $P(۱,۲,۱)$ عبارتست از

الف) $x+y+۳z=۳$ ب) $x+۳y+z=۳$

ج) $x+۳y+z=۶$ د) $x+y+۳z=۶$

۶۹. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است. مشتق سوئی f در نقطهٔ $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه $u=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$ کدام است؟

الف) ۰   ب) $\alpha\beta$ ج) $\alpha+\beta$ د) $\alpha\beta^۲$

۷۰. مشتق سوئی تابع $f(x,y)=\sin(x^۲)+e^{\cos y}$ در نقطهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ در جهت بردار یکهٔ $u=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ کدام است؟

الف) $a-b$ ب) $a+b$ ج) b د) $-b$

۷۱. رویهٔ S به معادلهٔ $z=x^۲-y^۲$ مفروض است. در کدامیک از نقاط زیر، صفحهٔ مماس بر S موازی صفحهٔ $۲x-۴y-z=۰$ است؟

الف) $P(۱,۱,۰)$ ب) $P(۲,۱,۳)$ ج) $P(۱,۲,-۳)$ د) $P(-۱,-۱,۰)$

۷۲. رویهٔ S به معادلهٔ $z=x^۲-y^۲$ مفروض است. در کدامیک از نقاط زیر، صفحهٔ مماس بر S عمود بر صفحهٔ $x-۲y+۴z=۰$ است؟

الف) $P(۱,۱,۰)$ ب) $P(۰,۱,-۱)$ ج) $P(۱,۲,-۳)$ د) $P(-۱,-۱,۰)$

۷۳. کمترین فاصلهٔ بین مبدأ تا منحنی C به معادلهٔ $x^۲-yx-۴=۰$ کدام است؟

الف) ۸   ب) ۴   ج) ۲   د) ۱

۷۴. کمترین مقدار تابع $f(x,y)=x^۲-y^۲$ درون و روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ برابر است با

الف) صفر   ب) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) -۱ د) -۲

۷۵. بیشترین مقدار تابع $f(x,y)=x^۲-y^۲$ درون و روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) صفر   ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۱   د) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷۶. تابع $f(x,y)=x^۳-y^۳-۳xy$ و نقطهٔ $P(-۱,۱)$ مفروضند. کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

الف) f در P یک مقدار مینیمم نسبی دارد.

ب) f در P یک مقدار مینیمم مطلق دارد.

ج) f در P یک مقدار ماکزیمم نسبی دارد.

د) f در P یک مقدار ماکزیمم مطلق دارد.

۷۷. کدامیک گزینه یک نقطهٔ زینی برای تابع $f(x,y) = x^۳ - ۴xy + ۲y^۲ - ۱$ است؟

الف) $(۰,۰)$　　ب) $(۱,۱)$　　ج) $(\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳})$　　د) $(-۱,-۱)$