عرفان صلواتی
دانشجوی دکترا
ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

ترسیم‌های هندسی

شاید ماندگارترین و تأثیرگذارترین کتاب ریاضی در طول تاریخ، کتاب اصول اقلیدس باشد. اقلیدس ریاضی‌دان یونانی است که در قرن چهارم و سوم پیش از میلاد می‌زیسته است. در این کتاب برای اولین بار در طول تاریخ، ریاضیات به صورت اصل موضوعی ارائه شده است. اگرچه بسیاری از نتایج کتاب اصول، پیش از اقلیدس در آثار ریاضی‌دانان دیگر نیز موجود بودند، اما اقلیدس برای اولین بار آن‌ها را در یک چهارچوب اصل موضوعی، گردآوری کرد.

شکل ۱. اقلیدس

کتاب اصول ۱۳ جلد است. اقلیدس در ابتدای جلد اول، تعاریف و اصول موضوعش برای هندسه را بیان می‌کند و در ادامه در هر جلد، یک سری گزاره بیان می‌کند. گزاره‌های اقلیدس دو نوع هستند: قضیه‌ها و مسأله‌های ترسیمی.
قضیه‌ها، گزاره‌هایی هستند که اقلیدس آن‌ها را بر مبنای اصول موضوعش اثبات می‌کند. در مسأله‌های ترسیمی، ترسیمِ یک جزء هندسی از روی اجزاء دیگر خواسته شده است و اقلیدس روش ترسیم را ارائه می‌کند و سپس درستی آن را اثبات می‌کند.
اصولی که اقلیدس وضع می‌کند این پنج اصل هستند:

۱. از هر نقطه می‌توان پاره‌خطی راست به نقطه‌ای دیگر رسم کرد.

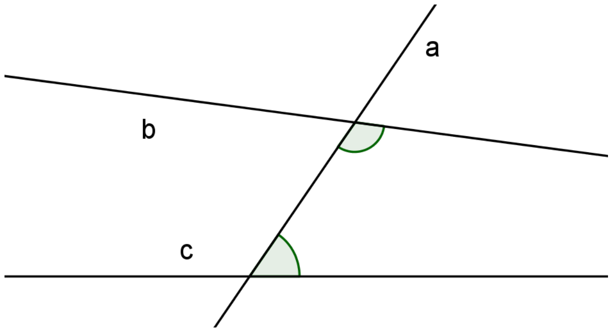
۲. هر پاره‌خط متناهی را می‌توان تا هر جا به یک خط راست امتداد داد.

شکل ۲. قدیمی‌ترین دست‌نوشتهٔ باقی‌مانده از کتاب اصول اقلیدس. شکل مربوط به گزارهٔ ۵ از جلد دوم است.

۳. به مرکز هر نقطه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از نقطه‌ای دیگر بگذرد.

۴. همهٔ زوایای قائمه با یکدیگر برابرند.

۵. اگر یک خط، دو خط دیگر را به نحوی قطع کند که مجموع زوایایی که در یک طرف خود با آن‌ها می‌سازد، کمتر از دو زاویهٔ قائمه باشد، آنگاه آن دو خط در همان طرفی از خط اول که مجموع زوایا کمتر از دو زاویهٔ قائمه است یکدیگر را قطع می‌کنند.



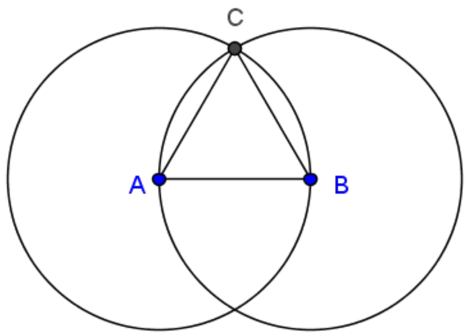
شکل ۳

اصل پنجم در واقع می‌گوید که اگر خط a، خطوط b و c را مطابق شکل ۳ قطع کند و مجموع زاویه‌های مشخص شده کمتر از 180° باشد، آنگاه خطوط b و c در همان طرفی از خط a که زاویه‌های مشخص شده قرار دارند، یک‌دیگر را قطع خواهند کرد.

برای اینکه بیش‌تر با سبک و سیاق اقلیدس در کتاب اصول آشنا شویم، گزارهٔ اول از جلد اول و اثبات آن را از کتاب اصول نقل می‌کنیم.

گزاره (۱ از جلد اول اصول اقلیدس). ترسیم مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع یک پاره‌خط داده شده.

راه حل. پاره‌خط داده شده را AB بنامید (شکل ۴ را ببینید). با استفاده از اصل موضوع ۳، دایرهٔ به مرکز A و گذرنده از B رسم کنید. همچنین، دایره‌ای به مرکز B و گذرنده از A رسم کنید تا دایرهٔ اول را در نقطهٔ C قطع کند. سپس، پاره‌خطهایی از نقطهٔ C به نقطهٔ A و نقطهٔ B رسم کنید (اصل موضوع ۱). چون C روی دایرهٔ به مرکز A و شعاع AB است، پس AC با AB برابر است. همچنین چون C روی دایرهٔ به مرکز B و شعاع BA است، پس BC با AB برابر است. پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. □



شکل ۴

۱.۳ ترسیم با خط‌کش و پرگار

از مجموع ۴۸ گزارهٔ جلد اول اصول اقلیدس، ۱۴ گزاره، مسائل ترسیمی هستند. همان‌طور که در گزارهٔ ۱ هم دیدید، اقلیدس در هیچ‌جای کتابش سخن از ابزاری که ترسیم را با آن انجام می‌دهد نمی‌کند، بلکه از اصول موضوع ۱ و ۲ و ۳، که اصول موضوع ترسیمی هستند، استفاده می‌کند. ولی روشن است که ابزاری که ترسیم اول و دوم را انجام می‌دهد، خط‌کش و ابزاری که ترسیم سوم (دایره) را انجام می‌دهد پرگار است. اما نه خط‌کش و پرگارهای متداول امروزی. در واقع برای اینکه از ساختار اصل موضوعی اقلیدس خارج نشویم، باید خط‌کش و پرگاری را تصور کنیم که با آن‌ها تنها می‌توان ترسیم‌های ۱ و ۲ و ۳ را انجام داد.

بنابراین با خط‌کش اقلیدس تنها می‌توان پاره‌خطی بین دو نقطه رسم کرد و یا یک پاره‌خط را از هر دو طرف تا هرجای دلخواه امتداد داد. با آن نمی‌توان چیزی را اندازه گرفت (خط‌کش غیر مدرج)، روی آن نمی‌توان طول مشخصی را علامت زد و فقط از یک لبهٔ آن می‌توان استفاده نمود.

