۳۱۳ مشق نوین مشتق

براساس آخرین تغییرا ت کتاب درسی

شامل

درس – نکته

تست و سوالات امتحانی پرتکرار

تهیه و تنظیم:

حسین حجازی

دی ماه ۱۳۹۱

با توجه به رویکرد نوین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و تغییرات اساسی اعمال شده در بیان مفاهیم و تعاریف اصلی درس، نگارش مجموعه ای جامع و کامل ، اجتناب ناپذیر به نظر می رسد. جدید التالیف بودن کتاب، باعث شده تا دانش آموز، در آشفته بازار کتاب، نتواند به منابع واقعا به روز و استاندارد، دسترسی داشته باشد. از آن جا که مشتق یکی از بنیادی ترین مفاهیم ریاضی است که در علوم مختلف کاربرد فراوانی دارد و علاوه بر آن، سوالات و تست های این مبحث از تنوع بالایی برخوردار است، در این مجموعه ، بخش های مختلف مشتق، در قالب درسنامه ای کوتاه، اما کامل و نکات مهم و کاربردی تستی به ساده ترین شکل، بیان وارائه شده است. هم چنین تنوع سوالات امتحانی و تست های پر تکرار موجود، به دانش آموز کمک می کند تا در آرامش ، با اطمینان از محتوای استاندارد مطالب، به مطالعه و تمرین بپردازد.

در پایان،ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش آموز عزیز،از طریق پست الکترونیکی hejazi.mh20@yahoo.com

و یا شماره همراه 09155133987 پاسخگوی نظرات، سوالات و پیشنهاداتتان می باشم.

حسین حجازی - کارشناس ارشد ریاضی

دبیر دبیرستان های مشهد مقدس

دی ماه 1391

مشتق

مساله پیدا کردن خط مماس بر منحنی و یافتن سرعت یک متحرک هر دو منجر به یک نوع حد می شوند، که این حد خاص را مشتق می نامند و خواهیم دید که می توان آن را در هر شاخه ای از علم و مهندسی به آهنگ تغییر تعبیر کرد.

تعریف خط مماس: اگر f بر بازه ی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{f(a+\Delta x)-f(a)}}{\mathbf{\Delta x}}=\mathbf{m}$$

موجود(متناهی) باشد، آن گاه خطی که از نقطه $(a,f(a))$ گذشته و با شیب m می باشد، خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a,f(a))$نامیده می شود .

به عنوان مثال معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=\sin x$ در $\mathrm{x}=\frac{\pi}{4}$ به صورت زیر است:

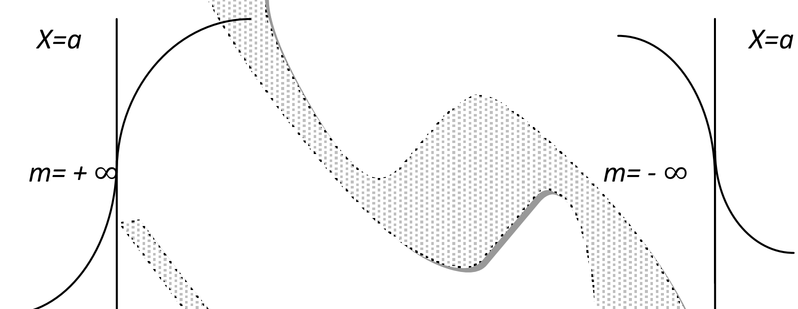
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2}}{2}=m$$

یادآوری : $\quad \boldsymbol{y-y_\circ=m(x-x_\circ)} \quad \to \quad \boldsymbol{y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

دو نکته مهم

نکته1) تعریف خط مماس بر یک نمودار، شامل خط مماس قائم نمی شود. برای خطوط مماس قائم، تعریف زیر آمده است:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\mathbf{f(a+\Delta x)-f(a)}}{\mathbf{\Delta x}}\right|=+\infty$$



نکته 2) اگر دامنه f بازه بسته $[a,b]$ باشد، آن گاه تعریف خط مماس قائم را با توجه به پیوستگی در نقاط انتهایی تعمیم می دهیم و نقاط انتهایی را دربر می گیرد. (یعنی در نقاط b , a خط مماس داریم.)

به عنوان مثال خطوط $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=-1}$خطوط مماس و قائم بر منحنی $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{1-x^2}}$ هستند .

مثال:به کمک تعریف خط مماس، معادله خط مماس بر منحنی توابع زیر را به دست آورید.

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ a = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} \\ a = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x-3} \\ a = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x) = |\tan x| \\ a = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2} \\ a = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} f(x) = x \, sgn\, x \\ a = 0 \end{cases}$

7) نقاطی از $y = \frac{1}{x}$ را که در آنها خط مماس بر خط $y = 2x$ عمود است بیابید.

8) نقاطی از منحنی $y = x^3 - 2x + 3$ را بیابید که خطوط مماس رسم شده با محور xها زاویه $\frac{\pi}{4}$ بسازد .

تعریف مشتق در نقطه

فرض کنید **a** نقطه درونی از دامنه **f** است در اینصورت مشتق تابع **f** در $\mathbf{x = a}$ که آن را با $f'(a)$ **نشان می دهیم برابر است با**

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

(به شرطی که این حد وجود داشته باشد .)

تذکر مهم : ***دقت کنید که تابع در نقاط انتهایی مشتق پذیر نیست.***

نکته : ***به جای تعریف فوق می توان از حدود زیر نیز برای به دست آوردن مشتق تابع در نقطه استفاده کرد:***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتقات یکطرفه

مشتق راست در نقطه $(a, f(a))$: $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مشتق چپ در نقطه $(a, f(a))$: $f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

قضیه- اگر تابع f در x=a مشتق پذیر باشد، آن گاه در این نقطه پیوسته ولی عکس آن درست نیست. مثلا f(x) =|x| در x=0 پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

دیاگرام زیر را به خاطر بسپارید

↑

مشتق دوم ↔ طبقه چهارم

↑

مشتق اول ↔ طبقه سوم

↑

پیوستگی ↔ طبقه دوم

↑

حد ↔ طبقه اول

نتیجه-اگر f در x=a پیوسته نباشد، مشتق پذیر نخواهد بود.

تذکر مهم : ***اگر f در x=a مشتق راست داشته باشد، آن گاه در این نقطه پیوستگی راست دارد. از این رو اگر تابعی دریک نقطه پیوستگی راست نداشته باشد، آن گاه مشتق راست هم نخواهد داشت.***

مثال- مشتق پذیری توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

9) $\begin{cases} f(x) = |x^2 - 3x + 2| \\ a = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)} \\ a = 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \\ a = 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} f(x) = (x-1)[x] \\ a = 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \\ a = -1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} f(x) = |x \sin x| \\ a = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} \ ; & x \neq 0 \\ 0 \quad ; & x = 0 \end{cases} \\ a = 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} \\ a = 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x}\right] & ; x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} \\ a = 0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} f(x) = (2x - \pi)[\sin x] \\ a = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

19- سوال امتحانی: a و b را چنان بیابید که f در x =2 مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; x > 2 \\ x^2 - 4ax & ; x \leq 2 \end{cases}$$

(تست) 20 – در تابع $f(x) = \begin{cases} x + a & ; x \leq 1 \\ b\sqrt[3]{x} & ; x > 1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است a کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

21- (سوال امتحان): اگر f در x = a پیوسته باشد، نشان دهید تابع زیر در x = a مشتق پذیر است.

$$g(x) = (x - a)f(x)$$

نکته ریشه های ساده داخل قدرمطلق، مشتق پذیر نیستند. یعنی اگر فرض کنیم تابع f در x=a مشتق پذیر بوده و f (a) = 0 باشد، در این صورت:

الف) اگر $f'(a) \neq 0$ آنگاه $|f(x)|$ در $x = a$ مشتق پذیر نیست .

ب) اگر $f'(a) = 0$ آنگاه $|f(x)|$ در $x = a$ مشتق پذیر است .

(واضح است که اگر $f(a) \neq 0$ تابع $|f(x)|$ در x=a مشتق پذیر است.)

نتیجه) توابع به صورت $g(x) = (x - a)|x - a|$ **در $x=a$ مشتق پذیرند.**

(تست) 22 -کدام تابع در x=1 مشتق پذیر است؟

1) $y = |x^2 - 1|$　　2) $y = |x^3 - 1|$　　3) $y = |x^2 - 3x + 2|$　　4) $y = |x^3 - 3x + 2|$

23 – اگر تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)|(x - 1)(x - 2)|$ در R مشتق پذیر باشد، b و a را بیابید.

(تست) 24 – کدام تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ *مشتق پذیر است؟*

1) $y = |1 - \cos x|$　　2) $y = |1 - \sin x|$　　3) $y = |\cos x|$　　4) $y = |\sin x|$

(تست)25 – اگر $f(x) = x|x - 1| + a|x - 1|$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد a کدام است؟

1) 1　　2) -1　　3) 2　　4) -2

نکته　در توابع $g(x) = f(x)[x]$ اگر a **عدد صحیح و ریشه مضاعف f باشد،آن گاه تابع g در x = a مشتق پذیر است.**

(تست)26 : اگر تابع $f(x) = (x^2 - 2ax + b)[x]$، x=2 مشتق پذیر باشد، a+b کدام است؟

1) 6　　*2)* 2　　*3)* 4　　*4)* -4

نکته: اگر تابع f شامل قدر مطلق یا جزء صحیح باشد، برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه،(x = a) باید وضعیت قدرمطلق یا جزء صحیح را مشخص کنیم، سپس مشتق بگیریم.(به پیوستگی تابع f دقت کنید)

(تست) 27 : اگر $f(x)=|x-1|\,|x+2|$ باشد مقدار، $f'(0)$ کدام است؟

1) -2   2) 2   3) -1   4) 1

نکته: اگر تابع f مشتق پذیر باشد داریم:

الف) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+nh)-f(a+mh)}{h}=(n-m)f'(a)$

ب) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^n(x+h)-f^n(x)}{h}=(f^n)'(x)$

(تست) 28 – اگر $f(x)=tan^2x$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}$ *کدام است؟*

1) *32*   2) *16*   3) *8*   4) *4*

(تست)29 – اگر $f(x)=\tan x$ حاصل باشد $\lim_{h\to 0}\dfrac{f'\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f'\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}$ *کدام است؟*

1) *32*   2) *16*   3) *8*   4) *4*

(تست)30 – اگر $f(x)=\sqrt[7]{x^2}$ باشد حاصل $\lim_{h\to 0}\dfrac{f^3(2+h)-f^3(2)}{h}$ کدام است؟

1) $\dfrac{12}{7\sqrt[7]{4}}$ 2) $\dfrac{6}{7\sqrt[7]{4}}$ 3) $\dfrac{12}{7\sqrt[7]{2}}$ 4) $\dfrac{6}{7\sqrt[7]{2}}$

(تست)31 – حاصل $\lim_{x\to-\infty} x^2\left(f\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-f(1)\right)$ کدام است؟

1) $f'_+(1)$ 2) $f'_-(1)$ 3) $xf'(1)$ 4) $f'(1)$

(تست)32 – اگر $f(x)=\begin{cases}x^3-7 & ; x<1\\ 2\sqrt{x}-4 & ; x\geq 1\end{cases}$ حاصل $\lim_{h\to0^-}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

1) *1* 2) *-1* 3) *-3* 4) موجود نیست

(تست)33 – در تست شماره قبل حاصل $\lim_{h\to0^+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

1) *1* 2) *-1* 3) *-3* 4) موجود نیست

(تست)34 – اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+x & ; x<3\\ 4x & ; x\geq 3\end{cases}$، حاصل $\lim_{h\to0^-}\frac{f(3-7h)-f(3+3h)}{h}$ کدام است؟

1) *-21* 2) *-28* 3) *-49* 4) *49*

(تست)35 – اگر $f(x)=\sin\pi x+kx^3-2x+1$ و داشته باشیم $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-8K+3}{h}=7\pi-2$ آنگاه k کدام است؟

1) $k=-\frac{\pi}{3}$ 2) $k=-\frac{1}{2}$ 3) $k=\frac{2}{3}$ 4) $k=\frac{\pi}{2}$

36 – فرض کنید تابع f در $x = 1$ مشتق پذیر و $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h} = 3$ مقادیر $f(1)$ و $f'(1)$ را به دست آورید.

نکته به ازای هر $x \in D_f$ ، $\mathbf{f'(x)}$ شیب خط مماس بر منحنی **f** است .

***تذکر** نقاط انتهایی بازه ی مماس داریم ولی مشتق پذیر نیست.*

(تست)37 – دو نقطه بر نمودار تابع $Y = \frac{X-3}{X-1}$ وجود دارد که مماس بر نمودار تابع در این نقاط، موازی خط *y=2x* می باشد.

فاصله این دو نقطه از هم کدام است؟

1) $2\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{5}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{2}$

تذکر خط قائم بر نمودار تابع **f** در نقطه ای به طول $\mathbf{x = a}$ خطی است که بر خط مماس بر منحنی در این نقطه عمود باشد پس $\boldsymbol{m' = -\frac{1}{m}}$

38 – معادله خط قائم بر نمودار تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه تلاقی با محور x ها بنویسید.

