گروه آموزشی آلم
www.alm.loxblog.com

ریاضیات ۲

سال دوم آموزش متوسطه

رشته های ریاضی و فیزیک،
علوم تجربی و فنی حرفه ای

- آموزش جامع و کامل درس
- به همراه مثال های آموزشی و جواب

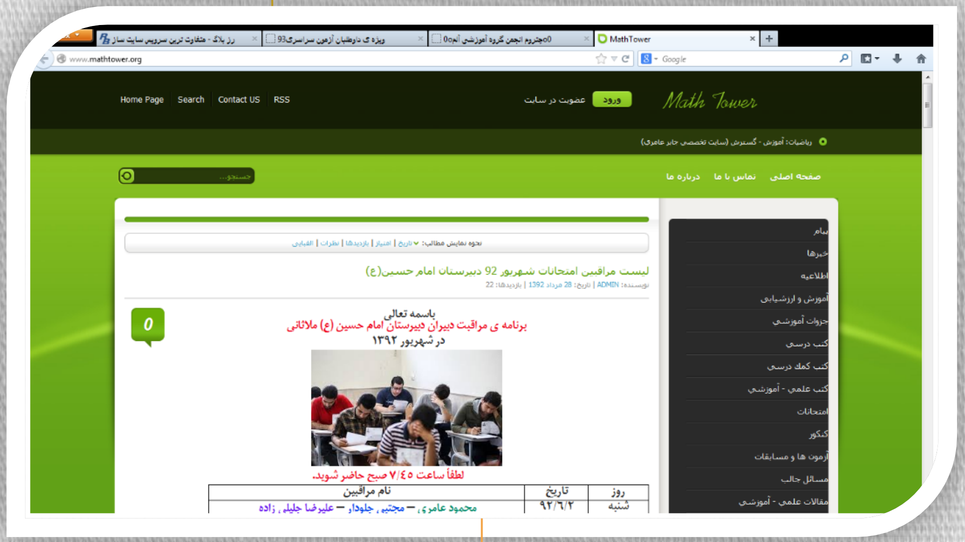
مولف: استاد جابر عامری

باسمه تعالی

کتاب ریاضیات ۲

گروه آموزشی آلم

سایت مولف



www.mathtower.org

برای دریافت سوالات و جزوات
بیشتر در زمینه ی ریاضیات به
سایت مولف مراجعه فرمائید

Math tower

نام کتاب : آموزش ریاضیات۲

ناشر : گروه آموزشی آلم

مولف : استاد جابر عامری

حروف چینی: مولف

صفحه آرایی : مولف

نوبت چاپ: بیست و ششم –۱۳۹۲

تیراژ : n جلد

قیمت : نداره

سایت: www.g-alm.ir

ایمیل: grohealm@gmail.com

عنوان کتاب : ریاضی۲

پدیدآورنده : جابر عامری

مشخصات گروه : گروه آلم ، ۱۳۹۱

مشخصات ظاهری کتاب : ۱۳۷ صفحه، ۲۹*۲۱

موضوع : مدارس–دبیرستان

موضوع: ریاضیات

موضوع : ریاضیات– ریاضی۲

تا یادم نرفته راه های ارتباطی مون رو به تون بگم که اگه یه کاری داشتین چه می دونم نظری چیز دیگه ای داشتین با هامون در میون بذارید

www.g-alm.ir grohealm@gmail.com ۰۹۳۷۸۷۶۵۶۵۵

فهرست مباحث

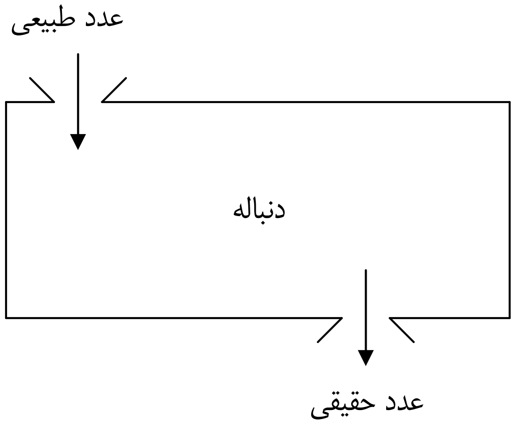
ریاضی ۲

فصل اول : دنباله ، الگو ، توان رسانی ، ریشه گیری

دنباله

هر عبارت جبری بر حسب یک حرف (مانند n) را یک دنباله می نامند. هرگاه عدد طبیعی می گیرد و عدد طبیعی می دهد.

برای مثال عبارت $a_n = \frac{n}{۲n+۱}$ یک دنباله است. با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n می توان یک عدد حقیقی به دست آورد.



توجه :

۱ : این عبارت جبری را **جمله ی عمومی دنباله** می نامند.

۲ : جمله ی عمومی می تواند یک عدد ثابت نیز باشد. مثلاً $a_n = ۵$

مثال : عبارت $a_n = \frac{۳n+۱}{n^۲}$ یک دنباله است.

جمله ی اول $n=۱ \rightarrow a_۱ = \frac{۳(۱)+۱}{(۱)^۲} = \frac{۴}{۱} = ۴$

جمله ی دوم $n=۲ \rightarrow a_۲ = \frac{۳(۲)+۱}{(۲)^۲} = \frac{۷}{۴}$

جمله ی سوم $n=۳ \rightarrow a_۳ = \frac{۳(۳)+۱}{(۳)^۲} = \frac{۱۰}{۹}$

جمله ی چهارم $n=۴ \rightarrow a_۴ = \frac{۳(۴)+۱}{(۴)^۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$

....

جمله ی عمومی (جمله ی nام) $a_n = \frac{۳n+۱}{n^۲}$

جملات این دنباله را می توان به شکل زیر نیز نوشت :

۴ و $\frac{۷}{۴}$ و $\frac{۱۰}{۹}$ و $\frac{۱۳}{۱۶}$ و .....

تمرین : پنج جمله ی اول دنباله ی زیر را تعیین کنید.

$$a_n = \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n+۳}$$

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = \frac{n+۳}{۲n+۱}$ می باشد. جمله ی چهارم این دنباله را به دست آورید.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = ۲^n - ۳n$ می باشد. جمله ی پنجم این دنباله را به دست آورید.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = (-۱)^{n+۱} n^۲$ می باشد. جمله ی ششم این دنباله را به دست آورید.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = -۳n + ۵$ می باشد. تعیین کنید که جمله ی چندم این دنباله برابر ۱۶- می باشد.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^۲ + ۲n - ۳$ می باشد. کدام جمله ی این دنباله ۳۲ می باشد.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = ۳^n - ۱$ می باشد. حساب کنید که جمله ی چندم این دنباله ۸۰ می باشد.

تمرین : با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.

الف : تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

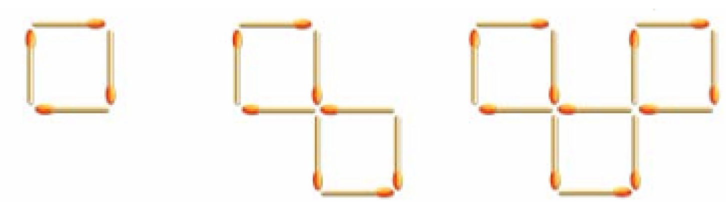
ب : برای ساختن شکل چهارم چند چوب کبریت نیاز است؟

ب : جمله ی nام دنباله ی مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.

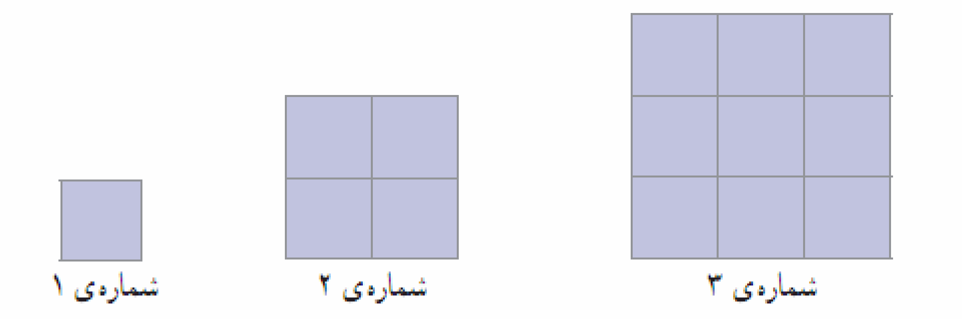
تمرین : جمله ی عمومی دنباله ی زیر را بنویسید.

.... و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲

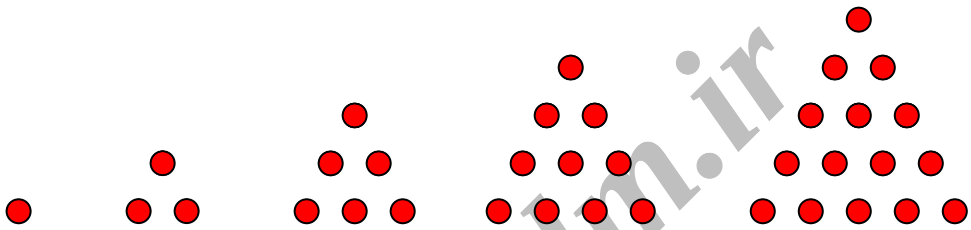
تمرین : جمله ی عمومی دنباله ی مربوط به شکل های زیر که با چوب کبریت ساخته شده است، را بنویسید.



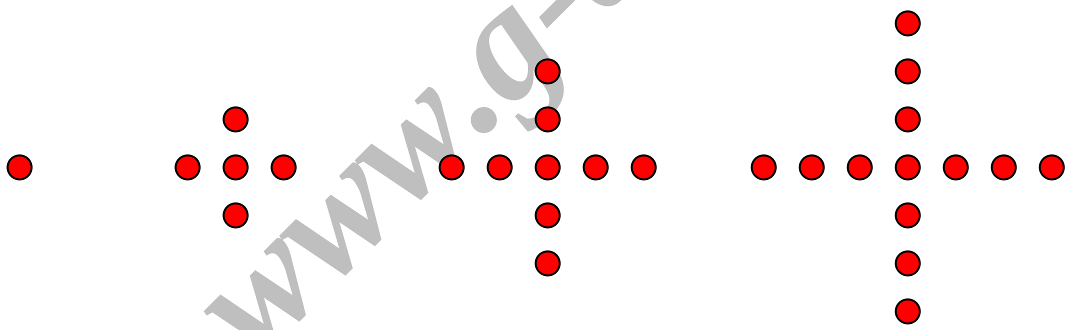
تمرین : دنباله ی مربوط به تعداد مربع های کوچک هر شکل را نوشته و سپس جمله ی nام آن بیابید



تمرین : جملات دنباله ای دارای الگوی زیر می باشند. جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.



تمرین : جملات دنباله ای دارای الگوی زیر می باشند. جمله ی بیستم این دنباله را به دست آورید.



تمرین : کدام یک از عبارت های زیر دنباله نمی باشد؟ چرا ؟

الف : $3n(-1)^n$ ب) $a_n = \frac{4n+7}{2n-6}$ ج) $a_n = \frac{n+1}{n}$ د) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

***

دنباله ی حسابی (عددی)

هر دنباله که تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی باشد را دنباله ی حسابی می نامند و این عدد ثابت را قدرنسبت مـی گویند و آن را با d نمایش می دهند.

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی است، زیر تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن برابر ۴ است؟

۵ و ۹ و ۱۳ و ۱۷ و ....

جمله ی اول $a = a_۱ = ۵$

قدر نسبت $d = ۴$

تمرین : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله ی حسابی است؟ چرا ؟

الف) ۵ و ۷ و ۱۰و۱۴و ....

ب) ۵ و ۳ و ۱ و ۱- و ....

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

اگر a جمله ی اول و d قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت :

جمله ی اول $a_۱ = a$

جمله ی دوم $a_۲ = a_۱ + d = a + d$

جمله ی سوم $a_۳ = a_۲ + d = (a+d) + d = a + ۲d$

جمله ی چهارم $a_۴ = a_۳ + d = (a+۲d) + d = a + ۳d$

جمله ی پنجم $a_۵ = a_۴ + d = (a+۳d) + d = a + ۴d$

....

جمله ی عمومی (nام) $a_n = a + (n-۱)d$

تمرین : دنباله ی حسابی زیر را در نظر بگیرید.

۳ و ۷ و ۱۱ و .....

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی بیست و یکم این دنباله را بدست آورید.

تمرین : جمله ی پانزده ام دنباله ی حسابی زیر را تعیین کنید.

.... و ۲ و ۵ و ۸

تمرین : در یک دنباله ی حسابی جمله ی هفتم ۲۷ و جمله ی سوم ۱۱ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اول این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بدست آورید.

تمرین : اگر دو جمله ی غیر متوالی a_i و a_j از یک دنباله ی حسابی معلوم باشند. ثابت کنید که $d=\frac{a_i-a_j}{i-j}$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی حسابی استفاده کنیم.

$$a_n=a+(n-1)d$$

$$a_i=a+(i-1)d \rightarrow a_i=a+id-d$$
$$a_j=a+(j-1)d \rightarrow a_j=a+jd-d$$

$$\rightarrow a_i-a_j=(a+id-d)-(a+jd-d)$$
$$\rightarrow a_i-a_j=a+id-d-a-jd+d \rightarrow a_i-a_j=id-jd \rightarrow a_i-a_j=(i-j)d$$
$$\rightarrow d=\frac{a_i-a_j}{i-j}$$

تمرین : در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم ۱۷ و جمله ی دوازدهم ۵۲ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، ثابت کنید که : $2y=x+z$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله ی حسابی تفاضل هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی است. این عـدد ثابـت را قدرنـسبت مـی نامند و آن را با d نمایش می دهند.

$$\begin{matrix} d=y-x \\ d=z-y \end{matrix} \rightarrow y-x=z-y \rightarrow 2y=x+z$$

تمرین : در دنباله ی حسابی زیر مقدار t را به دست آورید.

.... و ۲۳ و t و ۷

تمرین : در دنباله ی حسابی زیر مقدار x را تعیین کنید.

$$1-x \text{ و } 2+x \text{ و } 1+2x \text{ و } ......$$

تمرین : اگر زاویه های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله ی حسابی تشکیل شود. نشان دهید کـه یکـی از زاویه های این مثلث ۶۰ درجه است.

تمرین : در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات نهم و سیزدهم و بیستم برابر ۷۸ است. جمله ی چهاردهم ایـن دنبالـه را بـه دست آورید.

***

دنباله ی هندسی

هر دنباله که خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی باشـد را دنبالـه ی هندسـی مـی نامنـد و ایـن عـدد ثابـت را قدرنسبت می گویند و آن را با q نمایش می دهند[1].

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی هندسی است، زیر خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن برابر ۲- است؟

۳ و ۶- و ۱۲ و ۲۴- و ....

جمله ی اول $a=a_1=3$

قدر نسبت $q=-2$

تمرین : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله ی حسابی و کدام یک هندسی است؟ چرا ؟

الف) ۳ و ۵- و ۱۳- و۲۱- و....

ب) ۵ و ۱۵ و ۴۵ و ۱۳۵ و ....

ج) ۵ و ۷ و ۱۴ و ۱۶و ۳۲ و ....

د) 2 و $2\sqrt{3}$ و 6 و $6\sqrt{3}$ و 18 و ....

هـ) 2 و 1 و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و ....

جمله ی عمومی دنباله ی هندسی

اگر a جمله ی اول و q قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت :

جمله ی اول $a_1=a$

جمله ی دوم $a_2=a_1q=aq$

---

[1]. در هر دنباله ی هندسی جمله ی اول و قدر نسبت ، نباید صفر باشند.

جمله ی سوم $a_3 = a_2q = (aq)q = aq^2$

جمله ی چهارم $a_4 = a_3q = (aq^2)q = aq^3$

جمله ی پنجم $a_5 = a_4q = (aq^3)q = aq^4$

....

جمله ی عمومی (nام) $a_n = aq^{n-1}$

تمرین : دنباله ی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

۳ و ۶ و ۱۲ و .....

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی پنجم این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین : جمله ی پانزده ام دنباله ی هندسی زیر را تعیین کنید.

۸ و ۴ و ۲ و ....

تمرین : در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم ۱۶۲ و جمله ی دوم ۶ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اول این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین : اگر دو جمله ی غیر متوالی a_j و a_i از یک دنباله ی هندسی معلوم باشند. ثابت کنید که $q = \sqrt[i-j]{\frac{a_i}{a_j}}$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی هندسی استفاده کنیم.

$$a_n = aq^{n-1}$$

$$a_i = aq^{i-1}$$
$$a_j = aq^{j-1}$$
$$\rightarrow \frac{a_i}{a_j} = \frac{aq^{i-1}}{aq^{j-1}} \rightarrow \frac{a_i}{a_j} = \frac{q^{i-1}}{q^{j-1}} \rightarrow \frac{a_i}{a_j} = q^{i-1-j+1} \rightarrow \frac{a_i}{a_j} = q^{i-j}$$

تمرین : در یک دنباله ی هندسی جمله ی هفتم ۸۱ و جمله ی چهارم ۳ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، ثابت کنید که : $y^2 = xz$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله ی هندسی تفاضل هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدر نسبت می نامند و آن را با q نمایش می دهند.

$$\left.\begin{array}{l} q = \dfrac{y}{x} \\ q = \dfrac{z}{y} \end{array}\right. \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \rightarrow y^2 = xz$$

تمرین : در دنباله ی هندسی زیر مقدار t را به دست آورید.

۷ و t و ۶۳ و ....

تمرین : در دنباله ی هندسی زیر مقدار x را تعیین کنید.

x و ۶ و $9x$ و ......

تمرین : بین دو عدد $2^5 \times 3^9$ و $2^3 \times 3^7$ عددی قرار دهید که دنباله ی هندسی تشکیل شود.

تمرین : در یک دنباله ی هندسی قدرنسبت ۲ و $a_5 - a_3 = 48$. این دنباله را مشخص کنید.

تمرین : وسط های اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۸ را به هم وصل می کنیم و این عمل را روی مثلث جدید انجام می دهیم. اگر این عمل را بی شمار بار تکرار کنیم. مساحت های مثلث های ایجاد شده دنباله ای را می سازند.

الف : نوع دنباله را مشخص کنید.

ب : جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین : توپی طوری ساخته شده است که وقتی به زمین بخورد $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی اش ، بالا می رود. اگر این توپ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۸۱ متر رها شود، دنباله ی پایین آمدن های توپ را بنویسید و سپس جمله ی عمومی آن را مشخص کنید.

تمرین : در اولین خانه ی شطرنج یک دانه گندم قرار می دهیم. در خانه ی دوم شطرنج دو دانه گندم قرار می دهیم. در خانه ی سوم شطرنج چهار دانه گندم قرار می دهیم. به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه ی قبلی دانه ی گندم قرار می دهیم. دنباله ی حاصل از تعداد دانه های گندم در هر خانه را نوشته و جمله ی عمومی آن را مشخص کنید.

***

دنباله ی ثابت

هر دنباله که تمام جملات آن برابر باشند، را دنباله ی ثابت می نامند. مانند دنباله ی زیر

۵ و ۵ و ۵ و ۵ و ...

این دنباله ، هم دنباله ی حسابی ($d=0$) و هم دنباله ی هندسی ($q=1$) می باشد.

***

همگرایی دنباله (نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد)

برخی از دنباله ها به گونه ای هستند که اگر به جملات آنها دقت کنیم، مشاهده می کنیم که این جملات بویژه در مراتب بالاتر به عدد خاصی نزدیک و نزدیکتر می شوند. در اصطلاح می گویند، این دنباله به عدد مورد نظر همگرا است.

مثال : جملات دنباله ی زیر به عدد یک نزدیک می شوند.

۰/۹ و ۰/۹۹ و ۰/۹۹۹ و ۰/۹۹۹۹ و ....

برای اثبات این مطلب کافی است هر یک از جملات دنباله را از عدد یک کم کنیم و سپس نشان دهیم که جملات دنباله ی جدید (دنباله ی تفاضل ها) به صفر نزدیک می شوند.

$$1-\frac{9}{10} \text{ و } 1-\frac{99}{100} \text{ و } 1-\frac{999}{1000} \text{ و } 1-\frac{9999}{10000} \text{ و } \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \text{ و } \frac{1}{100} \text{ و } \frac{1}{1000} \text{ و } \frac{1}{10000} \text{ و } \ldots$$

و چون جملات دنباله ی تفاضل ها به صفر نزدیک می شوند، پس دنباله ی اصلی به یک نزدیک می شوند.

تمرین : نشان دهید که جملات دنباله ی زیر به $\frac{16}{9}$ نزدیک می شوند.

۱/۷ و ۱/۷۷ و ۱/۷۷۷ و ۱/۷۷۷۷ و ....

تمرین : جملات دنباله ی زیر به چه عددی نزدیک می شوند. حدس بزنید و سپس حدس خود را ثابت کنید.

۵/۰۵ و ۵/۰۰۵ و ۰/۰۰۰۵ و ....

تذکر : قرار داد می کنیم که جملات دنباله ی ثابت ، به مقدار ثابت دنباله نزدیک می شوند. برای مثال جملات دنباله ی ۴ و ۴ و ۴ و ۴ و .... به عدد ۴ نزدیک می شوند.

***

دنباله ی تقریبات اعشاری یک عدد حقیقی

گاهی اوقات می توان دنباله ای از اعداد اعشاری طوری ایجاد کرد که به عدد خاصی نزدیک می شود. این دنباله را دنباله ی تقریبات اعشاری عدد مورد نظر می نامند.

با تقسیم صورت بر مخرج یک کسر یا با محاسبه ی ریشه ی اعشاری یک عدد می توان دنباله ی تقریبات اعشاری آن عدد را تا چند رقم اعشار به دست آورد.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۱}{۹}$ را بنویسید.

حل : با تقسیم عدد ۱۱ بر ۹ دنباله ی زیر را می توان تشکیل داد. این دنباله را دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۱}{۹}$ می نامند.

$$۱/۲ \text{ و } ۱/۲۲ \text{ و } ۱/۲۲۲ \text{ و } ۱/۲۲۲۲ \text{ و } ...$$

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۳}{۱۱}$ را بنویسید.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۳}{۷}$ را بنویسید.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۲}$ را بنویسید.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۳}$ را بنویسید.

تمرین : اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق کند. چهار جمله ی اول تقریبات اعشاری x را بنویسید.

$$۲x+۱<۱۹/۹۴۷۲ \text{ و } ۱۰-x<۰/۵۲۶۵$$

***

ریشه گیری از اعداد حقیقی

فرض کنید که n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک و a و b اعداد حقیقی باشند و که $a^n=b$ آنگاه a را ریشه ی n ام عدد b می نامند و آن را با نماد $\sqrt[n]{b}$ نمایش می دهند. عدد طبیع n را فرجه ی رادیکال می گویند.

$$a^n=b \rightarrow \sqrt[n]{b}=a$$

مثال ۱:

$$۲^{۳}=۸ \rightarrow \sqrt[۳]{۸}=۲$$

یعنی ۲ ریشه ی سوم عدد ۸ است.

مثال ۲:

$$(-۵)^{۳}=-۱۲۵ \rightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵}=-۵$$

یعنی ۵- ریشه ی سوم عدد ۱۲۵- است.

مثال ۳:

$$۲^{۵}=۳۲ \rightarrow \sqrt[۵]{۳۲}=۲$$

یعنی ۲ ریشه ی پنجم عدد ۳۲ است.

مثال ۴:

$$۳^{۲}=۹ \rightarrow \sqrt{۹}=۳$$

یعنی ۳ ریشه ی پنجم عدد ۹ است.

توجه: اگر فرجه ی رادیکال عدد ۲ باشد، معمولاً آن را نمی نویسند. یعنی

$$a^{۲}=b \rightarrow \sqrt{b}=a$$

عدد a را جذر b نیز می خوانند. واضح است که

الف : هر عدد مثبت دو ریشه ی دوم دارد. برای مثال ۲۵ دو ریشه ی دوم دارد. یکی $۵=\sqrt{۲۵}+$ و دیگری $-۵=\sqrt{۲۵}-$

ب : اعداد منفی ریشه ی دوم ندارند. برای مثال ۹- ریشه ی دوم ندارد. زیرا هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که بتوان ۲ برسد و ۹- بدست آید. در اصطلاح گویند $\sqrt{-۹}$ تعریف نشده یا نامعین است.[2]

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۶۴}=$ ۴) $\sqrt{۱۶}=$ ۷) $\sqrt[۳]{-۸}=$

۲) $\sqrt[۴]{۱۶}=$ ۵) $\sqrt[۴]{۸۱}=$ ۸) $\sqrt[۴]{-۸۱}=$

۳) $\sqrt[۵]{۳۲}=$ ۶) $\sqrt{-۲۵}=$

[2] . این دو خاصیت برای رادیکال های با فرجه ی زوج نیز درست است.

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۲۱۶} =$ ۴) $\sqrt{-۳۶} =$ ۷) $\sqrt{(-۲)^{۴}} =$

۲) $\sqrt[۳]{-۸} =$ ۵) $\sqrt[۴]{-۸۱} =$ ۸) $\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}} =$

۳) $\sqrt[۵]{-۳۲} =$ ۶) $-\sqrt{۱۰۰} =$ ۹) $\sqrt[۷]{۱} =$

تذکر :

۱ : از این به بعد هر کجا عبارت $\sqrt[n]{x}$ مورد استفاده قرار گیرد.منظور x و n هایی می باشند که رادیکال قابل تعریف باشد.

۲ : ریشه ی دوم هر عدد مثبت را جذر و ریشه ی سوم را کعب می نامند.

۳ : ریشه ی nام عدد یک برابر یک است. $\sqrt[n]{۱} = ۱$

نتیجه: برای هر x حقیقی همواره داریم:

$$\sqrt{x^{۲}} = |x|$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt{(-۵)^{۲}} =$ ۲) $\sqrt{۷^{۲}} =$ ۳) $-\sqrt{(-۳)^{۲}} =$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^{۲}} =$ ب) $\sqrt{(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})^{۲}} =$

***

توان رسانی با اعداد گویا

اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی مخالف یک باشد، عبارت $\sqrt[n]{a}$ را با نماد $a^{\frac{۱}{n}}$ نمایش می دهند.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{۱}{n}}$$

مثال: $\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}}$, $\sqrt[۳]{۶} = ۶^{\frac{۱}{۳}}$

نتیجه : اگر a یک عدد حقیقی و m و n دو عدد طبیعی غیر یک باشند. در این صورت داریم:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

مثال: $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{6^4} = 6^{\frac{4}{3}}$

تمرین : عبارت $9^{1/5}$ را به صورت رادیکالی بنویسید. سپس مقدار آن را به دست آورید.

تمرین : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$4^{\frac{3}{2}} =$$

تمرین : برای هر عدد گویای r ثابت کنید که $1^r = 1$

حل : فرض کنید که $r = \frac{m}{n}$ (n و m دو عدد صحیح و $n \neq 0$) در این صورت :

$$1^r = 1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1$$

قوانین توان رسانی با ، توان های صحیح برای توان های گویا نیز برقرار است. یعنی اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا باشند. در این صورت:

$$a^r.b^r = (ab)^r \qquad a^r.a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

تمرین : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و s و r دو عدد گویای دلخواهی باشند. ثابت کنید که :

$$1)\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad 2)\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

حل :

۱ :

$$(\frac{a}{b})^r = (a \times \frac{1}{b})^r = (a)^r \times (\frac{1}{b})^r = a^r \times \frac{1}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$$

۲ :

$$\frac{a^r}{a^s} = a^r \times \frac{1}{a^s} = a^r \times a^{-s} = a^{r+(-s)} = a^{r-s} = a^{r-s}$$

تمرین : برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی و مثبت a نشان دهید که $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

حل :

$$a^{-r}=(a^{-1})^r=(\frac{1}{a})^r=\frac{1^r}{a^r}=\frac{1}{a^r}$$

قوانین رادیکال ها: با توجه به تعریف فوق ، اعمال زیر مانند اعمال روی توان ها می توان بیان کرد.

۱) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

۲) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۳) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

۴) $\sqrt[n]{a^n}=a$ اگر n فرد باشد.

۵) $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ اگر n زوج باشد.

۶) $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$ اگر b مثبت باشد.

۷) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

۸) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

تمرین : هر یک از قوانین فوق را ثابت کنید.