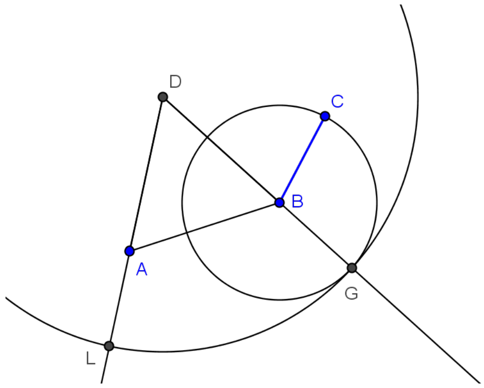
همچنین، با پرگار اقلیدس تنها می‌توان به مرکز یک نقطه دایره‌ای رسم کرد که از نقطه‌ای دیگر بگذرد. بر خلاف پرگارهای امروزی، نمی‌توان دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ یک پاره‌خط باز کرد و سپس به مرکز نقطه‌ای در جای دیگری از صفحه، دایره‌ای با آن شعاع رسم کرد. اصطلاحاً گفته می‌شود که پرگار اقلیدس «فروریختنی» است، یعنی به محض اینکه از روی کاغذ برداشته شود قطر دهانهٔ آن تغییر می‌کند. البته گزارهٔ ۲ از جلد اول اصول نشان می‌دهد که کارکرد پرگار اقلیدس با کارکرد پرگارهای امروزی معادل است.

گزاره (۲ از جلد اول اصول اقلیدس). ترسیم پاره‌خطی راست از یک نقطهٔ داده شده و برابر با یک پاره‌خط داده شده.

راه حل. فرض کنید A نقطهٔ داده شده و BC پاره‌خط داده شده باشد (شکل ۵ را ببینید). پاره‌خطی از A به B رسم کنید (اصل موضوع ۱)، و مثلث متساوی‌الاضلاع DAB را روی آن بسازید (گزارهٔ ۱). پاره‌خط‌های DA و DB را از طرف A و B امتداد دهید (اصل موضوع ۲). به مرکز B دایره‌ای رسم کنید که از C بگذرد (اصل موضوع ۳). تقاطع این دایره با امتداد DB را G بنامید. اکنون به مرکز D دایره‌ای رسم کنید که از G بگذرد (اصل موضوع ۳). تقاطع این دایره با امتداد DA را L بنامید. AL همان پاره‌خط مطلوب است.

زیرا از آن‌جا که مثلث DAB متساوی‌الاضلاع است، پس $DA = DB$ و از آن‌جا که G روی دایرهٔ به مرکز B و شعاع BC است پس $BG = BC$ و از آن‌جا که L روی دایرهٔ به مرکز D و شعاع DG است، پس $DG = DL$ و در نتیجه

$$AL = DL - DA = DG - DB = BG = BC.$$



شکل ۵

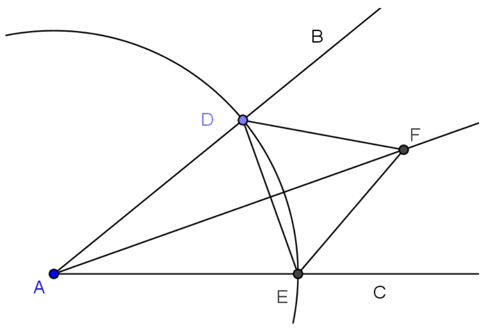
□

گزارهٔ ۲ ما را قادر می‌سازد که از این پس با استفاده از پرگار اقلیدسی همان کاری را انجام دهیم که با پرگارهای امروزی انجام می‌دهیم، یعنی به مرکز یک نقطه و به شعاع پاره‌خطی در جای دیگری از صفحه، یک دایره رسم کنیم.
در زیر، همهٔ گزاره‌های ترسیمی جلد اول اصول اقلیدس، به همراه راه حل بعضی از آن‌ها را می‌آوریم. از این پس هر جا ابهامی نباشد، از ذکر اصول موضوع و یا گزاره‌های قبلیِ مورد استفاده، در طول ترسیم خودداری می‌کنیم. همچنین در جاهایی که اثبات ساده باشد، تنها روش ترسیم را ارائه می‌دهیم و اثبات درستی آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

گزاره (۳ از جلد اول). دو پاره‌خط نابرابر داده شده‌اند. روی پاره‌خط بزرگ‌تر، پاره‌خطی برابر با پاره‌خط کوچک‌تر جدا کنید.

گزاره (۹ از جلد اول). رسم نیم‌ساز یک زاویهٔ داده شده.

راه حل. فرض کنید $\angle BAC$ زاویهٔ داده شده باشد (شکل ۶ را ببینید). D را نقطه‌ای دلخواه روی AB می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز A و شعاع AD رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در E قطع کند. مثلث متساوی‌الاضلاع DEF را روی DE می‌سازیم (گزارهٔ ۱). در این صورت AF نیمساز زاویه است.

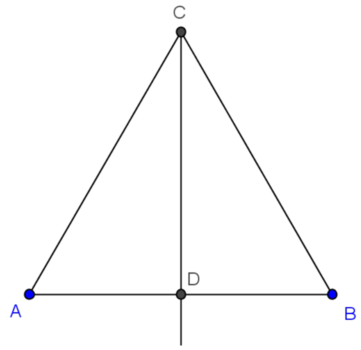


شکل ۶

□

گزاره (۱۰ از جلد اول). نصف کردن یک پاره‌خط داده شده.

راه حل. فرض کنید AB پاره‌خط داده شده باشد (شکل ۷ را ببینید). مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بر روی AB می‌سازیم (گزارهٔ ۱). نیمساز زاویهٔ $\angle ACB$ را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط AB را در D قطع کند. اکنون D وسط پاره‌خط است.

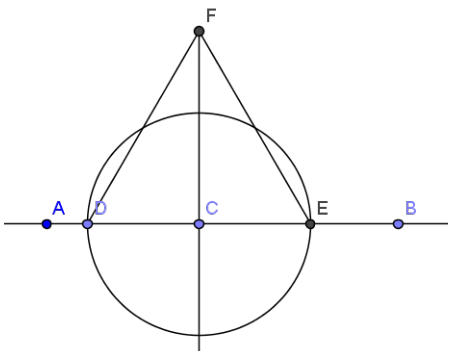


شکل ۷

□

گزاره (۱۱ از جلد اول). رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده از نقطه‌ای روی آن خط.

راه حل. فرض کنید AB خط داده شده و C نقطهٔ داده شده روی آن باشد (شکل ۸ را ببینید). دایره‌ای دلخواه به مرکز C رسم کنید تا خط AB را در دو نقطهٔ D و E قطع کند. مثلث متساوی‌الاضلاع FDE را روی DE رسم کنید. اکنون FC خط عمود مورد نظر است.



شکل ۸

□

گزاره (۱۲ از جلد اول). رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده از نقطه‌ای خارج آن خط.