(تست)39 – قائم بر منحنی $f(x) = ax + \sqrt{x}$ در $x = 4$ موازی خط $5y + 4x = 1$ می باشد a کدام است؟

1) $\frac{3}{2}$ 2) -3 3) 1 4) -1

***نکته** تعیین خط مماس از نقطه خارج منحنی:*

شیب خط مماس را به دست آورده برابر هم قرار داده α به دست می آید.یعنی α راو از طرفی به کمک مشتق$m = f'(\alpha)$ از حل دستگاه زیر به دست می آوریم:

$$\begin{cases} m = \dfrac{y_1 - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} \\ m = f'(\alpha) \end{cases}$$

40 – از نقطه $(0,-1)$ خارج منحنی تابع $f(x) = x^2 - 3x$ دو مماس رسم شده است. مطلوب است معادلات مماس ها.

(تست)41 – از نقطه $(-1\,,3)$ دو مماس بر منحنی $f(x)=1+\frac{1}{x}$ رسم شده است. حاصل ضرب طول های دو نقطه تماس کدام است؟

1) $\frac{3}{2}$　　2) $\frac{1}{2}$　　3) $-\frac{1}{2}$　　4) $-\frac{3}{2}$

(تست)42 – از نقطه $A(0,-1)$ دو خط مماس بر منحنی $y=x^2+x$ رسم شده است. شیب مثبت کدام است؟

1) 1　　2) 2　　3) 3　　4) 4

(تست)43 – زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطه $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ بر نمودار تابع $y=x^2+x$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{2}$　　2) $\frac{\pi}{3}$　　3) $\frac{\pi}{4}$　　4) $\frac{\pi}{6}$

(تست)44 – از نقطه $M(0\,,\alpha)$ دو خط مماس عمود بر هم ، به معادله $y=\frac{1}{2}x^2+3$ رسم شده است α کدام است؟

1) $\frac{3}{2}$　　2) 2　　3) $\frac{9}{4}$　　4) $\frac{5}{2}$

تابع مشتق:

می دانیم که مشتق تابع f در نقطه ای ثابت مانند x=a درب صورت وجود عبارت است از:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

حال اگر a در حال تغییر باشد یعنی

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

به ازای هر x ای که این حد وجود داشته باشد x را به $f'(x)$ نظیر می کنیم به این ترتیب f' را می توانیم تابع جدیدی در نظر گرفته و آن آن را تابع مشتق f بنامیم و

$$D_{f'}=\{x\in D_f \mid \text{موجود باشد } f'(x)\}$$

مثال – تابع f' و $D_{f'}$ توابع زیر را به دست آورید.

45) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

46) $f(x)=[x]$

47) $f(x) = x|x|$

48) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

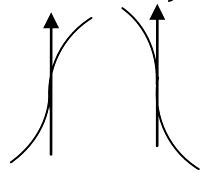
49) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

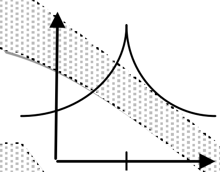
50) $f(x) = |x^2 - 2x|$

51 − (سوال امتحان) : نمودار $y = \big||\sin x| - 1\big|$ را رسم کرده $D_{f'}$ را به دست آورید.

نقاط مشتق ناپذیر تابع

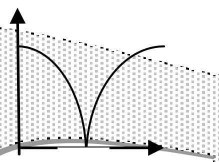
1) نقاطی که تابع در آن ها ناپیوسته باشد.
و یک مماس راست با
2)مشتق چپ و راست وجود داشته ولی با هم نابرابر باشند در این نقاط یک مماس چپ با شیب $\boldsymbol{f'_-}(\mathbf{a})$ و یک مماس راست باشیب $\boldsymbol{f'_+}(\mathbf{a})$ وجود دارد که این نقاط را «**گوشه دار**» یا «**زاویه دار**» می گویند.
3) مشتق چپ و راست برابر و نامتناهی باشند که در این نقاط، مماس قائم داریم(عطف قائم).
4) مشتق چپ و راست نابرابر و نامتناهی باشند که این نقاط را **بازگشتی** می گویند.





a

$\begin{cases} f'_- = +\infty \\ f'_+ = -\infty \end{cases}$



a

$\begin{cases} f'_+ = +\infty \\ f'_- = -\infty \end{cases}$

(تست)52 – نقطه $x = 2$ برای $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ چه نقطه ای است؟

1) بازگشتی   2) عطف قائم   3) عادی   4) گوشه

(تست)53 – نقطه $x = 2$ برای $y = \sqrt[3]{x-2}$ چه نقطه ای است؟

1) بازگشتی   2) عطف قائم   3) عادی   4) گوشه

(تست)54 – اندازه زاویه نقطه گوشه تابع $y = |x|\sqrt{x+1}$ در مبداء مختصات کدام است؟

$1)\,\dfrac{\pi}{6}$ $2)\,\dfrac{\pi}{3}$ $3)\,\dfrac{\pi}{4}$ $4)\,\dfrac{\pi}{2}$

آهنگ تغییر

تعریف- آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به x روی بازه [a , a+Δx] عبارت است از

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

آهنگ متوسط تغییرات تابع از $x=a$ تا $x=b$ نیز به صورت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ نیز تعریف می شود.

تعریف- آهنگ آنی (آهنگ لحظه ای ـ آهنگ تغییر) تابع f نسبت به x در x = a عبارت است از

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

مشروط بر این که این حد موجود باشد.(مشتق= آهنگ تغییر = آهنگ لحظه ای = آهنگ آنی)

55- آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن پیدا کنید.

(تست) 56- آهنگ تغییر مساحت دایره نسبت به شعاع r =10 کدام است؟

1) 40π　　2) 30π　　3) 20π　　4) 10π

(تست) 57- آهنگ آنی تغییر مساحت مثلث متساوی الاضلاع نسبت به محیط آن چقدر است؟

1) $\frac{\sqrt{3}}{12}a$　　2) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$　　3) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$　　4) $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

(تست) 58 – در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازه [2.25 , 2.56]از آهنگ آنی در شروع بازه چقدر کم تر است؟

1) $\frac{1}{32}$　　2) $-\frac{1}{62}$　　3) $\frac{2}{93}$　　4) $\frac{1}{93}$

(تست) 59 – در تابعی با ضابطه $f(t)=\frac{240}{t}$ آهنگ آنی تغییر f در لحظه t=4 چقدر از آهنگ متوسط تغییر f در لحظه t=3 تا t=5 بیشتر است؟

1) 1　　2) $\frac{1}{2}$　　3) 2　　4) $\frac{3}{2}$

(تست) 60 – در تابع $f(x)=x+\frac{1}{x}$ آهنگ متوسط وقتی متغیر از عدد 2 به عدد $2+\Delta x$ تغییر می کند برابر $\frac{8}{9}$ است. Δx کدام است ؟

1) 3　　2) 2.5　　3) 2　　4) 1.5

آهنگ تغییر در علم اقتصاد

در اقتصاد سه تابع زیر را تعریف می کنیم:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{R(x)}: \text{تابع درآمد(میزان فروش)}\\ \mathbf{C(x)}: \text{تابع هزینه(x واحد کالا)}\\ \mathbf{P(x)}: \text{تابع سود}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{P(x)=R(x)+\ C(x)}$$

اقتصاددانان مقدار حد $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ را وقتی که $\Delta x\to 0$ یعنی آهنگ لحظه ای تغییر هزینه نسبت به تعداد کالای تولید شده را هزینه نهایی تولید می نامند.

تولید یک واحد دیگر از محصول تعریف می کنند، یعنی:

$$\Delta C = C(x+1) - C(x)$$

به عنوان مثال هزینه تولید x یخچال به صورت زیر می باشد:

$$C(x)=8000000+400000x-500\,x^2 \quad , \quad C'(100)=\ 300000$$

این عدد، به این معناست که وقتی کارخانه 100 یخچال تولید کرد، برای تولید صدویکمین یخچال، باید تقریبا 300000 هزینه کند.

61 – کارخانه ای برای تولید x ساعت مچی $C(x) = 2000 + 10x + \frac{x^2}{100}$ دلار هزینه می کند

الف) هزینه اولیه تولید چه قدر است؟

ب) هزینه نهایی چیست؟

ج) هزینه نهایی وقتی x = 50 چقدر است؟

د)هزینه واقعی تولید 51-امین ساعت چقدر است؟

مشتق مراتب بالاتر

اگر y=f(x) مشتق پذیر باشد

$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ این حد موجود است و همچنین

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ را مشتق مرتبه دوم و

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$ را مشتق مرتبه سوم و در حالت کلی

$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$ را مشتق مرتبه n ام می گویند.

به عنوان مثال:

$$y = \sin x \;\rightarrow\; y' = \cos x \;\rightarrow\; y'' = -\sin x \;\rightarrow\; y''' = -\cos x \;\rightarrow\; y^{(4)} = \sin x$$

نکته در توابع سینوس و کسینوس بعد از 4 بار مشتق گیری به خود تابع می رسیم.

62- مشتق صدو یکم y = sinx را بیابید.

(تست)63 – مشتق ششم تابع $y = \frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

1) $-\sin x + \cos x$ 2) $-\sin x - \cos x$ 3) $\sin x - \cos x$ 4) $\sin x + \cos x$

64 – فرض کنید $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 1$ حاصل $\lim_{h\to 0} \frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$ را به دست آورید.

نکته:

$$\begin{cases} y = \sin ax \;\rightarrow\; y^{(n)} = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2}) \\ y = \cos ax \;\rightarrow\; y^{(n)} = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2}) \end{cases}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \;\rightarrow\; y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \times n!\,.\; c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$$

حالت خاص $\quad y = \frac{1}{x} \;\rightarrow\; y^{(n)} = (-1)^{n-1} \times n! \times x^{-n-1}$

(تست) **65** – مشتق مرتبه پانزدهم تابع $y = \frac{1}{2^{14}} \sin 2x$ در $x = \frac{\pi}{6}$ **چقدر است؟**

1)1   2)2   3) -1   4) -2

نکته:

اگر f یک چند ای جمله ای از درجه **n** باشد $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ $\quad f^{(n)} = a.n!\;,\; f^{(n+1)} = 0$

(تست) **66** – مشتق مرتبه چهاردهم $f(x) = x^{14} + (x^2+1)^7$ کدام است ؟

1) 0   2) 14!   3) $2 \times 14!$ 4) 1

(تست) **67** – اگر مشتق نهم تابع $y = \sin x - \cos x$ را با $y_{(9)}$ نمایش دهیم $y^2_{(9)} + y^2$ کدام است ؟

1) 2   2) -2 3) $\sin x$ 4) $\sin x \cos x$

68 – (سوال امتحان) اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 1 \\ ax^2 + bx + c & x < 1 \end{cases}$ مشتق مرتبه دوم در x=1 داشته باشد، **c,b,a** را به دست آورید.

69 – (سوال امتحان) مشتق اول و دوم و سوم و مراتب بالاتر تابع $y = x^2|x|$ را بیابید.

نکته

تابع $\boldsymbol{f(x) = (x-a)^n|x-a|}$ در $\boldsymbol{x = a}$ دارای $\boldsymbol{n}$ بار مشتق می باشد

و تابع $\boldsymbol{f(x) = (x-a)^n[x-a]}$ در $\boldsymbol{(a \in Z)}$ دارای $\boldsymbol{(n-1)}$ بار مشتق می باشد .

(تست)70 – اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x - \sin x & x \geq 0 \\ ax^n & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق مرتبه سوم داشته باشد a کدام است؟

1) 1　　**2) $\frac{1}{2}$**　　**3) $\frac{1}{3}$**　　**4) $\frac{1}{6}$**

71 – ضابطه تابع درجه دوم f را چنان انتخاب کنید که $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 4$ باشد.

(تست)72 – اگر f یک تابع درجه دوم بوده به طوری که $(f \circ f')(x) = 108x^2$ حاصل $f''(-2\sqrt{2})$ کدام است ؟

1) 2　　**2) 4**　　**3) 6**　　**4) − 6**

(تست)73 – فرض کنیم $f(x)$ تابعی چند جمله ای و $f'(x).f''(x) = x^3 f(x)$ دراین صورت درجه f کدام است؟

1) 2　　2) 4　　3) 6　　4) 8

(تست)74 – اگر f یک چند جمله ای از درجه n و رابطه $(f^{(3)}(x))^2\ (f''(x))^3 = (x+1)f'(x)$ برقرار باشد n کدام است؟

1) 3　　2) 4　　3) 5　　4) 8

(تست)75 – اگر f یک چند جمله ای از درجه n باشد و $(f''o\,f'\,of)(x) = f'(x^8+5x+1)$ باشد،nکدام است؟

1) 3　　2) 4　　3) 5　　4) 8

(تست)76 – اگر $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+tan^2 x}$ حاصل $f^{(11)}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ کدام است؟

1) $-512\sqrt{2}$　　2) $512\sqrt{2}$　　3) $-256\sqrt{2}$　　4) $256\sqrt{2}$

قاعده زنجیره ای

قضیه 1- اگر تابع g در نقطه x و تابع f در g(x) مشتق پذیر باشند، آن گاه تابع مرکب fog در نقطه xمشتق پذیر است و

$$.(\boldsymbol{fog})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}'\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$$

نتیجه :

$$\boldsymbol{y = f(u) \quad \rightarrow \quad y' = u'\ f'(u)}$$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \rightarrow \quad y'_x = y'_u \times u'_x}$$

مشتق y نسبت بهx　　مشتق y نسبت بهu　　مشتق u نسبت بهx

نتیجه :

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = f(t)} \\ \boldsymbol{x = g(t)} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

77 – اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=sin\,x$ مشتق fog و gof را به کمک قضیه به دست آورید .