اثبات ۱ :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$$

اثبات۲ :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

اثبات ۳ :

$$(\sqrt[n]{a})^m=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

اثبات ۶ :

$$b\sqrt[n]{a}=b(a^{\frac{1}{n}})=(b^n)^{\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}})=(b^n a)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b^n a}$$

اثبات ۷ :

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

اثبات ۸ :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{(a)^{\frac{۱}{n}}} = ((a)^{\frac{۱}{n}})^{\frac{۱}{m}} = a^{\frac{۱}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

نتیجه: به کمک قوانین بیان شده برای رادیکال ها به سادگی داریم.

الف) $a\sqrt[n]{x} \times b\sqrt[n]{y} = ab\sqrt[n]{xy}$ ب) $\frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{y}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ ج) $(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را به کمک خواص رادیکال محاسبه کنید.

۱) $\sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۶} =$

۲) $\sqrt[۵]{۳} \times \sqrt[۵]{۲} \times \sqrt[۵]{۴} =$

۳) $\sqrt{۲۰۰} \div \sqrt{۲} =$

۴) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۹}} =$

۵) $\sqrt{۵} \times \sqrt{۲۰} =$

۶) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}} =$

۷) $\sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۴} =$

۸) $\sqrt[۳]{۱۶} \div \sqrt[۳]{۲} =$

۹) $(\sqrt[۳]{۲})^۳ \times (\sqrt{۳})^۶ =$

۱۰) $\sqrt[۳]{۵} \times \sqrt{۵} =$

۱۱) $\sqrt[۱۲]{۳^۴} \times \sqrt[۶]{۳^۸} =$

۱۲) $\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} =$

۱۳) $\sqrt[۳]{\sqrt{۱۲۵}} =$

۱۴) $\sqrt[۳]{-۲\sqrt{۲}} =$

تمرین: در هر مورد ضریب را به داخل رادیکال ببرید و حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۱) $۳\sqrt{۵} =$

۲) $۲\sqrt[۳]{۵} =$

۳) $۲\sqrt[۳]{\sqrt{۵}} =$

۴) $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۵}} =$

۵) $\sqrt{۴\sqrt{۲\sqrt{۲}}} =$

۶) $۵\sqrt[۳]{۵} \times ۳\sqrt[۴]{۳} =$

تمرین: تساوی های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{۳۲}=$ ۳) $\sqrt[۵]{۱۲۸}=$ ۵) $\sqrt{۳۶a^۵b^۷c^{۱۰}}=$

۲) $\sqrt[۳]{۳۲}=$ ۴) $\sqrt{۵۰x^۶y^۹}=$ ۶) $\sqrt[۳]{۱۶x^۶y^{۱۲}z^{۱۴}}=$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۷})(\sqrt{۳}+\sqrt{۷})=$ ۲) $\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}=$

تمرین : درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=a$$

حل :

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{n})^{m}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$$

تمرین : برای هر عدد حقیقی و مثبت a و اعداد طبیعی m و n درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

حل :

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=a^{\frac{۱}{m}}\times a^{\frac{۱}{n}}=a^{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}}=a^{\frac{m+n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

رادیکال های متشابه: دو یا چند رادیکال را متشابه می نامند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف: فرجه های مساوی داشته باشند.

ب: اعداد زیر رادیکال ها برابر باشند.

برای مثال هر دسته از رادیکال های زیر متشابهند.

الف) $۲\sqrt[۳]{۵}\ ,\ -۴\sqrt[۳]{۵}\ ,\ \frac{۱}{۷}\sqrt[۳]{۵}\ ,\ -\sqrt[۳]{۵}\ ,\ \sqrt[۳]{۵}$

ب) $۳\sqrt{x}\ ,\ -۲\sqrt{x}\ ,\ \frac{۲}{۳}\sqrt{x}\ ,\ ۱\frac{۲}{۷}\sqrt{x}\ ,\ -\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{x}$

نتیجه: رادیکال های متشابه فقط در ضرایب آنها اختلاف دارند.

جمع و تفریق رادیکال ها

دو رادیکال را وقتی می توان جمع یا تفریق کرد که متشابه باشند.[۳] در این صورت حاصل، رادیکالی متشابه آنها است، بطوری که ضریب آن از جمع یا تفریق رادیکال های داده شده بدست می آید.

برای مثال:

الف) $۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=(۵+۲-۱)\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$

ب) $۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x}+۵\sqrt[۳]{x}+۳\sqrt[۳]{x}-۴\sqrt[۳]{x}=(۲-۱+۵+۳-۴)\sqrt[۳]{x}=۵\sqrt[۳]{x}$

ولی رادیکال های زیر به دلیل متشابه نبودن نمی توان جمع یا تفریق کرد.

الف) $۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۶}$ ب) $\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt[۵]{x}$

تمرین: عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱) $۵\sqrt{۲}+۷\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=$

۲) $۴\sqrt{۲}-۷\sqrt{۳}-۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}=$

۳) $\sqrt{x}+۲\sqrt{y}-۳\sqrt{x}+۴\sqrt{y}-۵\sqrt{x}+۶\sqrt{y}=$

۴) $۴\sqrt[۵]{m}+۳\sqrt[۵]{n}-۲\sqrt[۵]{m}+۸\sqrt[۵]{n}=$

تذکر: گاهی لازم است قبل از انجام عمل جمع یا تفریق دو رادیکال آنها را ساده کرد.

تمرین: عبارت های زیر را ساده کنید.

۱) $۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۳}=$

۲) $۶\sqrt{۳}-\sqrt{۹۸}+\sqrt{۵۰}+\sqrt{۲۷}+۲\sqrt{۲۰۰}=$

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۷۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۱۵۰}}=$

۴) $۵\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۳۲}-\sqrt[۳]{۱۰۸}=$

۵) $۲\sqrt[۳]{x}+۳\sqrt{x}-۴\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt{x}=$

۶) $\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۲)-\sqrt{۳}(۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=$

۷) $(۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}-۵\sqrt{۲})=$

۸) $(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})=$

***

۳. توجه کنید که شرط ضرب یا تقسیم رادیکال ها فقط مساوی بودن فرجه های آنها است ولی شرط جمع و تفریق رادیکال ها متشابه بودن آنها می باشد.

توان رسانی با اعداد حقیقی

گاهی اوقات توان یک عدد می تواند یک عدد حقیقی نیز باشد. برای مثال $۲^{\sqrt{۵}}$

معمولاً محاسبه ی مقدار واقعی این اعداد امکان پذیر نیست و اغلب از تقریبات اعشاری آنها استفاده می شود. برای مثال محاسبه مقدار دقیق $۵^{\sqrt{۲}}$ مشکل است ، ولی می توان مقدار تقریبی این عدد را با دقت چند رقم اعشار تعیین کرد. مثلاً:

$$۲^{\sqrt{۳}} = ۲^{۱/۷} = ۲^{\frac{۱۷}{۱۰}} = \sqrt[۱۰]{۲^{۱۷}} = \sqrt[۱۰]{۱۳۱۰۷۲} = ۳/۲۴$$

قوانین توان رسانی با توان های صحیح برای توان های حقیقی نیز برقرار است. یعنی اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی دلخواهی باشند. در این صورت:

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad a^r.b^r = (ab)^r \qquad ۱^r = ۱$$

$$a^r.a^s = a^{r+s} \qquad a^{-r} = \frac{۱}{a^r}$$

تمرین : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و s و r دو عدد حقیقی دلخواهی باشند. ثابت کنید که :

$$۱)\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad ۲)\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

حل :

۱ :

$$(\frac{a}{b})^r = (a \times \frac{۱}{b})^r = (a)^r \times (\frac{۱}{b})^r = a^r \times \frac{۱}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$$

۲ :

$$\frac{a^r}{a^s} = a^r \times \frac{۱}{a^s} = a^r \times a^{-s} = a^{r+(-s)} = a^{r-s} = a^{r-s}$$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱)\ ((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}} =$$

$$۲)\ ((\sqrt[۳]{۵})^{۳-\sqrt{۳}})^{۳+\sqrt{۳}} =$$

$$۳)\ ((\sqrt{۱۰})^{۲-\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}} =$$

$$۴)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} =$$

$$۵)\ (۲-\sqrt[۳]{۷})^{\pi+۱}(۴+۲\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۴۹})^{\pi+۱} =$$

تمرین : عبارت زیر را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}} =$$

تمرین : حاصل عبارت $\dfrac{۴^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}} \times ۸^{\sqrt{۳}}}$ را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل :

$$\frac{۴^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}} \times ۸^{\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۲\sqrt{۳}} \times ۲^{۵\sqrt{۳}}}{۲^{۲\sqrt{۳}} \times ۲^{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۷\sqrt{۳}}}{۲^{۵\sqrt{۳}}} = ۲^{۲\sqrt{۳}}$$

تمرین : مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۲}} + ۱ = ۵$$

حل :

$$x^{\sqrt{۲}} + ۱ = ۵ \rightarrow x^{\sqrt{۲}} = ۴ \rightarrow (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (۴)^{\sqrt{۲}} \rightarrow x^{۲} = ۲^{۲\sqrt{۲}} \rightarrow x = ۲^{\sqrt{۲}}$$

تمرین : مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} = ۲$$

تمرین : دو عدد $\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}}$ و $\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$ را با هم مقایسه کنید.

حل : ابتدا عدد داده شده را به توان $\sqrt{۱۲}$ می رسانیم.

$$(\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}} = \sqrt{۲}^{\sqrt{۳۶}} = \sqrt{۲}^{۶} = ۲^{۳} = ۸$$

$$(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۱۲}} = \sqrt{۳}^{\sqrt{۲۴}} = \sqrt{۳}^{۲\sqrt{۶}} = (\sqrt{۳}^{۲})^{\sqrt{۶}} = ۳^{\sqrt{۶}}$$

واضح است که $۹ > ۳^{۲} > ۳^{\sqrt{۶}}$ پس $۸ > ۳^{\sqrt{۶}}$ یعنی $\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}} > \sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$

تمرین : جملات دنباله ی زیر به چه عددی نزدیک می شوند؟ چرا؟

$۸^{۱/۳}$ و $۸^{۱/۳۳}$ و $۸^{۱/۳۳۳}$ و ...

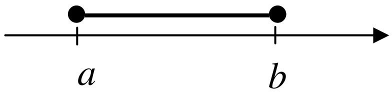
***

فاصله (بازه)

هر قطعه از مجموعه ی اعداد حقیقی را یک فاصله یا بازه می نامند.اگر b و a دو عدد حقیقی و $a<b$ بازه های زیر را می توان معرفی کرد.

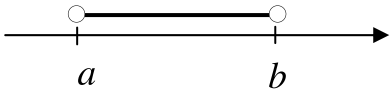
الف : بازه هایی که از دو طرف محدود می باشند.

۱) بازه ی بسته



$$[a,b]=\{x\mid x\in R, a\le x\le b\}$$

۲) بازه ی باز



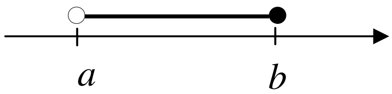
$$(a,b)=\{x\mid x\in R, a<x<b\}$$

ب : بازه هایی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر باز می باشند.

۳)

$$[a,b)=\{x\mid x\in R, a\le x<b\}$$

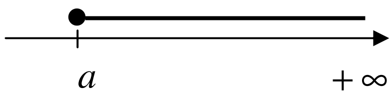
۴)



$$(a,b]=\{x\mid x\in R, a<x\le b\}$$

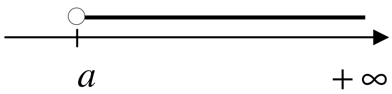
ج : بازه هایی که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود می باشند.

۵)



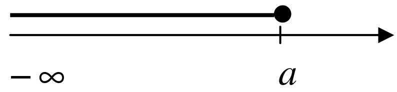
$$[a,+\infty)=\{x\mid x\in R, x\ge a\}$$

۶)



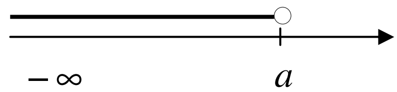
$$(a,+\infty)=\{x\mid x\in R, x>a\}$$

۷)



$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \leq a\}$$

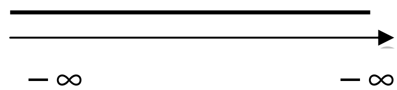
۸)



$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\}$$

د : بازه هایی که از دو طرف نامحدود می باشند.

۹)



$$(-\infty, +\infty) = R$$

تمرین : هر یک از مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

۱) $A = \{x \in R \mid ۰ < x < ۱\}$

۲) $B = \{x \in R \mid x \geq \frac{\sqrt{۲}}{۳}\}$

۳) $C = \{x \in R \mid -۲x + ۶ > ۰\}$

۴) $D = \{x \in R \mid x \neq ۵\}$

تمرین: هر یک از بازه های زیر را به صورت مجموعه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف) $A = [-۲, ۵]$ ب) $B = (۳, ۷]$ ج) $C = (-\infty, \sqrt{۲})$

تمرین: نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آنها را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $۳x - ۵ \geq ۲x + ۲$ ب) $۵ < -۳x - ۱ \leq ۸$

***

تمرین برای حل :

۱ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{3}{n+2}$ می باشد. پنج جمله ی اول این دنباله را بنویسید.

۲ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = \frac{3n}{n+1}$ می باشد. جمله ی هشتم این دنباله را بنویسید.

۳ : تعیین کنید که هر یک از جمله های عمومی زیر ، مربوط به کدام دنباله است؟

دنباله	جمله ی عمومی
۳ و ۶ و ۱۲ و ...	$a_n = n^3$
۱ و ۸ و ۲۷و ...	$a_n = (-1)^n$
۵ و ۵ و ۵ و ...	$a_n = 3n + 1$
۴ و ۷ و ۱۰ و ...	$a_n = 3 \times 2^{n-1}$
-۱ و ۱ و -۱ و ...	$a_n = 5$

۴ : جمله ی عمومی هر یک از دنباله های زیر را تعیین کرده و سپس سه جمله ی دیگر برای هر یک بنویسید.

۱) ۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹,....

۲) ۳,۶,۱۲,۲۴, ...

۳) ۱,۳,۶,۱۰,۲۱,....

۴) ۳,۳,۳,۳,۳,....

۵) −۳,۳,−۳,۳,−۳,....

۶) ۱,۴,۹,۱۶,۲۵,...

۵ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = 2n + 5$ می باشد. تعیین کنید که کدام جمله ی آن ۱۷ است؟

۶ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^2 + 4n - 3$ می باشد. تعیین کنید که کدام جمله ی آن ۴۲ است؟

۷ : اگر $4m - 11$ و $3m + 2$ و $m - 1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، مقدار m را به دست آورید.

۸ : عددی بین ۵ و ۸۰ قرار دهید به طوری که این سه عدد تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهند. مسئله چند جواب دارد؟

۹ : اگر 9^c و 81^b و 3^a سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، ثابت کنید که $8b = a + 2c$.

۱۰ : در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم برابر ۶ و جمله ی هشتم برابر ۴۸ است. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

۱۱ : جملات دنباله ی $a_n = ۱ + \frac{۳}{n+۲}$ به چه عددی نزدیک می شوند.

۱۲ : حاصل عبارت زیر را بیابید.

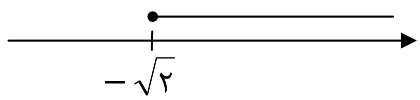
$$(-۲\sqrt{۲}+۳)^{\sqrt{۷}-۲} \times (۲\sqrt{۲}+۳)^{\frac{۳}{\sqrt{۷}+۲}}$$

۱۳ : مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$\sqrt[۳]{۹} \times \sqrt[۵]{۲۷} = \sqrt[۶]{۳^x}$$

۱۴ : مقدار عبارت $(x^۲+۱)(x^۴+x^۲+۱)(x^۴-x^۲+۱)(x^۲-۱)$ را به ازای $x = \sqrt[۶]{۵}$ را به دست آورید.

۱۵ : در جدول زیر ، خانه های خالی را با نماد خواسته شده ، پرکنید.

نمودار	نماد مجموعه	نماد فاصله
		$[-۱,۳)$
	$\{x \mid x \in R, ۲ < x < ۳\}$	
		

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.org

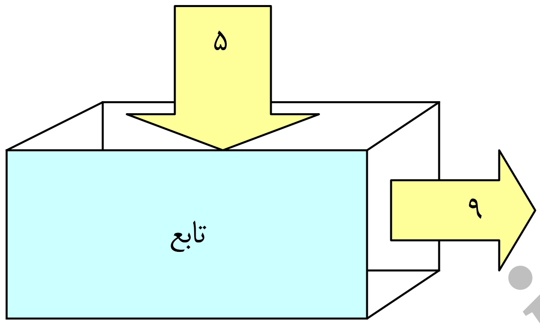
ریاضی ۲

فصل دوم : تابع

تابع

هر رابطه که هر عضو مجموعه ی A را دقیقاً به یک عضو از مجموعه ی B نسبت دهد را یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B می نامند.

مثال : دستگاه زیر هر عضو مجموعه ی $A=\{۳,۵,۶,۷,۱\}$ را ابتدا دو برابر و سپس یک واحد از حاصل به دست آمده کم می کند.



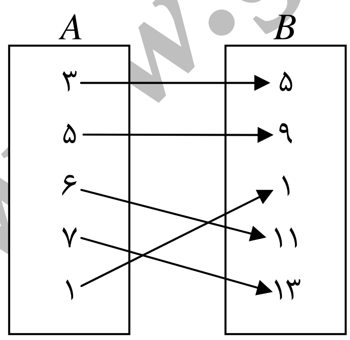
مجموعه ی خروجی های این دستگاه عبارت است :

$$B=\{۵,۹,۱۱,۱۳,۱\}$$

چون این رابطه هر عضو A را فقط به یک از از مجموعه ی B نسبت می دهد. پس این رابطه یک تابع است.

این تابع را به شکل های مختلفی نمایش می دهند.

الف : نمایش تابع به شکل پیکانی



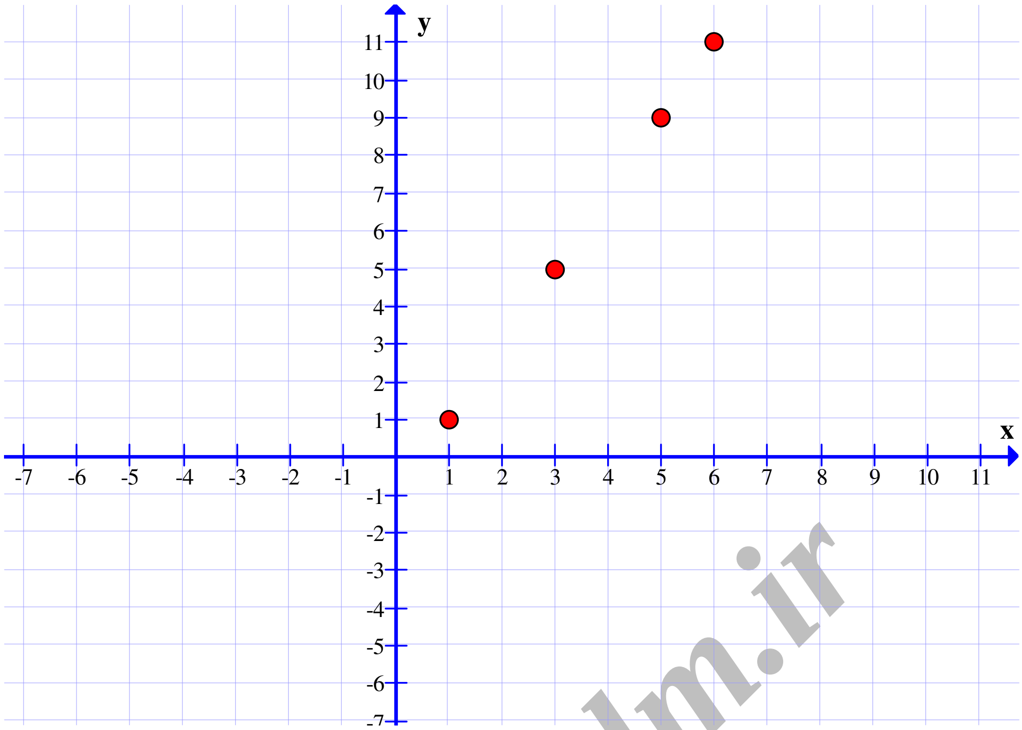
ب : نمایش تابع به شکل زوج های مرتب

$$\{(۳,۵),(۵,۹),(۶,۱۱),(۷,۱۳),(۱,۱)\}$$

ج : نمایش تابع به شکل جدول

x	۳	۵	۶	۷	۱
y	۵	۹	۱۱	۱۳	۱

د : نمایش تابع به شکل مختصات دکارتی



هـ : نمایش تابع به شکل ضابطه

چون مقدار y برابر $۲x-۱$ پس $y=۲x-۱$

تمرین : دستگاهی به هر عضو مجموعه ی $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ قدرمطلق آن را نسبت می دهد. آیا این دستگاه یک تابع را مشخص می کند. روش های مختلف نمایش این تابع را بنویسید.

مثال: هر یک از موارد زیر یک تابع می باشند.

۱ : هر دانش آموز در هر لحظه فقط یک وزن دارد. پس رابطه ی بین سن و وزن دانش آموز تابع است.

۲ : هر پرنده ی در حال پرواز در هر لحظه یک ارتفاع دارد، پس رابطه ی بین زمان پرواز و ارتفاع پرنده یک تابع است.

مثال : هر یک از موارد زیر یک تابع نمی باشند.

۱ : هر شخص ممکن است در هر لحظه به دو یا چند تیم ورزشی علاقه مند باشد. پس این رابطه تابع نیست.

۲ : هر شخص ممکن است در هر لحظه به دو یا چند غذا علاقه مند باشد. پس این رابطه تابع نیست.

روش های نمایش تابع

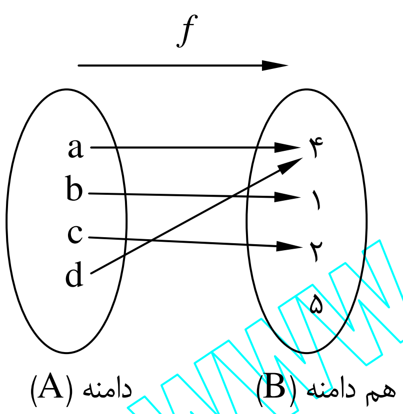
یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه ی A را دامنه و مجموعه ی B را هم دامنه یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.

$$f : A \to B$$

جهت آشنایی عمیق تر با مفهوم تابع ، روش های نمایش آن را بیان می کنیم.

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه بین مجموعه ی A به مجموعه ی B، که با روش پیکانی یا نمودار وِن نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. مانند تابع زیر



تذکر: در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود. یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را برد تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a,b,c,d\}$

هم دامنه $B = \{۱,۲,۴,۵\}$

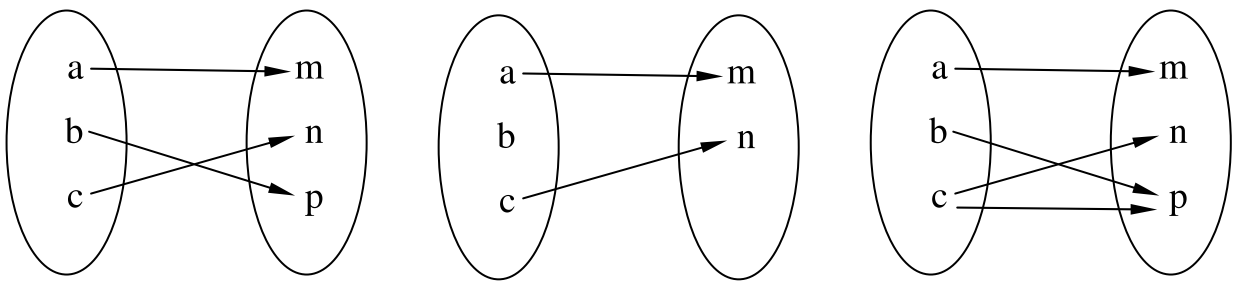
برد $R_f = \{۱,۲,۴\}$

نتیجه ی ۱ : مجموعه ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعه ی A هستند.) را **دامنه** و مجموعه ی تمام عضوهایی از مجموعه ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

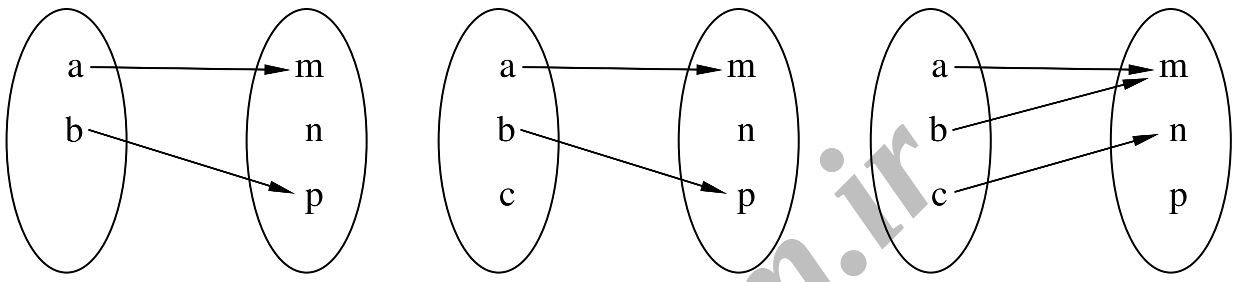
نتیجه ی ۲: در حالت کلی برد تابع همواره زیر مجموعه ی هم دامنه ی آن است.[1] یعنی $R_f \subseteq B$

[1] . در حالتی که $R_f = B$ باشد. گویند تابع پوشا است.

تمرین: کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



(۳) (۲) (۱)



(۶) (۵) (۴)

حل :

۱) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

۲) طبق تعریف چون از b پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۳) طبق تعریف چون از c دو پیکان خارج شده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۴) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

۵) طبق تعریف چون از c پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۶) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

***

۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه ای از زوج های مرتب را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اول آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که درآن مولفه های اول، اعضای دامنه و مولفه های دوم ، اعضای برد خواهند بود. به عنوان مثال،تابعی که در مورد (۱) با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f = \{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۲)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f = \{(x, y) \mid x \in D_f , y \in R_f \}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت زوج مرتب ، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های برابر باشند، باید مولفه های دوم آن ها نیز برابر باشند[2].

تمرین: کدام یک از مجموعه های زیر تابع است؟

الف) $f_۱ = \{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$

ب) $f_۲ = \{(۱,۳),(۲,۵),(۱,۲)\}$

ج) $f_۳ = \{(۲,۵),(۵,۲),(۳,۲),(۲,۳),(۰,۰)\}$

د) $f_۴ = \{(۱,۳),(۲,۰),(۴,۷),(۱,۳)\}$

تمرین: اگر مجموعه ی $\{(۲,\alpha-\beta),(۲,۳),(۱,\alpha+\beta),(۳,۰),(۱,-۱)\}$ تابع باشد. مقدار β و α را بیابید.

تمرین: اگر مجموعه ی زیر یک تابع باشد، مقدار a را بیابید.

$$f = \{(۱,۳),(۲,۰),(۱,a^۲-۲a)\}$$

تمرین: اگر مجموعه ی زیر یک تابع باشد، مقدار m را بیابید.

$$f = \{(۱,۳),(۲,۰),(-۱,۴),(۱,m^۲-۲m),(m,۷)\}$$

تمرین: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f = \{(۳,۲),(۵,۲),(-۳,۲),(۲,۲),(۱,۲)\}$$

***

۳ : نمایش تابع به صورت جدول

نمایش تابع به صورت جدول، مشابه نمایش زوج مرتبی تابع است. در این نمایش مقادیر x ها (دامنه) و مقادیر y ها (برد) تابع را نمایش می دهند.

$f:$

x	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	......	x_n
y	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$	......	y_n

[2] . اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

به عنوان مثال، نمایش تابع مورد (۱) به صورت جدول، به شکل زیر است.

$f:$

x	a	b	c	d
y	۴	۱	۲	۴

تمرین: تابعی بنویسید که دامنه ی آن دو عضو و برد آن یک عضو داشته باشد.

تمرین : در هر مورد تابعی مثال بزنید که

الف : دامنه ی آن شامل دو عضو باشد.

ب : برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج : دامنه ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

د : دامنه ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

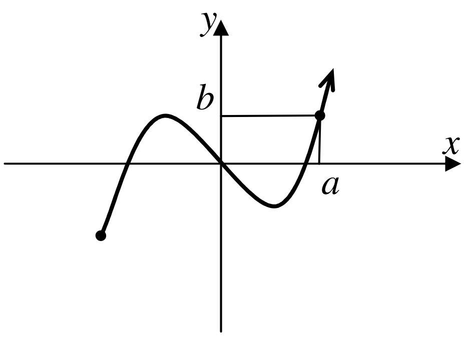
هـ : دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

تمرین : دو تابع بنویسید که دامنه و برد آنها یکسان باشند ولی هیچ دو زوج مرتب آنها یکسان نباشند.