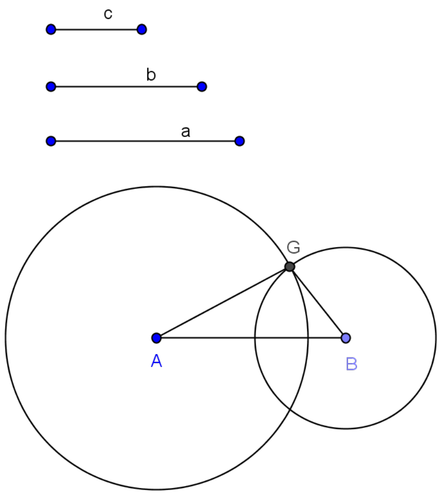
گزاره (۲۲ از جلد اول). رسم مثلثی با اضلاع برابر با سه پاره‌خط داده شده.

راه حل. فرض کنید a، b و c سه پاره‌خط داده شده باشند (شکل ۹ را ببینید). AB را پاره‌خطی برابر با a می‌گیریم و به مرکز A دایره‌ای به شعاع b و به مرکز B دایره‌ای به شعاع c رسم می‌کنیم. یکی از نقاط تقاطع آن‌ها را G می‌نامیم. اکنون ABG مثلث مورد نظر است.

□

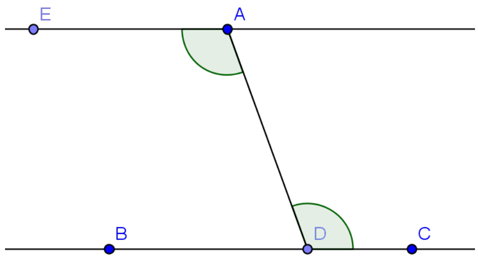
گزاره (۲۳ از جلد اول). رسم زاویه‌ای بر روی یک خط داده شده و برابر با یک زاویهٔ داده شده.

گزاره (۳۱ از جلد اول). رسم خطی راست، موازی خطی داده شده و از نقطه‌ای داده شده.



شکل ۹

راه حل. فرض کنید A نقطهٔ داده شده و BC خط داده شده باشد (شکل ۱۰ را ببینید). D را نقطه‌ای دلخواه روی BC می‌گیریم و پاره‌خط AD را رسم می‌کنیم. زاویهٔ DAE را برابر با $\angle ADC$ رسم می‌کنیم (گزاره ۲۳). اکنون خط AE موازی خط BC است. □



شکل ۱۰

گزاره (۴۲ از جلد اول). رسم یک متوازی‌الاضلاع با زاویه‌ای برابر با زاویهٔ داده شده و مساحتی برابر با یک مستطیل داده شده.

گزاره (۴۴ از جلد اول). رسم یک متوازی‌الاضلاع با ضلعی برابر با یک پاره‌خط داده شده و زاویه‌ای برابر با یک زاویهٔ داده شده و مساحتی برابر با یک مستطیل داده شده.

گزاره (۴۵ از جلد اول). رسم یک متوازی‌الاضلاع با زاویه‌ای برابر با یک زاویهٔ داده شده و مساحتی برابر با یک چندضلعی داده شده.

گزاره (۴۶ از جلد اول). رسم یک مربع با ضلعی برابر با یک پاره‌خط داده شده.

در ادامه، بعضی از گزاره‌های ترسیمی جلدهای دیگر اصول اقلیدس را می‌آوریم.

گزاره (۱ از جلد سوم). رسم مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث داده شده.

گزاره (۱۷ از جلد سوم). رسم مماس بر یک دایرهٔ داده شده، از نقطه‌ای خارج از دایره.

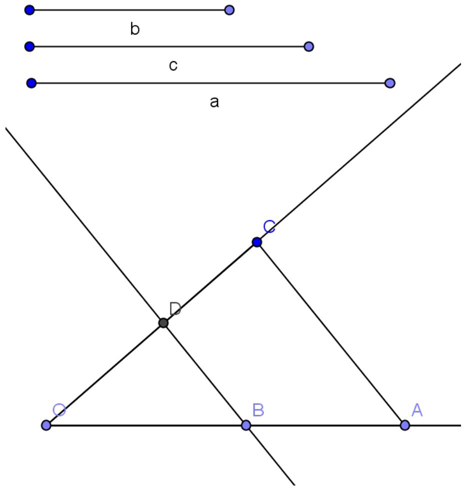
گزاره (۱۱ از جلد چهارم). رسم یک پنج‌ضلعی منتظم محاط در یک دایرهٔ داده شده.

گزاره (۱۵ از جلد چهارم). رسم یک شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایرهٔ داده شده.

گزاره (۱۶ از جلد چهارم). رسم یک پانزده‌ضلعی منتظم محاط در یک دایرهٔ داده شده.

گزاره (۱۲ از جلد ششم). رسم جزء چهارم در تناسبی که سه جزء دیگر آن پاره‌خط‌های داده شده هستند. (یعنی با پاره‌خط‌های داده شدهٔ a، b و c، پاره‌خط x را رسم کنید که $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.)

راه حل. روی خطی دلخواه، پاره‌خط‌های OA و OB را برابر با a و b در یک طرف O رسم‌می‌کنیم و روی خطی دیگر گذرنده از O، پاره‌خط OC را برابر با c رسم می‌کنیم (شکل ۱۱ را ببینید). اکنون پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و از B خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا خط OC را در D قطع کند. پاره‌خط OD، پاره‌خط مطلوب است. $\square$



شکل ۱۱

گزاره (۱۳ از جلد ششم). رسم میانگین هندسی دو پاره‌خط داده‌شده. (یعنی با پاره‌خط‌های داده شده a و b، پاره‌خط c را رسم کنید که $a \times b = c^۲$.)

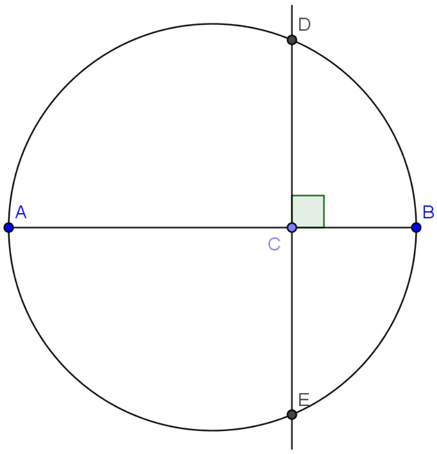
راه حل. پاره‌خط‌های AC و BC را روی یک خط و برابر با a و b در دو طرف C رسم می‌کنیم (شکل ۱۲ را ببینید). اکنون دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم و از C عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط D و E قطع کند. پاره‌خط CD مطلوب است. زیرا با توجه به قوت نقطهٔ C نسبت به دایره داریم:

$$AC \times CB = CD \times CE = CD^۲.$$

$\square$

مسأله ۱. سعی کنید ترسیم‌های انجام نشده در بالا را انجام دهید.