78 – اگر $sgn\,(x^2-x+1)$ $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ باشد ، $f'(x)$ را به دست آورید .

79 – اگر $f'=\frac{1}{\sqrt{x}}$ مشتق $f(\sin x)$ را بیابید.

(تست)80 – اگر $f'(2)=4$ آن گاه مشتق تابع $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ به ازای $x=\dfrac{1}{2}$ کدام است ؟

1) 4 2)-4 3) 16 4) -16

81 – اگر $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\frac{2}{3}$ باشد مقدار مشتق $f\left(\sqrt{1-3x}\right)$ را در $x=-1$ به دست آورید.

(تست)82 – اگر $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ مقدار $g'\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

1) $-\frac{16}{15}$ 2) $-\frac{15}{16}$ 3) $\frac{15}{16}$ 4) $\frac{16}{15}$

(تست)83 – فرض کنیم $2f(3x) - x\,f(x) = 10$ باشد $f'(0)$ کدام است؟

1) $\frac{5}{6}$　　2) $\frac{5}{4}$　　3) $\frac{5}{3}$　　4) 5

(تست)84 – مشتق تابع $f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ در نقطه $x = 1$ برابر2- است. شیب خط قائم بر نمودارf در نقطه ای به طول 2 کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$　　2) $\frac{1}{3}$　　3) 3　　4) 4

(تست)85 – اگر $f(0) = 0$, $f(x) = \sin\left(4x - f(x)\right)$ باشد مقدار $f'(0)$ کدام است؟

1) 0　　2) 2　　3) -2　　4) $\frac{1}{2}$

(تست) 86 – اگر $U = y^2 - y$ و $x = U^2 - 2U$ باشد حاصل y'_x در $y = 1$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$　　2) $-\frac{1}{2}$　　3) 1　　4) 0

(تست)87 – اگر $g\left(\sqrt[3]{x}\right) + f\left(\sqrt{x}\right) = x$ و $g'(4) = -48$ آن گاه $f'(8)$ کدام است؟

1) 48　　2) -48　　3) -32　　4) 32

نکته: اگر f تابعی زوج و مشتق پذیر باشد، مشتق آن تابعی فرد است و اگر f فرد باشد ، مشتق آن تابعی زوج است.

(تست)88 – اگر f زوج و مشتق پذیر و $f'(1)=3$ مشتق تابع $f(x^2-3x+1)-f(3x-5)$ در $x=2$ کدام است؟

1)6 2)-6 3)12 4)-12

89 – (سوال امتحان) مشتق تابع $y=x^3+x$ را نسبت به $\tan x$ به دست آورید.

(تست)90 – اگر f تابعی زوج و خط $y=2x-3$ مماس بر نمودار f در نقطه ای به طول 1 واقع بر آن باشد، آن گاه معادله خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه به طول 1- کدام است؟

1) $2y+x=-3$ 2) $y+2y=-1$ 3) $2y-x=-1$ 4) $y-2x=1$

(تست)91 – اگر f یک تابع زوج و $f'_{+}(1)=1$, $f'_{-}(1)=2$ آن گاه $f'_{(+)}(-1)$ کدام است؟

1)2 2)-2 3)1 4)-1

92 – اگر $y=sin^3U$ و $U=\frac{\pi}{x}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در $x=3$ بیابید.

چند نکته مهم

1 – اگر ضابطه های دو تابع f و g معلوم باشند برای محاسبه $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ می توان از تابع $f.g$ **مشتق گرفت.**

2 – و برای محاسبه $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)$ می توان از تابع $\frac{f}{g}$ **مشتق گرفت.**

3 – برای محاسبه $f'(x).f(x)$ از $(f(x))^2$ **مشتق می گیریم.**

4- اگر تابعی به صورت حاصل ضرب چند عبارت باشد و بخواهیم مشتق تابع را در ریشه یکی از عبارتها محاسبه کنیم(عامل صفر کننده)، کافیست مشتق عامل صفر کننده را به دست آوریم و ریشه را در بقیه جملات قرار دهیم.

(تست)93 – اگر $f(x)=\sqrt{\sqrt{2x+1}+2}\,,\ g(x)=\sqrt{\sqrt{2x+1}-2}$ حاصل $f'(6)g(6)+g'(6)f(6)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$　　2) 3　　3) $-\frac{1}{3}$　　4) -3

(تست)94 – اگر $f(x)=(\ x+\sqrt{x^2-a}\ )^{10}\ ,\ g(x)=\frac{1}{(x-\sqrt{x^2-a}\ )^{10}}$ حاصل $f'g-g'f$ کدام است؟

1) 1　　2) 0　　3) $10a^9$　　4) a

(تست)95 – اگر $f(x)=x\,(2x-1)(2x-2)\ldots(2x-1000)$ باشد $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

1) 0　　2) $1000!$　　3) $999!$　　4) $-999!$

(تست)96 – اگر $g(-1)\neq 0$ و $f(x)=\frac{(x+1)g(x)}{(2x+1)g(2x+1)}$ حاصل $f'(-1)$ کدام است؟

1) 0　　2) -1　　3) $g(-1)$　　4) $g'(-1)$

(تست)97 – اگر $f(x) = \frac{x\sqrt[5]{x^2+32}-x^2(sin^2x-2cos^3 3x)}{(x^2+1)^{10}}$ باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

1) 0   2) 1   3) 2   4) -2

98 – (سوال امتحان) : فرض کنید $f(x) = \sin x\left[\cos \frac{x}{2}\right]$ باشد ،مشتق چپ و راست تابع f را در $x = \pi$ حساب کنید .

مشتق گیری ضمنی

اکثر توابعی که با آن ها سرو کار داریم دارای معادله ای هستند که y را به طور صریح بر حسب x بیان کرده است:y=f(x) اما گاهی اوقات توابعی وجود دارند که در آن ها y به طور صریح بر حسبx بیان نشده است و به اصطلاح تابع بر حسب x وy معرفی شده است. به این توابع توابع ضمنی گفته می شود: (f(x , y) =0).برای مشتق گیری این گونه توابع دو روش وجود دارد:

روش اول- با توجه به فرمول های زیر، y را همان U فرض کرده، از طرفین مشتق بگیریم.

1) $f(x) = U^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = nU'U^{n-1}$

2) $f(x) = \sin U \quad \rightarrow \quad f'(x) = U'\cos U$

3) $f(x) = \cos U \quad \rightarrow \quad f'(x) = -U'\sin U$

4) $f(x) = \tan U \quad \rightarrow \quad f'(x) = U'(1+\tan^2 U)$

5) $f(x) = \cot U \quad \rightarrow \quad f'(x) = -U'(1+\cot^2 U)$

6) $f(x) = \sqrt[m]{U^n} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{nU'}{m\sqrt[m]{U^{m-n}}}$ (حالت خاص: $f(x) = \sqrt{U} \rightarrow f'(x) = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$)

7) $f(x) = \sin^{-1}U \rightarrow f'(x) = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$

8) $f(x) = \cos^{-1}U \rightarrow f'(x) = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$

9) $f(x) = \tan^{-1}(x) \rightarrow f'(x) = \frac{U'}{1+U^2}$

به عنوان مثال اگر $x^2+xy=y^3$ باشد برای به دست آوردن y' از طرفین مشتق می گیریم:

$$2x+y+y'_x=3y'y^2 \;\rightarrow\; 2x+y=\; y'(3y^2-x) \;\rightarrow\; y'=\frac{2x+y}{3y^2-x}$$

روش دوم : اگر $f(x,y)=0$ آن گاه مشتقy نسبت به x عبارت است از $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}$ که در آن f'_x مشتقfنسبت به x و f'_y مشتق fنسبت به yاست. دقت کنید وقتی نسبت به x مشتق می گیریم، y نقش عدد ثابت را بازی می کند.

مثال- مشتق توابع زیر را به دست آورید.

99) $x^2+y^2=4xy^3$

100) $x^3+2xy+y^2=5$

101) $y^3+4x^2y+x^3-2x-3y=1$

102) $\frac{x}{y}+\sqrt{xy}=10$

103) $x\sin(x^2+y^2)+\cos y=0$

104) $\sin xy+\sqrt{xy}=5$

105) $y=sin^{-1}x+cos^{-1}x$

106) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}$

(تست) 107 – شیب خط مماس ها بر تابع $x^2 = (y + \frac{3}{y})^3$ در نقطه $(8,3)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{4}{3}$

(تست) 108 – مشتق مقدار تابع $\frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} = 6$ در نقطه $(1,4)$ کدام است؟

1) -2 2) -1 3) 0 4) $\frac{1}{2}$

(تست)109 – اگر $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ آن گاه مقدار y' در نقطه $(\pi, 1)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{\pi - 1}$ 2) $\frac{-1}{\pi + 1}$ 3) $\frac{1}{\pi + 1}$ 4) $\frac{-1}{\pi - 1}$

110 –(سوال امتحان) معادله خط مماس بر منحنی $xy^2 - y\sqrt{x} = 2$ در نقطه $(1,-1)$ را بنویسید.

(تست)111 – ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $x \sin y + y \cos x = \frac{\pi}{2}$ در نقطه $x = 0$ چقدر است؟

1) 1 2) 0 3) -1 4) $\frac{1}{2}$

(تست)112 – اگر $y^3 + y = x$ باشد، حاصل $y''(2)$ کدام است؟

1) $-\frac{32}{3}$ 2) $\frac{32}{3}$ 3) $-\frac{3}{32}$ 4) $\frac{3}{32}$

113 – نقاطی ازمنحنی $x^2 - xy + y^2 = 1$ *رابیابید که:*

الف)مماس بر منحنی افقی باشد.

ب)مماس بر منحنی قائم باشد

(تست)114 – در یک نقطه از منحنی به معادله $\sqrt{y} + yx\sqrt{x} - 6x = 0$ خط مماس بر منحنی موازی محور x *ها می باشد.* طول این نقطه کدام است؟

1)4　　2)2　　3)3　　4) 1

(تست)115 – دو نقطه روی منحنی $x^2 - xy + y^2 = 3$ *وجود دارد به طوری که مماس بر منحنی در این دو نقطه موازی نیم ساز ربع اول و سوم است.* مجموع *طول های این دو نقطه کدام است؟*

1)0　　2) -1　　3) -2　　4) -3

نکته $\mathbf{y'_x}$ و $\mathbf{x'_y}$ ***عکس هم می باشند.***

(تست)116 – اگر $x^3 + y^2 + 2xy = 9$ باشد، حاصل $x'(2)$ کدام است؟

1) $-\frac{7}{6}$　　2) $\frac{6}{7}$　　3) $\frac{7}{6}$　　4) $-\frac{6}{7}$

117 – معادله خط مماس بر منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{1+y} = 2$ را در نقطه تلاقی با محور xها بنویسید .

118 – اگر $x + y^4 + 1 = y + x^2 + xy^2$ باشد، حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطه (1,1) پیدا کنید.

119 – خط $y = ax + b$ نمودار $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ را در نقاط M و N قطع می کند. a و b را چنان بیابید که مماس در نقطه M و N عمود بر محور x ها باشد.

مشتق تابع وارون

فرض کنید f تابعی یک به یک باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(a,b)\epsilon f \quad \leftrightarrow (b,a)\epsilon f^{-1}\\ f(a)=b \ \leftrightarrow \ f^{-1}(b)=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}fof^{-1}(x)=x\\ f^{-1}of(x)=x\end{cases}$$

$$(fog)^{-1}(x)=(\,g^{-1}\ o\ f^{-1})(x)$$

قضیه- فرض می کنیم I یک بازه و $f: I \to R$ تابعی باشد که در نقاط درونی بازه I مشتق پذیر و مشتق آن همه جا مثبت یا همه جا منفی است(یک به یک) ، در این صورت تابع f^{-1}نیز در همه نقاط درونی دامنه اش پذیر مشتق است و

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

تذکر: اگر $f'(a)=0$ یعنی خط مماس بر نمودار f افقی باشد و به معادله $y=b$ ، آن گاه خط مماس در نقطه b از نمودار f^{-1} خطی است عمود بر محورxها به معادله $x=b$ در این صورت تابع f^{-1}در نقطه b مشتق ندارد .

(تست)120 – اگر$f(x)=x^3+2x+1$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(4)$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

(تست)121 – اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(2)$ کدام است ؟

1) 2 2) -2 3) 3 4) -3

122 – معادله خط مماس بر وارون تابع $f(x)=x^3+x$ را در نقطه ای به طول 10 واقع بر آن بنویسید.