***

۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

اگر مجموعه ی f، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a,b)\in f$ یک نقطـه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.



تمرین : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۴,۰),(-۱,۱)\}$$

تمرین: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(x,y)\mid y=x^{۲},-۱\le x<۱\}$$

تمرین: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

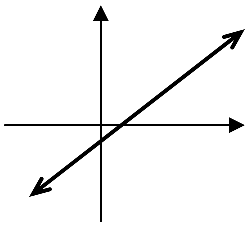
$$f=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x},۰\le x\le ۴\}$$

تمرین: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

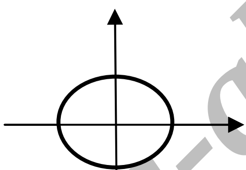
$$f=\{(x,y)\mid y=|x|\}$$

از دیدگاه هندسی،یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط قائم)

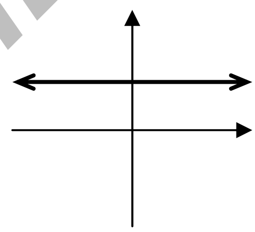
تمرین: کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



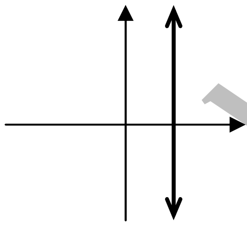
(۱)



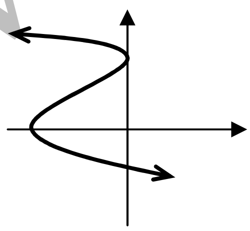
(۲)



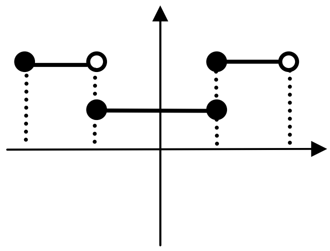
(۳)



(۴)



(۵)

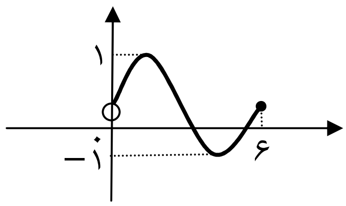


(۶)

تذکر: اگر تابعی به صورت هندسی نمایش داده شده باشد، تصویر نمودار تابع روی محور x ها دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر :

$$D_f=\{x\in R\mid (x,y)\in f\}$$
$$R_f=\{y\in R\mid (x,y)\in f\}$$

تمرین: دامنه و برد تابع با نمودار زیر را مشخص کنید.



تمرین : نمودار تابع $f = \{(x, y) \mid y = x^۲ - ۱\}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

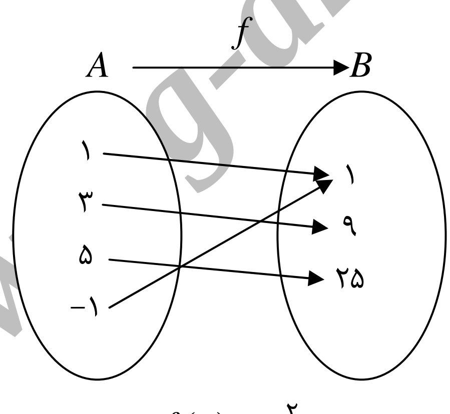
***

۵ : نمایش تابع از طریق ضابطه (نمایش جبری)

برای تابع f که از مجموعه ی A به مجموعه ی B تعریف شده است. رابطه ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می کند. ضابطه یا قانون یا معادله ی تابع می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f : A \to B$$
$$y = f(x)$$

مثال : تابع نمودار مقابل دارای معادله ای به صورت زیر است.



$$f(x) = x^۲$$

مثال : تابع $f = \{(x, y) \mid y = x^۲ , -۱ \le x \le ۱\}$ را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$f : [-۱,۱] \to [۰,۱]$$
$$y = x^۲$$

مثال : تابع $g = \{(x, y) \mid y = |x| ;\ x, y \in R\}$ را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$f : R \to R$$
$$y = |x|$$

***

تمرین: معادله ی تابعی را بنویسید که اندازه ی ضلع مربع را می گیرد و محیط آن را می دهد.

تمرین: معادله ی تابعی را بنویسید که اندازه ی ضلع مربع را می گیرد و مساحت آن را می دهد.

تمرین: معادله ی مساحت دایره را به شعاع آن وابسته کند.

تمرین: معادله ی تابعی را بنویسید که حجم کره را به شعاع آن وابسته کند.

تمرین : عرض مستطیلی x و طول آن $x+۳$ می باشد. تابع مساحت و تابع محیط مستطیل را بنویسید.

تمرین: مجموع دو عدد ۱۰ است. اگر یکی از آنها x باشد. معادله ی تابعی را بنویسید که حاصل ضرب آنها را به x وابسته کند.

***

توجه : گاهی معادله ی تابع را به شکل دو یا چند ضابطه ای نمایش می دهند. هر یک از ضابطه ها شرایطی را تعیین می کنند و ورودی های هر ضابطه جهت محاسبه را به توجه به این شرایط در نظر می گیرند. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال۱) تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R \mid x\geq ۰\}\cup\{x\in R\mid x<۰\}=R$$
$$R_f=\{y\in R\mid y\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

مثال۲) تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$S(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R\mid x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R\mid x>۰\}=R$$
$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تذکر: تابع علامت را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد.

$$S(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

***

تمرین ک تابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و سپس دامنه و برد آن را بنویبسید.

$$f(x)=\frac{۲x}{|x|}$$

حل:

$$x\neq ۰ \to D_f = R-\{۰\}$$

$$\begin{cases} x>۰ \to |x|=x \to \dfrac{۲x}{|x|}=\dfrac{۲x}{x}=۲ \\ x<۰ \to |x|=-x \to \dfrac{۲x}{|x|}=\dfrac{۲x}{-x}=-۲ \end{cases}$$

$$\to f(x)=\begin{cases} ۲ & x>۰ \\ -۲ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_f = R-\{۰\}$$

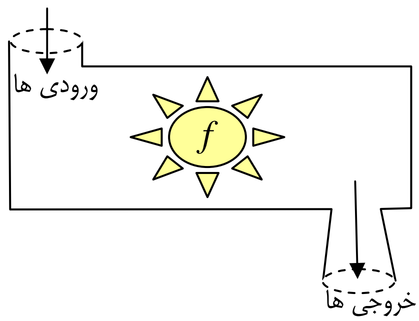
$$R_f = \{-۲,۲\}$$

***

۶: نمایش تابع به صورت یک ماشین

یک ماشین به صورت مقابل را در نظر می گیریم. در این ماشین ورودی x تحت اثر عملیات f قرار مـی گیـرد و خروجـی y حاصل می شود. این ماشین متناظر با عملکرد ضابطه ی $y=f(x)$ خواهد بود و اصطلاحاً تابعی از x به y خواهد بود.

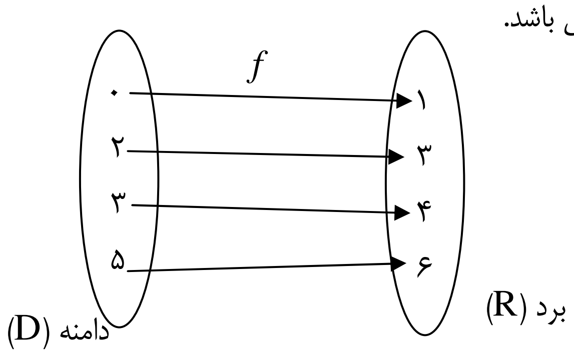
لذا طبق تعریف تابع می توان گفت که این ماشین یک عضو از دامنه را می گیرد و یک عضو منحصر بفرد از برد می دهد.



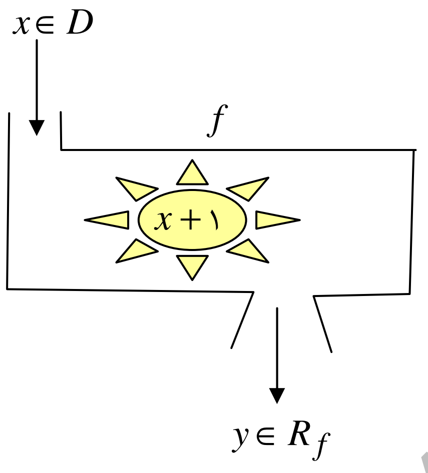
مثلاً در تابع $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۰,۱),(۵,۶)\}$ مؤلفه ی دوم هر زوج یک واحد از مؤلفه ی اول آن بیشتر است. پس می توان نوشت:

$$f=\{(x,y) \mid y=x+۱\}$$

که در آن $x\in D_f=\{۰,۲,۳,۵\}$ می باشد.



برای مثال با توجه به تابع قبل داریم.



$$f:D\to R$$
$$y=x+۱$$

مجموعه ی ورودی ها، دامنه و مجموعه ی خروجی ها، برد تابع می باشند.

***

مقدار تابع در یک نقطه

در تابع $f=\{(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱),(-۲,۵)\}$ مقدار تابع در نقطه ی ۲ برابر ۵ است و می نویسند: $f(۲)=۵$ همچنین مقدار تابع در نقطه ی ۰ برابر ۳ است، لذا $f(۰)=۳$

اگر معادله ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه ی $x_۰$ از دامنه ی آن، کافی است مقدار $x_۰$ را در معادله ی تابع به جای x جایگزین کنیم. یعنی $y_۰=f(x_۰)$

تمرین: اگر $f(x)=x^۲+۳x$ مقدار تابع را در نقاط داده شده، یافته و سپس جدول زیر را کامل کنید.

۱) $f(-۱)=$

۲) $f(۱)=$

۳) $f(۲)=$

۴) $f(۰)=$

۵) $f(-۲)=$

۶) $f(۳)=$

x	-۱	۱	۲	۰	-۲	۳
$f(x)$						

تمرین: با توجه به تابع مقابل تساوی های زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۲ \\ ۳x+۵ & x<۲ \end{cases}$$

۱) $f(۳)=$ ۳) $f(\sqrt{۵})=$ ۵) $f(۰)=$

۲) $f(۱)=$ ۴) $f(۲)=$ ۶) $f(-۵)=$

تمرین: اگر $f(x)=-x^{۲}+۳x$ و $g(x)=۳x^{۲}-۳x+۱$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $f(-۱)=$ ۳) $۴f(۳)=$ ۵) $۲f(۰)-g(۱)=$

۲) $g(۲)=$ ۴) $f(-۱)+g(۴)=$ ۶) $\dfrac{f(۴)+g(۲)}{g(۰)}=$

***

تمرین برای حل :

۱ : تابعی مثال بزنید که دامنه ی آن $\{-۲,۳\}$ باشد.

۲ : تابعی مثال بزنید که دامنه ی آن $\{۵\}$ باشد.

۳ : تابعی مثال بزنید که دامنه ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

۴ : تابعی مثال بزنید که دامنه و برد آن مساوی باشند.

۶ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=x$ ۵) $f(x)=|x|$

۲) $f(x)=x^{۲}$ ۶) $f(x)=\sqrt{x}$

۳) $f(x)=x^{۳}$ ۷) $f(x)=\dfrac{۱}{x}$

۴) $f(x)=-۲$

۷ : اگر $f(x)=x^2+3x$ یک تابع باشد، تساوی های زیر را بدست آورید.

الف) $f(-3)$ ب) $f(k)$ ج) $f(5k)$ د) $f(2x)$ هـ) $f(1-x)$ هـ) $f(f(x))$

۹ : اگر $f(x)=2^x$ نشان دهید که: $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=f(4)$

۱۰ : اگر $f(x)=x^3-1$ نشان دهید که $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=a^2+b^2+ab$

۱۳ : در تابع زیر اگر $f(2)=2$ و $f(-2)=0$ باشد، مقادیر b و a را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-1} & x>1\\ x+b & x\le 1\end{cases}$$

۱۴ : در تابع زیر مقدار a را چنان بیابید که $f(f(2))=5$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases}3x-7 & x>1\\ ax^2-4x & x\le 1\end{cases}$$

***

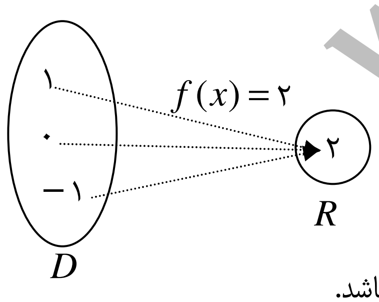
معرفی چند تابع خاص

در ادامه چند تابع خاص معرفی می کنیم.

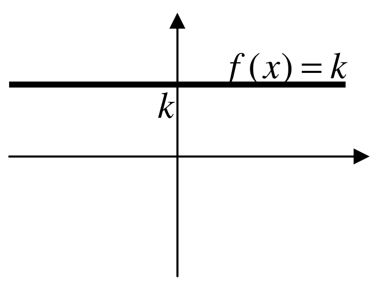
تابع ثابت

یک تابع را ثابت گویند هرگاه برد آن فقط یک عضو داشته باشد.مانند:

$f=\{(1,2),(0,2),(-1,2)\}$



نتیجه: نمودار هر تابع ثابت در اعداد حقیقی خطی است که با محور طول ها موازی می باشد.



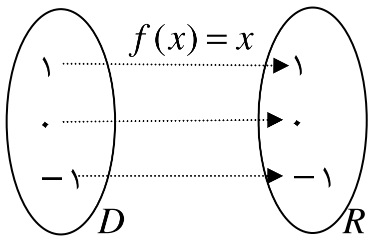
$\boxed{\text{معادله ی تابع ثابت } f(x)=k}$

***

تابع همانی

یک تابع را همانی گویند، هرگاه هر عضو دامنه را به همان عضو از برد نظیر کند.مانند:

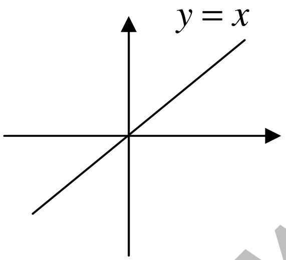
$$f=\{(۱,۱),(۰,۰),(-۱,-۱)\}$$



نتیجه:

۱- طبق تعریف دامنه و برد تابع همانی با هم برابرند. $D_f=R_f$

۲- نمودار تابع همانی در اعداد حقیقی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



$\boxed{\text{معادله ی تابع همانی } I(x)=x}$

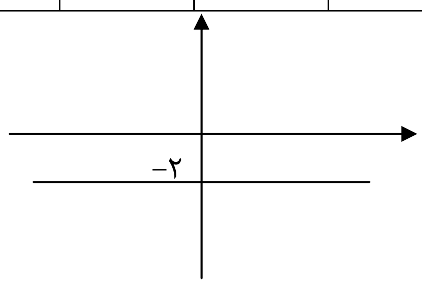
تمرین : تابع های زیر را در نظر بگیرید. سپس تعیین کنید که کدام یک همانی و کدامیک ثابت است؟

الف) $f=\{(۱,۳),(۲,۳),(۰,۳)\}$

ب) $g:$

x	-۱	۰	۲
y	-۱	۰	۲

ج)



***

تابع خطی

هر تابع که بین مولفه های اول ودوم تمام زوج های مرتب آن یک رابطه ی خطی یکسانی وجود داشته باشد، را تابع خطی می نامند.

مانند تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۰,۱),(-۱,-۱)\}$ که در تمام زوج های آن رابطه ی $y=۲x+۱$ برقرار است.

تذکر : هر تابع خطی دارای معادله ای به صورت زیر است.

$$f(x)=ax+b$$

لذا نمودار آن همواره یک خط راست است. (عدد a را شیب و عدد b را عرض از مبدأ می نامند.)

تمرین : معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $(۲,۷)$و $(۵,۳)$ می گذرد.

حل :

روش اول :

$$(۵,۳)\in f \to ۳=۵a+b$$

$$(۲,۷)\in f \to ۷=۲a+b$$

$$\begin{cases}۵a+b=۳\\ ۲a+b=۷\end{cases} \to (-۱)\times\begin{cases}۵a+b=۳\\ ۲a+b=۷\end{cases} \to \begin{cases}-۵a-b=-۳\\ ۲a+b=۷\end{cases} \to -۳a=۴ \to a=\frac{۴}{-۳}\ ,\ b=\frac{۱۳}{۳}$$

$$f(x)=ax+b \to f(x)=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$ معادله ی تابع خطی

روش دوم :

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱ \to y=-\frac{۴}{۳}(x-۵)+۳ \to y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۰}{۳}+۳=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

توجه : اگر چند نقطه از یک تابع معلوم باشد، این تابع خطی است که شیب حاصل از هر دو نقطه ی آن مقدار ثابت باشد. لذا برای تشخیص اینکه تابع داده شده خطی است یا خیر ، می توان شیب هر دو نقطه ی آن یکسان باشند. دقت نمایید که نقاط انتخاب شده برای محاسبه ی هر شیب طوری باشند که یک نقطه با نقاط قبلی مشترک باشد.

تمرین : کدام یک از توابع زیر خطی است. معادله ی آن را بنویسید و سپس نمودار آن را رسم کنید.

الف :

$f:$

x	۱	۲	۳	۰
y	۲	۵	۸	۱

ب :

$g:$

x	۱	۲	۳	۰
y	۲	۵	۸	۱−

تمرین : کدام یک از توابع زیر خطی است. معادله ی آن را بنویسید و سپس نمودار آن را رسم کنید.

الف : $y=-3x+1$ ب : $y=x^2$ ج : $y=-2$ د : $y=|x|$

تمرین : آیا نمودار معادله ی $x=2$ یک خط راست است. آیا این معادله تابع است ؟ چرا؟

بحث : آیا هر خط ، یک تابع خطی است. چرا؟

❋❋❋

روش های تعیین دامنه ی توابع حقیقی

بزرگترین مجموعه ای که یک تابع حقیقی[3] به ازاء آنها معین باشد را دامنه می نامند،[4] در این صورت:

۱: دامنه ی هر تابع چند جمله ای مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

تمرین: دامنه ی تابع به معادله ی $f(x)=x^{3}-2x+5$ را تعیین کنید.

۲: دامنه ی هر تابع کسری مجموعه ی اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج آن است.

تمرین: دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{3x}{8-2x}$ ب) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^{2}+x}$ ج) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^{2}+4}$

۳: دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم) مجموعه ی اعداد حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال منفی نباشد.

تمرین: دامنه ی توابع زیر را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-3x}$ ب) $f(x)=\sqrt{4x-12}$ ج) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{3-x}}$

۴: دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی فرد با دامنه ی عبارت زیر رادیکال آن برابر است.

تمرین: دامنه ی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt[3]{x^{2}-3x}$ ب) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x}{6-2x}}$

***

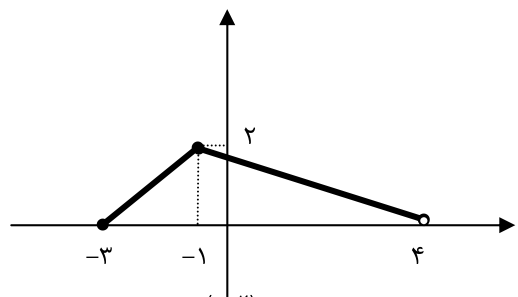
3 . هر تابع که دامنه و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی یا زیر مجموعه ای از آن باشد را تابع حقیقی می نامند.

4 . برای تعیین دامنه ی یک تابع ، باید تابع را به همان شکلی که هست در نظر بگیرید و نباید ابتدا آن را ساده کنید. زیرا ساده کردن تابع دامنه ی آن را ممکن است تغییر دهد.

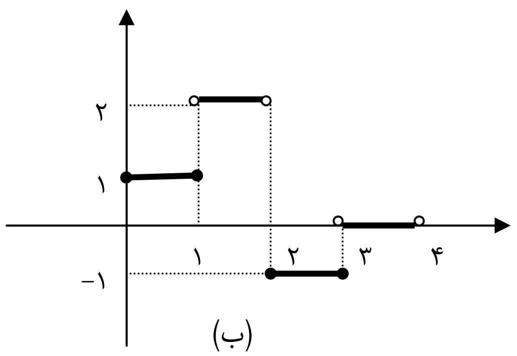
تمرین برای حل :

۱ : معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات گذشته و در آن $f(۲) = ۳$ باشد.

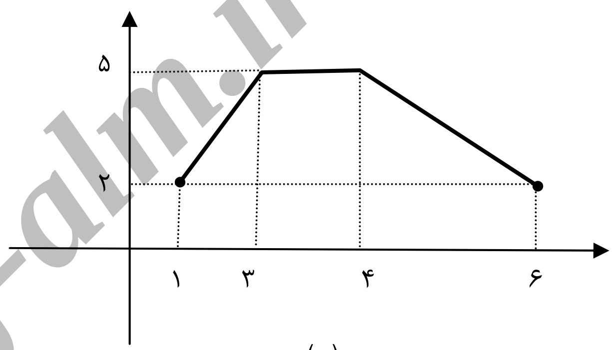
۲ : دامنه و برد توابع زیر را تعیین نموده و سپس ضابطه ی[5] آنها را بنویسید.



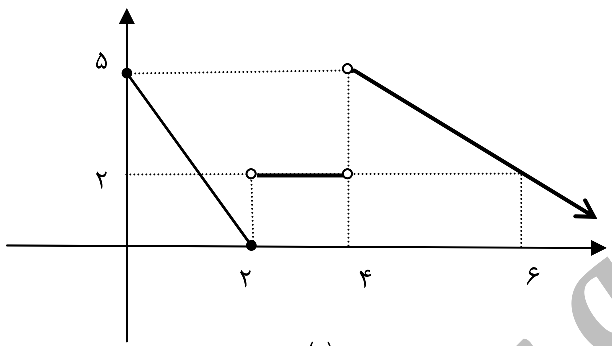
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳ : دامنه ی هر یک از توابع زیر را بنویسید.

الف) $f(x) = ۳x^۲ + ۵x - ۶x^۳ + ۱$ ج) $f(x) = \dfrac{x+۱}{۲x^۲ - ۸}$ هـ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+۱}}{۲x-۶}$

ب) $f(x) = \dfrac{۲x+۱}{۸x^۳ - ۲x}$ د) $f(x) = \dfrac{x+۱}{\sqrt{۲x-۶}}$ و) $f(x) = \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۵ - x}}$

***

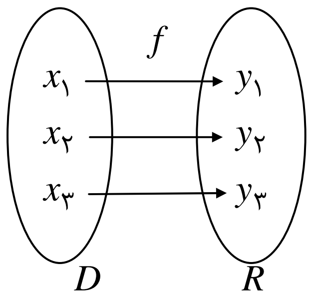
[5] . یادآوری : اگر دو نقطه از خطی مانند $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ معلوم باشند می توان معادله ی آن خط را به شکل زیر به دست آورد.

$$y = m(x - x_۱) + y_۱$$

که در آن $m = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ شیب خط می باشد.

تابع یک به یک

یک تابع مانند f را یک به یک می نامند، هرگاه به ازاء هر عضو از بردش یک و فقط یک عـضو از دامنـه اش وجـود داشـته باشد.



برای مثال تابع $f=\{(۱,۲),(۰,۳),(۴,۷),(-۱,۵)\}$ یک به یک است

ولی تابع $g=\{(۱,۲),(۰,۳),(۴,۲)\}$ یک به یک نیست.

نتیجه ی ۱) در تابع یک به یک هیچ دو زوج متمایز با مؤلفه های دوم برابر وجود ندارد.

تمرین : کدام یک از توابع زیر یک به یک است ؟ چرا ؟

الف) $f=\{(۱,۲),(۳,۷),(۵,۰),(-۳,۲)\}$

ب) $g=\{(۱,۲),(۳,۷),(۵,۰),(-۳,۴)\}$

نتیجه ی ۲) اگر f یک تابع یک به یک باشد، در این صورت طبق تعریف داریم:

$$\forall x_۱,x_۲ \in D_f , IF\ x_۱ \neq x_۲ \rightarrow f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

و با توجه به خاصیت عکس نقیض یک گزاره ی شرطی می توان نوشت:

$$\forall x_۱,x_۲ \in D_f \ ,\ IF\ f(x_۱)=f(x_۲) \rightarrow x_۱ = x_۲$$

این مطلب می تواند به عنوان روشی برای تشخیص یک به یک بودن تابعی که معادله ی آن معلوم باشد، بکار برود.

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{۲x-۱}$ یک به یک است.

تمرین: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=x^۲+۴$ ب) $f(x)=x^۲+۶x$ ج) $f(x)=-۳x+۱$

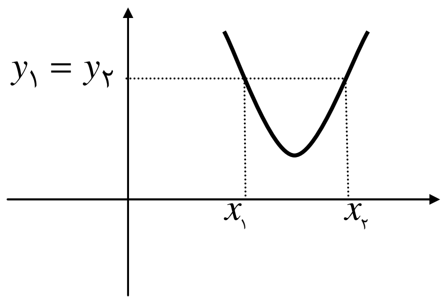
حل ب)

$$f(x)=x^۲+۶x=x^۲+۶x+۹-۹=(x+۳)^۲-۹$$
$$f(x_۱)=f(x_۲) \rightarrow (x_۱+۳)^۲-۹=(x_۲+۳)^۲-۹ \rightarrow (x_۱+۳)^۲=(x_۲+۳)^۲$$
$$\nrightarrow x_۱+۳=x_۲+۳ \rightarrow x_۱=x_۲$$

لذا تابع $f(x)$ یک به یک نیست.

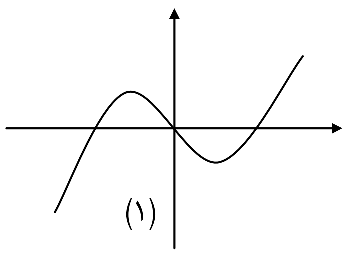
نتیجه ی۳) تابعی یک به یک است ، هرگاه هر خط موازی محور طول ها نمودار آنرا حداکثر در یک نقطه قطع کند.

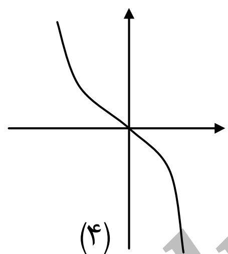
این نتیجه که به **<u>آزمون خط افقی</u>** موسوم است، برای تشخیص یک بـه یـک بودن یک تابع که نمودارآن داده شده باشد، بکار می رود.

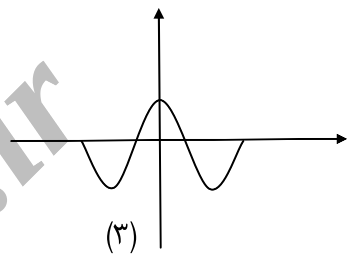


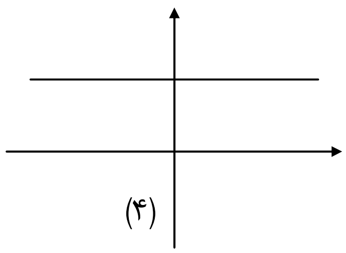
$$y_1 = y_2 \not\to x_1 = x_2$$

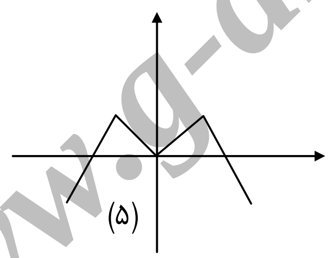
تمرین: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع یک به یک است؟

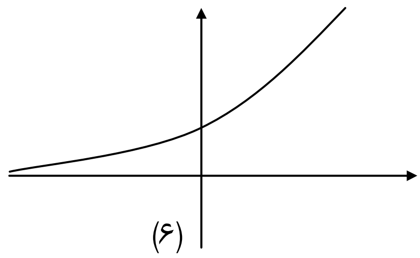












تمرین: به کمک رسم نمودار، یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نتیجه ی ٤) تابع همانی یک به یک است ولی تابع ثابت یک به یک نیست.

***

تمرین : اگر تابع $f = \{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را پیدا کنید.

تمرین : نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط زیر را داشته باشد.