مسأله ۲. آپولونیوس، ریاضی‌دان و منجم یونانی، در سال‌های ۲۶۲ تا ۱۹۰ پیش از میلاد می‌زیسته است. وی بیش از هر چیز به دلیل اثرش در مورد مقاطع مخروطی معروف است. او در کتابش با عنوان «مماس‌ها»، مسألهٔ ترسیم زیر را مطرح و حل می‌کند. ترسیم دایره‌ای که سه شرط از شرط‌های زیر را داشته باشد:



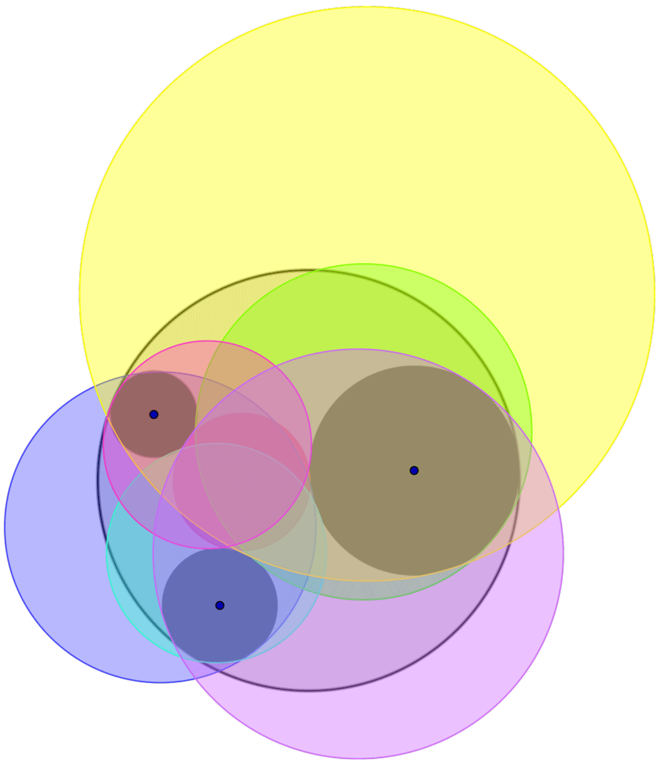
شکل ۱۲

(P) دایره از نقطهٔ مفروضی بگذرد.

(L) دایره بر خط مفروضی مماس باشد.

(C) دایره بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد.

به این ترتیب ده مسأله خواهیم داشت که می‌توان آن‌ها را به صورت نمادین زیر نشان داد:
(۱) PPP (۲) PPL (۳) PLL (۴) LLL (۵) PPC (۶) PLC (۷) PCC (۸) LLC (۹) LCC (۱۰) CCC

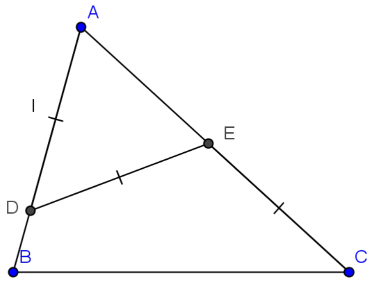


شکل ۱۳. مسأله دهم آپولونیوس و هشت جواب آن

سعی کنید همهٔ مسائل آپولونیوس را حل کنید، در هر مسأله تعیین کنید که چند جواب وجود دارد. (راه حل مسائل آپولونیوس در منبع [۲] فصل هشتم موجود است.)

برای دیدن راه حل سه مسألهٔ زیر به منبع [۲]، صفحات ۱۱ و ۱۲ مراجعه کنید.

مسأله ۳. بر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC (یا امتداد آن‌ها)، دو نقطهٔ D و E را طوری تعیین کنید که پاره‌خط‌های AD، DE و EC برابر باشند (شکل ۱۴ را ببینید).



شکل ۱۴

مسأله ۴. بر روی دو دایرهٔ مفروض، دو نقطه تعیین کنید که فاصلهٔ معینی داشته باشند و خط واصل آن‌ها با خط داده‌شده‌ای موازی باشد.

مسأله ۵. مربعی رسم کنید که هر ضلع (یا امتداد آن) از نقطهٔ داده‌شده‌ای بگذرد.

۲.۳ ترسیم با پرگار تنها

گاهی اوقات محدودیت‌های عملی در استفاده از ابزارهای ترسیم وجود دارد. این محدودیت‌ها خود مسائلی جدید در ترسیم‌های هندسی مطرح می‌کنند.

ابوالوفای بوزجانی

اولین نمونه از این مسائل را ابوالوفا محمد بوزجانی[۱] ریاضی‌دان ایرانی (۳۲۸ تا ۳۸۸ هجری قمری، ۹۴۰ تا ۹۹۸ میلادی) در کتابش با نام «اعمال هندسی» مطرح می‌کند و راه‌حل‌های زیبایی برای آن‌ها ارائه می‌دهد.
در این مسائل، ابوالوفا با استفاده از پرگاری که قطر دهانهٔ آن قابل تغییر نیست و ثابت است، (اصطلاحاً پرگار «زنگ‌زده») ترسیم‌های مختلفی را انجام می‌دهد. تعدادی از مسائلی که ابولوفا مطرح کرده و به طور کامل حل می‌کند:

۱. با استفاده از خط‌کش و یک پرگار با دهانهٔ ثابت، از نقطهٔ A عمودی بر پاره‌خط AB رسم کنید.

۲. با استفاده از خط‌کش و یک پرگار با دهانهٔ ثابت، یک پاره‌خط را به n قسمت برابر تقسیم کنید.

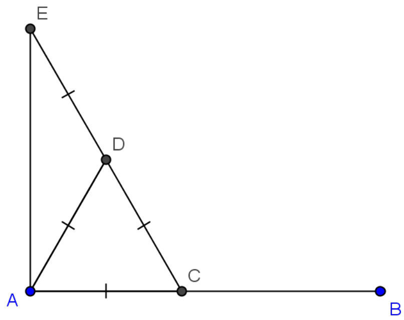
۳. با استفاده از خط‌کش و یک پرگار با دهانهٔ ثابت، یک پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع دهانهٔ پرگار رسم کنید.

[۱] برای اطلاع از زندگی و دست‌آوردهای ابوالوفای بوزجانی، مراجعه کنید به پرگار، شمارهٔ دوم، پاییز ۱۳۹۲، ابوالوفا محمد بوزجانی.

شکل ۱۵. ابوالوفا محمد بوزجانی

در زیر راه حل مسألهٔ اول و دوم را می‌آوریم:

راه حل مسألهٔ اول ابوالوفا. با استفاده از پرگار، دایره‌ای به مرکز A رسم کنید تا پاره‌خط AB را در C قطع کند (شکل ۱۶ را ببینید). سپس به مرکز C دایره‌ای رسم کنید تا دایرهٔ قبلی را در D قطع کند. حال CD را امتداد دهید و دایره‌ای به مرکز D رسم کنید تا امتدا CD را در E قطع کند. اکنون AE بر AB عمود است. زیرا مثلث ACD متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $\angle ADC = ۶۰^\circ$ و در نتیجه $\angle ADE = ۱۲۰^\circ$ و چون مثلث ADE متساوی‌الساقین است، پس $\angle EAD = ۳۰^\circ$ و در نتیجه $\angle EAC = ۹۰^\circ$.