123 – معادله خط مماس بر وارون $f(x) = x^5 + 4x + 1$ را در نقطه ای به عرض 1 واقع بر آن بنویسید .

(تست)124 – معادله خط قائم بر وارون تابع $f(x) = x + \sin x$ در مبداء کدام است ؟

1) $y + 2x = 0$ 2) $y - 2x = 0$ 3) $x - 2y = 0$ 4) $x + 2y = 0$

(تست)125 – وارون تابع $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 5$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است ؟

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

(تست)126 – اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(3)}{2x-6} = 5$ باشد، حاصل مشتق $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x = \frac{1}{3}$ کدام است ؟

1) -180 2) 180 3) -90 4) 90

127 – فرض کنید f^{-1} وارون تابع مشتق پذیر f و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$ ، $g'(2)$ را بیابید .

128 – تابع $f: R \to R$ یک به یک و مشتق پذیر و $f'(x) = \sqrt{9 + f^2(x)}$ مقدار $(f^{-1})'(4)$ را بیابید .

(تست)129 – اگر $x > 1$ و $f(x) = x^3 - 3x$ اندازه مشتق تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه تلاقی آن با نمودار f کدام است ؟

1) 9 2) 3 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{9}$

(تست) $130-$ خط مماس بر منحنی $f(x)=x^3+ax$ در نقطه $A\left(\frac{1}{2},y_\circ\right)$ با خط مماس بر وارون f در نقطه متناظر با A موازی است a کدام است؟

1) 0 2) 1 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{2}$

(تست) $131-$ f تابعی است وارون پذیر و پذیر مشتق و $g(x)=f(x^3)$, $f(8)=0$, $f'(8)=\frac{1}{4}$ مقدار $(g^{-1})'(0)$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{6}$

نکته

مشتق دوم تابع وارون

$$(f^{-1})''(b) = -\frac{f''(x)}{(f'(a))^3}$$

(تست) $132-$ اگر $f(x)= x^3+x$ آن گاه $(f^{-1})''(2)$ کدام است ؟

1) $-\frac{32}{3}$ 2) $\frac{32}{3}$ 3) $-\frac{3}{32}$ 4) $\frac{3}{32}$

مشتق تابع نمایی و لگاریتم طبیعی

تابع $f(x)=e^x$ را تابع نمایی طبیعی می گویند. برای تعیین مشتق آن از تعریف مشتق استفاده می کنیم.

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\times\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}$$

که برای محاسبه حد فوق کافیست از هم ارزی زیر کمک بگیریم

$$\begin{cases} e^U\approx U+1\\ U\to 0\end{cases}\Longrightarrow f'(x)=e^x$$

و به کمک قاعده زنجیره ای داریم :

$$\begin{cases} \mathbf{f(x)=e^U\to f'(x)=U'.e^U}\\ \mathbf{f(x)=a^U\to f'(x)=U'.a^U.\ln a}\end{cases}$$

مثال- مشتق توابع زیر را به دست آورید.

133) $y = e^{\sin x} + 3^{x}$

134) $y = e^{\sqrt{x}} + \sin x + 2^{x}$

135) $ye^{y} + xe^{x} + \sqrt{xy} = 0$

136) $ye^{x} + 2\sqrt{xy} - \sin e^{2x} - x\cos y = 2$

137 – معادله خط مماس بر منحنی $f(x, y) = e^{x} + e^{y} + x^{2} + y^{2} - 2 = 0$ را در مبداء بنویسید .

138 – نقاطی از منحنی $y = e^{x^2-2x}$ را به دست آورید که خط مماس در آن نقطه موازی محور xهاست.

139 – مقادیری از a را پیدا کنید که به ازای آن ها $y = e^{ax}$ در معادله دیفرانسیل $y'' + 6y' + 8y = 0$ صدق کند.

تابع لگاریتم طبیعی

از آنجا که $f(x)=e^x$ پیوسته و یک به یک و هم چنین مشتق پذیر است وارون آن نیز که با نماد lnx نمایش می دهیم روی مجموعه $(0,+\infty)$ پیوسته و مشتق پذیر است و داریم:

$$\begin{cases} \mathbf{f(x)=\ln U} \\ \mathbf{f(x)=\ln|U|} \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{f'(x)=\frac{U'}{U}}$$

نکته مهم: با توجه به نمودار تابع y =Ln x خط x=0 مجانب قائم است. پس ریشه های جلوی تابع لگاریتم، مجانب های قائم توابع لگاریتمی هستند.(این بر خلاف تصوراشتباهی است که می گوید: "فقط توابع کسری مجانب قائم دارند"!!!)

مثال- مشتق توابع زیر را به دست آورید:

140) $\boldsymbol{y=\ln\sin x}$

141) $\boldsymbol{y=\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}$

142) $\boldsymbol{y=\ln(\ln\sin x)}$

143) $\boldsymbol{y=ln|\cos x|}$

144 – معادله خط مماس بر منحنی $y=\ln x$ را در $x=1$ بنویسید.

145 – اگر $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ باشد، $f''(x)$ را به دست آورید.

146 – اگر $y = x^{\sqrt{x}}; x > 0$ مشتق تابع y را به کمک لگاریتم طبیعی به دست آورید .

147 – اگر $y = ln\frac{1}{x+1}$ باشد، حاصل عبارت $xy' + 1$ را بر حسب x به دست آورید .

148 – در چه نقاطی نمودار $f(x) = x^2e^{-x^2}$ دارای مماس افقی است.

149 – مشتق تابع وارون $f(x) = 3x + \ln x$ را به دست آورید .

(تست) 150 – مشتق پنجم $y = e^{kx}$ به ازای $x = 0$ کدام است ؟

1)e^{5k}	2)e^{k}	3)k^{5}	4)k^{3}

(تست) 151 – اگر معادله یک منحنی $2e^{x+y} = e^x + e^y$ باشد، معادله خط مماس بر این منحنی در مبداء مختصات کدام است؟

1)$y = -x$	2)$y = x$	3)$y = 0$	4)$x = 0$

(تست) 152 – اگر $f(x) = \ln x$ باشد، مشتق پنجم $f(x)$ به ازای $x = e$ کدام است ؟

1) $\frac{24}{e^5}$	2) $\frac{6}{e^4}$	3) $\frac{e}{51}$	4)0

(تست) 153 – شیب خط قائم بر منحنی به معادله $e^y = 5 + xe^x$ در نقطه برخورد با محور عرض ها کدام است؟

1) $-\frac{6}{5}$	2) $\frac{6}{5}$	3) -5	4)5

اکسترمم های سراسری (مطلق)

فرض کنیم D دامنه تابع و c یک نقطه از دامنه باشد. می گوییم:

الف) $f(c)$ مقدار ماکسیمم سراسری تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر $x\epsilon D$ داشته باشیم : $f(x) \le f(c)$

ب) $f(c)$ مقدار مینیمم سراسری تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر $x\epsilon D$ داشته باشیم : $f(c) \le f(x)$

و در نهایت $f(c)$ مقدار اکسترمم مطلق یا سراسری تابع f روی D است، هرگاه مقدار ماکسیمم یا مینیمم مطلق باشد.

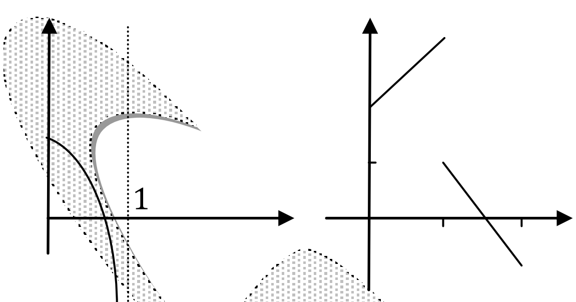
مثال- به کمک رسم، اکسترمم های مطلق توابع زیر را به دست آورید.

154) $y = x - [x]$

155) $y = |x^2 - 1|$

قضیه – اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آن وقت در این بازه ،هم ماکسیمم مطلق و هم مقدار می نیمم مطلق دارد .

سوال- آیا شرایط قضیه مقدار اکسترمم در نمودارهای شکل زیر برقرار است؟



تعریف – نقطه درونی $c\epsilon D_f$ را نقطه بحرانی تابع f می نامیم هر گاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد .

تذکر: نقاط انتهای بازه، بحرانی نیستند.

مثال- نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

156) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

157) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

158) $y = [x]$

159) $y = x|x|$

160) $y = x^{\frac{6}{5}} - x^{\frac{1}{5}}$

(تست) 161 – تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

1) 0　　2) 1　　3) 2　　4) 3

(تست) 162 – تابع $y = |\sin x|$ در $[-2\pi , 2\pi]$ چند نقطه بحرانی دارد ؟

1) 5　　2) 7　　3) 8　　4) 9

(تست) 163 – مجموعه نقاط بحرانی تابع $y = \tan x . cot\ x$ کدام است ؟

1) R　　2) $R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$　　3) $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$　　4) $R - \{k\pi\}$

(تست)164 – نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ بر بازه $[-1,1]$ کدام است ؟

1) $0 , \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$　　3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　4) $0 , \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

نکته: نقاط بحرانی تابع $\boldsymbol{y = [f(x)]}$ برابر دامنه تابع است .

165 – مجموعه نقاط بحرانی تابع $y = [x^3 + 3x]$ به دست آورید .

(تست)166 – تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & ; -2\le x\le 0\\ x & ; \quad 0\le x\le 2\end{cases}$ در بازه $[-2,2]$ چند تاست ؟

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

قضیه نقطه بحرانی- فرض کنیم f روی بازه I تعریف شده و c نقطه درونی بازه I است. اگر f(c) مقدار اکسترمم تابع باشد، آن گاه c نقطه بحرانی است. یعنی اگرc نقطه درونی باشد، نقاط اکسترمم تابع در نقاطی اتفاق می افتد که مشتق آن نقاط صفر است یا تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست.

اثبات- بدون این که به کلیت قضیه صدمه ای وارد شود، می توانیم f(c) را ماکسیمم بگیریم.پس

به ازای هر $x\epsilon I \;:\; f(x)\le f(c) \;\rightarrow f(x)-\;f(c)\le 0$

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)\ge 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)\le 0$$

پس اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد ، باید $f'(c)=0$.

تذکر مهم– هر نقطه بحرانی لزوما نقطه اکسترمم نیست مانند $\boldsymbol{f(x)=x^3}$ که $\boldsymbol{x=0}$ بحرانی است ولی اکسترمم نیست .

روش تعیین اکسترمم های مطلق بر بازه[a,b]

ابتدا نقاط بحرانی تابع f ، یعنی$c_1, c_2, \ldots$ را به دست آورده سپس مقادیر $f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \ldots$ را محاسبه کرده، بزرگ ترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار، مینیمم مطلق می باشد.

167 – اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ را در بازه $[-2,1]$ دست آورید .

168 – اکسترمم های مطلق $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x\le 1\\ 3x & x>1\end{cases}$ را در بازه $[-2,2]$ به دست آورید .

$169-$ بیشترین مقدار عبارت x^3-9x وقتی $1\le x\le 3$ کدام است ؟

$1)\ 8$　　$2)-6\sqrt{3}$　　$3)4\sqrt{6}$　　$4)6$

$170-$ بیشترین و کمترین $f(x)=sin^2x+sinx-1$ را بیابید .

نکته اگر دامنه تابع $\boldsymbol{f}$ بازه ای بسته و $\boldsymbol{f}$ در این بازه پیوسته باشد ،آن گاه $\boldsymbol{R_f}=[\boldsymbol{m},\boldsymbol{M}]$ که $\boldsymbol{m}=$ مینیمم مطلق و $\boldsymbol{M}=$ ماکسیمم مطلق است .

(تست) $171-$ برد تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ کدام است ؟

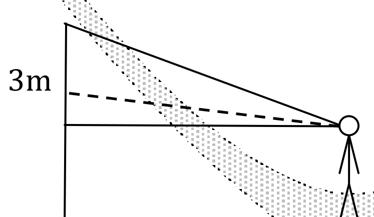
$1)\ [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　$2)[-2,2]$　　$3)\ [0,2]$　　$4)[0,\sqrt{2}]$

172- می خواهیم یک جعبه در باز از یک قطعه مقوای 75 x 40 بسازیم. چقدر از گوشه ها ی آن ببریم که حجم حاصل ماکسیمم شود؟

173- نشان دهید در بین همه مثلث های متساوی الساقینی که محیط یکسان دارند، مثلث متساوی الاضلاع، بیشترین مساحت را دارد.

174- مساحت بزرگ ترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.

175- شخصی باید در چه فاصله ای از یک نقاشی دیواری به ارتفاع 3متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته باشد؟ بااین فرض که پایین نقاشی 1 متر بالاتر از خط دید شخص است.