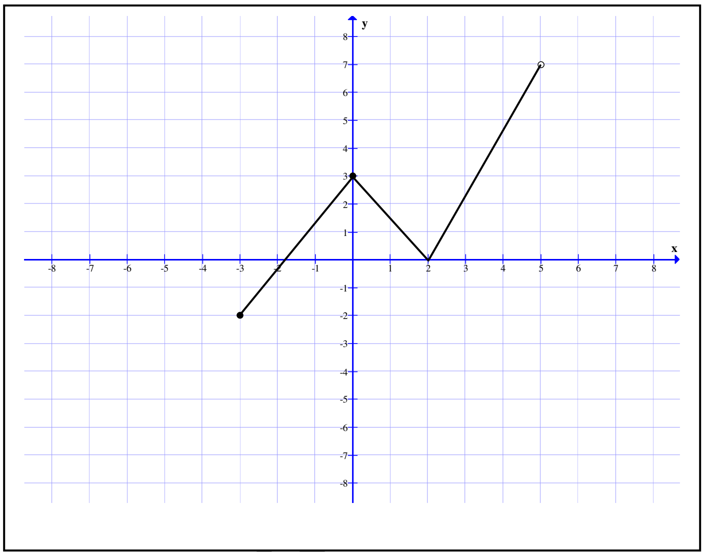
الف : دامنه ی f بازه ی $[-3,5)$

ب: برد آن بازه ی $[-2,7)$ باشند.

ج : $f(0)=3$ باشد.

د : تابع f یک به یک نباشد.

حل :

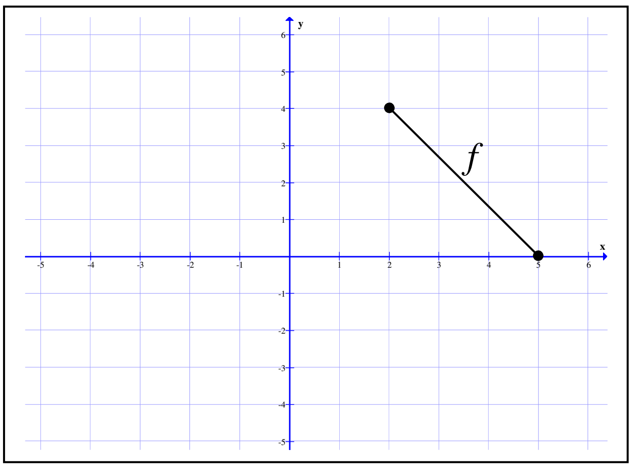


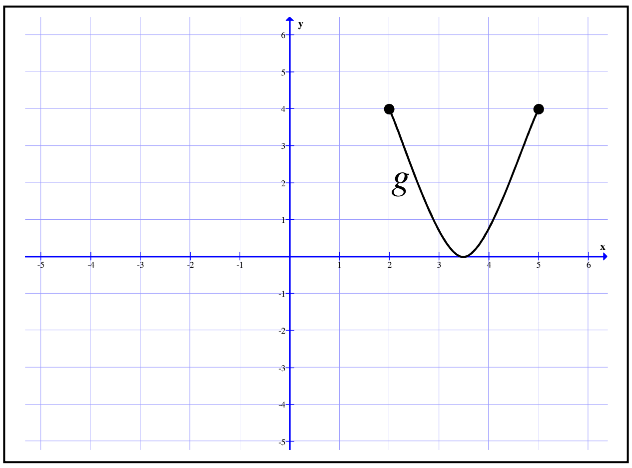
تمرین : دو تابع مانند f و g مثال بزنید که

الف : دامنه ی هر دو $[2,5]$ و برد هر دو $[0,4]$ باشند.

ب : تابع f یک به یک باشد و تابع g یک به یک نباشد.

حل :





تابع معکوس (وارون)

دو تابع را معکوس همدیگر می نامند، هرگاه با جابجا کردن مؤلفه های اول و دوم زوج های مرتب یکی از توابع ، تابع دیگری به دست می آید.

مثال: تابع $g=\{(۱,۲),(۳,۰),(۷,۵)\}$ معکوس تابع $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷)\}$ است.

توجه ۱: اگر f یک تابع باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

توجه۲ : معکوس هر تابع ممکن است تابع نباشد. مانند تابع $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۱)\}$ که معکوس آن تابع نیست. اگر معکوس تابعی خود تابع باشد،آن تابع را معکوس پذیر گویند.

نتیجه ی ۱: تابع f معکوس پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

تمرین : کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را بنویسید.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$

ب) $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

نتیجه ی ۲ : برای تعیین معکوس یک تابع که معادله ی آن معلوم باشد. ابتدا نشان می دهیم که تابع یک به یک است، سپس به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\to ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\to ۲x_۱=۲x_۲\to x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است ولذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\to x^۲=۲y-۳\to y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

$$\therefore f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

تمرین: معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x)=x^{۲}+۱$ ب) $f(x)=۳x-۱$ ج) $f(x)=|x|$

تمرین : کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است؟

الف : دامنه و برد تابع و معکوس آن را بنویسید.

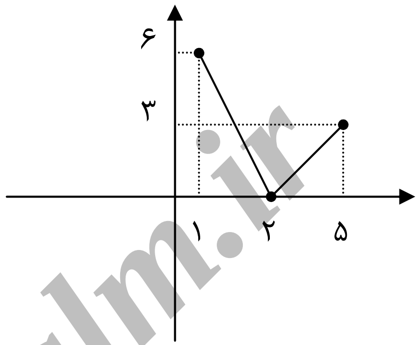
ب : نمودار تابع و معکوس آن را رسم کنید.

الف)

$f:$

x	۰	۲	۵	۶
y	۴	۱	۲	۴

ج)

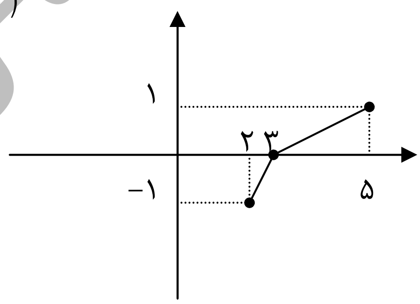


ب)

$f:$

x	۰	۲	۵	-۲
y	۴	۱	۲	۳

د)

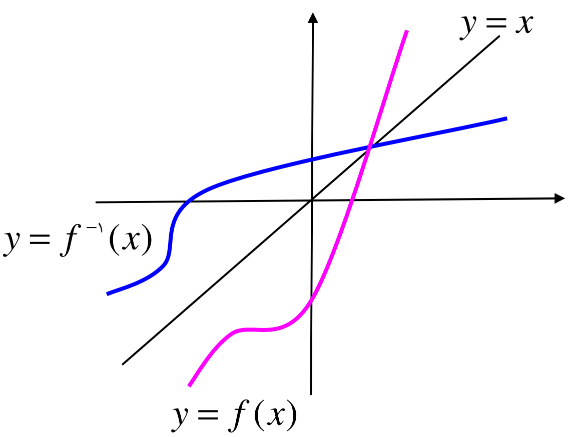


نتیجه ی ۳: چون معکوس هر تابع از جابجایی مؤلفه های زوج هـای مرتب آن بدست می آید، بنابراین :

الف : نمودار هر تابع و معکوس آن نسبت به نیمساز ربـع اول وسـوم ($y=x$) قرینه ی یکدیگرند.

ب :دامنه ی تابع معکوس برابر برد تابع است. ($D_{f^{-۱}}=R_f$)

ج : برد تابع مکوس برابر دامنه ی تابع است. ($R_{f^{-۱}}=D_f$)



***

تمرین برای حل :

۱ : آیا جدول زیر یک تابع نشان می دهد؟چرا؟

$f:$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

۲ : نمایش جبری تابع های زیر را بنویسید.

الف

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

ب

x	−۲	−۱	۰	۱	۴	۶
y	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	−۳

ج

x	۱	۲	۳	۴	۰	−۱
y	۲	۴	۸	۱۶	۱	۱/۲

د

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۴	۴	۴	۴	۴	۴

هـ

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۲	۳	۴	۵	۶

و

x	۱	۲	۳	۰	−۵	−۱
y	۱	۲	۳	۰	۵	۱

۳ : با توجه به توابع تمرین قبل

الف : کدام تابع یک به یک است؟ ب : کدام تابع خطی است؟ ج : کدام تابع وارون پذیر است؟

۴ : برای اندازه گیری دما از واحد های سانتی گراد (C) و فارنهایت (F) استفاده می شود. این دو واحد اندازه گیری رابطه ای به شکل زیر دارند.

$$F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$$

الف : ۲۰ درجه ی سانتی گراد، بر حسب فارنهایت چقدر است؟

ب : صفر درجه ی سانتی گراد ، معادل چند درجه ی فارنهایت است؟

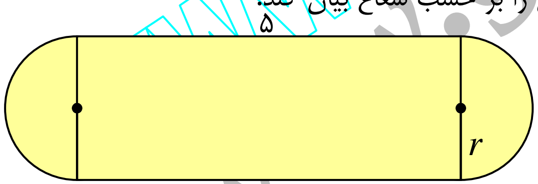
ج :۱۰۴ درجه ی فارنهایت چند درجه ی سانتی گراد است؟

د : معادله ای بنویسید که سانتی گراد را به فارنهایت تبدیل کند.

هـ : آیا رابطه ی بین این دو واحد اندازه گیری ، یک تابع خطی است ؟ چرا ؟

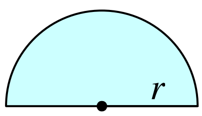
۵ : طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کنید.

۶ : با توجه به شکل مقابل تابعی بنویسید که مساحت شکل را بر حسب شعاع بیان کند.

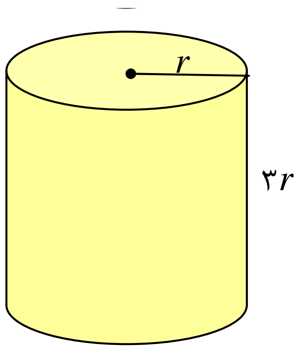


۷ : تابعی بنویسید که محیط نیم دایره را بر حسب شعاع آن بیان کند.

۸ : محیط شکل مقابل را به عنوان تابعی برحسب r بنویسید.



۹ : با توجه به شکل مقابل تابعی بنویسید که حجم جسم را بر حسب شعاع بیان کند.



۱۰ : آیا تابعی یک به یک می توان یافت که دامنه ی آن شامل سه عضو و برد آن از دو عضو تشکیل شده باشد.

۱۱ : در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدأ مختصات می گذرد، داریم $f(۳)=۱۵$ رابطه ی ریاضی برای وارون ایـن تـابع به دست آورید.

۱۲ : نمودار تابع خطی از نقاط $(-۴,۳)$ و $(۰,-۳)$ می گذرد. مطلوب است، تعیین:

الف) $f(-۱)=$ ب) $f(-۴)=$ ج) $f(f(۲))=$

۱۳ : اگر $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^{۲}-۴}$ مطلوب است، تعیین :

الف) $f(۰)=$ ب) $f(-۱)=$ ج) $f(-\sqrt{۲})=$ د) $f(k)=$ هـ) $f(۱+x)=$

۱۴ : فرض کنید برای تابع f داشته باشیم $f(x-۱)=۵x$ مطلوب است تعیین :

الف) $f(x)=$ ب) $f(۷)=$

۱۵ : اگر $f(x+۳)=\dfrac{۲x}{x-۱}$ باشد. ضابطه ی $f(x)$ را یافته و سپس $f(-۳)$ را تعیین کنید.

۱۶ : در تابع $f(x)=-x^{۳}+۳x^{۲}+ax+b$ مقادیر b و a را طوری به دست آورید که :

$f(۰)=۱$ و $f(۲)=۱۵$

۱۷ : ضابطه ی تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را طوری به دست آورید که

الف : تابع از مبدأ مختصات بگذرد.   ب : $f(۱)=۴$ ج : $f(-)=۲$

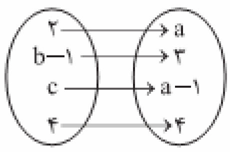
۱۸ : دامنه ی تابعی $(-۳,۳]$ و برد آن $[۰,۵]$ می باشد. نمودار این تابع را طوری رسم کنید که

الف : یک به یک باشد.   ب : یک به یک نباشد.

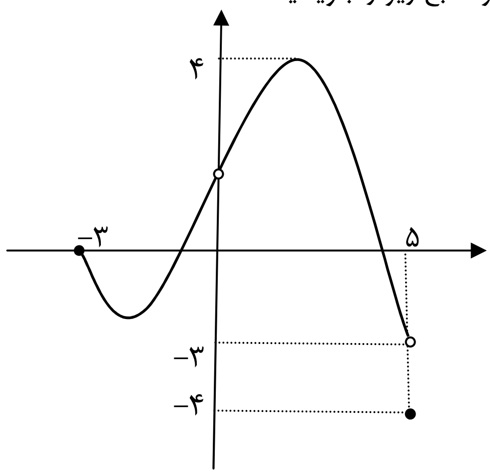
۱۹ : تابعی بنویسید که دامنه ی آن $\{۱,۲,۳\}$ باشد و دو شرط زیر را همزمان داشته باشد.

الف : یک به یک نباشد.   ب : $f(۱)>f(۲)$

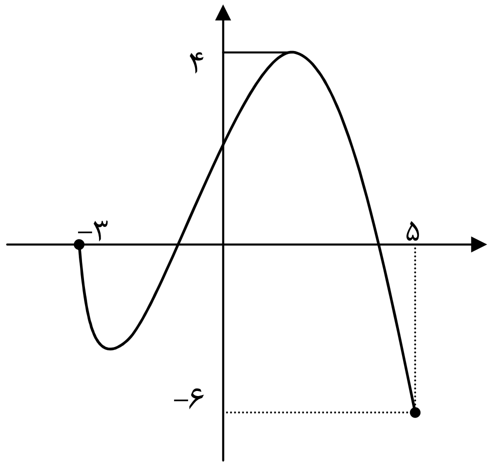
۲۰ : تابع زیر همانی است. مقادیر c و b و a را بیابید.



۲۱ : دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

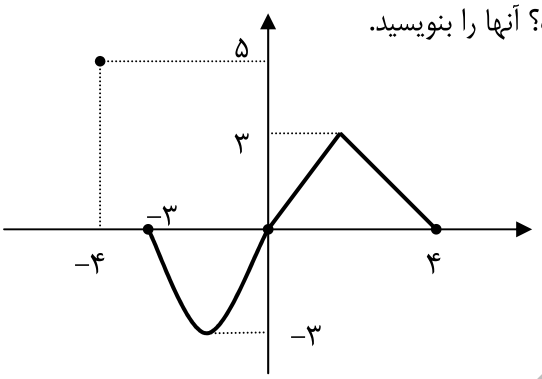


(ب)



(الف)

۲۲ : دامنه و برد تابع زیر را بنویسید. برد تابع شامل چند عدد طبیعی است؟ آنها را بنویسید.



۳۲ : جدول زیر دمای سنگ های زیر زمین در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما(سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف: معادله ای برای تابع جدول فوق بنویسید. ب: دمای یک سنگ در عمق ۱۰ کیلومتری را بیابید.

۲۴ : یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است، اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد. حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

WWW.MATHTOWER.ORG

تبدیلات

تبدیلات مراحلی می باشند که بوسیله ی آنها می توان نمودار تابعی را به کمک نمودار تابع دیگری رسم نمود. در جدول زیر روش رسم نمودار تابع به کمک دسته ی خاصی از تبدیل ها یعنی انتقال و بازتاب بیان شده است. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ معلوم باشد و a یک عدد مثبت فرض شود. در این صورت :

تابع جدید	نحوه ی تبدیل		نتیجه
$y=f(x)+a$	طول نقاط ثابت می ماند.	به عرض نقاط a واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه ی a واحد بالا می رود.
$y=f(x)-a$		از عرض نقاط a واحد کم می شود.	نمودار به اندازه ی a واحد پایین می رود.
$y=af(x)$		عرض نقاط در a ضرب می شود.	اگر $0<a<1$ نمودار فشرده می شود. اگر $a>1$ نمودار کشیده می شود.
$y=f(x+a)$	عرض نقاط ثابت می ماند.	از طول نقاط a واحد کم می شود.	نمودار به اندازه ی a واحد به عقب می رود.
$y=f(x-a)$		به طول نقاط a واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه ی a واحد به جلو می رود.
$y=f(ax)$		طول نقاط در $\frac{1}{a}$ ضرب می شود.	اگر $0<a<1$ نمودار منبسط می شود. اگر $a>1$ نمودار منقبض می شود.

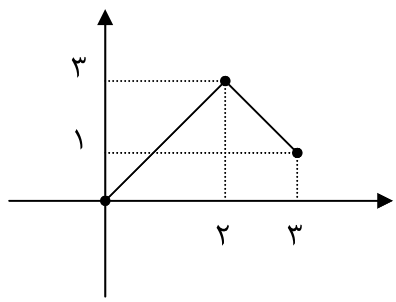
نتیجه :

۱ : نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول ها است.

۲ : نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.

***

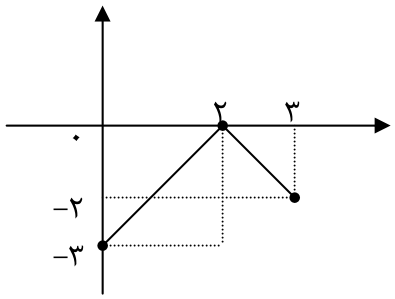
مثال : نمودار تابع f به شکل زیر داده شده است. می خواهیم، به کمک این نمودار، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



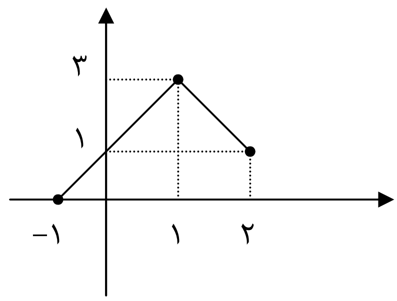
الف) $f(x)-3$ ب) $f(x+1)$ ج) $2f(x)$

حل :

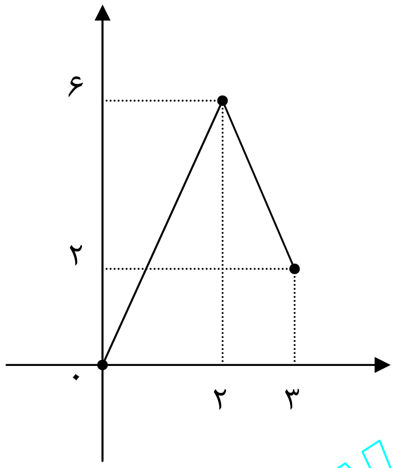
الف : طول نقاط ثابت می ماند ولی از عرض هر نقطه سه واحد کم می شود.



ب : عرض نقاط ثابت می ماند ولی از طول هر نقطه یک واحد کم می شود.

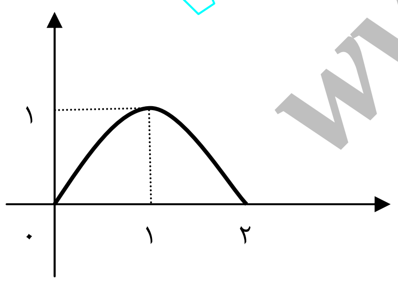


ج : طول نقاط ثابت می ماند ولی عرض نقاط دو برابر می شود.



***

مثال : نمودار تابع f با دامنه ی $[۰,۲]$ و برد $[۰,۱]$ در شکل مقابل نشان داده شده است. می خواهیم نمودار های تابع های زیر را رسم و دامنه و برد هر کدام را پیدا کنیم.

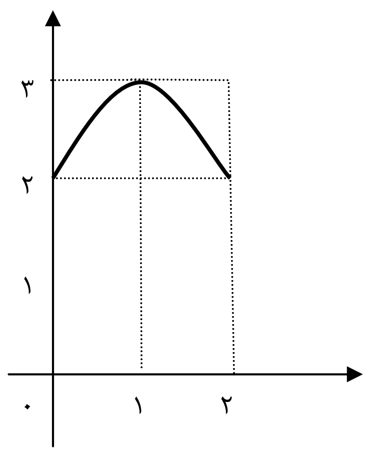


۱) $f(x)+۲$

نمودار تابع $f(x)$ دو واحد بالا می رود.

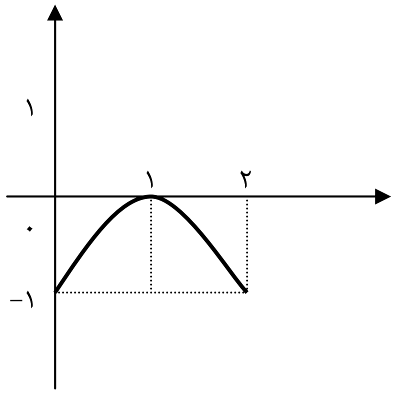
$D_{f(x)+۲}=[۰,۲]$

$R_{f(x)+۲}=[۲,۳]$



۲) $f(x)-۱$

نمودار تابع $f(x)$ یک واحد پایین می رود.

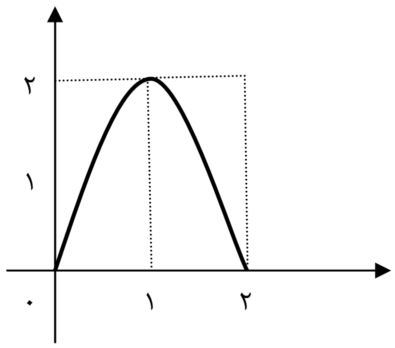


$D_{f(x)-۱}=[۰,۲]$

$R_{f(x)-۱}=[-۱,۰]$

....

۳) $۲f(x)$



$D_{۲f(x)}=[۰,۲]$

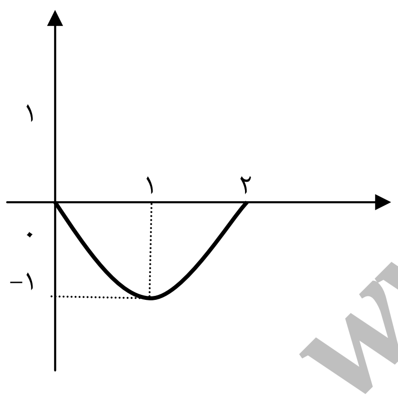
$R_{۲f(x)}=[۰,۲]$

عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ دو برابر می شوند.

....

۴) $-f(x)$

عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ قرینه می شوند.



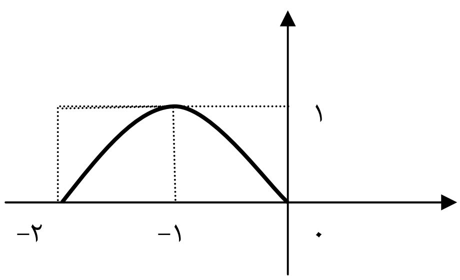
$D_{-f(x)}=[۰,۲]$

$R_{-f(x)}=[-۱,۰]$

....

۵) $f(x+۲)$

نمودار تابع $f(x)$ دو واحد عقب می رود.



$D_{f(x+۲)}=[-۲,۰]$

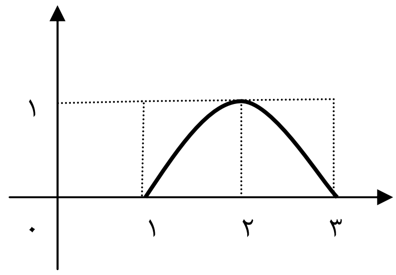
$R_{f(x+۲)}=[۰,۱]$

$۰\le x+۲\le ۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۰$

....

۶) $f(x-۱)$

نمودار تابع $f(x)$ یک واحد جلو می رود.



$D_{f(x-۱)}=[۱,۳]$

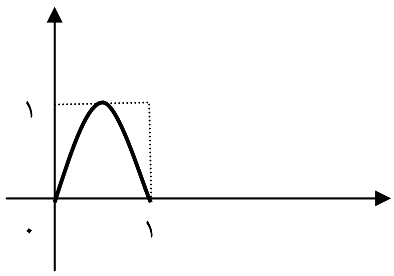
$R_{f(x-۱)}=[۰,۱]$

$۰\le x-۱\le ۲\Rightarrow ۱\le x\le ۳$

....

۷) $f(۲x)$

طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می شوند.



$D_{f(۲x)}=[۰,۱]$

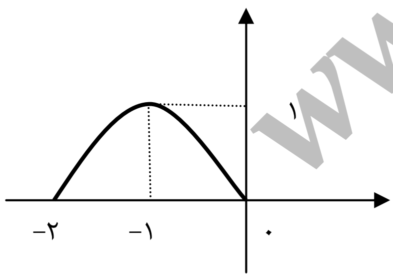
$R_{f(۲x)}=[۰,۱]$

$۰\le ۲x\le ۲\Rightarrow ۰\le x\le ۱$

....

۸) $f(-x)$

طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در -۱ ضرب می شوند.



$D_{f(-x)}=[-۲,۰]$

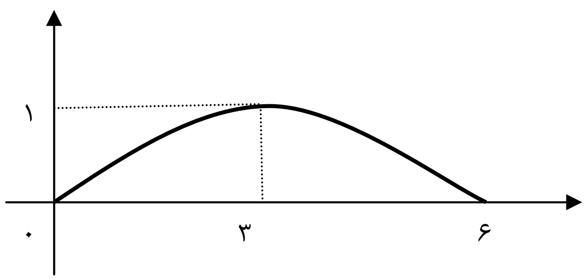
$R_{f(-x)}=[۰,۱]$

$۰\le -x\le ۲\Rightarrow -۲\le x\le ۰$

....

۹) $f(\frac{x}{۳})$

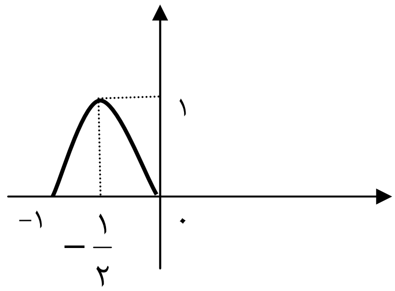
طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در ۳ ضرب می شوند.



$D_{f(\frac{x}{۳})}=[۰,۶]$

$R_{f(\frac{x}{۳})}=[۰,۱]$

۱۰) $f(-۲x)$



طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب می شوند.

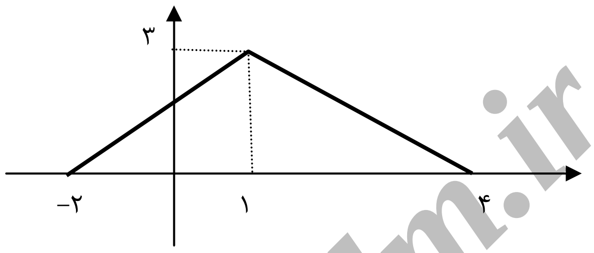
$D_{f(-۲x)}=[-۱,۰]$

$R_{f(-۲x)}=[۰,۱]$

$۰\le ۲x\le ۲ \Rightarrow -۱\le x\le ۰$

***

تمرین : نمودار تابع معین f با دامنه ی $[-۲,۴]$ و برد $[۰,۳]$ در شکل زیر داده شده است.



در هر مورد نمودار تابع داده شده را رسم نموده و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

الف) $y=f(x+۲)$ ج) $y=f(۲x)$ هـ) $y=f(۲x-۱)$

ب) $y=f(x-۳)$ د) $y=f(\frac{۱}{۴}x)$ و) $y=f(-x)$

تمرین برای حل

تمرین ۱ : به کمک نمودار تابع $y=|x|$ در فاصله ی $-۲\le x\le ۲$ رسم کنید. سپس به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=|x-۱|$ ج) $y=|۲x|$ هـ) $y=-۳|x-۱|+۲$

ب) $y=|x+۳|$ د) $y=|\frac{۱}{۲}x|$

***

تمرین ۲ : به کمک نمودار تابع $y=x^{2}$ نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=x^{2}-1$ ج) $y=2x^{2}$ هـ) $y=-x^{2}$

ب) $y=x^{2}+3$ د) $y=\frac{1}{2}x^{2}$

***

تمرین ۳ : به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=1+\sqrt{x+2}$ ب) $y=\sqrt{x-3}-1$ ج) $y=1+\sqrt{2x}$

تمرین ۴ : به کمک نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ نمودار $y=\frac{x+1}{x}$ را به دست آورید.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org

ریاضی ۲

فصل سوم : تعیین علامت و حل نامعادلات

تعیین علامت عبارت های جبری

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری این است که تعیین کنیم، عبارت داده شده در چه فاصله ای مثبت، در چه فاصله ای منفی و به ازای چه عدد یا اعدادی صفر می شود.

برای مثال عبارت $p=-۳x+۶$ به ازای هر عدد بزرگتر از ۲ مثبت ، به ازای هر عدد کمتر از ۲ منفی و به ازای ۲ صفر می شود. به جدول زیر دقت کنید.