شکل ۱۶

□

راه حل مسألهٔ دوم ابوالوفا. فرض کنید پاره‌خط AB داده شده باشد (شکل ۱۷ را ببینید). با استفاده از مسألهٔ اول، در A و B دو عمود بر پاره‌خط AB رسم می‌کنیم. با استفاده از پرگار با دهانهٔ ثابت، $n-۱$ پاره‌خط برابر متوالیاً روی هر یک از این دو عمود جدا می‌کنیم. نقاط را مطابق شکل با خطوط راست به هم وصل می‌کنیم. اکنون پاره‌خط AB به n قسمت برابر تقسیم شده است. اثبات درستی ترسیم به خواننده واگذار می‌شود.

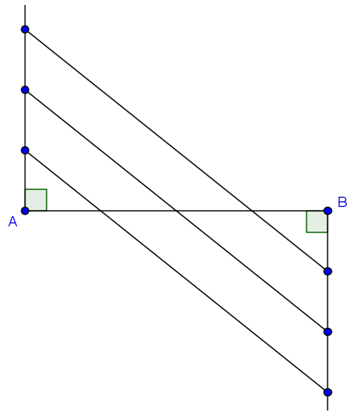
□

ماسکرونی

لورنتسو ماسکرونی[۲] ریاضی‌دان ایتالیایی در سال ۱۷۹۷ میلادی این مسأله را بررسی کرد که اگر تنها مجاز به استفاده از پرگار باشیم، چه ترسیم‌هایی را می‌توانیم انجام دهیم و در کتابش با عنوان «هندسهٔ پرگاری» نشان داد که هر مسألهٔ قابل ترسیم با خط‌کش و پرگار را می‌توان با پرگار تنها نیز رسم کرد.

---

[۲] Lorenzo Mascheroni



شکل ۱۷

در اینجا لازم است توضیحی در مورد ترسیم با پرگار تنها داده شود. روشن است که با استفاده از پرگار نمی‌توان تمام نقاط یک خط راست را رسم کرد. بنابراین اگر هدف ترسیم، رسم یک خط باشد، روشن است که نمی‌توان با پرگار این کار را انجام داد. منظور از قضیهٔ ماسکرونی این است که هر «نقطه‌ای» که بتوان آن را با استفاده از خط‌کش و پرگار یافت، با استفاده از پرگار تنها نیز می‌توان یافت. مثلاً اگر با خط‌کش و پرگار می‌توان مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث را یافت، با پرگار تنها نیز می‌توان آن را یافت.

قضیه (ماسکرونی)**.** همهٔ نقاطی که با خط‌کش و پرگار قابل ترسیم هستند، با پرگار تنها نیز قابل ترسیم هستند.

اثبات. شاید در ابتدا اثبات چنین قضیه‌ای غیر ممکن به نظر برسد زیرا دربارهٔ «همهٔ» ترسیم‌هایی سخن می‌گوید که با خط‌کش و پرگار قابل انجام هستند. اما وقتی به فرآیند ترسیم با خط‌کش و پرگار دقت کنیم، در می‌یابیم که در هر گام از ترسیم، ما یکی از اعمال زیر را انجام می‌دهیم:

الف) یافتن نقاط تلاقی دو دایره که مراکز و یک نقطه روی هرکدام را داریم.

ب) یافتن نقطهٔ تلاقی دو خط راست که دو نقطه روی هرکدام را داریم.

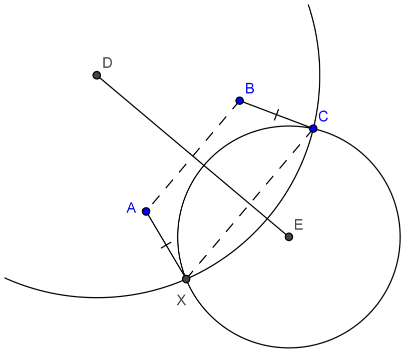
پ) یافتن نقاط تلاقی یک خط راست که دو نقطه از آن را داریم و یک دایره که مرکز و یک نقطه از آن را داریم.

واضح است که عمل (الف) با استفاده از پرگار تنها قابل انجام است. پس برای اثبات قضیهٔ ماسکرونی، کافی است نشان دهیم می‌توان اعمال (ب) و (پ) را با استفاده از پرگار تنها انجام داد. این کار را در چند لم زیر انجام می‌دهیم. ما فقط مراحل ترسیم‌ها را ارائه می‌کنیم و اثبات درستی ترسیم‌ها را به خواننده واگذار می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای دیدن اثبات‌های کامل به منبع [۴] مراجعه کند.
لم اول نشان می‌دهید که در نبود خط‌کش نیز، پرگار اقلیدسی با پرگارهای امروزی معادل است.

لم ۱. ترسیم دایره‌ای به شعاعی برابر با پاره‌خط BC و به مرکز نقطهٔ A، با استفاده از پرگار تنها.

راه حل. ابتدا به مراکز A و B دوایری به شعاع AB رسم می‌کنیم و تقاطع آن‌ها را D و E می‌گیریم (شکل ۱۸ را ببینید). حال دایره‌ای به مرکز D و شعاع DC و دایره‌ای به مرکز E و شعاع EC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ای دیگر چون X قطع کنند. اکنون دایرهٔ به مرکز A و شعاع AX همان دایرهٔ مطلوب است.

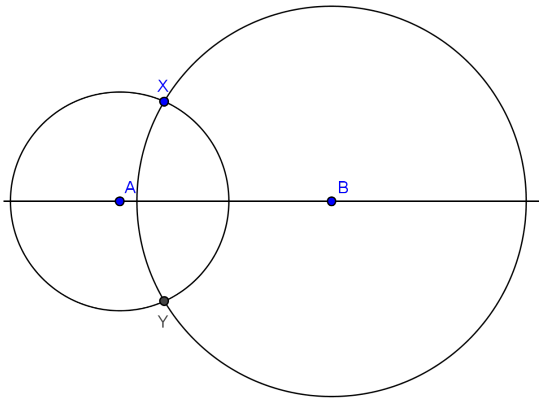
□



شکل ۱۸

لم ۲. ترسیم قرینهٔ نقطهٔ X نسبت به خطی مانند AB، با استفاده از پرگار تنها.