چند نکته مهم

1)اگر مجموع چند متغیر، مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آ ن ها وقتی ماکسیمم است که همه متغیرها با هم برابر باشند.

$$if \quad x+y+z=k \xRightarrow{x=y=z} Max(xyz)$$

2)اگر حاصل ضرب چند متغیر مقدار ثابتی باشد، مجموع آن چند متغیر وقتی مینیمم است که همه متغیرها با هم برابر باشند.

$$if \quad xyz=k \xRightarrow{x=y=z} min(x+y+z)$$

3)اگر مجموع چند متغیر مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب توان دار آن ها وقتی ماکسیمم است که از تقسیم هر متغیر بر توانش اعداد یکسان به دست آید.

$$if \quad x+y+z=k \xRightarrow{\frac{x}{n}=\frac{y}{m}=\frac{z}{p}} Max\,(x^n y^m z^p)$$

4) اگر حاصل ضرب چند متغیر مقدار ثابتی باشد، مجموع توان دار آن چند متغیر وقتی مینیمم است که از تقسیم هر متغیر بر توانش اعداد یکسان به دست آید.

$$if \quad xyz=k \xRightarrow{\frac{x}{n}=\frac{y}{m}=\frac{z}{p}} min\,(x^n+y^m+z^p)$$

$$\begin{cases} \text{if} \quad x^2+y^2=k \xRightarrow{\frac{x}{m}=\frac{y}{n}} \text{Max}(mx+ny) \\ \text{if} \quad x^2-y^2=k \xRightarrow{\frac{x}{n}=\frac{y}{m}} \text{Max}(mx-ny) \\ \text{if} \quad xy+yz+xz=k \xRightarrow{x=y=z} \text{Max}(xyz) \end{cases}$$

(تست) 176- اگر مساحت کل مکعب مستطیلی 24 باشد، بیشترین حجم آن کدام است؟

1) 8		2) 12		3) 16		4) 24

(تست)177- مجموع دو ضلع زاویه قائمه مثلث قائم الزاویه ای 4 می باشد، اگر مساحت این مثلث ماکسیمم باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

1) 2 2) $\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) 3

(تست)178- مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه 15 می باشد. برای آن که سطح جانبی استوانه ماکسیمم شود، ارتفاع استوانه کدام است؟

1) 12 2) 10 3) 7.5 4) 5

(تست) 179- مجموع قطر قاعده و ارتفاع مخروطی 12 می باشد. ماکسیمم حجم مخروط کدام است؟

1) $\frac{128\pi}{3}$ 2) $\frac{64\pi}{3}$ 3) $\frac{16\pi}{3}$ 4) $\frac{32\pi}{3}$

(تست)180- بزرگ ترین حجم مخروط که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن ها واحد باشد، کدام است؟

1) $\frac{4\pi}{81}$ 2) $\frac{3\pi}{32}$ 3) $\frac{\pi}{12}$ 4) $\frac{4\pi}{27}$

توابع یکنوا

تعریف :تابع f روی بازه I صعودی اکید است اگر برای هر x_1 و x_2 در I $\Longleftarrow$ $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

و تابع f روی بازه I نزولی اکید است اگر برای هر x_1 و x_2 در I $\Longleftarrow$ $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

و تابع f روی بازه I ثابت است اگر برای هر x_1 و x_2 در I $\Longleftarrow$ $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

تذکر: تابع f اکیدا یکنواست هرگاه اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد.

مثال- با رسم توابع زیر، یکنوایی آن ها را بررسی کنید.

181) $f(x) = x + |x|$

182) $y = x + [x]$

183) $y = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ x^2 - 1 & x \ge 1 \end{cases}$

نکته- اگر تابع f در بازه های (a , b) و (b , c) اکیدا صعودی باشد، به شرط آن که f در b پیوسته باشد، آن گاه f روی (a , c) اکیدا صعودی است.(پیوستگی f در b لازم است.)

قضیه- فرض کنید f روی [a,b] پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشد:

1) اگر به ازای هر $\boldsymbol{x}$ در $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > 0$ آن گاه $\boldsymbol{f}$ بر $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ صعودی اکید است.

2) اگر به ازای هر $\boldsymbol{x}$ در $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) < 0$ آن گاه $\boldsymbol{f}$ بر $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ نزولی اکید است.

3) اگر به ازای هر $\boldsymbol{x}$ در $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ آن گاه $\boldsymbol{f}$ بر $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ ثابت است.

مثال184- یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

ب) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

ج) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

نکته- اگر تابعی مجانب قائم داشته باشد و بازه ای شامل مجانب قائم باشد، آن گاه تابع در این بازه یکنوا نمی باشد.

(تست)**185** – تابع $\boldsymbol{f(x)=x+\sin x}$ در $\boldsymbol{R}$:

1)صعودی است. 2)اکیدا صعودی است. 3) نزولی است. 4) ثابت است.

(تست) 186 – با صعود x از $-\infty$ تا $+\infty$ کسر $\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$:

1)کم می شود. 2) زیاد می شود. 3) ابتدا کم و سپس زیاد می شود. 4) ابتدا زیاد و سپس کم می شود.

(تست)187 – به ازای کدام مقدار a $y=\dfrac{a\cos x}{\cos x+1}$ در بازه $(0,\pi)$ اکیدا نزولی است.

$1)\ a<1$ $\quad 2)-1<a<1$ $\quad 3)\ a<0$ $\quad 4)\ a>0$

(تست)188 – به ازای کدام مقادیر m تابع $f(x)=x^3-3mx^2+12x+10$ همواره صعودی اکید است ؟

$1)\ m<-2$ $\quad 2) m>2$ $\quad 3)-2<m<2$ $\quad 4)\ 0<m<4$

(تست)189 – اگر f اکیدا صعودی و تابع g بر R_f اکیدا نزولی باشد، آن گاه gof چگونه است ؟

1)اکیدا صعودی است. 2)اکیدا نزولی است. 3) ثابت است. 4) غیر یکنواست.

(تست)190 – نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه زیر اکیدا صعودی است؟

$1)(-2,2)$ $\quad 2)\ (0,3)$ $\quad 3)(-\infty,-2)$ $\quad 4)\ (-2,0)$

نکته: توابع هموگرافیک در دامنه خود یکنوا نمی باشند. اگر تابع هموگرافیکی بخواهد در یک بازه اکیدا صعودی شود، باید:

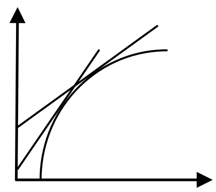
1-مجانب قائم در این بازه واقع نباشد

2مشتق تابع در این بازه مثبت باشد.

(تست) 191 – حدود a کدام باشد، تا تابع $(x > 1)$ $f(x) = \dfrac{ax-2}{x+(a-3)}$ اکیدا صعودی شود .

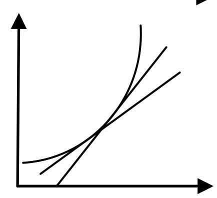
1) $(2, +\infty)$ 2) $[2, +\infty)$ 3) $(-\infty, 1]$ 4) $(-\infty, 1)$

تقعر نمودار تابع



گوییم سوی تقعر منحنی رو به پایین است، هرگاه خطوط مماس

رسم شده در بازه I بالای منحنی قرار گیرد.



و می گوییم سوی منحنی رو به بالاست هرگاه خطوط مماس

رسم شده، زیر منحنی قرار گیرند.

قضیه – فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر x از بازه باز I موجود باشد :

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$ آن گاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد .

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$ آن گاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد .

نتیجه – اگر f' در بازه I صعودی اکید باشد ، آن گاه جهت تقعر نمودار f در این بازه به سمت بالا است .

و اگر f' در بازه I نزولی اکید باشد ، آن گاه جهت تقعر نمودار f در این بازه به سمت پایین است .

مثال- سوی تقعر منحنی های زیر را تعیین کنید.

192) $f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 1$

193) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

194) $f(x) = |x^2 - 1|$

195) $f(x) = \dfrac{1}{20}x^5 - \dfrac{1}{6}x^3 + 4x - 5$

196) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

197) $f(x) = ln\sqrt{2x+1}$

(تست)198 – جهت تقعر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ در بازه $(0,\pi)$ به کدام سمت است ؟

1)بالا 2) پایین 3) ابتدا بالا، سپس پایین. 4)ابتدا پایین و سپس بالا.

(تست)199 – جهت تقعر تابع $y = x + \frac{1}{x}$در کدام بازه به پایین است ؟

1) $(-1,+\infty)$ 2) $(-\infty\,,1)$ 3) $(0,+\infty)$ 4) $(-\infty,0)$

(تست)200 – تقعر نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2+12}$ در بازه $(-a,a)$ رو پایین است بیشترین مقدار aکدام است ؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

(تست)201 – تقعر نمودار تابع $y = \frac{x}{e^x}$در کدام بازه رو به پایین است ؟

1) $(-\infty,0)$ 2) $(-\infty,2)$ 3) $(2,+\infty)$ 4) $(-2,+\infty)$

(تست)202 – مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله $f(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$ رو به پایین است به کدام صورت است ؟

1) $0 < x < 2$ 2) $0 < x < 1$ 3) $-1 < x < 2$ 4) $-2 < x < 0$

(تست)203 – تقعر تابع با ضابطه $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \ln \mathrm{x}$در کدام بازه رو به پایین است ؟

1) $(-1,1)$ 2) $(-1,0)$ 3) $(0,1)$ 4) $(1,+\infty)$

(تست)204 – مقدار مینیمم تابع $f(x) = x^2e^{-x}$کدام است ؟

1) 1 2) 0 3) $\frac{1}{e}$ 4) -1

(تست)205 – جهت تقعر تابع $y = x^2 + \sqrt{x}$ در بازه $(0,1)$به کدام سمت است ؟

1)بالا 2)پایین 3)ابتدا بالا، سپس پایین. 4) ابتدا پایین، سپس بالا.

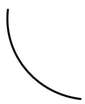
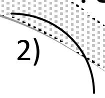
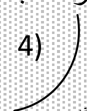
(تست) 206 – تقعر تابع با ضابطه $f(x) = x^2|x-1|$ در بازه (a,b) رو به پایین است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است ؟

1) 1　　2) $\frac{1}{3}$　　3) $\frac{2}{3}$　　4) $\frac{4}{3}$

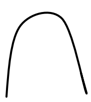
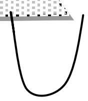
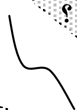
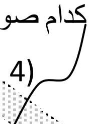
(تست) 207 – جهت تقعر تابع $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه (a,b) به سمت پایین است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است ؟

1) 1　　2) 2　　3) 3　　4) 4

(تست) 208 – نمودار تابع $f(x) = \sin x - \cos x$ در اطراف به طول $x = \frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است ؟

1) 　　2) 　　3) 　　4) 

(تست) 209 – نمودار تابع $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ در نزدیکی نقطه $x = 2$ به کدام صورت است ؟

1) 　　2) 　　3) 　　4) 

(امتحان سوال) 210 – به ازای چه مقادیر a تقعر تابع $y = x^4 + ax^3 + 3x^2$ همواره رو به بالاست .

تعریف نقطه عطف

فرض کنید تابع f در x = c پیوسته باشد، آن گاه نقطه ((c , f (c) را نقطه عطف تابع گویند، هرگاه:

1-تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد.

2-سوی تقعر منحنی عوض شود.

تذکر شرط 1 بیان کننده وجود مشتق در نقطه x = c یا خطوط مماس قائم است، که به آن عطف قائم می گویند.

تذکر شرط 2 نشان دهنده عبور خط مماس از منحنی است.

مثال – نقاط عطف را در صورت وجود به دست آورید.

211) $y = x^4 - 4x^2$

212) $y = (x-1)^4$

213) $y = \sqrt[3]{x-1}$

214) $\frac{x^3}{(x+1)^2}$

215) $y = \frac{-x}{x^2+1}$

216) $y = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$

نکته: لزومی ندارد مشتق دوم تابع در نقطه عطف موجود باشد، اما اگر در نقطه عطف مشتق دوم وجود داشته باشد، مقدار آن صفر است.

(تست)217 – تابع $y = |x^2 - 4|$ دارای چند نقطه عطف است ؟

1) 0　　2) 1　　3) 2　　4) 3

نکته: دقت کنید که نقاط بازگشتی و گوشه دار، نمی توانند نقطه عطف تابع باشند.

(تست)218 – تابع $y = x - \sin x$ در بازه $(-2\pi, 2\pi)$ چند نقطه عطف دارد؟

1) 0　　2) 1　　3) 2　　4) 3

نکته: در توابع به صورت $y = (x-a)^{2k+1} g(x)$ $(k \geq 1)$ که $g(x)$ در $x = a$ پیوسته باشد و $g(a) \neq 0$ آن گاه تابع در $x = a$ عطف دارد.

(تست)219 – تابع $f(x) = x(x-1)^2(x-3)^3(x-4)^4$ چند نقطه عطف دارد؟

1) 0　　2) 1　　3) 2　　4) 3

(تست)220 – نقطه به طول $x = 0$ برای تابع $y = \dfrac{x^3}{x + \cos x}$ چگونه است ؟

1)ماکزیمم   2) مینیمم   3) عطف   4)عادی

نکته: در توابع رادیکالی با فرجه فرد، ریشه های ساده زیر رادیکال نیز، طول نقطه عطف می باشند.(ریشه های **مضاعف، نقاط بازگشتی اند.)**

به عنوان مثال $f(x) = \sqrt[5]{x^2(x-2)}$ نقطه $x = 2$ عطف و $x = 0$ نقطه بازگشتی است.