$x=۲$	$x<۲$	$x=۲$	$x>۲$
$p=-۳x+۶$	+	∘	−

روش تعیین علامت دو جمله ای درجه ی اول

برای تعیین علامت عبارت دو جمله ای درجه ی اول به شکل $ax+b$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

ابتدا عبارت داده شده را برابر صفر قرار می دهیم و ریشه ی معادله ی بدست آمده را تعیین کرده و از جدول زیر به عنوان الگو استفاده می کنیم.

x	$-\infty$	$x_\circ$	$+\infty$
$p=ax+b$	مخالف علامت a	∘	موافق علامت a

تمرین : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p=-۳x+۶$$

حل :

$-۳x+۶=۰ \rightarrow x=۲$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$p=-۳x+۶$	+	∘	−

تمرین برای حل :

۱) $p = ۵x + ۲۰$

۲) $p = -\frac{۱}{۲}x + ۷$

۳) $p = ۴ - \frac{۱}{۳}x$

۴) $p = \frac{۴x - ۲}{۵}$

تذکر ۱ : اگر عبارتی به صورت حاصل ضرب یا تقسیمی از دو یا چند عبارت دو جمله ای درجه ی اول باشد، برای تعیین علامت آن به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : ریشه های هر یک از عوامل آن را تعیین می کنیم.

۲ : جدولی تنظیم می کنیم و در سطر اول آن ریشه های هر یک از عوامل را از کوچک به بزرگ می نویسیم.

۳ : در هر سطر دیگر جدول علامت هر عامل را تعیین می کنیم.

۴ : در نهایت علامت تمام عوامل را ضرب می کنیم.

تمرین : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p = (x - ۱)(۶ - ۲x)$$

حل:

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱$

$۶ - ۲x = ۰ \rightarrow x = ۳$

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
$x - ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$۶ - ۲x$		$+$		$+$	۰	$-$	
$p = (x - ۱)(۶ - ۲x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

تذکر۲ : اگر عبارتی به دو یا چند عبارت درجه ی اول قابل تجزیه باشد. پس از تجزیه ی آن به عبارت های درجه ی اول به روش فوق تعیین علامت می شود.

تمرین : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p=\frac{۴-x^{۲}}{x+۳}$$

حل:

$$p=\frac{۴-x^{۲}}{x+۳}=\frac{(۲-x)(۲+x)}{x+۳}$$

$۲-x=۰\rightarrow x=۲$

$۲+x=۰\rightarrow x=-۲$

$x+۳=۰\rightarrow x=-۳$

x	$-\infty$	-۳		-۲		۲	$+\infty$
$۲-x$	+		+		+	۰	−
$۲+x$	−		−	۰	+		+
$x+۳$	−	۰	+		+		+
$p=\frac{۴-x^{۲}}{x+۳}$	+	نامعین	−	۰	+	۰	−

تمرین برای حل : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p=\frac{(۳-x)(۱-x)}{(۲-x)(۱-۲x)}$

۲) $p=x^{۳}-۷x^{۲}+۶x$

۳) $p=(x-۱)(x^{۲}-۱۰x+۲۵)$

۴) $p=\frac{۷x^{۲}+۶x}{|-۲x+۱|}=$

۵) $B=\frac{x-۵}{x^{۳}-۴x}$

۶) $p=\frac{۳x+۶}{۹x-x^{۳}}$

روش تعیین علامت سه جمله ای درجه ی دوم

برای تعیین علامت یک عبارت سه جمله ای درجه ی دوم به شکل $ax^۲+bx+c$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : عبارت داده شده را برابر صفر قرار می دهیم.

۲ : با توجه به وجود یا عدم وجود ریشه و یا تعداد ریشه ها، از یکی از جدول های زیر استفاده می کنیم.

الف : معادله دو ریشه دارد.

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$p=ax^۲+bx+c$		موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

ب : معادله یک ریشه دارد. (ریشه ی مضاعف)

x	$-\infty$		$x_۰$		$+\infty$
$p=ax^۲+bx+c$		موافق علامت a	۰	موافق علامت a	

ج : معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

x	$-\infty$		$+\infty$
$p=ax^۲+bx+c$		موافق علامت a موافق علامت a	

تمرین : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p=-x^۲+x+۲$ ۲) $p=x^۲-۶x+۹$ ۳) $p=x^۲-x+۳$

حل :

۱)

$$-x^۲+x+۲=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۱+۸=۹} \begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۱+۳}{-۲}=-۱ \\ x_۲=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۱-۳}{-۲}=۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$p=-x^۲+x+۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

۲)

$x^۲ - ۶x + ۹ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۳۶ - ۳۶ = ۰} x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۶}{۲} = ۳$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
$p = x^۲ - ۶x + ۹$		+	۰	+	

۳)

$x^۲ - x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ - ۱۲ = -۱۱}$ معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

x	$-\infty$		$+\infty$
$p = x^۲ - x + ۳$		+ +	

تمرین برای حل : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

۲) $p = ۶ - ۴t^۲$

۳) $p = ۱ + k + k^۲$

۴) $p = -۲۵ + ۱۰x - x^۲$

۵) $p = \frac{۳ - x^۲}{(۱ - x)(x^۲ - ۵x + ۶)}$

۶) $p = \frac{۳x^۲ - ۴x - ۴}{۱ - x}$

۷) $p = \frac{۳x^۲ - ۵x^۳}{x - ۲}$

نتیجه : با توجه به اینکه برای تعیین علامت عبارت درجه ی دوم $P = ax^۲ + bx + c$ گفته شد، می توان نتیجه گرفت که :

الف : شرط اینکه عبارت $P = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت باشد، این است که

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$$

ب : شرط اینکه عبارت $P = ax^۲ + bx + c$ همواره منفی باشد، این است که

$$\begin{cases}\Delta < ۰\\ a < ۰\end{cases}$$

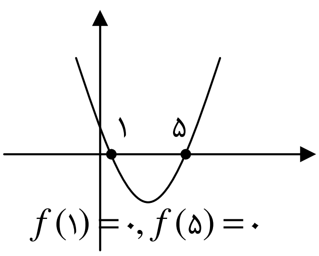
تمرین : نشان دهید که عبارت $P = -۵x^{۲} + x - ۳$ همواره منفی است.

تمرین : مقدار m را طوری بیابید که عبارت $P = (m-۱)x^{۲} + ۳x + m + ۱$ همواره مثبت باشد.

***

رابطه ی بین علامت یک عبارت جبری و نمودار آن

می دانیم که هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن برابر صفر است. بر این اساس می توان نتیجه گرفت که اگر نمودار تابعی محور طول ها را قطع کند، مقدار تابع در آن نقطه برابر صفر می شود. یعنی $f(x) = ۰$ ، لذا طول نقطه ی برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ برابر ریشه ی معادله ی $f(x) = ۰$ خواهد بود. همچنین واضح است که اگر نمودار تابعی در یک فاصله بالای محور طول ها قرار گیرد داریم $f(x) > ۰$ و اگر پایین محور طول ها قرار گیرد داریم $f(x) < ۰$



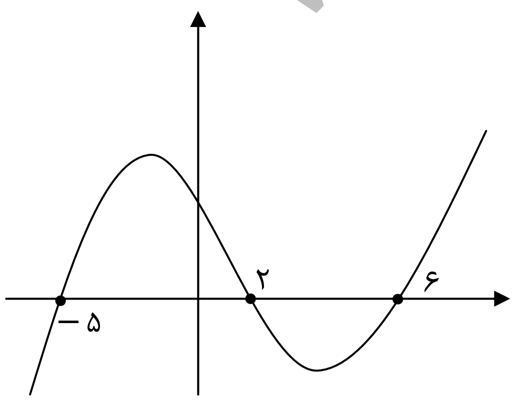
برای مثال در نمودار تابع فوق می توان گفت که :

x	$-\infty$		۱		۵		$+\infty$
$f(x)$		+	۰	−	۰	+	

تمرین : نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است.

الف : ریشه های معادله ی $f(x) = ۰$ را بنویسید.

ب : نمودار تعیین علامت $y = f(x)$ را رسم کنید.

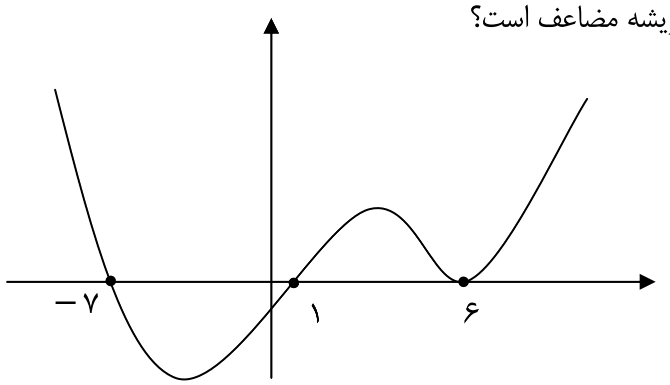


توجه : اگر در نقطه ای نمودار تابع بر محور طول های مماس شود. گویند تابع در آن نقطه دارای ریشه ی مضاعف است.

تمرین : نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است.

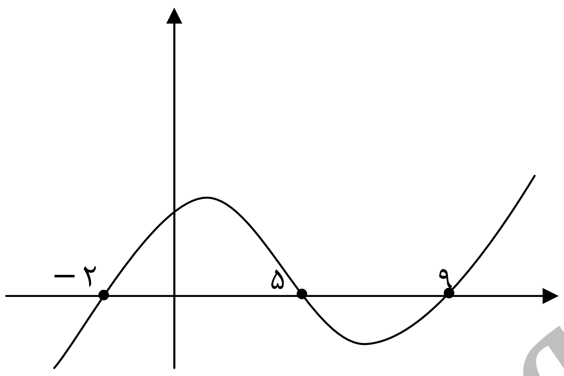
الف : ریشه های معادله ی $f(x)=۰$ را بنویسید. کدام ریشه مضاعف است؟

ب : نمودار تعیین علامت $y=f(x)$ را رسم کنید.



تمرین : مقدار m را طوری بیابید که نمودار تابع $y=(m-۱)x^{۲}+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور x ها قرار گیرد؟

تمرین : در شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده است. دامنه ی تابع $y=\sqrt{f(x)}$ را بنویسید.



***

تمرین : اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، ثابت کنید که $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$

یعنی حاصل جمع هر عدد حقیقی مثبت و معکوس آن حداقل برابر۲ است.

حل: **(روش جبری) :** تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ را در نظر می گیریم.

$$f(x)=x+\frac{۱}{x}=\underbrace{(\sqrt{x})^{۲}+(\frac{۱}{\sqrt{x}})^{۲}-۲(\sqrt{x})(\frac{۱}{\sqrt{x}})}+۲(\sqrt{x})(\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

$$\to f(x)=(\underbrace{(\sqrt{x})-(\sqrt{\frac{۱}{x}})}_{۰})^{۲}+۲\to f(x)\geq ۲\to Min(f(x))=۲$$

لذا به ازای هر x داریم $f(x)\geq ۲$. پس به ازای $x=a$ نیز می توان نوشت:

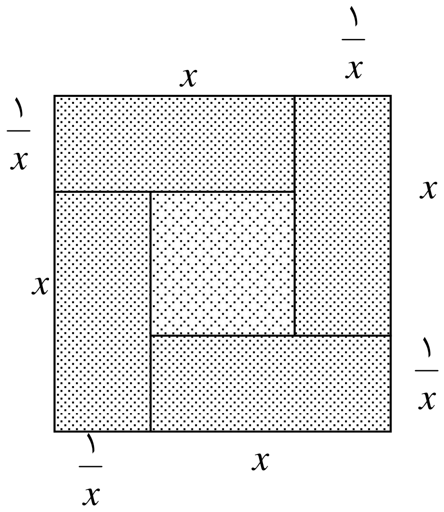
$$f(a)=a+\frac{۱}{a}\geq ۲$$

حل: **(روش جبری) :** تابع $f(x)=x^{۲}$ را در نظر می گیریم. واضح است که برای هر x داریم $x^{۲}\geq ۰$ پس به ازای $x=a-۱$ نیز می توان نوشت :

$$(a-۱)^{۲}\geq ۰\rightarrow a^{۲}-۲a+۱\geq ۰\xrightarrow{\div a}a-۲+\frac{۱}{a}\geq ۰\rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲$$

حل : **(روش هندسی)**

مربعی به شکل زیر با اضلاع $x+\frac{۱}{x}$ تشکیل می دهیم.



$$\text{مساحت هر مستطیل}=(x)(\frac{۱}{x})=۱$$

از طرفی واضح است مساحت مربع بزرگ از مجموع مساحت چهار مستطیل بزرگتر است.

مجموع مساحت چهار مستطیل $\geq$ مساحت مربع بزرگ

$$(x+\frac{۱}{x})^{۲}\geq ۴(۱)$$

$$\rightarrow\sqrt{(x+\frac{۱}{x})^{۲}}\geq\sqrt{۴(۱)}\rightarrow x+\frac{۱}{x}\geq ۲$$

***

تمرین : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})>۴$

نامعادله ی درجه ی دوم

برای حل یک نامعادله ی درجه ی دوم به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : تمام جملات نامعادله را به طرف چپ منتقل می کنیم.

۲ : پس از ساده کردن، معادله ی هم ارز نامعادله را تعیین می کنیم.

۳ : با تعیین ریشه های معادله ی هم ارز ، آن را تعیین علامت می کنیم.

۴ : با توجه به جدول تعیین علامت ، ناحیه ی جواب را مشخص می کنیم.

تمرین : نامعادله ی $x^۲ < ۳x - ۲$ را حل کنید.

حل :

$x^۲ < ۳x - ۲ \rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰$

معادله ی هم ارز $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

$(x-۱)(x-۲) = ۰ \rightarrow x = ۱ \ , \ x = ۲$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$x^۲ - ۳x + ۲ < ۰$		+	۰	−	۰	+	

تمرین برای حل : هر یک از نامعادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^۲ - ۸x + ۱۲ > ۰$ ۲) $x^۲ + ۷ < ۳x$ ۳) $۴ \geq x^۲$

تذکر: به طریقی مشابه می توان نامعادلات درجات بالاتر و یا نامعادلات شامل عبارت های گویا را نیز حل کرد.

تمرین برای حل : هر یک از نامعادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^۳ - ۵x^۲ - ۶x > ۰$

۲) $\dfrac{(x-۲)(x-۳)}{x-۱} \leq ۰$

۳) $\dfrac{x-۱}{x-۲} > ۲$

۴) $\dfrac{x-۲}{x+۱} > ۰$

۵) $\dfrac{۱-x}{۳+x} \geq ۰$

۶) $\dfrac{x^۲ + ۳x - ۴}{x+۲} < ۰$

۷) $\dfrac{۳+t}{۴-t^۲} < ۰$

تمرین : دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ را تعیین کنید.

حل : دامنه ی تابع فوق مجموعه ی مقادیری است که به ازای آنها $3x-x^2\geq 0$

معادله ی هم ارز $3x-x^2=0 \rightarrow x=0\ ,\ x=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x-x^2\geq 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow D_f=[0,3]$$

تمرین برای حل : دامنه ی هر یک از توابع زیر را به تعیین کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

۲) $f(r)=\sqrt{r^2-5r+6}$

۳) $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t-8t^3}}$

۴) $f(x)=3x+\sqrt{3x-x^2}$

۵) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$

۶) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{3x-6}}$

***

ریاضی ۲

فصل چهارم : توابع نمایی و لگاریتمی

یادآوری

در ابتدا چند رابطه در مورد توان را جهت یادآوری معرفی می کنیم.

۱ : توان صفر

$$\begin{cases} a^{\circ} = ۱ \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

مثال: $۵^{\circ} = ۱$

***

۲ : توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \dfrac{۱}{a^{n}} \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

مثال: $۵^{-۳} = \dfrac{۱}{۵^{۳}}$

***

۳ : توان کسری

$$\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

اگر n زوج باشد، باید $a \geq ۰$ باشد.

مثال: $۵^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^{۲}}$

***

۴ : توان توان

$$(a^{m})^{n} = a^{m.n}$$

مثال: $(۵^{۳})^{۲} = ۵^{۳\times۲} = ۵^{۶}$

***

۵ : ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

مثال: $۵^{۷} \times ۵^{۲} = ۵^{۷+۲} = ۵^{۹}$

***

۶ : تقسیم اعداد توان‌دار با پایه های مساوی

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

مثال: $۵^۷ \div ۵^۳ = ۵^{۷-۳} = ۵^۴$

***

۷ : هر گاه دو عدد توان‌دار مساوی،پایه های مساوی داشته باشند، توان های آنها نیز مساویند.

$$\begin{cases} a^m = a^n \rightarrow m = n \\ a \neq ۰,۱,-۱ \end{cases}$$

مثال: $۵^x = ۵^۳ \rightarrow x = ۳$

***

تمرین : در تساوی های مقابل مقدار x را حساب کنید.

الف) $۲^x = ۳۲$

ب) $۳^x \times ۳^۴ = ۲۴۳$

ج) $۹^x = ۲۷$

د) $۳^{x-۱} = \frac{۱}{۸۱}$

حل:

الف) $۲^x = ۳۲ \rightarrow ۲^x = ۲^۵ \rightarrow x = ۵$

ب) $۳^x \times ۳^۴ = ۲۴۳ \rightarrow ۳^{x+۴} = ۳^۵ \rightarrow x + ۴ = ۵ \rightarrow x = ۱$

ج) $۹^x = ۲۷ \rightarrow (۳^۲)^x = ۳^۳ \rightarrow ۳^{۲x} = ۳^۳ \rightarrow ۲x = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

د) $۳^{x-۱} = \frac{۱}{۸۱} \rightarrow ۳^{x-۱} = \frac{۱}{۳^۴} \rightarrow ۳^{x-۱} = ۳^{-۴} \rightarrow x - ۱ = -۴ \rightarrow x = -۴ + ۱ = -۳$

***

تعریف لگاریتم

لگاریتم عدد مثبت b در مبنای عدد مثبت و مخالف یک a ، عددی مانند x است که اگر a به توان x برسد، حاصل برابر b می شود.

$$\log_{a}^{b} = x \leftrightarrow a^{x} = b$$

$$\begin{cases} a,b > ۰ \\ a \neq ۱ \end{cases}$$

برای مثال: $۲^{۳} = ۸ \rightarrow \log_{۲}^{۸} = ۳$

تمرین : تساوی های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

الف) $۷^{۳} = ۳۴۳$ ب) $۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$ ج) $\sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

حل:

الف) $۷^{۳} = ۳۴۳ \rightarrow \log_{۷}^{۳۴۳} = ۳$

ب) $۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۱}{۸}} = -۳$

ج) $\sqrt[۳]{۶۴} = ۴ \rightarrow ۶۴^{\frac{۱}{۳}} = ۴ \rightarrow \log_{۴}^{۶۴} = \frac{۱}{۳}$

تمرین : تساوی های زیر را به صورت توانی بنویسید.

الف) $\log_{۲}^{۶۴} = ۶$ ب) $\log_{۲}^{\sqrt{۸}} = \frac{۳}{۲}$ ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۶۴} = ۶ \rightarrow ۲^{۶} = ۶۴$

ب) $\log_{۲}^{\sqrt{۸}} = \frac{۳}{۲} \rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{۸}$

ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳ \rightarrow ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱$

تمرین : در هر مورد مقدار x را پیدا کنید.

الف) $\log_{۳}^{۸۱} = x$ ب) $\log_{۲}^{x} = ۳$ ج) $\log_{x}^{۶۴} = ۲$

حل:

الف) $\log_{۳}^{۸۱} = x \to ۳^{x} = ۸۱ \to ۳^{x} = ۳^{۴} \to x = ۴$

ب) $\log_{۲}^{x} = ۳ \to ۲^{۳} = x \to x = ۸$

ج) $\log_{x}^{۶۴} = ۲ \to x^{۲} = ۶۴ \to x = \sqrt{۶۴} \to x = ۸$

تمرین : مقدار x را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_{۷}^{۴۹} = ۲x - ۱$$

حل:

$$\log_{۷}^{۴۹} = ۲x - ۱ \to ۷^{۲x-۱} = ۴۹ \to ۷^{۲x-۱} = ۷^{۲} \to ۲x - ۱ = ۲ \to ۲x = ۳ \to x = \frac{۳}{۲}$$

تمرین: لگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶}$ ج) $\log_{۷}^{۷}$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶}$ د) $\log_{۳}^{۱}$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶} = x \to ۲^{x} = ۲۵۶ \to ۲^{x} = ۲^{۸} \to x = ۸$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶} = y \to ۴^{y} = ۲۵۶ \to ۴^{y} = ۴^{۴} \to y = ۴$

ج) $\log_{۷}^{۷} = z \to ۷^{z} = ۷ \to ۷^{z} = ۷^{۱} \to z = ۱$

د) $\log_{۳}^{۱} = t \to ۳^{t} = ۱ \to ۳^{t} = ۳^{۰} \to t = ۰$

$$\begin{array}{r||l} ۲۵۶ & ۲ \\ ۱۲۸ & ۲ \\ ۶۴ & ۲ \\ ۳۲ & ۲ \\ ۱۶ & ۲ \\ ۸ & ۲ \\ ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & \end{array} \qquad \to ۲۵۶ = ۲^{۸}$$

نتیجه:

۱ : لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است.

$$\begin{cases}\log_a^a = ۱ \\ a > ۰ , a \neq ۱\end{cases}$$

۲ : لگاریتم یک در هر مبنای مثبت و مخالف یک صفر است.

$$\begin{cases}\log_a^۱ = ۰ \\ a > ۰ , a \neq ۱\end{cases}$$

تمرین : نشان دهید که تساوی زیر درست است.

$$\log_۶^۴ + \log_۶^۹ = ۲$$

حل: قرار می دهیم $\log_۶^۴ = x$ و $\log_۶^۹ = y$ و نشان می دهیم که $x + y = ۲$

$$\left.\begin{array}{l}\log_۶^۴ = x \to ۶^x = ۴ \\ \log_۶^۹ = y \to ۶^y = ۹\end{array}\right\} \to ۶^x \times ۶^y = ۴ \times ۹ \to ۶^{x+y} = ۳۶$$

$$\to ۶^{x+y} = ۶^۲ \to x + y = ۲$$

***

تذکر۱ : لگاریتم صفر نامعین است.

$$\log_a^۰ = \text{نامعین}$$

تذکر ۲ : لگاریتم، روی اعداد منفی ، تعریف نمی شود.

تذکر ۳ : اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را ***لگاریتم اعشاری*** می نامند. معمولاً در لگاریتم اعشاری مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log_{۱۰}^a = \log a$$

تذکر ۴ : ماشین های حساب ، فقط لگاریتم اعشاری و لگاریتم طبیعی[1] را محاسبه می کنند. برای محاسبه ی لگاریتم در مبناهای دیگر به کمک ماشین حساب می توان از فرمولی به نام فرمول تغییر مبنا استفاده نمود. این فرمول در ادامه،گفته می شود.

تمرین : لگاریتم های زیر را به کمک ماشین حساب محاسبه کنید.

الف) $\log ۲۵$ ج) $\log_{۵}^{۶۲۵}$

ب) $\log ۴۲۸$ د) $\log_{۳}^{۱۴}$

حل :

الف)

$\log ۲۵ = ۱/۳۹۷۹$

$$\boxed{۲۵} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{=}$$

ب)

$\log ۴۲۸ = ۲/۶۳۱۴$

$$\boxed{۴۲۸} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{=}$$

ج)

$\log_{۵}^{۶۲۵} = ۴$

$$\boxed{۶۲۵} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{\div} \rightarrow \boxed{۵} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{=}$$

[1]. اگر مبنای لگاریتم عدد نپرین ($e = ۲/۷۱$) باشد، لگاریتم را ***لگاریتم طبیعی*** می نامند. معمولاً مبنای e نوشته نمی شود. حال به دلیل اینکه این لگاریتم با لگاریتم اعشاری اشتباه نشود، $\log$ را به صورت L_n می نویسند.

$$\log_{e}^{a} = L_n a$$

واضح است که :

$$L_n e = \log_{e}^{e} = ۱$$
$$L_n ۱ = \log_{e}^{۱} = ۰$$

به کمک ماشین حساب نیز می توان لگاریتم طبیعی را محاسبه کرد.

د)

$\log_{۳}^{۱۴} = ۲/۴$

$\boxed{۱۴} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{\div} \rightarrow \boxed{۳} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{=}$

تمرین : لگاریتم اعشاری عددی ۴ است، آن عدد را به کمک ماشین حساب به دست آورید.

حل:

$$\log_{۱۰}^{?} = ۴$$

$$\boxed{۴} \rightarrow \boxed{SHIFT} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{=}$$

$$= ۱۰۰۰۰$$

تمرین: لگاریتم اعشاری عددی برابر ۰/۹۰۳ می باشد. آن عدد را به کمک ماشین حساب تعیین کنید.

حل:

$$\log_{۱۰}^{?} = ۰/۹۰۳$$

$$\boxed{۰/۹۰۳} \rightarrow \boxed{SHIFT} \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \boxed{=}$$

$$= ۷/۹۹۸ \approx ۸$$

توجه : برخی ماشین حساب ها به جای کلید $\boxed{SHIFT}$ ، کلیدی به نام $\boxed{2nd}$ دارند.