راه حل. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AX و دایره‌ای به مرکز B و شعاع BX رسم می‌کنیم (شکل ۱۹ را ببینید). نقطهٔ تقاطع دیگر آن‌ها همان نقطهٔ مطلوب است. □



شکل ۱۹

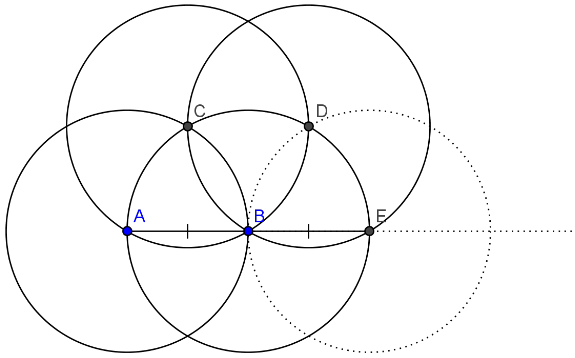
لم ۳. رسم پاره‌خطی با طول n برابر پاره‌خط مفروض AB با استفاده از پرگار تنها.

راه حل. دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم (شکل ۲۰ را ببینید) و روی آن با شروع از A، متوالیاً دوایری گذرنده از B رسم می‌کنیم و نقاط C، D و E را به دست می‌آوریم. در این صورت ABE یک خط راست است و $BE = AB$. این فرآیند را تکرار می‌کنیم و پاره‌خط‌های دیگری در امتداد AB و برابر با آن به دست می‌آوریم.

□

لم ۴. رسم جزء چهارم تناسبی که سه جزء دیگرش a، b و c سه پاره‌خط مفروض‌اند با استفاده از پرگار تنها. یعنی رسم پاره‌خط x به نحوی که $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

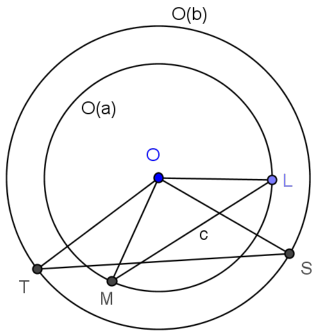
راه حل. به مرکز دلخواه O دوایری به شعاع‌های a و b رسم می‌کنیم و آن‌ها را $O(a)$ و $O(b)$ می‌نامیم (شکل ۲۱ را ببینید). L را نقطهٔ دلخواهی روی $O(a)$ می‌گیریم و نقطهٔ M را روی $O(a)$ به نحوی می‌گیریم که $LM = c$. حال به مرکز L و به شعاع دلخواه t، دایره‌ای رسم می‌کنیم که $O(b)$ را در S قطع کند. همچنین به مرکز M و شعاع t دایره‌ای رسم می‌کنیم



شکل ۲۰

که $O(b)$ را در T قطع کند. برای S دو انتخاب و برای T نیز دو انتخاب داریم. آن انتخاب‌هایی را در نظر می‌گیریم که دقیقاً یکی از S و T درون زاویهٔ LOM قرار گیرند. اکنون پاره‌خط ST پاره‌خط مطلوب است، زیرا مثلث‌های OLM و OST متشابه هستند و در نتیجه

$$\frac{OL}{OS}=\frac{LM}{ST}.$$



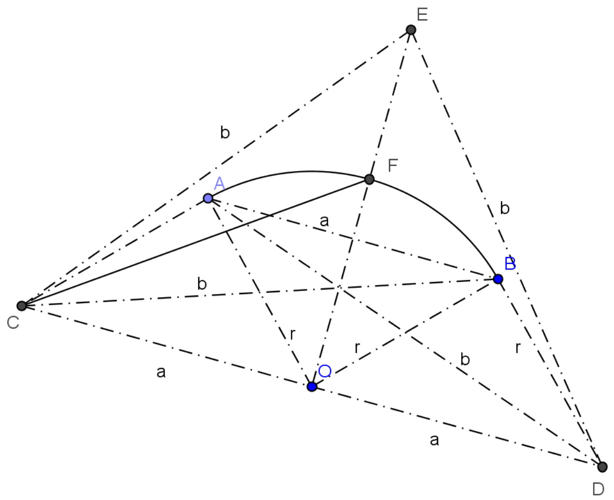
شکل ۲۱

تنها مشکلی که در این ترسیم ممکن است رخ دهد این است که اگر c بزرگ‌تر از قطر $O(a)$ باشد، یعنی $c > ۲a$، آن‌گاه نقطهٔ M را نمی‌توان روی $O(a)$ یافت. در این صورت تغییری در ترسیم به این صورت می‌دهیم. از آن‌جا که ما دنبال پاره‌خط xای هستیم که $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$، کافی است xای بیابیم که $\frac{na}{nb}=\frac{c}{x}$ که n عددی طبیعی است. اکنون عدد طبیعی n را آن‌قدر بزرگ می‌گیریم که $۲na > c$ (حتماً چنین nای وجود دارد) و سپس پاره‌خط‌هایی به طول na و nb طبق لم قبل رسم می‌کنیم و در ترسیمی که در بالا توضیح داده شد، از na و nb به جای a و b استفاده می‌کنیم. □

لم ۵. یافتن نقطهٔ وسط کمان AB از دایره‌ای به مرکز O با استفاده از پرگار تنها.

راه حل. دایره‌ای به مرکز O و شعاع AB رسم می‌کنیم و آن را $O(AB)$ می‌نامیم (شکل ۲۲ را ببینید). دایره‌ای به مرکز A و شعاع AO رسم می‌کنیم تا $O(AB)$ را در C قطع کند و نیز دایره‌ای به مرکز B و شعاع BO رسم می‌کنیم تا $O(AB)$ را در D قطع کند. اکنون $ACOB$ و $BDOA$ متوازی‌الاضلاع‌هایی قابل انطباق هستند. فرض کنید دایرهٔ به مرکز D و شعاع DA با دایرهٔ به مرکز C و شعاع CB در E تلاقی کند. دایره‌ای به مرکز C و شعاع OE رسم کنید تا کمان AB را در نقطهٔ F قطع کند. F همان نقطهٔ مطلوب است.

□

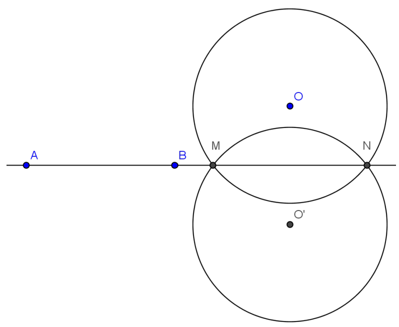


شکل ۲۲

اکنون آماده هستیم تا ترسیم‌های (ب) و (پ) که برای اثبات قضیهٔ ماسکرونی نیاز بود را انجام دهیم.

لم ۶. یافتن محل تلاقی دایرهٔ به مرکز O و شعاع r با خط راست گذرنده از نقاط A و B.