(تست)221 – طول نقطه ی عطف منحنی به معادله ی $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ کدام است ؟

1) -1   2)0   3) 1   4) فاقد عطف

(تست)222 – دو نقطه عطف تابع با ضابطه $y = x^2e^x$ در کدام نواحی مختصات قرار دارند ؟

1)دوم   2)سوم   3)یکی اول، یکی دوم   4)یکی سوم، یکی چهارم

(تست)223- تابع $f'(x) = \frac{x^3-3x+1}{x^3-3x+6}$ چند نقطه عطف دارد؟

1) 0   2) 1   3) 2   4) 3

نکته: اگر (x_1, y_1) عطف تابع f باشد، به طوریکه مشتق دوم موجود باشد داریم : **1)** $f(x_1) = y_1$, **2)** $f''(x_1) = 0$

(تست)224 – نقطه$(1,2)$ عطف تابع$y = x^3 + ax^2 + b$ است، دوتایی مرتب (a, b)کدام است ؟

1) (3,4)   2) (-3,4)   4) (3, -4)   4) (-3,-4)

(تست)225 – اگر نقطه$(1,4)$ عطف نمودار تابع $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

(تست) 226 – اگر تابع $y=\cos k\pi$ در فاصله $(0,8)$ دارای دو نقطه عطف باشد، k کدام است؟

$1)\ 4\pi \qquad 2)\ 2\pi \qquad 3)\ \frac{\pi}{4} \qquad 4)\ \frac{\pi}{2}$

اکسترمم های موضعی (نسبی)

فرض کنیم D دامنه تابع باشد، که شامل نقطه c است. می گوییم:

1) f(c) یک مقدار ماکسیمم نسبی تابع f است، هرگاه عددی مانند r>0 وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه

$$|x-c|<r \implies f(x)\le f(c)$$

2) f(c) یک مقدار می نیمم نسبی تابع f است، هرگاه به ازای هر x متعلق به دامنه

$$|x-c|<r \implies f(x)\ge f(c)$$

3) f(c) یک مقدار اکسترمم نسبی تابع f است،اگر مقدار ماکسیمم یا می نیمم نسبی تابع باشد.

تذکر- توجه داشته باشید که نقاط انتهایی یک بازه بسته می توانند اکسترمم نسبی تابع باشند.
تذکر- لزومی ندارد که تابع در نقاط اکسترمم موضعی، پیوسته و یا مشتق پذیر باشد.
تذکر- اگر تابع f در نقطه ای به طول c ماکسیمم نسبی داشته باشد، آن گاه c را نقطه ماکسیمم نسبی و f(c) را مقدار ماکسیمم نسبی می گویند.

مثال- به کمک رسم، اکسترمم های نسبی توابع زیر را بیابید.

$227)\ y=|x^2-1|$

$228)\ y=[x]$

$229)\ y=x-[x]$

$230)\ y=[\sin x]\ ;\ x\epsilon\,[0,2\pi]$

آزمون مشتق اول

فرض کنید c نقطه بحرانی باشد که بر بازه (a , b) شامل c پیوسته است، اگر f' روی این بازه در $x = c$تغییر علامت دهد، این نقطه اکسترمم موضعی است و اگر f' در $x = c$ تغییر علامت ندهد، اکسترمم موضعی نیست.

مثال- به کمک آزمون مشتق اول، اکسترمم های نسبی توابع زیر را به دست آورید.

231) $y = 3x^5 - 5x^3$

232) $y = x\,(x-1)^2$

233) $y = x + \frac{1}{x}$

234) $y = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$

235) $f(x) = \sqrt[3]{sin^2 x}\,;\ x\epsilon(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$

236) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\,cosx\ ; (0,2\pi)$

(تست) 237 – فاصله دو خط مماس بر نمودار $y = x^3 - 3x$در دو نقطه ماکزیمم و می نیمم آن کدام است ؟

1)3 2)4 3) 5 4)6

(تست) 238 – اگر مقدار ماکزیمم تابع $y = x^3 - 6x^2 + 5k + 1$ ، مساوی 11 باشد، k کدام است ؟

1)1 2)-1 3) 2 4)-2

(تست) 239 – مجموع عرض های ماکزیمم و می نیمم تابع $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ کدام است ؟

1)0 2)4 3) -4 4) $2\sqrt{6}$

(تست) 240 – اگر $f'(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4)$ باشد، f دارای چند اکسترمم نسبی است ؟

1)1 2)2 3)3 4) 4

نکته1: تابع در ریشه های ساده، دارای اکسترمم نسبی است، اما در ریشه های مضاعف، اکسترمم نسبی ندارد.

نکته2: اگر در تابع عامل $(x-a)^{2n}$ باشد، $x = a$ **اکسترمم تابع می باشد و**

$$\boldsymbol{f(x) = (x-a)^{2n} g(x)} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{g(a) > 0 \Rightarrow x = a} : \text{می نیمم است} \\ \boldsymbol{g(a) < 0 \Rightarrow x = a} : \text{ماکزیمم است} \end{cases}$$

241 – تابع $y = (x-1)^2(x+1)^2$ دارای چند اکسترمم است؟

(تست)242 – اگر $f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x^2 - 5x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$ باشد، نقطه $x = 1$ چگونه است ؟

1)عطف 2)ماکزیمم 3) می نیمم 4) ساده

(تست) 243 – اگر تابع $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم باشد، حدود a کدام است ؟

1) $0 < a < 2$ 2) $-2 < a < 0$ 3) $a > 0$ یا $a < 2$ 4) $a < 0$ یا $a > 2$

(تست) 244- تابع $y = x - sinx$ در بازه $[-4\pi, 4\pi]$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

1)0　　2)1　　3)2　　4) 3

نکته- اگر (x_1, y_1) اکسترمم نسبی تابع مشق پذیر f باشد، داریم :

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f'(x_1) = 0 \end{cases}$$

(سوال امتحان)245 – اگر $A(1, -1)$ نقطه می نیمم موضعی تابع $f(x) = ax^3 + bx + 1$ باشد، b , a را به دست آورید .

(سوال امتحان) 246- تابع درجه سومی بنویسید که (4 ,2) ماکسیمم، (2 ,4) می نیمم، و (3 ,3) نقطه عطف آن باشد.

نکته مهم- اگر نقطه ای اکسترمم موضعی یک تابع گویا باشد، آن گاه مختصات این نقطه علاوه بر آن که در خود تابع صدق می کند، در هوپیتال تابع نیز صدق می کند.(به شرط آن که مشتق مخرج به ازای این نقطه صفر نباشد.**)**

(تست) 247 – اگر $A(-3, -4)$ نقطه ماکسیمم نسبی تابع $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 1}$ باشد، $a + b$ کدام است ؟

1)2　　2)5　　3)7　　4) 9

نکته- برای تعیین عرض های نقاط اکسترمم توابع مشتق پذیر، بدون عمل مشتق، کافیست تمام معادله را به یک طرف آورده، آن را بر حسب x مرتب کنیم و شرایط ریشه مضاعف را برقرار نماییم.(در توابع کسری ابتدا طرفین-وسطین کنید**)**

(تست) 248 – ماکزیمم مقدار تابع $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ کدام است ؟

1)4　　2)3　　3)2　　4) $2\sqrt{2}$

نکته: اگر عرض نقطه اکسترمم نسبی یک تابع مشتق پذیر، k باشد، آن گاه خط y = k بر نمودار تابع مماس است. از این رو، از تلاقی این خط و منحنی معادله ای حاصل می شود که باید ریشه مضاعف داشته باشد.

(تست) 249 – عرض نقطه ماکزیمم منحنی $y = \dfrac{x^2+ax+2}{x-1}$ برابر -2 است. a کدام است ؟

$1)1 \qquad 2)-1 \qquad 3)2 \qquad 4)-2$

(سوال امتحان) 250 – اگر مجموع اکسترمم های نسبی تابع $y = \dfrac{2x-k}{x^2-2x}$ برابر 4 باشد، k را بیابید .

نکته: در توابع به شکل $\dfrac{\text{درجه}2}{\text{درجه}2}$ یا $\dfrac{\text{درجه}2}{\text{درجه}1}$ یا $\dfrac{\text{درجه}1}{\text{درجه}2}$ اگر تابع دارای اکسترمم نسبی باشد، آن گاه $\boldsymbol{y_{Max} \times y_{min}} = \dfrac{\Delta_{\text{صورت}}}{\Delta_{\text{مخرج}}}$.

(برای تشکیل Δ درجه اول، باید ضریب x^2 را صفر بگیریم.)

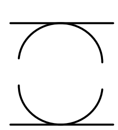
(تست) 251 – حاصل ضرب مقادیرماکزیمم و می نیمم نسبی تابع $y = \frac{x^2+3x}{x^2+x+2}$ کدام است ؟

$1)-\dfrac{7}{5} \qquad 2)\dfrac{7}{5} \qquad 3)-\dfrac{5}{7} \qquad 4)\ \dfrac{5}{7}$

آزمون مشتق دوم برای اکسترمم های موضعی

فرض کنیم $\big(c, f(c)\big)$ نقطه بحرانی تابع f باشد، که در آن $f'(c) = 0$ و f' به ازای جمیع xهای بازه باز I شامل c موجود باشد .

هرگاه $f''(c)$ وجود داشته باشد :



الف – اگر $\boldsymbol{f''(c)} < 0$ آن گاه $\boldsymbol{f}$ در **c** ماکسیمم موضعی دارد .

ب – اگر $\boldsymbol{f''(c)} > 0$ آن گاه $\boldsymbol{f}$ در **c** می نیمم موضعی دارد .

ج – اگر $\boldsymbol{f''(c)} = \boldsymbol{0}$ نتیجه ای نمی توان گرفت .

(سوال امتحان) 252 – اکسترمم های نسبی تابع $f(x) = x^2e^{-x}$ را به دست آورید .

(تست) 253- نقطه به طول $x = \frac{\pi}{4}$ برای تابع $f(x) = sinx + \cos x$ چگونه نقطه ای است؟

الف)می نیمم نسبی ب)ماکزیمم نسبی ج)عطف د)عادی

(تست) 254– فرض کنید f تابعی مشتق پذیر و $f(2) = 3$ و $g'(x) = (x-2)f(x)$ در این صورت نقطه ای به طول $x = 2$ برای نمودار g چگونه است؟

الف)می نیمم نسبی ب)ماکزیمم نسبی ج)عطف د)عادی

(سوال امتحان)255 – تابع $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - sinx$ مفروض است.نقاط اکسترمم نسبی تابع را با استفاده از آزمون مشتق دوم بیابید .

تشخیص نمودار f به کمک f' و بالعکس

1) نقاط تلاقی f' با محور xها نقاط اکسترمم f و نقاط مماس نمودار f' با محور xها، نقاط عطف f می باشند .

2) به تعداد اکسترمم های نسبی f'، تابع f نقطه عطف دارد .

3) اگر f در یک بازه صعودی باشد، نمودار f' بالای محور x ها و اگر f در یک بازه نزولی باشد،نمودار f' زیر محور xها می باشد .

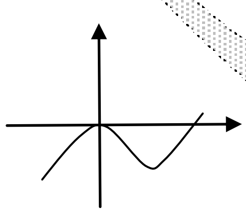
4) مجانب قائم f برای f' نیز مجانب قائم می باشد ، ولی ممکن است مجانب قائم f' برای f مجانب قائم نباشد .

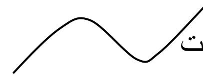
5) همه مجانب های افقی $y = a$ در تابع f به مجانب افقی $y = 0$ برای f' تبدیل می شوند .

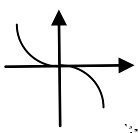
6) مجانب مایل $y = ax + b$ برای تابع f به مجانب افقی $y = a$ برای تابع f' تبدیل می شود .

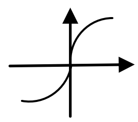
7) نقاط گوشه دار تابع f به نقاط انفصال تابع f' تبدیل می شوند .

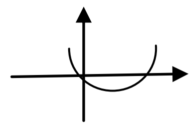
256 – اگر f به صورت مقابل باشد، f'را رسم کنید .

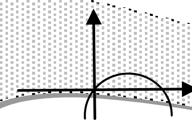


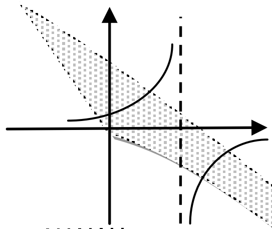
(تست) 257 – اگر نمودار f به صورت  باشد، نمودار f' کدام است ؟

1) 

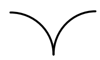
2) 

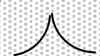
3) 

4) 

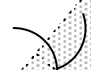


(تست) 258 – اگر f' به صورت مقابل باشد،fکدام است ؟


1


2


3


4

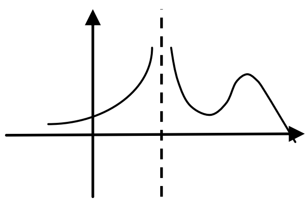
(تست)259 – اگر f روی R پیوسته و نمودار مشتق آن به صورت زیر باشد، در موردf کدام گزینه صحیح است ؟

الف) یک نقطه عطف و یک مجانب قائم و یک ماکزیمم دارد.