***

روابط لگاریتمی

با توجه به تعریف لگاریتم ، روابط زیر را به راحتی می توان بیان کرد.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

برای مثال :

$$\log_۷^۳ + \log_۷^۵ = \log_۷^{۳\times۵} = \log_۷^{۱۵}$$

این رابطه برای مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز برقرار است.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

برای مثال:

$$\log_{۱۰۰}^۲ + \log_{۱۰۰}^۵ + \log_{۱۰۰}^{۱۰} = \log_{۱۰۰}^{۲\times۵\times۱۰} = \log_{۱۰۰}^{۱۰۰} = ۱$$

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

مثال :

$$\log_۷^{۲۰} - \log_۷^۵ = \log_۷^{۲۰\div۵} = \log_۷^۴$$

۳: لگاریتم عدد توان‌دار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

مثال :

$$\log_۲^{۳۲} = \log_۲^{۲^۵} = ۵\log_۲^۲ = ۵\times۱ = ۵$$

۴: لگاریتم مبنای توان‌دار

$$\log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}\log_x^a$$

مثال :

$$\log_{۸۱}^{۳} = \log_{۳^{۴}}^{۳} = \frac{۱}{۴}\log_{۳}^{۳} = \frac{۱}{۴}$$

۵ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_{b}^{a} = \frac{\log_{x}^{a}}{\log_{x}^{b}}$$

مثال : فرض کنید که می خواهیم مبنای لگاریتم $\log_{۳}^{۴}$ را به ۵ تبدیل کنیم.در این صورت

$$\log_{۳}^{۴} = \frac{\log_{۵}^{۴}}{\log_{۵}^{۳}}$$

۶ : دو لگاریتم مساوی با مبنای برابر

$$\log_{x}^{a} = \log_{x}^{b} \to a = b$$

مثال :

$$\log_{۳}^{a} = \log_{۳}^{۸} \to a = ۸$$

***

تمرین : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log ۵ + \log ۲۰$

۲) $\log_{۷}^{۷۰} - \log_{۷}^{۱۰}$

۳) $\log_{۶}^{۴} + \log_{۶}^{۹}$

۴) $۲\log ۵ + \log ۴$

۵) $۶\log_{۴}^{۲} - \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴}$

۶) $\log_{۲}^{۸} + \log_{۲}^{۵} - \log_{۲}^{۱۰}$

حل:

۱) $\log ۵ + \log ۲۰ = \log ۵ \times ۲۰ = \log ۱۰۰ = \log ۱۰^{۲} = ۲\log ۱۰ = ۲ \times ۱ = ۲$

۲) $\log_{۷}^{۷۰} - \log_{۷}^{۱۰} = \log_{۷}^{۷۰ \div ۱۰} = \log_{۷}^{۷} = ۱$

۳) $\log_{۶}^{۴} + \log_{۶}^{۹} = \log_{۶}^{۴ \times ۹} = \log_{۶}^{۳۶} = \log_{۶}^{۶^{۲}} = ۲\log_{۶}^{۶} = ۲ \times ۱ = ۲$

۴)

$$۲\log ۵+\log ۴=\log ۵^{۲}+\log ۴=\log ۲۵+\log ۴=\log ۲۵\times ۴=\log ۱۰۰$$
$$=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$$

۵) $۶\log_{۴}^{۲}-\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴}=\log_{۴}^{۲^{۶}}-\log_{۲^{۲}}^{۶۴}=\log_{۴}^{۶۴}-\log_{۴}^{۶۴}=\log_{۴}^{۶۴\div ۶۴}=\log_{۴}^{۱}=۰$

۶) $\log_{۲}^{۸}+\log_{۲}^{۵}-\log_{۲}^{۱۰}=\log_{۲}^{(۸\times ۵)\div ۱۰}=\log_{۲}^{۴}=\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲\log_{۲}^{۲}=۲\times ۱=۲$

تمرین: لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱) $\log_{۷}^{۱۵}-\log_{۷}^{۳}$

۲) $\dfrac{\log ۵}{\log ۲}$

۳) $۵\log a-۲\log b+۳\log c$

۴) $\log a-\log b-\log c+\log d$

۵) $۲\log x-۳\log y-۴\log c$

حل:

۱) $\log_{۷}^{۱۵}-\log_{۷}^{۳}=\log_{۷}^{۱۵\div ۳}=\log_{۷}^{۵}$

۲) $\dfrac{\log ۵}{\log ۲}=\log_{۲}^{۵}$

۳) $۵\log a-۲\log b+۳\log c=\log a^{۵}-\log b^{۲}+\log c^{۳}=\log \dfrac{a^{۵}c^{۳}}{b^{۲}}$

۴) $\log a-\log b-\log c+\log d=\log \dfrac{ad}{bc}$

۵) $۲\log x-۳\log y-۴\log c=\log x^{۲}-\log y^{۳}-\log c^{۴}=\log \dfrac{x^{۲}}{y^{۳}c^{۴}}$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log_{۵}^{۱۲۵}$

۲) $\log_{۴}^{۳۲}$

۳) $\log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}$

۴) $\log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}$

۵) $\log ۱۰۰$

۶) $\log \sqrt{۱۰۰۰}$

حل:

$۱)\log_{۵}^{۱۲۵}=\log_{۵}^{۵^{۳}}=۳\log_{۵}^{۵}=۳\times۱=۳$

$۲)\ \log_{۴}^{۳۲}=\log_{۲^{۲}}^{۲^{۵}}=۵\times\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۲}=\frac{۵}{۲}\times۱=\frac{۵}{۲}$

$۳)\ \log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}=\log_{۳}^{\sqrt{۳^{۳}}}=\log_{۳}^{۳^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۳}{۲}\log_{۳}^{۳}=\frac{۳}{۲}\times۱=\frac{۳}{۲}$

$۴)\ \log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}=\log_{\sqrt[۳]{۲^{۲}}}^{۲^{۳}}=\log_{۲^{\frac{۲}{۳}}}^{۲^{۳}}=۳\times\frac{۳}{۲}\log_{۲}^{۲}=\frac{۹}{۲}\times۱=\frac{۹}{۲}$

$۵)\ \log۱۰۰=\log۱۰^{۲}=۲\log۱۰=۲\times۱=۲$

$۶)\ \log\sqrt{۱۰۰۰}=\log\sqrt{۱۰^{۳}}=\log۱۰^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\log۱۰=\frac{۳}{۲}\times۱=\frac{۳}{۲}$

تمرین: اگر $\log۲=a$ و $\log۳=b$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

$۱)\ \log۸۱$	$۵)\log۷۲$	$۹)\log_{۳}^{۲}$
$۲)\ \log۳۲$	$۶)\log۵$	$۱۰)\log_{۸۱}^{۳۲}$
$۳)\ \log۶$	$۷)\log۷۵$	
$۴)\log۱۲$	$۸)\log_{۲}^{۳}$	

حل:

$۱)\ \log۸۱=\log۳^{۴}=۴\log۳=۴b$

$۲)\ \log۳۲=\log۲^{۵}=۵\log۲=۵a$

$۳)\ \log۶=\log۲\times۳=\log۲+\log۳=a+b$

$۴)\log۱۲=\log۲^{۲}\times۳=\log۲^{۲}+\log۳=۲\log۲+\log۳=۲a+b$

$۵)\log۷۲=\log۲^{۳}\times۳^{۲}=\log۲^{۳}+\log۳^{۲}=۳\log۲+۲\log۳=۳a+۲b$

$۶)\log۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log۱۰-\log۲=۱-a$

۷) $\log ۷۵ = \log ۳ \times ۵^{۲} = \log ۳ + \log ۵^{۲} = \log ۳ + ۲\log ۵ = b + ۲(۱ - a) = b + ۲ - ۲a$

۸) $\log_{۲}^{۳} = \frac{\log ۳}{\log ۲} = \frac{b}{a}$

۹) $\log_{۳}^{۲} = \frac{\log ۲}{\log ۳} = \frac{a}{b}$

۱۰) $\log_{۸۱}^{۳۲} = \log_{۳^{۴}}^{۲^{۵}} = ۵ \times \frac{۱}{۴} \log_{۳}^{۲} = \frac{۵}{۴} \times \frac{a}{b} = \frac{۵a}{۴b}$

تمرین: اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰$ و $\log ۷ = ۰/۸۴۵۰$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱) $\log ۸$

۲) $\log ۴۹$

۳) $\log ۱۴$

۶) $\log ۵۶$

۷) $\log ۵$

۸) $\log ۲۵$

حل :

۱) $\log ۸ = \log ۲^{۳} = ۳\log ۲ = ۳(۰/۳۰۱۰) = ۰/۹۰۳۰$

۲) $\log ۴۹ = \log ۷^{۲} = ۲\log ۷ = ۲(۰/۸۴۵۰) = ۱/۶۹$

۳) $\log ۱۴ = \log ۲ \times ۷ = \log ۲ + \log ۷ = ۰/۳۰۱۰ + ۰/۸۴۵۰ = ۱/۱۴۶$

۶) $\log ۵۶ = \log ۲^{۳} \times ۷ = \log ۲^{۳} + \log ۷ = ۳\log ۲ + \log ۷ = ۳(۰/۳۰۱۰) + (۰/۸۴۵۰)$

$= ۰/۹۰۳۰ + ۰/۸۴۵۰ = ۱/۷۴۸$

۷) $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - (۰/۳۰۱۰) = ۰/۶۹۹$

۸) $\log ۲۵ = \log ۵^{۲} = ۲\log ۵ = ۲(۰/۶۹۹) = ۱/۳۹۸$

تمرین : معادله[2] های زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۵}^{x}+\log_{۵}^{۳}=\log_{۵}^{۱۲}$

۲) $۳\log x=\log ۸$

۳) $۲\log x+\log ۳=\log ۲۷$

۴) $\log^{x+۳}+\log^{x}=۱$

۵) $\log_{۲}^{۴x}-\log_{۲}^{x-۳}=۳$

۶) $\log^{۱-x}-\log^{۲}=\log^{۵}$

حل:

۱) $\log_{۵}^{x}+\log_{۵}^{۳}=\log_{۵}^{۱۲}\rightarrow\log_{۵}^{۳x}=\log_{۵}^{۱۲}\rightarrow ۳x=۱۲\rightarrow x=۴$

۲) $۳\log x=\log ۸\rightarrow\log x^{۳}=\log ۸\rightarrow x^{۳}=۸\rightarrow x=\sqrt[۳]{۸}=۲$

۳) $۲\log x+\log ۳=\log ۲۷\rightarrow\log x^{۲}+\log ۳=\log ۲۷\rightarrow\log ۳x^{۲}=\log ۲۷\rightarrow ۳x^{۲}=۲۷$

$\rightarrow x^{۲}=۹\rightarrow x=\sqrt{۹}=\pm ۳$

که ریشه ی $x=-۳$ غیر قابل قبول است.

۴) $\log^{x+۳}+\log^{x}=۱\rightarrow\log^{x(x+۳)}=\log^{۱۰}\rightarrow x^{۲}+۳x=۱۰\rightarrow x^{۲}+۳x-۱۰=۰$

$$\rightarrow(x+۵)(x-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x+۵=۰\rightarrow x=-۵\\x-۲=۰\rightarrow x=۲\end{cases}$$

که ریشه ی $x=-۵$ غیر قابل قبول است.

۵) $\log_{۲}^{۴x}-\log_{۲}^{x-۳}=۳\rightarrow\log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}}=۳\log_{۲}^{۲}\rightarrow\log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}}=\log_{۲}^{۲^{۳}}\rightarrow\log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}}=\log_{۲}^{۸}$

$\rightarrow\frac{۴x}{x-۳}=۸\rightarrow ۴x=۸(x-۳)\rightarrow ۴x=۸x-۲۴\rightarrow ۴x-۸x=-۲۴$

$\rightarrow -۴x=-۲۴\rightarrow x=\frac{-۲۴}{-۴}=۶$

۶) $\log^{۱-x}-\log^{۲}=\log^{۵}\rightarrow\log^{\frac{۱-x}{۲}}=\log^{۵}\rightarrow\frac{۱-x}{۲}=۵\rightarrow ۱-x=۱۰\rightarrow x=-۹$

[2] . توجه کنید که بنابر تعریف لگاریتم، جوابی از یک معادله ی لگاریتمی، قابل قبول است که به ازای آن لگاریتم صفر یا لگاریتم عدد منفی، پیش نیاید.

تمرین برای حل :

۱ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log 25 + \log 4$

۲) $\log_{8}^{40} - \log_{8}^{5}$

۳) $\log_{12}^{16} + \log_{12}^{9}$

۴) $3\log 5 + \log 8$

۵) $\log_{9}^{3} - \frac{1}{2}\log_{3}^{81}$

۶) $\log_{2}^{8} - \log_{2}^{5} + \log_{2}^{20}$

۲: لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱) $\log_{5}^{18} - \log_{5}^{3}$

۲) $\dfrac{\log_{2}^{7}}{\log_{2}^{5}}$

۳) $5\log p + 2\log q + 3\log r$

۴) $\log a + \log b - \log c - \log d$

۵) $2\log x - 5\log y - 3\log c$

۳ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log_{125}^{25}$

۲) $\log_{8}^{32}$

۳) $\log_{5}^{\sqrt{125}}$

۴) $\log_{81}^{27}$

۵) $\log_{\sqrt{5}}^{25}$

۶) $\log_{\sqrt{3}}^{729}$

۷) $\log_{\frac{1}{20}}^{400}$

٤: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b و c به دست آورید.

۱) $\log 49$

۲) $\log 128$

۳) $\log 21$

۴) $\log 28$

۵) $\log 42$

۶) $\log 5$

۷) $\log 576$

۸) $\log_2^7$

۹) $\log_7^2$

۱۰) $\log_{81}^{49}$

۵: اگر $\log 3 = 0/4771$ و $\log 7 = 0/8450$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱) $\log 9$

۲) $\log 49$

۳) $\log 21$

۶) $\log 210$

۷) $\log 63$

۸) $\log_3^7$

٦: اگر $\log^2 = 0/3$ باشد، مقدار $\log^{\frac{25}{4}}$ را محاسبه کنید.

۷: مقدار x را از تساوی مقابل به دست آورید. $\log_{x+1}^{64} = 2$

۸: اگر $\log_x^{81} = -4$ مقدار x را بیابید.

۹: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\log^{2x+1} = 2\log^3$

۲) $\log^{2x+5} - \log^3 = 2\log^5$

۳) $\log x^4 = 4\log^3$

۴) $\log^{3x+1} = \log^5 + 3\log^2$

۵) $\log_2^x + \log_2^5 = \log_2^{150} - \log_2^3$

۶) $\log^x + \log^{x+2} = \log^3$

۱۰ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\log^{x+1} + \log^{x-1} = \log^3$$

۱۱ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\log^{2-x} + \log^{1-x} = \log^5 + 2\log^2$$

***

اثبات روابط لگاریتمی

در اینجا روابط لگاریتمی را که پیش از این بیان کرده ایم، اثبات می کنیم.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow a.b = x^\alpha . x^\beta \rightarrow a.b = x^{\alpha+\beta} \rightarrow \log_x^{a.b} = \alpha + \beta \rightarrow \log_x^{a.b} = \log_x^a + \log_x^b$$

توجه : اثبات تعمیم این رابطه ی به مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز به همین صورت انجام می گیرد.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

دانش آموزان عزیز می توانند، این تساوی را خود اثبات کنند.

***

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \rightarrow \frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \alpha - \beta \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \log_x^a - \log_x^b$$

***

تمرین : به کمک رابطه ی فوق ثابت کنید که $\log_x^{\frac{1}{a}} = -\log_x^a$

***

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \to a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow (a)^n = (x^\alpha)^n \to a^n = x^{n\alpha} \to \log_x^{a^n} = n\alpha \to \log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

***

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^m}^a = \frac{1}{m}\log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \to a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow a = (x^{m\alpha})^{\frac{1}{m}} \to a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \to \log_{x^m}^a = \frac{\alpha}{m} \to \log_{x^m}^a = \frac{1}{m}(\alpha) \to \log_{x^m}^a = \frac{1}{m}(\log_x^a)$$

***

۵ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

شایسته است که قبل از اثبات رابطه ی ۵ تساوی $x^{\log_x^a} = a$ را ثابت کنیم. فرض کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و پس :

$$x^\alpha = a \to x^{\log_x^a} = a$$

لذا با توجه به این تساوی به راحتی می توان نوشت :

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^{b^{\log_b^a}} = \log_x^a \to \log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

***

تمرین برای حل :

۱: تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $\log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b}$ ۲) $a^{\log^b} = b^{\log^a}$

۲ : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $\log_۳^{۱۸} \times \log_{۱۸}^{۸۱}$ ۲) $\dfrac{۱}{\log_{۱۸}^۳} - \dfrac{۱}{\log_۲^۳}$

۳ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

الف) $۲\log_{۱۰}^۲ + \log_{۱۰}^{۲۵۰} =$ ب) $\log_۴^۳ \times \log_۳^{۱۶} =$ ج) $۳\log_{۱۰}^{\sqrt[۳]{۴}} + \log_{۱۰}^{۲۵} =$

د) $\log_۸^{\frac{۱}{۳۲}} =$ هـ) $۲^{\log_۲^۵ - \log_۲^۳} =$

۴ : اگر $\log_۳^۵ = b$ و $\log_۳^۲ = a$ باشد، مقدار $\log_۴^{۱۰}$ را بیابید.

۵ : مقدار x از معادله ی $۲\log_۳^x - \log_{\sqrt{۳}}^x - \log_{\frac{۱}{۳}}^x = \dfrac{۱}{۳}$ به دست آورید.

۶ : جواب معادله ی $\log_۴^{\log_۳^{\log_۲^x}} = ۰$ را تعیین کنید.

۷ : اگر $a^۲ + b^۲ = ۶ab$ ، آنگاه ثابت کنید که $\log^{\frac{a-b}{۲}} = \dfrac{\log^a + \log^b}{۲}$

***

تابع نمایی

هر تابع به صورت $f(x)=a^x$ به شرط اینکه $a>0$ و $a\neq 1$ را تابع نمایی می نامند. مانند تابع $f(x)=3^x$

تمرین : نمودار تابع $f(x)=2^x$ را رسم کنید.

تمرین : نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

تمرین : به کمک انتقال نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=1+2^x$ ب) $f(x)=2^{x+1}$ ج) $f(x)=-1+2^{x-2}$

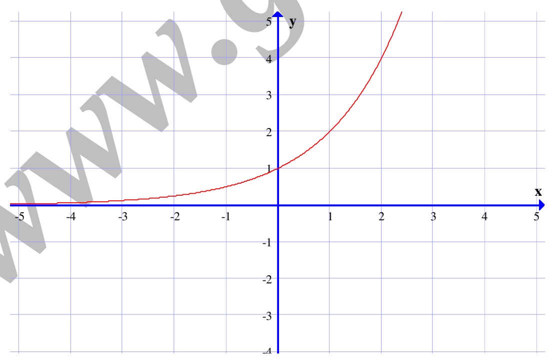
***

خواص تابع نمایی

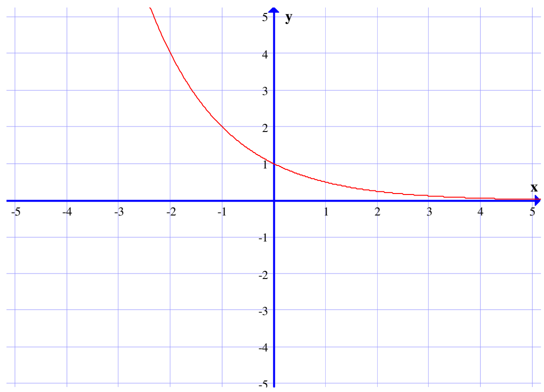
هر تابع نمایی $y=a^x$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اول :

اگر $a>1$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است.



همچنین اگر $0<a<1$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد.



اگر پایه ی تابع نمایی عدد نپرین $(e=2/71)$ باشد. تابع ، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

ویژگی دوم :

هر تابع نمایی $y=a^x$ محور عرض ها را در نقطه ی $(۰,۱)$ قطع می کند.

ویژگی سوم :

دامنه ی تابع نمایی $y=a^x$ مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت است.

ویژگی چهارم :

تابع نمایی $y=a^x$ یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد. معکوس آن یک تابع لگاریتمی به صورت زیر است.

$$y=\log_a^x$$

لذا نمودار تابع نمایی $y=a^x$ و معکوس آن یعنی $y=\log_a^x$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند.

تمرین : نمودار تابع $y=\log_۲^x$ را رسم کنید.

تمرین برای حل:

۱ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

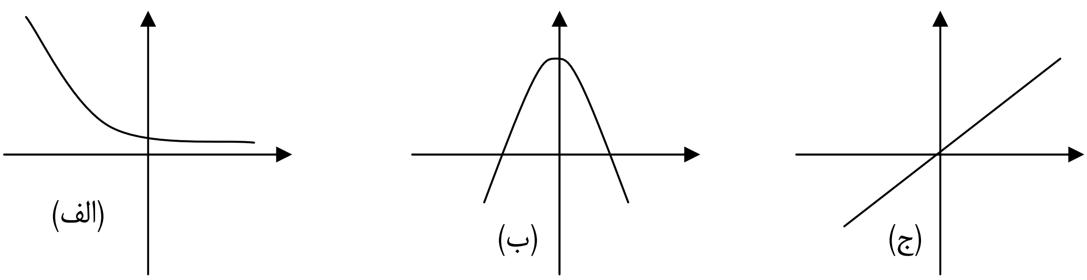
ب) $y=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^x$ الف) $y=(\sqrt{۲})^x$

۲ : نمودار تابع $y=x^۲$ در چند نقطه نمودار تابع $y=۲^x$ را قطع می کند؟

۳ : تابع $y=(\sqrt{۳})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۴ : تابع $y=-۲+(\frac{۱}{۳})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۵ : کدام نمودار ، تابع نمایی است.



(الف) (ب) (ج)

۶: معادله ی زیر را حل کنید.

$$۹^{x} = ۲ \times ۳^{x+۲} - ۴۵$$

۷: نمودار تابع $y = \log_{\sqrt{۲}}^{x}$ را رسم کنید.

۸: نمودار تابع $y = \log_{۲}^{x-۱}$ را رسم کنید.

***

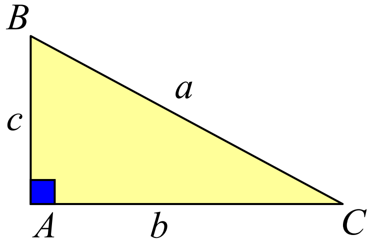
تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org

ریاضی ۲

فصل پنجم : مثلثات و توابع مثلثاتی

مثلثات : یادآوری و تکمیل



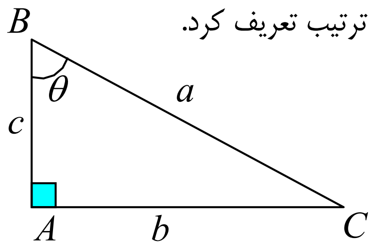
هر مثلث که یک زاویه ی قائمه داشته باشد، را مثلث قائم الزاویه می نامند. در هر مثلث قائم الزاویه ، ضلع روبرو به زاویه ی قائمه را وتر می گویند.

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. (رابطه ی فیثاغورس)

$$a^{2} = b^{2} + c^{2}$$

***

تعریف نسبت های مثلثاتی یک زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه



برای هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه نسبت های مثلثاتی زیر را می توان بدین ترتیب تعریف کرد.

سینوس هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مقابل زاویه براندازه ی وتر برابر است.

$$\sin\theta = \frac{b}{a}$$

کسینوس هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مجاور زاویه براندازه ی وتر برابر است.

$$\cos\theta = \frac{c}{a}$$

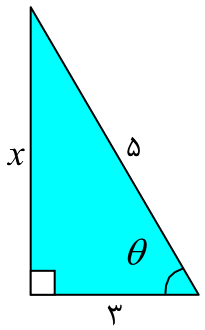
تانژانت هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مقابل زاویه بر اندازه ی ضلع مجاور آن برابر است.

$$\tan\theta = \frac{b}{c}$$

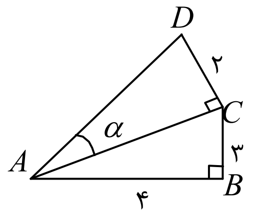
کتانژانت هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مجاور زاویه بر اندازه ی ضلع مقابل آن برابر است.

$$\cot\theta = \frac{c}{b}$$

نتیجه : اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و همچنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. (چرا؟)



تمرین : با توجه به شکل مقابل ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی θ را به دست آورید.



تمرین : در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ را بدست آورید.

تمرین : ثابت کنید که سینوس و کسینوس هر زاویه ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه ، همواره از یک کوچکترند.

تمرین : در رابطه ی $\frac{\sin(۳۹^\circ)}{\cos x} = ۱$ مقدار x کدام است؟

۱) ۳۹° ۲) ۴۹° ۳) ۵۱° ۴) ۶۱°

تمرین : اگر θ یک زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه ای باشد، ثابت کنید که :

۱) $\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$

۲) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

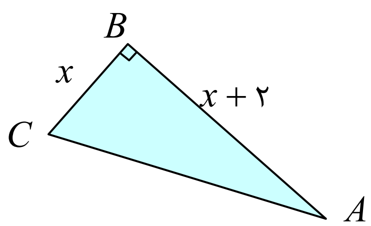
۳) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $۱ + \tan^{۲}\theta = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$

۵) $۱ + \cot^{۲}\theta = \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}$

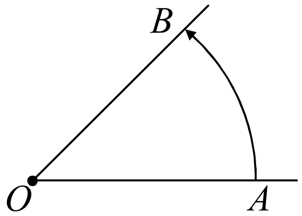
۶) $\tan\theta . \cot\theta = ۱$

تمرین : ثابت کنید که سینوس یک زاویه ی ۳۰ درجه برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



تمرین : در مثلث قائم الزاویه ی مقابل اگر $\tan A = \frac{۱}{۲}$ باشد. مقدار x را تعیین کنید.

زاویه و واحد های اندازه گیری آن



اگر نقطه ی A را حول نقطه ی O دوران دهیم تا نقطه ی B بدست آید. در این صورت زاویه ی AOB به دست می آید.

تذکر :

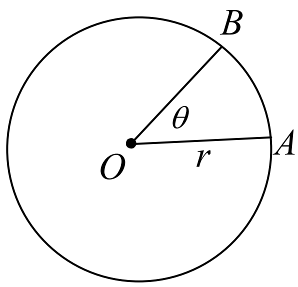
۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر درجهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

۲ : اگر نقطه ی A دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه ی A را به اندازه ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر ۳۶۰ درجه تشکیل می دهد.

***

واحد های اندازه گیری زاویه

هر زاویه دارای دو واحد اندازه گیری می باشد.



الف : درجه : یک درجه زاویه ای است که اندازه ی آن برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ دوران کامل است.

ب : رادیان : یک رادیان اندازه ی زاویه ای است که کمان روبروی آن برابر شعاع دایره باشد.

$$\overset{\frown}{AB} = r \rightarrow \angle\theta = ۱\ rad$$

توجه : یک دوران کامل (دایره) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است. لذا رابطه ی زیر بین اندازه ی زاویه بر حسب درجه و اندازه ی زاویه بر حسب رادیان برقرار است.

$$\frac{D}{۳۶۰} = \frac{R}{۲\pi}$$

نتیجه : برای تبدیل واحد های اندازه ی زاویه از رابطه ی مقابل استفاده می شود.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

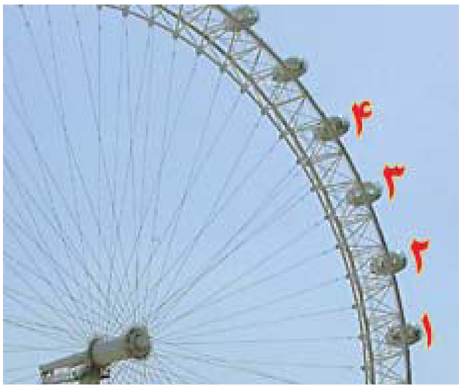
تمرین : اندازه ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای ۹۰- درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، اندازه ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می کند را برحسب درجه و رادیان بیان کنید.

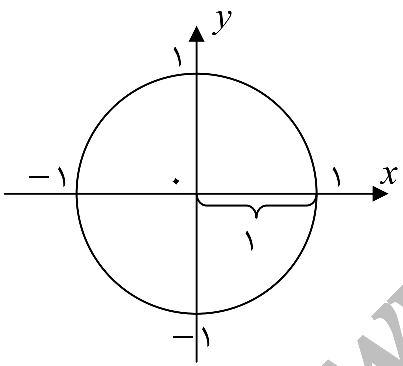
تمرین : حساب کنید که چه مدت طول می کشد تا عقربه ی دقیقه شمار ساعت به اندازه ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟



تمرین: فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده اید کـه ۴۰ کـابین دارد و کابین های آن شماره گذاری شده اند. اگر در آغـاز حرکـت در جهـت خلاف حرکت عقربـه هـای سـاعت ، شـما روی کـابین شـماره ی ۳ نشسته باشید. بعد از $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ رادیان شما در موقعیت کدام کـابین قـرار دارید؟

***

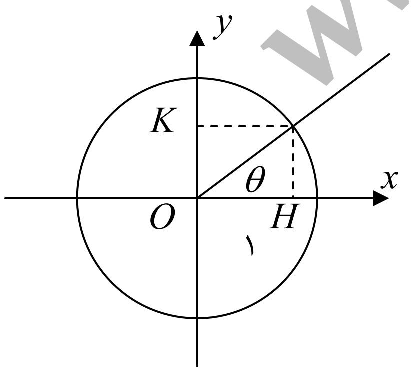
تعریف دایره ی مثلثاتی :



هر دایره به شعاع واحد که مرکز آن مبدأ مختصات باشد را دایره ی مثلثاتی می نامند.

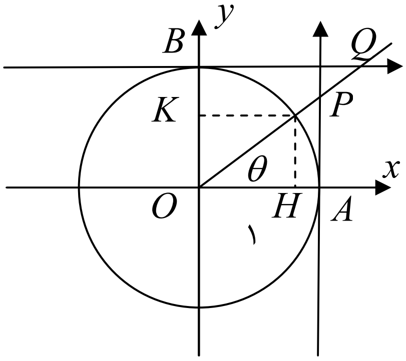
***

تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی



در هر دایره ی مثلثاتی نسبت های مثلثاتی هر زاویه مانند θ به صورت زیر تعریف می شود.

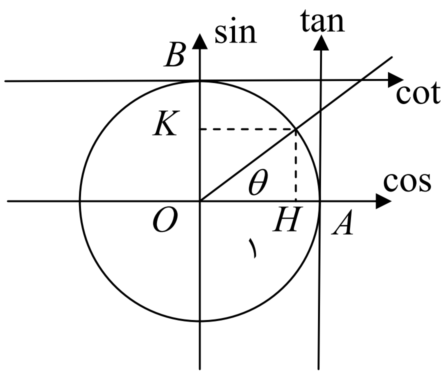
$$\sin\theta = OK \quad و \quad \cos\theta = OH$$



حال اگر دو محور دیگر به دستگاه فوق مطابق شکل اضافه کنیم. خواهیم داشت.

$$\tan\theta = AP \quad و \quad \cot\theta = BQ$$

با توجه با این تعاریف است که نام محور ها را به صورت زیر نیز تغییر می دهند.