راه حل. دایرهٔ به مرکز O و شعاع r را با $O(r)$ نشان می‌دهیم (شکل ۲۳ را ببینید). O' قرینهٔ O نسبت به خط AB را با استفاده از لم ۲ میابیم. اکنون دایرهٔ به مرکز O' و شعاع r، دایرهٔ $O(r)$ را در نقاط مطلوب M و N قطع می‌کند.



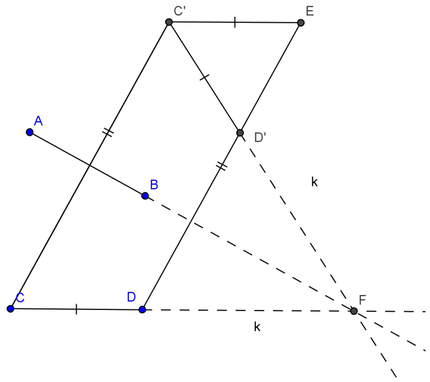
شکل ۲۳

این راه حل در حالتی که O روی خط AB باشد کار نمی‌کند. زیرا در این حالت O' بر O واقع است. در این حالت به این ترتیب عمل می‌کنیم که P را نقطه‌ای دلخواه روی $O(r)$ می‌گیریم و قرینهٔ آن نسبت به خط AB را رسم می‌کنیم و آن را Q می‌نامیم. اکنون Q نیز روی دایره واقع است و M و N نقاط وسط کمان‌های PQ هستند که می‌توانیم آن‌ها را با استفاده از لم ۵ بیابیم. □

لم ۷. یافتن محل تلاقی دو خط راست AB و CD.

راه حل. C' و D' را قرینهٔ C و D نسبت به خط AB می‌گیریم (شکل ۲۴ را ببینید). روشن است که $C'D'$ نیز از محل تلاقی AB و CD می‌گذرد که آن را F می‌نامیم. دوایر به مرکز C' و شعاع $C'D'$ و به مرکز D و شعاع CC' را رسم می‌کنیم

و محل تلاقی آن‌ها را E می‌نامیم. اکنون $DCC'E$ یک متوازی‌الاضلاع است. پس DF موازی با $C'E$ است و در نتیجه مثلث‌های $C'D'E$ و $DD'F$ متشابه‌اند. پس $\frac{D'E}{D'D} = \frac{D'C'}{D'F}$.



شکل ۲۴

اکنون $D'E$، DD' و $D'C'$ همگی معلوم هستند، پس بنابر لم ۴ می‌توانیم جزء چهارم تناسب بالا را رسم کنیم. این طول را k می‌نامیم. اکنون دوایر به مرکز D و D' و به شعاع k یکدیگر را در نقطهٔ مطلوب F قطع می‌کنند. □

اثبات قضیهٔ ماسکرونی به پایان رسید. □

۳.۳ ترسیم با خط‌کش تنها

در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که چه ترسیم‌هایی با خط‌کش تنها قابل انجام است. نشان می‌دهیم بر خلاف پرگار، با استفاده از خط‌کش تنها حتی مقدماتی‌ترین ترسیم‌هایی که با خط‌کش و پرگار قابل انجام است را نمی‌توان انجام داد.

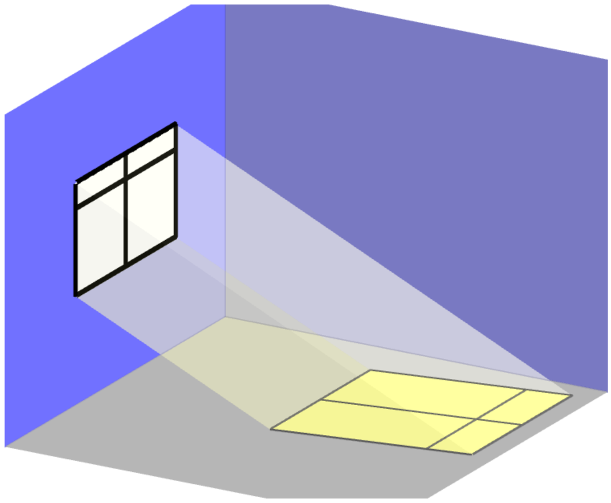
گزاره ۸. با استفاده از خط‌کش تنها، نمی‌توان خطی عمود بر یک خط داده شده رسم کرد.

اثبات. ابتدا اثباتی شهودی ارائه می‌کنیم و سپس اثبات دقیق را.
اثبات شهودی: فرض کنید بتوان با استفاده از خط‌کش تنها، ترسیم را انجام داد. فرض کنید ترسیم را روی پنجرهٔ اتاق انجام می‌دهیم و نور خورشید که از پنجره به درون اتاق می‌تابد، سایهٔ ترسیم را روی زمین می‌اندازد.
همهٔ مراحل ترسیم، عیناً بر روی زمین هم انجام می‌شود (زیرا سایهٔ یک خط راست، یک خط راست است)، پس در نهایت باید سایهٔ خط عمود نیز بر سایهٔ خط اولیه عمود باشد، ولی سایهٔ یک زاویهٔ قائمه لزوماً قائمه نیست! □

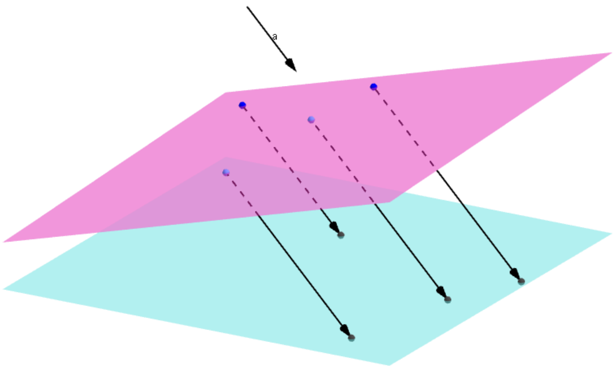
برای دقیق کردن اثبات بالا، مفهوم تصویر موازی را شرح می‌دهیم. فرض کنید π و π' دو صفحهٔ متمایز در فضا باشند (شکل ۲۶ را ببینید). منظور از تصویر موازی π بر π' در امتداد a نگاشتی است از π بر π'، که به هر نقطهٔ P از π، یک نقطهٔ P' از π' را به گونه‌ای نسبت دهد که خط PP' موازی a باشد.
تبدیل تصویر موازی خواص بسیار جالبی دارد که در اینجا برای پرهیز از طولانی شدن بحث، تنها بعضی از آن‌ها را بدون اثبات ذکر می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای دیدن اثبات‌ها به منبع [۳] مراجعه کند.

الف) در تصویر موازی، خطوط صفحهٔ π به خطوط صفحهٔ π' نگاشته می‌شوند (شکل ۲۷ را ببینید).