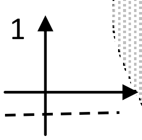
ب) یک مجانب قائم، دو نقطه عطف و یک ماکزیمم دارد.

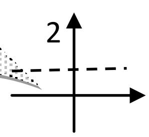
ج) دو نقطه عطف و یک ماکزیمم دارد.

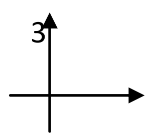
د) سه نقطه عطف و یک ماکزیمم دارد.

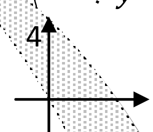


(تست) 260 – نمودار مشتق تابع$y = x - [x]$ به کدام صورت است ؟

1 

2 

3 

4 

آهنگ های تغییر وابسته (کمیت های وابسته)

در بعضی از مسائل نه تنها دو کمیت به هم وابسته اند، بلکه هردوی آن ها به متغیر سومی که معمولاً زمان است، وابسته اند ، در این حالت باید آهنگ تغییر هریک از متغیرها را بر حسب تابعی از t فرض کرده و از آن ها نسبت به زمان مشتق بگیریم.

261 – متغیری روی نمودار $y = \sqrt[3]{2x^3 - 3x}$ در حرکت است.هنگامی که متغیر به نقطه(2,2) می رسد مولفه x با سرعت $2^{m}/_{s}$ افزایش می یابد. متغیر y با چه سرعتی تغییر می کند؟

262 – حجم کره ای با سرعت$600^{cm}/_{min}$ در حال افزایش است، هنگامی که شعاع این کره 10^{cm} می شود.مقدار تغییرات قطر این کره چقدر است؟

263- نردبانی به طول 10 متر به دیواری تکیه داده شده است. اگر پای نردبان در فاصله 6 متری از دیوار با سرعت 2 متر بر ثانیه از دیوار دور شود، سر دیگر نردبان با چه سرعتی به زمین نزدیک می شود؟

264- شخصی با قد دو متر، با سرعت 3متر بر ثانیه به تیر چراغ برقی با ارتفاع 6 متر نزدیک می شود. اگر سرعت نزدیک شدن این شخص به تیر چراغ برق، 3 متر بر ثانیه باشد، سایه این شخص با چه سرعتی کوچک می شود؟

265 – ذره ای روی مسیر $\frac{xy^3}{1+y^2}=\frac{8}{5}$ در حرکت است، اگر مولفه x آن با سرعت $6^{m}/_{s}$ افزایش یابد، هنگامی که ذره از نقطه(2,2) می گذرد، مولفه y آن با چه سرعتی تغییر می کند؟

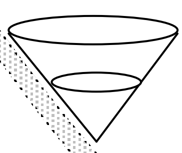
(تست) 266 – طول و عرض مکعب مستطیلی به ترتیب با سرعت های 2 و 4 متر بر ثانیه افزایش و ارتفاع آن با سرعت 3 متر بر ثانیه کاهش می یابد. در زمانی که طول و عرض و ارتفاع به ترتیب 5 و 2 و 4 متر باشد، آهنگ تغییر حجم مکعب مستطیل چند مترمکعب بر ثانیه است؟

1)86　　2) 76　　3) 66　　4) 56

(تست)267 – ذره ای روی مسیر $y=2cos^2x-1$ حرکت می کند در نقطه ای با کدام سرعت ، مولفه x برابر سرعت مولفه y است؟

1) $\frac{7\pi}{6}$　　2) $\frac{7\pi}{12}$　　3) $\frac{5\pi}{6}$　　4) $\frac{5\pi}{6}$

268 – یک مخزن مخروطی شکل به ارتفاع 8 و شعاع قاعده 2 متر موجود است، اگر آب داخل مخزن با سرعت $1\frac{m^3}{min}$ از سوراخ پایین آن خارج شود، مشخص کنید وقتی ارتفاع داخل مخزن 4 متر است، ارتفاع آب با چه سرعتی تغییر می کند؟



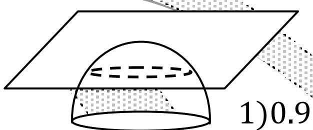
(تست) 269- در مثلثی به طول قاعده 32 و ارتفاع 28 واحد، خطی موازی قاعده، با سرعت 0.02 واحد بر ثانیه، به راس مقابل آن نزدیک می شود و با دو ضلع دیگر این مثلث، مثلث های متشابه می سازد. در لحظه ای که فاصله این خط تا راس مقابل 7 واحد است سرعت کاهش این مساحت ها کدام است؟

1)0.16　　2)0.14　　3) 0.8　　4) 0.07

(تست)270 – نقطه M روی نیم دایره ای به قطر $AB = 9$ در حرکت است. تصویر M روی AB با سرعت ثابت 0.05 واحد در ثانیه، از نقطه A دور می شود. در لحظه ای که این فاصله برابر 6.25 واحد است، سرعت افزایش طول وتر AM کدام است؟

1)0.072 2)0.045 3) 0.03 4) 0.024

(تست)271- در یک نیم کره به شعاع 25 واحد، صفحه P همواره موازی صفحه قاعده، با سرعت 0.04 از آن دور می شود، در حالی که فاصله دو صفحه، 12 واحد است، سرعت کاهش مساحت دایره مقطع صفحه P و نیم کره کدام است؟



1)0.96π 2)0.72π 3) 0.84π 4) 0.48π

رسم نمودار تابع

در صورت امکان، مراحل زیر را انجام می دهیم:

1-تعیین دامنه تابع.

2-تعیین مجانب ها(در صورت وجود)

3-تعیین جدول تغییرات مشتق و مقادیر اکسترمم تابع.

4-تعیین جدول تغییرات مشتق دوم و نقاط عطف.(این مرحله معمولا برای توابع رادیکالی و کسری انجام نمی شود.)

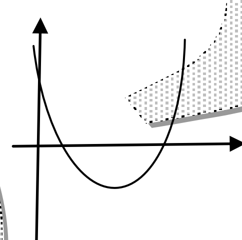
مثال- (رسم توابع چند جمله ای)

$$\mathbf{272)}\ \boldsymbol{y = x^2 - 5x + 4}$$

$y' = 2x - 5 \ \rightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty \searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow +\infty$

$\min\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

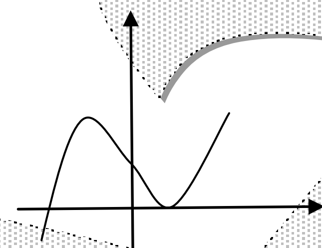


نقاط کمکی : $\begin{cases}(0,4)\\(1,0)\\(4,0)\end{cases}$

$$\mathbf{273)y = x^3 - 3x + 2}$$

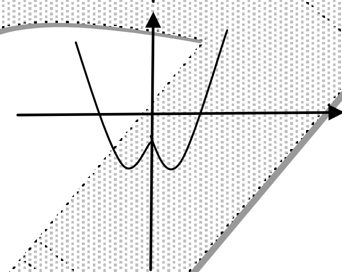
$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow\ x = \pm 1$

x	$-\infty$ -1	$+1$	$+\infty$
y'	-	+	+
y	$+\infty$ ↗ $Max\ (-1,4)$	↘ $\min\ (1,0)$	↗ $+\infty$



$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
y''	-	+
y	$\frown$ (0و2)	عطف $\smile$



$274)y = x^4 - 2x^2 - 3$

$y' = 4x^3 - 4x = 0\ \ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

x	$-\infty$ -1	0	$+1$	$+\infty$
y'	-	+	-	+
y	$+\infty$ ↘ $min\ (-1,-4)$	↗ Max $(0,-3)$	↘ min $(1,-4)$	↗ $+\infty$

تذکر: با توجه به این که تابع زوج است، محور تقارن آن، محور yهاست.

$y'' = 12x^2 - 4 = 0\ \rightarrow x = \ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

رسم توابع هموگرافیک

هر تابع که در حالت کلی به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد $(c \neq 0)$ یک تابع هموگرافیک است که نوعی هذلولی است و :

1)نمودار، اکسترمم و عطف ندارد.

2)دارای مجانب قائم $x\ =\ -\frac{d}{c}$ و مجانب افقی $y = \frac{a}{c}$می باشد .

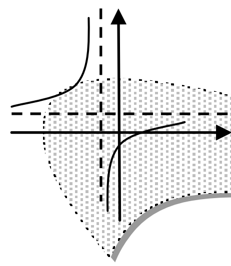
3) محل تلاقی مجانب های مرکز تقارن و نیمساز های خطوط مجانب ها محورهای تقارن آن است. $\left(\omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right) \right)$: مرکز تقارن

$275)\,y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

$y = \frac{x-1}{2x+1} \quad \rightarrow$ مجانب ها : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{مجانب قائم} \\ y = \frac{1}{2} & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

$y' = \frac{3}{(2x+1)^2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+	‖	+
y	$\frac{1}{2}$ ↗	‖	↗ $\frac{1}{2}$

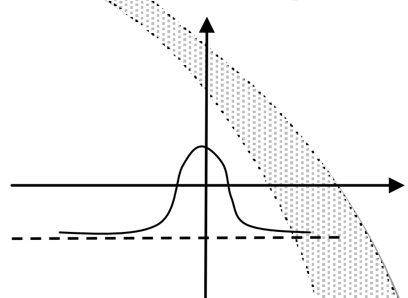


چند مثال از رسم توابع کسری:

$\mathbf{276)}\,\boldsymbol{y = \frac{1-x^2}{x^2+1}} \quad \rightarrow$ مجانب ها : $\begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد .} \\ y = -1 \ \text{مجانب افقی} \end{cases}$

$\boldsymbol{y' = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}}$

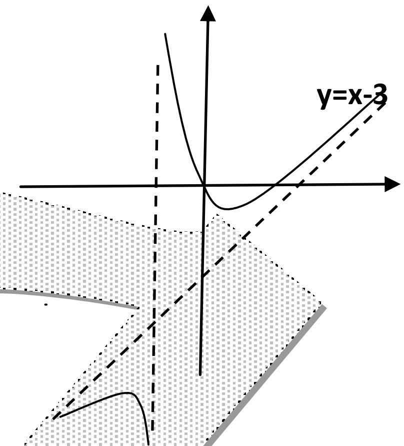
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		+
y	-1 ↗	$Max(0,1)$	↘ -1



$277)\,\boldsymbol{y = \dfrac{-x}{x^2+1}} \quad \rightarrow$ مجانب ها : $\begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد .} \\ y = 0 \ : \text{مجانب افقی} \end{cases}$

$\boldsymbol{y' = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}}$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
y'	-	+	+	
y	0 ↗	$Max\,(-1,\frac{1}{2})$ ↘	$\min\,(1,-\frac{1}{2})$ ↗	0



$\mathbf{278)} \boldsymbol{y = \frac{x^2-2x}{x+1}}$ $\rightarrow$ مجانب ها : $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1} & \text{مجانب قائم} \\ \boldsymbol{y = x - 3} & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

$\boldsymbol{y' = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}}$

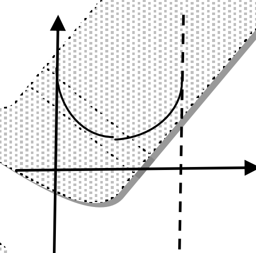
x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1-\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$+\infty$	↗	Max	↘	‖	↘	min	↗	$+\infty$

چند مثال از توابع رادیکالی:

(توجه: برای رسم توابع رادیکالی، ابتدا دامنه تابع را تعیین کنید.)

$279) y = 2 - \sqrt{2x - x^2}$; $D_f = [0,2]$

$y' = -\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$



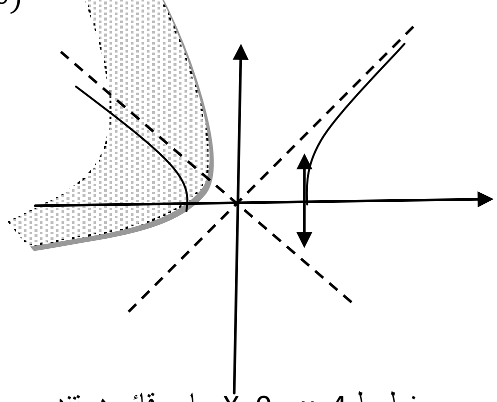
x	0		1		2
y'	∞	$-$		$+$	∞
y	2	↘	$min(1,1)$	↗	2

$280) y = \sqrt{\boldsymbol{x^2 - 4x}}$; $D_f: (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

$y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \notin D_f$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		-				+	
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ مجانب مایل



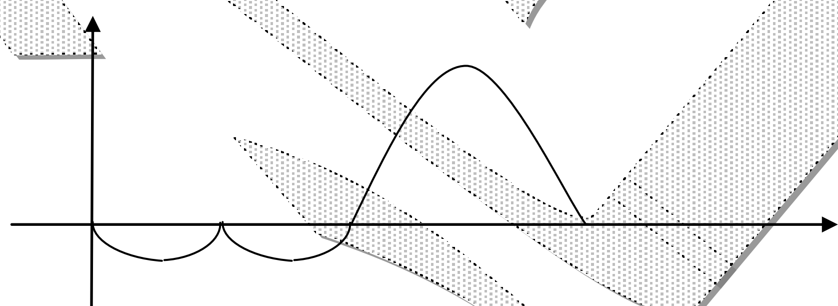
خطوط x=4 , X=0مماس قائم هستند.