تمرین : زاویه ی ۱۲۰ درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

تمرین : زاویه ی ۴۵- درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

تمرین : زاویه ی ۲۱۰ درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

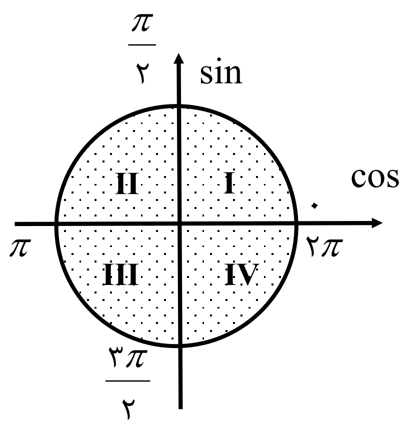
***

نتیجه : با توجه به تعاریف فوق واضح است که :

۱ : سینوس و کسینوس هر زاویه ، عددی است که در فاصله ی $[-۱,۱]$ قرار می گیرد.

$-۱ \le \sin\alpha \le ۱$ و $-۱ \le \cos\alpha \le ۱$

۲ : علامت نسبت های مثلثاتی را به شکل جدول زیر می توان تعیین کرد.



	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

تمرین : اگر $\cos\alpha = ۲m - ۵$ باشد. حدود m را تعیین کنید.

تمرین : حدود زاویه ی θ را طوری تعیین کنید که $\tan\theta < ۰$ و $\sin\theta > ۰$ باشد.

تمرین : در کدام ربع از دایره ی مثلثاتی $\cos\theta.\cot\theta > ۰$ است؟

۳ : مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم را می توان به صورت جداول زیر تنظیم نمود.

الف)

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

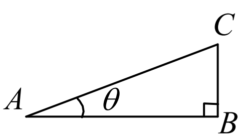
ب)

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	۱−	۰
cos		۱	۰	۱−	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

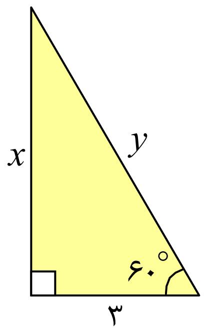
تمرین : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \sin ۳۰^\circ \tan ۶۰^\circ + \sqrt{۳} \sin^{۲} ۴۵^\circ$$

تمرین : در شکل مقابل $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می باشد. اندازه ی زاویه ی θ را بدست آورید.



تمرین : با توجه به شکل مقابل مقادیر x و y را به دست آورید.



***

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

اگر α یک زاویه در جهت مثبت مثلثاتی باشد، $-\alpha$ قرینه ی در جهت مخالف آن می باشد. بین نسبت های مثلثاتی زاویه های α و $-\alpha$ روابط زیر برقرار است.

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

تمرین : با رسم شکل تساوی های فوق را نشان دهید.

تمرین : تساوی های زیر را کامل کنید.

ب) $\cos(-۶۰^\circ)$ الف) $\sin(-۶۰^\circ)$

تمرین : حاصل عبارت $\sin^۲(۳۰^\circ) + \cos(۶۰^\circ) + \tan(-۴۵^\circ)$ را بدست آورید.

تمرین : نسبت های مثلثاتی زاویه ی $-\frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.

***

اتحاد های بنیادی مثلثات

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی اتحادهای زیر را به راحتی می توان ثابت کرد.

$۱.\ \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$	$۳.\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$۵.\ ۱+\cot^۲\alpha=\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}$
$۲.\ \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$۴.\ ۱+\tan^۲\alpha=\dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$	$۶.\ \tan\alpha.\cot\alpha=۱$

نتیجه : ۱ : اگر θ یک زاویه ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta$ ب) $\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta$

ج) $\tan\theta=\dfrac{۱}{\cot\theta}$ د) $\cot\theta=\dfrac{۱}{\tan\theta}$

تمرین : اگر $\tan\theta=۳$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{۳\sin\theta+۴\cos\theta}{۴\cos\theta-۳\sin\theta}$ را به دست آورید.

تمرین: اگر $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{۲}{۵}$ باشد ، حاصل عبارت $\sin\alpha+\cos\alpha$ را محاسبه کنید.

تمرین : اگر $\tan\theta+\cot\theta=۵$ و زاویه ی θ در ربع اول دایره ی مثلثاتی قرار داشته باشد. مقدار $\sin\theta+\cos\theta$ را به دست آورید.

تمرین : اگر $\sin\theta=\dfrac{۲}{۳}$ و زاویه ی θ در ربع دوم قرار دارد. در این صورت سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(\sin\theta+\cos\theta)^۲+(\sin\theta-\cos\theta)^۲$$

تمرین : درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

$۱)\tan\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha}=\dfrac{۱}{\cos\alpha}$ $۳)\sin^۲x+\dfrac{\sin^۴x}{۱-\sin^۲x}=\tan^۲x$

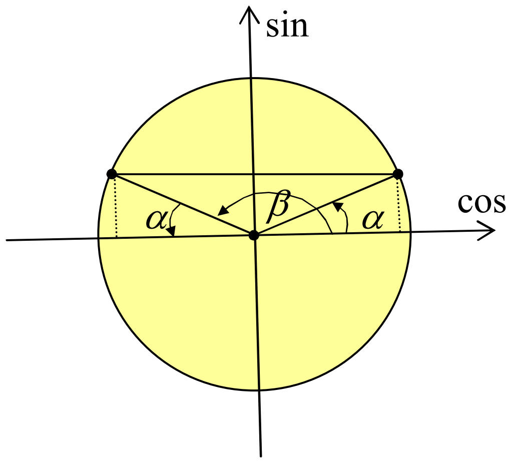
$۲)\dfrac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{۱+\cos\theta}=\dfrac{۲}{\sin\theta}$ $۴)(\sin x-\cos x)(\dfrac{۱}{\sin x}+\dfrac{۱}{\cos x})=\tan x-\cot x$

***

نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم و مکمل

با توجه به شکل مقابل به راحتی می توان مشاهده نمود که

الف) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ ب) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$



$$\alpha+\beta=\pi$$

$$\to\begin{cases}\cos\beta=\cos(\pi-\alpha)\\ \cos\beta=-\cos\alpha\end{cases}\to\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\to\begin{cases}\sin\beta=\sin(\pi-\alpha)\\ \sin\beta=-\sin\alpha\end{cases}\to\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

واضح است که زاویه های $\pi-\alpha$ و α مکمل یکدیگرند و روابط فوق بین نسبت های مثلثاتی آنها برقرار است.

تمرین : مشابه سبک فوق و با رسم شکل نشان دهید که

الف) $\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$ ب) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

بر این اساس می توان روابط دیگری را بررسی کرد که به طور مختصر این روابط را به شکل زیر عنوان می کنیم.

الف) در نسبت های مثلثاتی سینوس وکسینوس می توان مضربهای زوج π را حذف کرد ولی اگر مضربهای فرد π را حذف کنیم،باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(۳\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(۳\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

ب) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(۳\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

ج) اگر زاویه ی مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. با فرض حاده بودن زاویه ی α، ربعی که زاویه ی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره ی مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده وجلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=+\cos\alpha$$ ربع دوم

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$ ربع سوم

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=+\cot\alpha$$ ربع اول

***

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\tan ۱۲۰^\circ =$

۲) $\cos(۱۳۵^\circ)=$

۳) $\cot(۲۱۰^\circ)=$

۴) $\cos(-۱۵۰^\circ)=$

۵) $\sin(\frac{۱۳\pi}{۲}-\alpha)=$

۶) $\sin(\alpha-۳\pi)=$

تمرین : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ)+\cot(۳۰^\circ).\cos(۲۱۰^\circ)-\tan(-۱۳۵^\circ)=-\frac{۳}{۲}$$

نتیجه ی ۱) اگر $n\in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\sin\alpha$$

$\cos(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\cos\alpha$ $\qquad$ $\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha$

نتیجه ی ۲) با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ $\qquad$ $\tan\alpha=\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$

$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ $\qquad$ $\cot\alpha=\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$

***

تمرین : اگر $\cos\theta=\frac{۲}{۵}$ در این صورت تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=$ $\qquad$ ب) $\cos(\pi-\theta)=$

تمرین : مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan(-۳۰^\circ)\cot(۱۵۰^\circ)-\tan(۱۳۵^\circ)=$

ب) $\dfrac{\sin(۲۴۰^\circ)\times\cos(۱۲۰^\circ)+\cos(-۲۷۰^\circ)\times\sin(۳۰^\circ)}{\cos(۲۲۵^\circ)\times\cos(-۱۳۵^\circ)+\tan(۴۵^\circ)}=$

تمرین : درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\times\cos(\frac{\pi}{۲}-x)+\cos(x-۲\pi)\times\sin(x-\pi)+\tan(-x)\times\tan(\frac{\pi}{۲}+x)=۱$

ب) $۳\sin(۷۰^\circ)+\sin(۵۵^\circ)+\cos(۲۱۵^\circ)+۲\cos(۱۶۰^\circ)=\cos(۲۰^\circ)$

***

تمرین برای حل:

۱ : اندازه ی زاویه ای ۲۲۵ درجه است. اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

۲ : اندازه ی زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ۲ بعد از ظهر تا ۹ شب طی می کند را بر حسب درجه و رادیان بنویسید.

۳ : اندازه ی زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ۲ بعد از ظهر تا پنج و نیم بعد از ظهر طی می کند را بر حسب درجه و رادیان بنویسید.

۴ : حاصل $\tan(\frac{۱۷۵\pi}{۶})$ را به دست آورید.

۵ : حاصل $\tan(۲۰^\circ)+\tan(۴۰^\circ)+\tan(۶۰^\circ)+...+\tan(۱۸۰^\circ)$ را به دست آورید.

۶ : حاصل $\frac{\sin(۳۰۰^\circ)}{۱-\cos(۲۴۰^\circ)}$ را به دست آورید.

۷ : تساوی های زیر را کامل کنید.

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=$ الف) $\cos(\pi+\theta)=$

۸ : مقدار دقیق عبارت های زیر را به دست آورید.

ب) $\tan(\frac{۱۱}{۶}\pi)=$ الف) $\sin(\frac{۳\pi}{۴})=$

۹ : نشان دهید که $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)+\cos(\pi-\theta)=۰$

۱۰ : رابطه زیر را ثابت کنید. $\sin(۲۳۰^\circ)-۲\sin(۱۴۰^\circ)+\sin(۴۱۰^\circ)+\cos(-۵۰^\circ)+\sin(۴۰^\circ)=۰$

۱۱ : مقدار عددی عبارت مقابل را تعیین کنید. $A=\frac{\cos(۲۴۰^\circ)+\sin(-۱۵۰^\circ)}{\tan(-۴۵^\circ)}$

۱۲ : ثابت کنید که :

$$\log^{\tan ۱^\circ}+\log^{\tan ۲^\circ}+\log^{\tan ۳^\circ}+...+\log^{\tan ۸۹^\circ}=۰$$

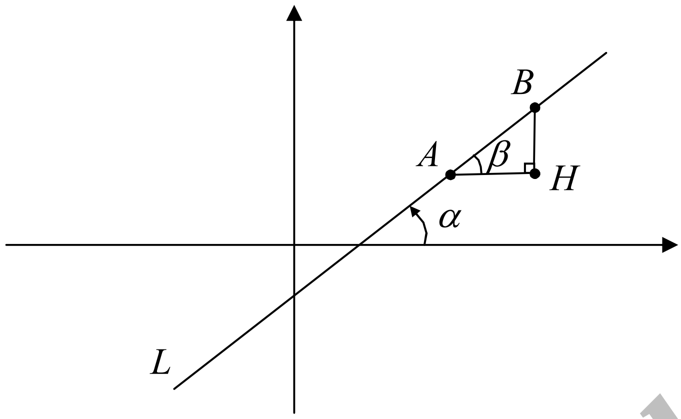
***

کاربرد هایی از مثلثات

در ادامه به چند مورد از کاربرد های مثلثات اشاره و با ذکر مثال شرح می دهیم.

الف : رابطه ی بین شیب خط و تانژانت زاویه

بنابر تعریف شیب خط و با در نظر گرفتن تعریف تانژانت یک زاویه ، واضح است که شیب یک خط با تانژانت زاویه ای که آن خط با محور طولها در جهت مثبت می سازد، برابر می باشد. به شکل زیر توجه کنید.



$$\angle\alpha = \angle\beta$$

$$\to \tan\alpha = \tan\beta$$

$$\xrightarrow{m=\frac{BH}{AH}=\tan\beta} m = \tan\alpha$$

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۲,۳)$ بگذرد و با محور طول ها در جهت مثبت زاویه ی ۳۰ درجه بسازد.

تمرین : دو نقطه ی $A(۲,\sqrt{۳})$ و $B(۰,-\sqrt{۳})$ داده شده اند. زاویه ی خط با محور طول ها در جهت مثبت را بیابید.

تمرین: زاویه ای که خط $\sqrt{۳}x - ۳y + ۱ = ۰$ با جهت مثبت محور طول ها می سازد را تعیین کنید.

تمرین : خط $kx + (۲k-۱)y + ۲ = ۰$ داده شده است. مقدار k را به قسمی تعیین کنید که این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه‌ی ۱۳۵ درجه بسازد.

تمرین : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ می گذرد و با جهت مثبت محور طول ها زاویه‌ی ۱۳۵درجه می سازد.

نتیجه :

الف : شیب هر خط موازی محور طول ها برابر صفر است.

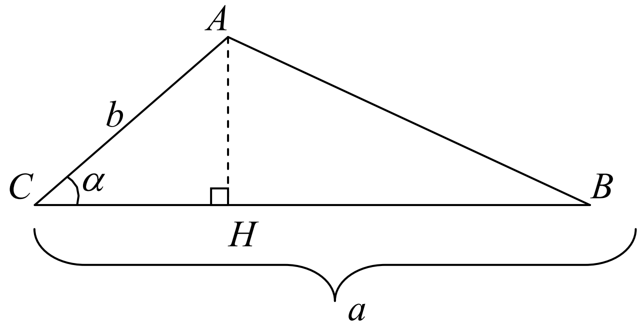
ب : شیب هر خط موازی محور عرض ها نامعین است.

ج : شیب نیمساز ربع اول و سوم برابر ۱ و شیب نیمساز ربع دوم و چهارم برابر ۱- است.

***

ب : محاسبه ی مساحت مثلث با معلوم بودن اندازه ی دوضلع و زاویه ی بین آنها

با معلوم بودن اندازه ی دوضلع و زاویه ی بین آنها از یک مثلث می توان مساحت آن مثلث را به شکل زیر محاسبه نمود.



$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\xrightarrow{\sin\alpha=\frac{AH}{AC}\rightarrow AH=AC.\sin\alpha=b\sin\alpha}S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}a\times b\sin\alpha$$

یعنی مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب اندازه های دوضلع آن در سینوس زاویه ی بین این دو ضلع برابر است.

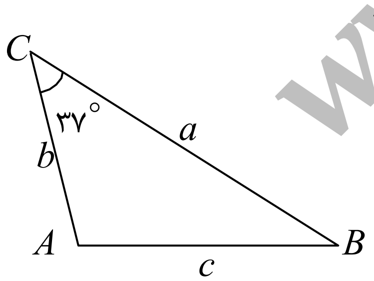
نتیجه : با توجه به شکل فوق می توان نوشت :

$$BC=BH+CH\xrightarrow{BH=AC.\cos B\ ,\ CH=AB.\cos C}BC=AC.\cos B+AB.\cos C$$

تمرین : مساحت مثلثی را حساب کنید که اندازه ی دوضلع آن ۶ و ۸ سانتی متر و زاویه ی بین آنها ۶۰ درجه باشد.

تمرین : در مثلث مقابل $a=۲b$ و $c\cos B+b\cos C=۶$ می باشد. مساحت مثلث کدام است؟ $(\sin ۳۷^\circ=۰/۶)$

۱) ۵/۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۴/۸



حل : می دانیم که

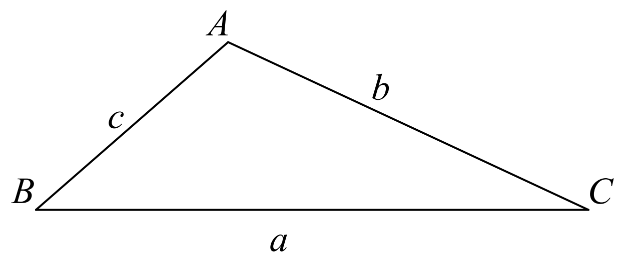
$$a=c\cos B+b\cos C\xrightarrow{c\cos B+b\cos C=۶}a=۶\xrightarrow{a=۲b}b=۳$$

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}(۶)(۳)(\frac{۶}{۱۰})=۵/۴$$

***

ج : قانون سینوس ها

با توجه به آنکه در مورد مساحت مثلث گفته شد. واضح است که :



$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}a.c.\sin B$$

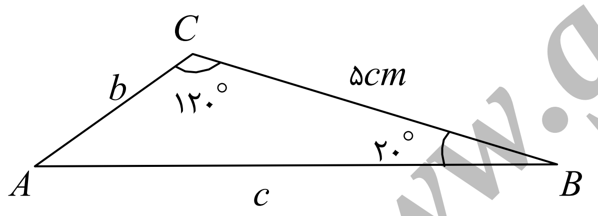
$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}b.c.\sin A$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}b.a.\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}b.c\sin A=\frac{۱}{۲}a.c\sin B=\frac{۱}{۲}b.a\sin C$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۲}{a.b.c}}\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

یعنی نسبت اندازه ی هر ضلع مثلث بر سینوس زاویه ی مقابل آن ضلع با نسبت اندازه ی ضلع دیگر مثلث بر سینوس زاویه‌ی آن برابر است.

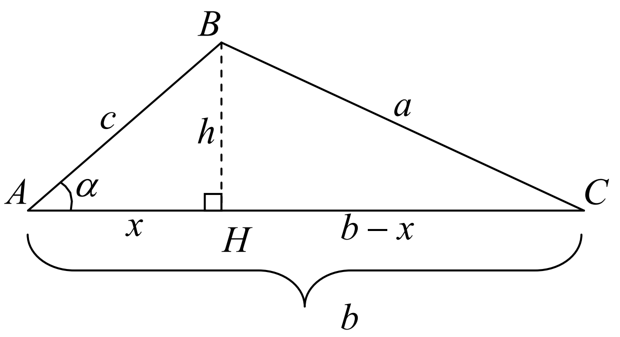


تمرین : با توجه به شکل مقابل اندازه ی مقادیر b و c را به دست آورید.($\sin ۴۰^\circ=۰/۶۴$ و $\sin ۲۰^\circ=۰/۳۴$)

***

ج : قانون کسینوس ها

با توجه به رابطه ی فیثاغورث می توان نوشت :



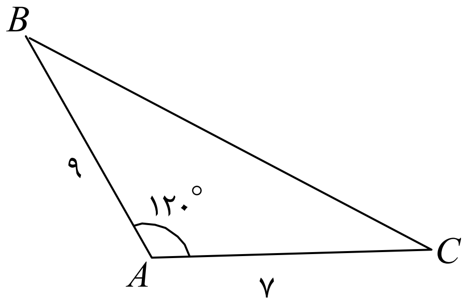
$$\Delta BCH: a^۲=(b-x)^۲+h^۲=b^۲-۲bx+x^۲+h^۲$$

$$\xrightarrow{\Delta ABH: c^۲=x^۲+h^۲\ ,\ \cos\alpha=\frac{h}{c}\rightarrow h=c\cos\alpha} a^۲=b^۲-۲b(c\cos\alpha)+c^۲$$

$$\rightarrow a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\alpha$$

یعنی در هر مثلث مربع هر ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس بین این دو ضلع برابر است.

تمرین : با توجه به شکل مقابل اندازه ی ضلع BC را به دست آورید.



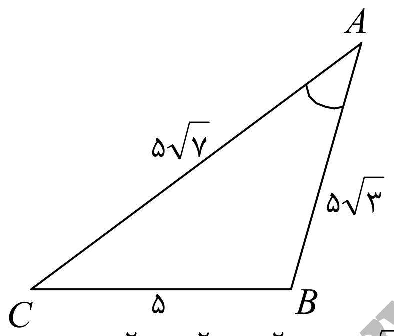
تمرین : طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

توجه : با توجه به رابطه ی فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

تمرین : با توجه به شکل مقابل کسینوس زاویه A را محاسبه کنید.

حل :



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5\sqrt{7})^2 + (5\sqrt{3})^2 - (5)^2}{2(5\sqrt{7})(5\sqrt{3})}$$

$$= \frac{175 + 75 - 25}{50\sqrt{21}} = \frac{225}{50\sqrt{21}} = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{2(21)} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

تمرین برای حل :

۱ : سرسره ی یک پارک را در نظر بگیرید که نردبانی به طول ۳/۲ متر جهت بالا رفتن دارد. اگر طول سرسره ۵/۴ متر باشد و نردبان ۷۵ درجه با زمین بسازد، سینوس زاویه ای که سرسره با زمین می سازد را حساب کنید.

۲ : قطر های یک متوازی الاضلاع ۱۲ و ۲۲ سانتی متر است و تقاطع این دو یک زاویه ی ۱۲۵ درجه می سازد. طول قطر بزرگ متوازی الاضلاع را به دست آورید.

۳ : باغی به شکل ذوزنقه وجود دارد که طول های اضلاع موازی آن ۳۰۰۰ و ۲۰۰۰ متر و دو ضلع دیگر هر یک ۱۰۰۰ متر است. اگر یکی از زاویه های پایه ۶۰ درجه باشد. مساحت باغ را حساب کنید.

۴ : اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است. اندازه ی یک زاویه ی آن ۱۵۰درجه است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

۵ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است. کسینوس بزرگترین زاویه ی این مثلث را تعیین کنید.

۶ : در مثلثی رابطه ی $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}+bc$ برقرار است. اندازه ی زاویه ی A چقدر است.

۷ : در مثلثی $BC=۱۰$ و $\angle A=۴۵^\circ$ و $\angle B=۶۰^\circ$ اندازه ی دیگر زاویه ی و اضلاع مثلث را بیابید.

۸ : در مثلثی $a=۴$ و $b=۲\sqrt{۳}$ و $\angle C=۳۰^\circ$ اندازه ی دیگر زاویه ی و اضلاع مثلث را بیابید.

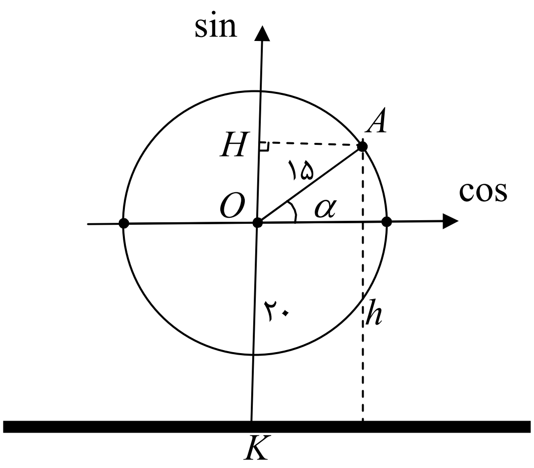
۹ : نشان دهید که مثلثی با مشخصات $a=۲$ و $b=۶$ و $\angle A=۶۰^\circ$ وجود ندارد.

۱۰ : در مثلث ABC اگر $AB=BC=۲$ و $AC=۴(۲-\sqrt{۲})$. اندازه ی زاویه ی ABC را محاسبه کنید.

***

تابع مثلثاتی

قبل از ورود به بحث مثال زیر را حل می کنیم.



یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره ی آن ۱۵ متر است.

فاصله ی مرکز دایره ی این چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۰ متر است.

واضح است که ارتفاع هر کابین مانند کابین A با تغییر زاویه ی α تغییر می کند و برای ارتفاع کابین می توان نوشت:

$$\sin\alpha = \frac{OH}{OA} \to OH = OA.\sin\alpha = ۱۵\sin\alpha$$

$$h = KH = OK + OH = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

$$\to h = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

هر تابع مشابه تابع فوق را یک تابع مثلثاتی می نامند. در واقع هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گویند. تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ ساده ترین تابع های مثلثاتی هستند. در ادامه به بررسی خواص این توابع می پردازیم.

خاصیت ۱ : مقدار حداکثری (max) تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ برابر ۱ و مقدار حداقلی (min) آنها برابر ۱− می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه ی تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آنها بازه ی $[-۱,۱]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x)=\sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد. ولی تابع $f(x)=\cos x$ از نقطه ی $(۰,۱)$ می گذرد.

خاصیت ۴ : این دو تابع متناوب هستند. یعنی در فواصل معینی نمودار آنها تکرار می شود. طول هر یک از این فاصله ها را دوره ی تناوب می نامند. دوره ی تناوب این دو تابع $T = ۲\pi$ می باشد.

تمرین : نمودار تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ را در فاصله ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

***

تذکر : در حالت کلی خواص زیر را برای تابع های زیر بیان نمود.

$$f(x)=a\sin bx \quad و \quad f(x)=a\cos bx$$

خاصیت ۱ : مقدار حداکثری ($\max$) این دو تابع برابر $|a|$ و مقدار حداقلی ($\min$) آنها برابر $-|a|$ می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه ی این دو تابع اعداد حقیقی و برد آنها بازه ی $[-|a|,|a|]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x)=a\sin bx$ از مبدأ مختصات می گذرد. ولی تابع $f(x)=a\cos bx$ از نقطه ی $(۰,a)$ می گذرد.

خاصیت ۴ : این دو تابع نیز متناوب هستند. دوره ی تناوب این دو تابع $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ می باشد.

تمرین : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sin ۲x$ ب) $f(x)=\cos ۲x$

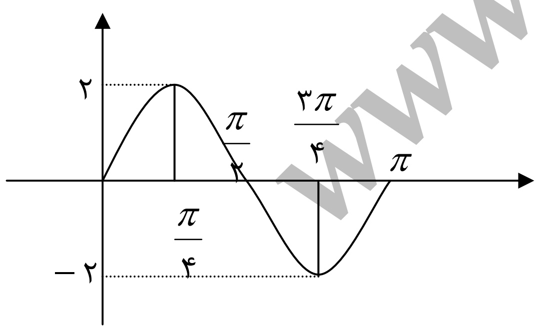
تمرین : مقدار حداقلی و حداکثری و دوره ی تناوب تابع های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=۳\sin ۵x$ ب) $f(x)=۲\cos(-۲x)$ ج) $f(x)=-۳\sin(-۲x)$

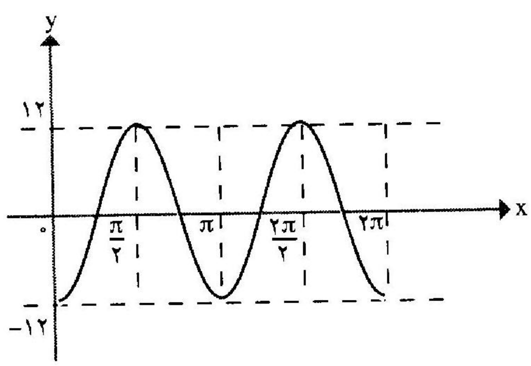
تمرین : مقدار تابع زیر را در نقطه ی $x=\frac{\pi}{۶}$ را به دست آورید.

$$y=-۱+\frac{۳}{۴}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$$

تمرین : معادله ی تابع مثلثاتی متناظر با نمودار مقابل را بنویسید.



تمرین : معادله ی تابع زیر را بنویسید.



***

ریاضی ۲

فصل ششم : ماتریس و دترمینان

باسمه تعالی

ماتریس و دترمینان

ماتریس

هر چینش مستطیل شکلی از اعداد را یک ماتریس می نامند.

مانند:

$$M=\begin{array}{c c}\left[\begin{array}{ccc}\sqrt{۲} & -۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۳/۲\end{array}\right] & \begin{array}{l}\text{سطر اول}\\ \text{سطر دوم}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم}\end{array} & \end{array}$$

هر ماتریس را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نمایش می دهند.

هر یک از اعداد تشکیل دهنده‌ی ماتریس را یک درایه می نامند.

اگر درایه ی a در سطر i و در ستون j قرار دارد. می نویسند. a_{ij}

مثلاً در ماتریس فوق داریم: $a_{۲۳}=۳/۲$ و $a_{۱۲}=-۳$

اگر یک ماتریس دارای m سطر و n ستون باشد، می گویند ماتریس دارای مرتبه ی $m\times n$ است و می نویسند.

$$M=[a_{ij}]_{m\times n}$$

مثلاً ماتریس فوق دارای مرتبه ی ۲×۳ است و می توان نوشت: $M=\begin{bmatrix}\sqrt{۲} & -۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۳/۲\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$

***

ماتریس مربعی

هرگاه تعداد سطر ها و ستون های یک ماتریس برابر باشند، ماتریس را مربعی می نامند.