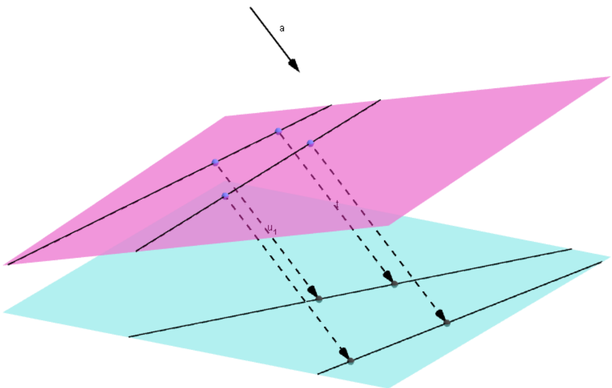
ب) در تصویر موازی، خطوط موازی به خطوط موازی تبدیل می‌شوند.



شکل ۲۵. تابش نور خورشید به درون اتاق



شکل ۲۶



شکل ۲۷

پ) در تصویر موازی، نسبت طول‌های دو پاره‌خط هم‌خط ثابت می‌ماند.

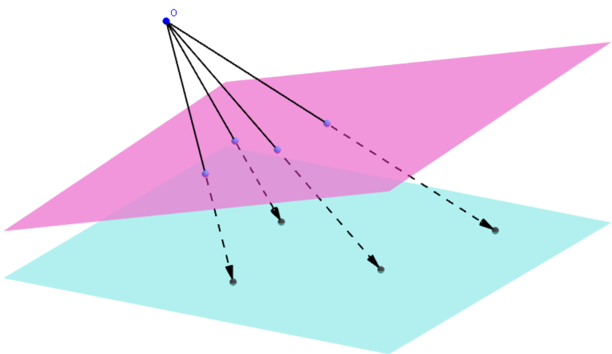
ت) در تصویر موازی، نسبت بین مساحت‌های دو شکل مسطح ثابت می‌ماند.

ث) اگر A و B و C سه نقطهٔ غیر هم‌خط روی صفحهٔ π و M و N و P سه نقطهٔ غیر هم‌خط روی صفحهٔ π' باشند. در

این صورت می‌توان صفحه‌های π و π' را به نحوی در فضا قرار داد که بر اثر تصویر موازی از π بر π'، مثلث ABC به مثلثی متشابه با مثلث MNP نگاشته شود.

خاصیت (الف) نشان می‌دهد که هر ترسیمی که با خط‌کش تنها روی صفحهٔ π انجام شود، تصویر آن روی صفحهٔ π' نیز عیناً همان مراحل ترسیم را انجام می‌دهد. از طرفی خاصیت (ث) نشان می‌دهد که می‌توان با استفاده از تصویر موازی، یک زاویهٔ قائمه را به هر زاویهٔ دیگری تبدیل کرد. بنابراین اثبات شهودی بالا دقیق می‌شود.

مسأله ۶. ثابت کنید با استفاده از خط‌کش تنها، نمی‌توان نقطهٔ وسط یک پاره‌خط را رسم کرد.
راهنمایی: در اینجا، تصویر موازی کمکی به ما نمی‌کند، زیرا بنابر خاصیت (پ) در بالا، نقطهٔ وسط پاره‌خط تحت تصویر موازی، به نقطهٔ وسط پاره‌خط نگاشته می‌شود. در اینجا از تبدیل «تصویر مرکزی» استفاده کنید:
فرض کنید π و π' دو صفحهٔ متمایز در فضا باشند و O نقطه‌ای غیر واقع بر آن‌ها (شکل ۲۸ را ببینید). منظور از تصویر مرکزی π بر π' به مرکز O، نگاشتی است از π بر π' که به هر نقطهٔ P از π، یک نقطهٔ P' از π' را به گونه‌ای نسبت دهد که P' بر OP واقع باشد. نشان دهید تصویر مرکزی خاصیت (الف) از خواص تصویر موازی را دارد ولی خواص (ب)، (پ) و (ت) را ندارد.



شکل ۲۸

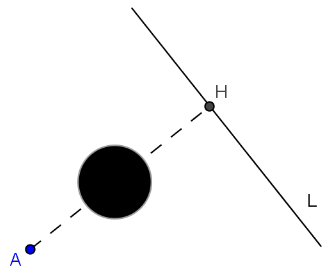
مسأله ۷. الف) یاکوب اشتاینر[۳] ریاضی‌دان سوئیسی، در ۱۸۳۳ این مسأله را بررسی کرد که اگر تنها مجاز به استفاده از خط‌کش باشیم و یک دایرهٔ تنها و مرکز آن در صفحه رسم شده باشند، چه ترسیم‌هایی را می‌توان انجام داد. او ثابت کرد که هر ترسیمی که با خط‌کش و پرگار قابل انجام باشد، تحت شرایط بالا نیز قابل انجام است. سعی کنید این قضیه را ثابت کنید.

ب) اگر مرکز دایره داده نشده باشد، نشان دهید نمی‌توان با استفاده از خط‌کش تنها مرکز آن را به دست آورد. (راهنمایی: نشان دهید یک تبدیل تصویر مرکزی وجود دارد که یک دایره را به خودش تبدیل می‌کند ولی مرکز آن را به نقطه‌ای دیگر تبدیل می‌کند.)

مسأله ۸. فرض کنید قسمتی از صفحه به عنوان ناحیهٔ غیر مجاز مشخص شده و ما مجاز نیستیم هیچ قسمتی از خط‌کش و پرگار را روی آن قرار دهیم.

الف) در شکل ۲۹، دایرهٔ سیاه شده، ناحیهٔ غیر مجاز است. با استفاده از خط‌کش و پرگار، پای عمود از A بر خط داده شده را بیابید.

[۳] Jacob Steiner



شکل ۲۹

ب) نشان دهید اگر یک دایره به عنوان ناحیهٔ غیر مجاز داده شده باشد، همهٔ نقاطی که در حالت عادی می‌توان با استفاده از خط‌کش و پرگار یافت و خارج از ناحیهٔ غیر مجاز هستند را می‌توان با وجود ناحیهٔ غیر مجاز نیز یافت.

کتاب‌نامه

[۱] اقلیدس، سیزده جلد از اصول، ترجمهٔ بهمن اصلاح‌پذیر، انتشارات مبتکران، (۱۳۹۰)

[۲] ناتان آ. کورت، هندسهٔ مسطحه، مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره، ترجمهٔ محمود دیانی، انتشارات فاطمی (۱۳۸۶)

[۳] ایزاک م. یاگلم، تبدیلات هندسی، جلد سوم، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی (۱۳۷۷)

[۴] راس هانسبرگر، ابتکارهایی در ریاضیات، ترجمهٔ سیامک کاظمی، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۷۱)

[۵] ابوالقاسم قربانی، زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم (۱۳۷۵)

[۶] هوارد و. ایوز، تاریخ هندسه، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، (۱۳۸۳)

[7] David Wells, (1993) *The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles*, Penguin Books

[8] George E. Martin, (1998) *Geometric Constructions*, Springer