چند مثال از رسم توابع مثلثاتی.(ابتدا دوره تناوب را تعیین کنید.)

$$281)\ \mathbf{y = \sin^2 x - \sin x} \quad ;\ T = 2\pi \ ,\ D_f = [0, 2\pi]$$

$$y' = 2\cos x \sin x - \cos x = 0 \ \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \ \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \ \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	-	0	+	0	-	0	+	0	-	
y	0 ↘	$\min(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4})$	↗	$\text{Max}(\frac{\pi}{2}, 0)$	↘	$\min(\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{4})$	↗	$Max(\frac{3\pi}{2}, 2)$	↘	0

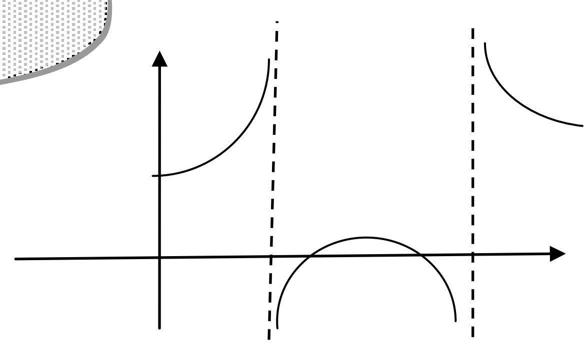


$$282)\ y = \frac{\cos x}{2\cos x - 1} \quad ; \quad T = 2\pi \ , D_f = [0, 2\pi]$$

مجانب های قائم: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

$$y' = \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)^2} = 0 \ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y'	+	+	-	-	
y	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	1



چند مثال از رسم توابع وارون مثلثاتی

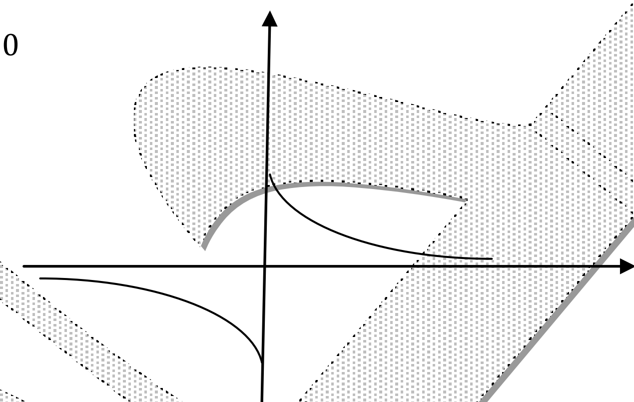
$283)\mathbf{y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \quad ; \qquad \mathbf{D_f = R - \{0\}}$

$(\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}) \implies$ مجانب قائم ندارد .

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$: مجانب افقی $y = 0$

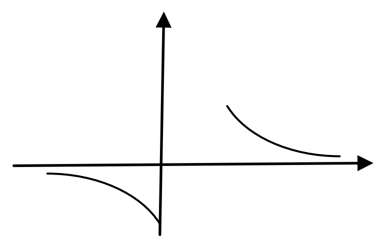
$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$: عطف ندارد .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	||	-
y	0 ↘ $-\frac{\pi}{2}$	||	$+\frac{\pi}{2}$ ↘ 0



$284)y = \sin^{-1}(\frac{1}{x-1}) \quad ; \quad R_f = \left|\frac{1}{x-1}\right| \le 1 \implies (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$: مجانب افقی



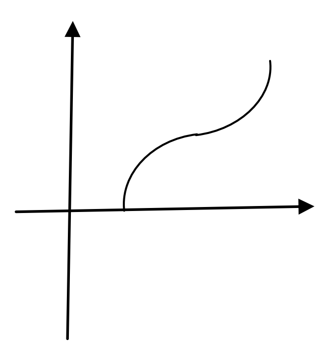
$\mathbf{y' = \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{(x-1)^2}}}} < 0$: علامت مشتق همواره منفی، پس تابع اکیدا نزولی است.

x	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
y'	-		-
y	0 ↘ $-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$ ↘ 0

$285)y = \sin^{-1}\sqrt{x-1} \quad ; \quad \begin{cases} -1 \le \sqrt{x-1} \le 1 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \implies D_f = [1,2]$

$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x-1})^2}} > 0$: همواره صعودی است

x	1 2
y'	↗ + ↗



چند مثال از رسم تابع نمایی

$286)\; y = e^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad D_f = R - \{0\}$

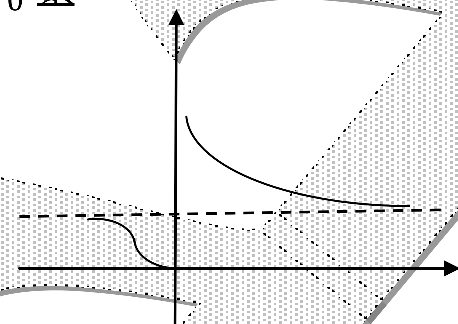
$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \rightarrow$ خط $x = 0$ از سمت راست مجانب قائم است.

$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow$ خط $y = 1$ مجانب افقی است.

$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0 \rightarrow$ تابع اکیدا نزولی است.

$y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right):$ نقطه عطف



x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	‖	-
y	1 ↘ 0	‖	+∞ ↘ 1

(تمرین)- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$287)\; y = -x^3 + 3x^2 + 1$

$288)\; y = x^4 - 8x^2 + 7$

$289) y = \frac{x-2}{x}$

$290) y = \frac{x^2}{x^2-1}$

$291) y = \frac{x^2-3x}{x-4}$

$292) y = x + \sqrt{x^2-1}$

$293) y = sin^{-1}(\frac{1}{x})$

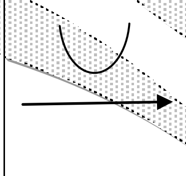
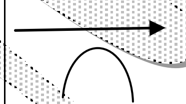
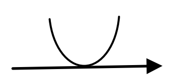
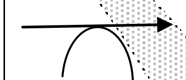
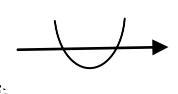
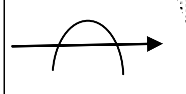
$294) y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

295) $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

296) $y=\frac{1-sinx}{1+cosx}$

نکته

1) در توابع درجه دوم $\boldsymbol{f(x)=ax^2+bx+c}$ نمودار آن به صورت یک سهمی که مختصات راس آن $\left(-\boldsymbol{\frac{b}{2a}},\boldsymbol{\frac{-\Delta}{4a}}\right)$ و خط $\boldsymbol{x=-\frac{b}{a}}$ محور تقارن منحنی است.

	a>0	a<0
$\Delta<0$		
$\Delta=\mathbf{0}$		
$\Delta>0$		

(تست)297 – تابع با ضابطه $y=x^2+ax+4$ می نیمیمی برابر 3 دارد a کدام است ؟

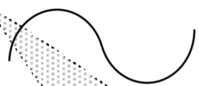
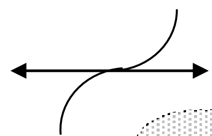
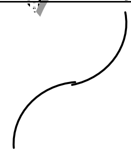
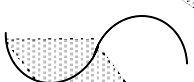
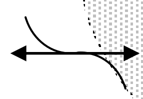
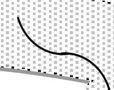
1) ± 1　　2) ± 2　　3) ± 3　　4) ± 4

(تست)298 – نقطه می نیمم تابع $y=x^2+ax+2$ روی نیم ساز ربع سوم قرار دارد، a کدام است ؟

1) -2　　2) 2　　3) -4　　4) 4

نکته

1) توابع درجه سوم به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ که مشتق آن درجه دوم می باشد، ممکن است دو ریشه (دو اکسترمم) داشته باشد، یا یک ریشه و یا بدون ریشه باشد، که داریم:

	$\boldsymbol{f'}$دو ریشه دارد.	$\boldsymbol{f'}$یک ریشه دارد.	$\boldsymbol{f'}$ریشه ندارد.
a>0			
a<0			

2) توابع درجه سوم همواره یک نقطه عطف دارند که مرکز تقارن منحنی بوده و تنها نقطه ای است که خط مماس از منحنی،عبور

3) اگر تابع درجه سوم دارای اکسترمم باشد، داریم:

طه عطف

1) $-32 <$m<0　　2) -64<m<64　　3) -16<m<16　　4)-8<m<8

1)0　　2) 2　　3) 4　　4) 8

1)0　　　2) -1　　　3) 1　　　4) 2

1)(1,-2)　　　2) (-2,4)　　　3) (0,0)　　　4) (2,-1)

چند تست از توابع هموگرافیک

1)1　　　2)2　　　3)3　　　4)4

(تست)304 – در تابع $y=\frac{ax+b}{cx-1}$ خط y=2 مجانب افقی است و نمودار محور عرض ها را در نقطه A به عرض 3 قطع می کند و مماس بر منحنی در نقطه A موازی نیم ساز ربع دوم می باشد. a کدام است؟

1)2　　　2)0　　　3) − 1　　　4) − 2

(تست)305 – تابع f با ضابطه $f(x)=ax+b+\frac{x^2}{x+2}$ یک تابع هموگرافیک است و مرکز تقارنش، روی نیم ساز ربع دوم است. bکدام است؟

1)1　　　2)0　　　3) − 2　　　4)2

(تست)306 – نقطه O(1, 2) مرکز تقارن یک تابع هموگرافیک است و نمودار تابع، از نقطه (4, 0) می گذرد. محل تلاقی این نمودار با محور طول ها کدام است؟

1)x=2 2)x=1 3)x=-2 4)x=4

(تست)307 – اگر نمودار تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ بر نمودار معکوسش منطبق باشد، کدام صحیح است؟

1)a+c=0 2)a=c 3)a+d=0 4)a=d

بحث در مورد توابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

1) برای محاسبه مقادیر اکسترمم این توابع می توان پس از طرفین-وسطین ، معادله را بر حسب x مرتب نموده، سپس Δ=0 قرار داده، ریشه های معادله حاصل، اکسترمم های تابع هستند.

(تست)308 – مجموع مقادیر اکسترمم تابع $y=\frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$ کدام است؟

1) $-\frac{30}{11}$ 2) $\frac{30}{11}$ 3) $-\frac{9}{11}$ 4) $\frac{9}{11}$

$$yx^2+yx+3y-2x^2+3x=0 \to (2-y)x^2-(3+y)x-3y=0 \to \Delta=0 \to -11y^2+30y+9=0$$

(مجموع ریشه ها) : $S=-\frac{b}{a}=\frac{30}{11}$

2) $y_{Max} \times y_{min} = \frac{\Delta_{صورت}}{\Delta_{مخرج}}$

3)اگر مخرج تابع فاقد ریشه باشد، یعنی تابع مجانب قائم نداشته باشد، دو حالت اتفاق می افتد:

الف) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ در این حالت تابع یک اکسترمم و دو نقطه عطف دارد.

ب) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ در این حالت تابع دو اکسترمم سه نقطه عطف دارد.

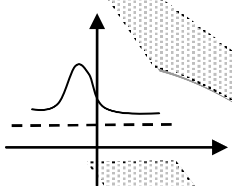
4) اگر مخرج تابع دارای ریشه مضاعف باشد:

الف) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ در این حالت تابع فاقد اکسترمم و نقطه عطف است.

ب) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ در این حالت تابع یک اکسترمم و یک نقطه عطف دارد.

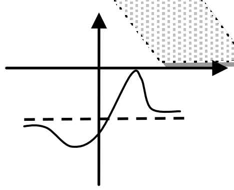
(تست)309 – منحنی نمایش تابع $y=\frac{4x^2+8x+9}{x^2+2x+2}$ دارای:

1)یک نقطه عطف است.　2) دو نقطه عطف است.　3) سه نقطه عطف است.　4) فاقد اکسترم است.



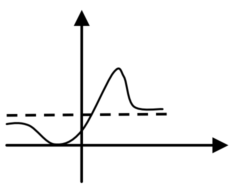
(تست)310 – اگر شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{x^2-2x+7}{x^2-ax+b}$ باشد، aکدام است ؟

1)1　2) -2　3)2　4) -1



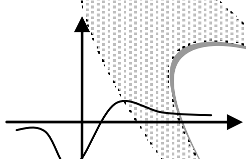
(تست)311 – شکل مقابل مربوط به $y=\frac{ax^2+4x-4}{x^2+b}$ است.(a , b)کدام است؟

1)(-1,3)　2) (-2,5)　3)(-1,5)　4) (1,3)



(سوال امتحان)312 – b,a را چنان بیابید که نمودار تابع f با ضابطه $y=\frac{x^2+ax+1}{2x^2+b}$

به صورت مقابل باشد.



(تست)313 – اگر نمودار $y=\frac{ax+b}{x^2+1}$ به صورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است ؟

1) 1　2)-1　3)2　4)-7