مانند ماتریس های زیر

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{قطر اصلی} & \text{قطر فرعی}\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ \sqrt{۲} & -۱\end{bmatrix}\end{array} \quad \text{و} \quad B=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{قطر اصلی} & \text{قطر فرعی}\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & \sqrt{۳} & ۱\\ -۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}\end{array}$$

در هر ماتریس مربعی دو قطر وجود دارد، قطری که درایه های a_{ij} برای هر $i=j$ روی آن قرار دارند را قطر اصلی و قطر دیگر را قطر فرعی می نامند.

***

ماتریس های مساوی

دو ماتریس را مساوی می گویند، هرگاه:

۱- هم مرتبه باشند.

۲- درایه های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.

مثلاً: $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

تمرین : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار a و b را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & a \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۲a+b & ۵ \end{bmatrix}$$

***

ماتریس های خاص

۱) ماتریس صفر: ماتریسی است که همه ی درایه های آن صفر باشند. مثلاً:

$$O=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲) ماتریس سطری : ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳) ماتریس ستونی : ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مثلاً:

$$B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس واحد(همانی): یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های روی قطر اصلی آن یک و بقیه ی درایـه هـای آن صفر باشند. مثلاً

$$I_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad و \quad I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵) ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس پایین مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

۷) ماتریس بالا مثلثی : یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس اسکالر : یک ماتریس قطری است که تمام درایه های روی قطر اصلی آن برابر باشند. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

***

ضرب عدد در ماتریس(ضرب اسکالر)

در ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس،آن عدد در تمام درایه های ماتریس ضرب می شود.

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $۳A$ به صورت زیر است.

$$۳A=۳\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & -۶ \\ ۶ & ۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

توجه : اگر عدد -۱ را در ماتریسی ضرب کنیم.ماتریس حاصل را ماتریس قرینه می نامند.

$$-۱A=-A$$

بدیهی است که اگر دو ماتریس قرینه ی یکدیگر باشند، در این صورت هر درایه ی یکی قرینه ی دیگری است.

مثال : دو ماتریس زیر قرینه ی یکدیگرند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

تمرین : دو ماتریس زیر قرینه ی یکدیگرند. مقدار a را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳a+۱ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۴ \\ -۲ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

***

جمع و تفریق دو ماتریس

دو ماتریس را وقتی می توان جمع کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه های متناظر آنها جمع می شوند.

مثال : اگر $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$ در این صورت :

$$A+B=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

برای تفریق دو ماتریس کافی است که اولی را با قرینه ی دومی جمع کنیم. یعنی :

$$A-B=A+(-B)$$

مثال : اگر $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$ در این صورت :

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ -۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & -۴ \\ -۱ & ۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $-۲A=$ ب) $A+B=$ ج) $A-B$ د) $۲A+۳B=$

تمرین: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ مطلوبست تعیین

الف) $۲A$ ب) $A+۲B$ ج) $۲A-۳B$ د) $A-B+C$

تمرین : با توجه به تساوی مقابل مقدار a را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ a+۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

***

نتیجه : اگر C و B و A سه ماتریس هم مرتبه و s و r دو عدد حقیقی باشند. در این صورت:

۱) خاصیت جابجایی جمع ماتریس ها $A+B=B+A$

۲) خاصیت شرکت پذیری جمع ماتریس ها $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳) جمع ماتریس با ماتریس صفر $A+O=O+A=A$

۴) جمع ماتریس های قرینه $A+(-A)=(-A)+A=O$

۵) ضرب عدد در جمع دو ماتریس $r(A+B)=rA+rB$

۶) ضرب ماتریس در جمع دو عدد $(r+s)A=rA+sA$

۷) ضرب عدد یک در ماتریس $۱A=A$

***

ضرب ماتریس ها

دو ماتریس را وقتی می توان ضرب کرد که تعداد ستون های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.در این صورت هر درایه ی ماتریس حاصل ضرب را به ترتیب زیر به دست می آوریم.

الف : درایه های متناظر سطر i از اولی در ستون j از دومی را زیر هم نوشته و نظیر به نظیر ضرب می کنیم.

ب : مجموع هر یک از حاصل ضرب ها را محاسبه می کنیم و آن را به عنوان درایه ی a_{ij} ماتریس حاصل ضرب قرار می دهیم.

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ در این صورت :

$$A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}\times\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 17 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

در این اینجا برای تعیین هر درایه بدین شکل عمل کرده ایم. برای مثال درایه ی سطر دوم و ستون اول حاصل ضرب

A سطر دوم ماتریس $1 \quad -1$

B ستون اول ماتریس $0 \quad 1$

$$\times)\overline{\;0 \;+\; (-1) \;=-1\;}$$

تمرین: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A\times B=$ ب) $B\times A=$

تمرین: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $A\times B=$ ب) $B\times A=$ ج) $A^2=$

تمرین: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس $A\times B\times C$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ آنگاه مقدار y و x را بیابید.

توجه۱:

الف : ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد. ب : ضرب سه ماتریس خاصیت شرکت پذیری دارد.

توجه۲:

اگر A یک ماتریس مربعی و n یک عدد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $A^1=A$ ۲) $A^n=A^{n-1}\times A$ ۳) $I^n=I$ ۴) $AI_n=I_nA=A$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^۳$ را تعیین کنید.

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^۲+AB+۲B$ را بیابید.

۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} mn & n^۲ \\ -m^۲ & -mn \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^۲=O$

۴ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^۳=O$

۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید که

$$A(B+C)=AB+AC$$

۶ : معادله ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & y \\ x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ را حل کنید.

۷ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $(A+B)^۲$ را بیابید.

۸ : مقادیر b و a را طوری پیدا کنید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۳ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ b \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۹ : ماتریس X را طوری بیابید که :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$$

***

دترمینان

برای هر ماتریس مربعی مانند A عددی به نام دترمینان آن ماتریس نسبت داده می شود. این عدد با توجه به مرتبه ی ماتریس به روشی خاص بدست می آید. در اینجا فقط دترمینان ماتریس ۲×۲ را معرفی می کنیم.

توجه : دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می دهند.

طبق تعریف دترمینان ماتریس ۲×۲ با تفاضل حاصل ضرب درایه های قطر فرعی از حاصل ضرب درایه های قطر اصلی بدست می آید.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A|=ad-bc$$

تمرین: دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ \\ -۶ & -۸ \end{bmatrix}$ ج) $C=\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

***

ماتریس الحاقی

متناظر با هر ماتریس مربعی مانند A می توان ماتریس دیگری نظیر کرد. این ماتریس را ماتریس الحاقی می نامند. روش تعیین ماتریس الحاقی با توجه به مرتبه ی ماتریس متفاوت است. در اینجا فقط ماتریس الحاقی ماتریس ۲×۲ را معرفی می کنیم.

توجه : ماتریس الحاقی ماتریس A را با نماد A^* نمایش می دهند.

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

برای مثال ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می شود $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$

الف : دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید. ب : ماتریس الحاقی A را به دست آورید.

***

معکوس ماتریس

دو ماتریس مربعی را معکوس (وارون) همدیگر گویند، هرگاه حاصل ضرب آنها ماتریس واحد باشد.

$$AB = BA = I$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

تذکر :

الف : وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است.

ب : اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد.در این صورت وارون آن را به شکل $A^{-۱}$ نمایش می دهند.

ج : برای هر ماتریس مربعی مانند A همواره داریم: $A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^*$

نتیجه : یک ماتریس مربعی وارون پذیر است هرگاه دترمینان آن صفر نباشد.

تمرین: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$

الف : نشان دهید که ماتریس A معکوس پذیر است. ب : معکوس ماتریس A را در صورت وجود تعیین کنید.

تمرین: معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

ب) $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}$ الف) $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

جواب الف:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۲۰ - ۲۱ = -۱ \neq ۰$$

لذا ماتریس A معکوس پذیر است.

$$A^* = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^* = \frac{۱}{-۱} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۷ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

تمرین : مقدار m را چنان بیابید که ماتریس زیر وارون پذیر نباشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲m+۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

تمرین : اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $A^{-۱} =$ ب) $B^* =$ ج) $A^{-۱} + B^* + I_۲ =$

تمرین برای حل :

۱: اگر $A = \begin{bmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{bmatrix}$. نشان دهید که : $|A| = \log^{\frac{۵}{۲}}$

۲ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(A^{-۱})^۲$ را تعیین کنید.

۳ : $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$. ثابت کنید که $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

۴ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد.حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $(A+B)^{-۱}$ ب) $A^{-۱} + B^{-۱}$

***

حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی

هر دستگاه به شکل $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

را دستگاه دو معادله ی دو مجهولی می نامند. این دستگاه با کمک نمایش ماتریسی را می توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{D}$$

ماتریس A را ماتریس ضرایب و ماتریس X را ماتریس مجهولات و ماتریس D را ماتریس معلومات می نامند. از طرفی بدیهی است که

$$AX=D \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}D \rightarrow IX=A^{-1}D \rightarrow X=A^{-1}D$$

نتیجه: شرط اینکه دستگاه جواب داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر نباشد. یعنی: $|A|\neq 0$

***

روش های حل دستگاه های دو معادله ی دو مجهولی

در سال های گذشته با روش های حذفی ، جانشانی و روش قیاسی به عنوان روش های حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی آشنا شده اید . در اینجا به دو روش دیگر حل دستگاه های دو معادله ی دو مجهولی اشاره می کنیم.

روش اول : روش ماتریس معکوس

در این روش دستگاه را به شکل $X=A^{-1}D$ تبدیل کرده و در صورت وجود جواب مقدار مجهولات آنرا تعیین می کنیم.

تمرین: دستگاه های زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=-2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} -2x+y=5 \\ 4x-2y=3 \end{cases}$

حل:

الف: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A|=-2-1=-3\neq 0 \rightarrow$ لذا دستگاه جواب دارد.

$$\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}=\frac{۱}{-۳}\times\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}D\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۳\end{cases}$$

ب: $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}\rightarrow |A|=۴-۴=۰\rightarrow$ لذا دستگاه جواب ندارد.

....

روش دوم: روش کرامر

اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی باشد. می توان آنرا بـه روش زیـر حـل کـرد. ایـن روش را روش کرامر می نامند.

$$x=\frac{|A_۱|}{|A|} \quad \text{و} \quad y=\frac{|A_۲|}{|A|}$$

که $A_۱$ از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون اول ماتریس ضرایب و $A_۲$ از تعویض ستون ماتریس معلومات بـا سـتون دوم ماتریس ضرایب بدست می آیند.

تمرین: دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases}۲x+y=۵\\ x-y=-۲\end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد. $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-۲-۱=-۳\neq ۰$

$$x=\frac{|A_۱|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}۵ & ۱\\ -۲ & -۱\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}}=\frac{-۵+۲}{-۲-۱}=۱ \quad \text{و} \quad y=\frac{|A_۲|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & -۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}}=\frac{-۴-۵}{-۲-۱}=۳$$

تمرین برای حل :

۱ : مقدار k را چنان بیابید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases}(k+۲)x+۹y=۲\\ ۲x+(k+۵)y=۷\end{cases}$$

۲ : دستگاه زیر را به روش ماتریس معکوس و به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases}۲x+۳y=۷\\ x-۲y=۰\end{cases}$$

۳ : دستگاه زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases}۶x-۷y=۱\\ ۲x-y=۳\end{cases}$$

***

چند مسئله ی کاربردی

مسئله ی ۱ : مدیر یک دبیرستان جدولی برای اهدای هدایا به دانش آموزان به شکل زیر تنظیم نموده است.

	لوازم التحریر	کیف	کتاب
پایه ی اول	۵	۴	۳
پایه ی دوم	۲	۳	۲
پایه ی سوم	۳	۰	۱
پایه ی چهارم	۱	۱	۴

چنین جدولی را می توان در قالب یک ماتریس مانند ماتریس زیر نمایش داد.

$$M=\begin{bmatrix}۵ & ۴ & ۳\\ ۲ & ۳ & ۲\\ ۳ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

با توجه به این ماتریس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف : درایه ی واقع در سطر دوم و ستون سوم را بنویسید؟

ب : کدام درایه ی این ماتریس صفر می باشد؟

ب : مرتبه ی ماتریس را بنویسید؟

مسئله ی ۲ : میزان خرید میوه بر حسب کیلوگرم در دو هفته ی متوالی خانواده ای مطابق جداول زیر است.

هفته ی اول			
	پرتقال	سیب	خیار
روز شنبه	۵	۴	۳
روز چهار شنبه	۲	۳	۲

هفته ی دوم			
	پرتقال	سیب	خیار
روز شنبه	۲	۳	۰
روز چهار شنبه	۴	۱	۲

در قالب نمایش ماتریسی مجموع خرید میوه را به دست آورید.

مسئله ی ۳ : شخصی میوه ی مورد نیاز خانواده اش را در روز های شنبه و چهار شنبه مطابق جدول مقابل تهیه کرده است.

	پرتقال	سیب
روز شنبه	۱	۲
روز چهار شنبه	۲	۳

اگر قیمت میوه ها در دو میوه فروشی متفاوت به صورت زیر باشد.

	میوه فروشی اول	میوه فروشی دوم
قیمت هر کیلو پرتقال	۱۵۰۰	۱۰۰۰
قیمت هر کیلو سیب	۱۰۰۰	۹۰۰

هزینه ی کل میوه ی در روز های شنبه و چهار شنبه و در صورت خرید از دو میوه فروشی، را در قالب نمایش ماتریسی به دست آورید.

مسئله ی ۴ : حسن و رضا به فروشگاه تعاونی مدرسه رفتند و تعدادی دفتر و مداد خریدند. حسن ۵ دفتر و ۳ مداد خرید و ۳۱۰ تومان پول داد. رضا ۲ دفتر و ۱مداد خرید و ۱۲۰ تومان پول داد.قیمت هر دفتر و مداد چند تومان است؟

***

موفق باشید.

جابرعامری دبیر دبیرستان های شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.org

ریاضی ۲

فصل هفتم : ترکیبیات

باسمه تعالی

ترکیبات

یکی از بحث های جالب ریاضیات، بحث ترکیبیات است. به کمک این بحث تعداد حالت های مختلف یـک موضـوع را بـدون نوشتن آنها شمارش می کنیم. برای مثال برای محاسبه ی تعداد صندلی های یک سالن امتحانات به شرط اینکه شماره ی هر یک از صندلی ها فقط با سه رقم نوشته شود و رقم یکان زوج و رقم دهگان آن عدد اول و رقم صدگان عـدد فـرد باشـد، بـه کمک این بحث می توان به راحتی تعداد صندلی هایی که با این شرایط ، شماره گذاری می شوند را تعیین کرد. شایسته اسـت ابتدا اصل ضرب را معرفی کنیم.

اصل ضرب (شمارش)

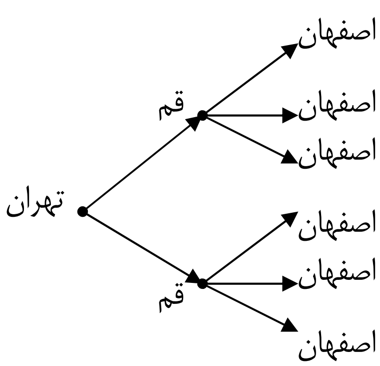
اگر عملی از دو جزء تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق و جزء دوم به n طریق انجام شوند. آنگاه انجام این عمل بـه $m \times n$ طریق انجام خواهد شد.

مثال : اگر از شهر تهران به قم ۲ مسیر و از قم به اصفهان ۳ مسیر وجود داشته باشد، به چند طریق مـی تـوان از تهـران بـه اصفهان رفت، به شرط اینکه از قم گذشت؟

حل : به کمک اصل ضرب می توان تعداد حالت های سفر از تهران به اصفهان را تعیین کرد.

۶ =	۳	×	۲
	تعداد حالت های سفر از قم به اصفهان		تعداد حالت های سفر از تهران به قم

توجه: به کمک رسم نمودار درختی می توان این نتیجه را نیز تأیید کرد. چنین نموداری را نمودار درختی می نامند.



طبق نمودار فوق از تهران به اصفهان به شرط گذر از قم ۶ مسیر متفاوت وجود دارد.

تمرین : یک سکه و یک تاس را به هوا پرتاب می کنیم. تمام حالت های ممکن به زمین افتادن آنها را بنویسید. (از اصل ضرب و نمودار درختی کمک بگیرید.)

تمرین : با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می توان نوشت. به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین : با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می توان نوشت. به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تذکر : اصل ضرب برای تعداد محدودی جزء برای انجام یک عمل قابل تعمیم است.

مثال: شخصی ۲ کفش و ۳ شلوار و ۴ پیراهن متفاوت دارد ، حساب کنیدکه این شخص به چند حالت می تواند آنها را بپوشد.

حل :

۲	×	۳	×	۴	=	۲۴
تعداد کفش		تعداد شلوار		تعداد پیراهن		

تمرین : به کمک نمودار درختی نتیجه ی بدست آمده در تمرین فوق را بررسی کنید.

تمرین : با ارقام ۷ و ۵ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت. به طوری که :

الف : تکرار ارقام مجاز باشد. ب : تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین : با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

تمرین : یک برگ نظر خواهی مانند فرم زیر دارای ۵ سئوال چهار گزینه ای است. یک شخص نزد خود تصمیم گرفت که این فرم را به تصادف پاسخ دهد. حساب کنید که این شخص به چه تعداد حالت متفاوت می توان پاسخ نامه را تکمیل نماید، به طوری که :

الف) تمام سئوالات پاسخ داده شوند. ب) می توان به سئوالات نیز پاسخ نداد.

فرم نظر خواهی

سئوال	گزینهA	گزینهB	گزینهC	گزینهD
۱				
۲				
۳				
۴				
۵				

تمرین : با حروف کلمه ی « خوزستان » چند کلمه ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

تمرین : با حروف کلمه ی « تهران» چند کلمه ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

تمرین : با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ و ۴ چند عدد سه رقمی بدون تکر ار ارقام می توان نوشت؟ بطوری که

الف : رقم یکان عدد فرد و دهگان مضرب ۳ باشد. ب : عدد حاصل بزرگتر از ۶۰۰ باشد.

تمرین : تعداد صندلی های مسئله ی مقدمه ی مسئله را به دست آورید.

تمرین : مجموعه ی $S=\{a,b,c,d\}$ دارای چند زیر مجموعه است؟

تمرین : با حروف کلمه ی«Computer» چند کلمه ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت. به شرط اینکه حروف u وp کنار هم باشند.

تمرین : با حروف کلمه ی«Computer» چند کلمه ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت. به شرط اینکه حروف u وp به شکل « pu » کنار هم باشند.

***

جایگشت

نحوه ی قرار گرفتن افراد یا اشیاء در کنار هم را جایگشت می نامند. برای مثال سه نفر به نام های علی، رضا و صادق بـا هـم مسابقه می دهند. تمام جایگشت های مختلف اول تا سوم شدن نتیجه ی این مسابقه به شکل زیر است.

نفر سوم مسابقه	نفر دوم مسابقه	نفر اول مسابقه
صادق	رضا	علی
رضا	صادق	علی
صادق	علی	رضا
علی	صادق	رضا
رضا	علی	صادق
علی	رضا	صادق

توجه : تعداد تمام جایگشت های فوق به شکل زیر است.

$$۶ = ۱ \times ۲ \times ۳$$

نفر سوم   نفر دوم   نفر اول

تمرین : در هر مورد تعداد کلماتی با تعداد حروف عنوان شده که حروف کلمه‌ی« Flower » بدون تکرار حروف نوشته می شوند ، را به دست آورید.

الف : تعداد تمام کلمات چهارحرفی ب : تعداد تمام کلمات پنج حرفی ج : تعداد تمام کلمات شش حرفی

***

نماد فاکتوریل

فرض‌کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با نماد $n!$ نمایش داده می شود، به شکل زیر تعریف می شود.

اگر $n=۰$ باشد. در این صورت $۰!=۱$

اگر $n=۱$ باشد. در این صورت $۱!=۱$

اگر $n>۱$ باشد. در این صورت $n!$ برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است. یعنی

$$n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$$

مثال :

الف) $۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$ ب) $۶!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۷۲۰$

تمرین : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $۵!=$ ب) $۴!-۳!+۲!+۱!+۰!=$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۶!+۸!}{۹}=$ ب) $(۳!)!=$ ج) $\frac{۱!+۲!+۳!}{۸!-۶!}=$

تمرین : عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=$ ب) $۸\times۷\times۶\times۵=$ ج) $۵\times۲۴=$

نتیجه : با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می توان نوشت که:

$$n!=n(n-۱)!$$

برای مثال : $۶!=۶\times۵!$

تمرین : کسر های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۹!}{۷!}=$ ب) $\frac{(n+۱)!}{n!}$ ب) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیء (نفر) متمایز برابر $n!$ است.

تمرین : با حروف کلمه ی «Computer» چند کلمه ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت.

***

ترتیب و ترکیب

در انتخاب k شیئی از n شئی بدون تکرار اشیاء دو حالت وجود دارد.

الف : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم باشد. این نوع انتخاب را **ترتیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال : تعداد کلمات سه حرفی که با ۷ حرف کلمه ی« خوزستان» تشکیل می شوند، برابر است با:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۲۱۰$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (حروف) مهم است.برای مثال کلمات« ستا » با « تاس» تفاوت دارند. به همین دلیل از ترتیب استفاده شد.

ب : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم نباشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال : تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه ی۷ عضوی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ، برابر است با:

$$C(۷,۳)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\,(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۳!\times۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۳\times۲\times۱\times۴!}=۳۵$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (عضوها) مهم نیست.برای مثال زیر مجموعه های« $\{a,b,c\}$» با « $\{b,a,c\}$ » تفاوت ندارد. به همین دلیل از ترکیب استفاده شد.

تمرین : با ارقام عدد ۵۶۸۷۴ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت.

تمرین : هفت نقطه روی دایره ای قرار دارند. حساب کنید که با این هفت نقطه

الف) چند پاره خط ایجاد می شود. ب) چند بردار ایجاد می شود. ج) چند مثلث تشکیل می شود.

تمرین : ثابت کنید که هر n ضلعی مجدب دارای $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ قطر است.

تمرین : تعداد قطر های یک ۸ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین : در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند. می خواهیم از بین آنها :

الف) ۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.

ب) یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.(هر نفر یک پست داشته باشد.)

حل :

الف)

$$\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!\,(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۳!\times ۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۳\times۲\times۱\times۹!}=۲۲۰$$

ب)

$$P(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۹!}=۱۳۲۰$$

تمرین : به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی و ۴ مهره سبز ، ۳ مهره انتخاب کنیم. به طوری که

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد. ب) هر سه مهره آبی باشند.

ج) هر سه مهره سبز باشند. د) دو مهر آبی و یکی سبز باشد.

هـ) هر سه مهره هم رنگ باشند.

تمرین : به چند طریف می توانی از بین ۸ دانش آموز پایه ی اول ، ۷ دانش آموز از پایه ی دوم و ۵ دانش آموز از پایه ی سوم به تعداد ۶ دانش آموز جهت مسابقات ورزشی انتخاب کرد به طوری که :

الف) پایه ی دانش آموزان مهم نباشد. ب) ۳ دانش آموز اول و ۱دانش آموز دوم و بقیه سوم باشند.

ج) هر۶ دانش آموز همکلاس باشند[1].

1 . توجه کنید که تعداد انتخاب $\binom{n}{k}$ اگر $k>n$ باشد، برابر صفر می باشند.

توجه : تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است.

تمرین : تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی از یک مجموعه ی ۷ عضوی را به دست آورید.

تمرین : تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه ، برابر ۲۱ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

تمرین : به کمک تعیین تعداد زیر مجموعه ی یک مجموعه ی n عضوی ثابت کنید که

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$$

تمرین : حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\binom{۱۲}{۷}-\binom{۱۲}{۵}=$

ب) $\dfrac{\binom{۹}{۳}+\binom{۶}{۲}}{\binom{۶}{۴}+\binom{۹}{۶}}=$

ج) $\dfrac{P(n,n-۱)}{n!}=$

***

نکته ۱ : برخی از حالت های خاص ترتیب بصورت زیر می باشند.

۱) $P(n,۰)=۱$

۲) $P(n,n)=n!$

۳) $P(n,۱)=n$

۴) $P(n,n-۱)=n!$

۵) $P(n,۲)=n(n-۱)$

۶) $P(n,n-۲)=n(n-۱)$

نکته ۲ : برخی از حالت های خاص ترکیب بصورت زیر می باشند.

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

۳) $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

۵) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-۱}=\binom{n+۱}{k}$

۶) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$

۷) $\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{n}=۰$

توجه کنید که تمام تساوی های فوق به کمک مفهوم ترتیب یا ترکیب قابل اثبات هستند. برای مثال

$$P(n,n-۱)=\frac{n!}{(n-(n-۱))!}=\frac{n!}{(n-n+۱)!}=\frac{n!}{۱!}=\frac{n!}{۱}=n!$$

$$\binom{n}{n-۱}=\frac{n!}{(n-۱)!(n-(n-۱))!}=\frac{n!}{(n-۱)!(n-n+۱)!}=\frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!(۱)!}=\frac{n}{۱}=n$$

تمرین : هر یک از تساوی های نکات فوق را ثابت کنید.

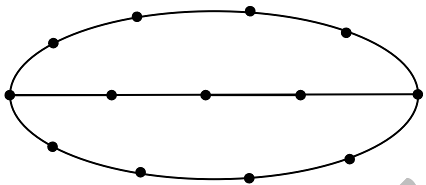
***

تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\binom{n}{۱}=۵n-۸$ ب) $P(n,n)=P(n,n-۱)$

ج) $P(۵,۲)=۲n+C(۵,۲)$ د) $C(n,۴)=P(n-۱,۳)$

تمرین : به کمک نقاط موجود در شکل زیر و از به هم وصل کردن آنها چند مثلث ایجاد می شود.



حل : تعداد کل حالت هایی که می توان با ۱۳ نقطه، مثلث ایجاد کرد برابر $\binom{۱۳}{۳}$ می باشد. اما باید توجه داشت که از این ۱۳ نقطه ۵ نقطه روی خط راست قرار دارند و با این ۵ نقطه مثلث تشکیل نمی شود، لذا باید $\binom{۵}{۳}$ را از حاصل کم کرد.

تعداد مثلث های حاصل $\binom{۱۳}{۳}-\binom{۵}{۳}=۲۸۶-۱۰=۲۷۶$

***

تمرین برای حل :

۱ : با حروف کلمه ی « گل بهار» چند کلمه ی ۴ حرفی می توان ساخت به طوری که:

الف) با حرف « گ» شروع و به حرف « ب» ختم شوند.

ب) در این کلمات حروف « ب» و «ه» در کنار هم باشند.

ج) در این کلمات حروف « ب» و «ه» و « ا» در کنار هم باشند.

۲ : از بین ۴ زن و ۳ مرد به چند حالت می توان یک گروه ۳ نفری انتخاب کرد که :

الف) ۲ مرد و یک زن باشد. ب) همگی زن باشند.

ج) نفر اول رئیس و نفر دوم معاون و نفر سوم خدمت کار باشند.

۳ : از بین ۵ نفر به چند حالت می توان

الف : یک نفر رئیس و یک نفر معاون انتخاب کرد. ب : دو نفر جهت شرکت در اردو انتخاب کرد.

۴ : با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت به طوری که :

الف) اعداد سه رقمی همگی فرد باشند. ب) همگی با ۲ شروع شوند.

ج) دو عدد ۲ و ۳ همواره در کنار هم باشند. د) دو رقم ۲ و ۳ به شکل «۲۳» کنار هم باشند.

۵ : به چند طریق می توان کمیته‌ی۳ نفره از بین۷ دانش آموز رشته‌ی ریاضی و۵ دانش آموز رشته‌ی تجربی انتخاب کرد.

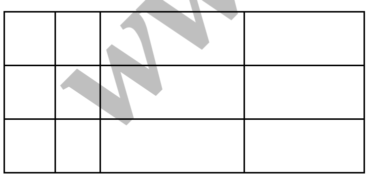
۶ : معادله های زیر را حل کنید.

ج) $P(n,۲)+۹=C(۶,۴)$ ب) $P(n,۳)=۱۲C(n,۲)$ الف) $n!=۲۰(n-۲)!$

۷ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

ب) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-۱}=\binom{n+۱}{k}$ الف) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

۸ : در شکل روبرو چند مستطیل وجود دارد؟



***

موفق باشید.

جابرعامری دبیر دبیرستان های شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.org