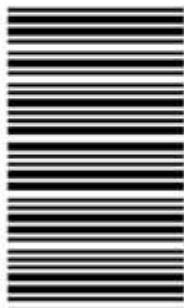


کد کنترل

706

A



706A

صبح جمعه

۹۷/۱۲/۳

دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»  
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه متمرکز) - سال ۱۳۹۸

رشته مهندسی مکانیک - دینامیک، کنترل و ارتعاشات  
کد (۲۳۲۳)

مدت پاسخ گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: ریاضیات مهندسی - دینامیک پیشرفته - ارتعاشات پیشرفته - کنترل پیشرفته	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

۱۳۹۸

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

۱- اگر  $u(x,t)$  جواب مسئله موج

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(x,0) = 2x + 1 \\ u_t(x,0) = x, & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

باشد، مقدار تقریبی  $u(0.4, 1/3)$  کدام است؟

(۱)  $1/24$

(۲)  $1/79$

(۳)  $1/96$

(۴)  $2/15$

۲- فرض کنید  $z = x + iy$  باشد. مقدار ماکزیمم  $|\sin z|$  در دامنه مربعی شکل  $D = \{(x,y), 0 \leq x,y \leq 2\pi\}$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $e^{2\pi}$

(۳)  $\sinh 2\pi$

(۴)  $\cosh 2\pi$

۳- جواب مسئله بواسن روبه‌رو کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \frac{\sin \theta}{r^2}, & 0 < r < 2, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ \omega(r, 0) = 0 \\ \omega(2, \theta) = \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta \quad (1)$$

$$\omega(r, \theta) = \frac{1}{2} r \sin \theta + \frac{1}{8} r^3 \sin \theta \quad (2)$$

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + r^{-n}) \sin n\theta \quad (3)$$

$$\omega(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} r - 1\right) \sin \theta + \frac{1}{8} r^3 \sin 3\theta \quad (4)$$

۴- انتگرال فوریته تابع  $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  کدام است؟

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \omega \cos(\omega x) d\omega \quad (2)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (3)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \omega \cos(\omega x) d\omega \quad (4)$$

۵- اگر  $C$  مرز نیم‌دایره فوقانی  $|z| = r$  در جهت مثبت و  $I(r) = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$  باشد،  $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r)$  کدام است؟

(1) 0

(2) 1

(3)  $\pi$

(4)  $\infty$

۶- مسئله گرمای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 3u(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = -e^{-x}, & x > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

اگر  $v(x,s)$  تبدیل لاپلاس  $u(x,t)$  باشد. آنگاه  $v(x,s)$  در کدام معادله صدق می کند؟

$$4v''(x,s) + (3-s)v(x,s) = e^{-x} \quad (1)$$

$$v''(x,s) + (4s-3)v(x,s) = e^{-x} \quad (2)$$

$$4v''(x,s) + (s-3)v(x,s) = se^{-x} \quad (3)$$

$$v''(x,s) + (3-4s)v(x,s) = se^{-x} \quad (4)$$

۷- معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر  $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$  به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می شود.  $v(x,0)$  کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - 1, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0,t) = 3, & u(2,t) = -1, t > 0 \\ u(x,0) = 1 - x^2, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - 2 \quad (1)$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2 \quad (2)$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + 3 \quad (3)$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3 \quad (4)$$

۸- اگر  $v(x,y)$  مزدوج همساز تابع  $u(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$  با شرط  $v(0,0) = 0$  باشد. مقدار  $v(1,1)$  کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$-4 \quad (4)$$

۹- اگر  $F_s \{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$  تبدیل فوریه سینوسی تابع  $f(x)$  باشد، تبدیل فوریه سینوسی تابع

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\pi}{2} e^{-2\omega} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} e^{2\omega} \quad (2)$$

$$\pi e^{-2\omega} \quad (3)$$

$$e^{2\omega} \quad (4)$$

۱۰- سری نیم دامنه سینوسی تابع  $f(x) = x(\pi - x)$  در فاصله  $0 < x < \pi$  کدام است؟

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin(2m+1)x \quad (1)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{(2m+1)^2 \pi} \sin(2m+1)x \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi} \sin 2mx \quad (3)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \pi} \sin 2mx \quad (4)$$

۱۱- اگر  $F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega x} dx$  تبدیل فوریه  $f(x)$  باشد، تبدیل فوریه جواب مسئله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\int_0^t F(\omega, \tau) e^{a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (1)$$

$$\int_0^t F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (4)$$

۱۲- فرض کنید تابع تحلیلی  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  برای هر  $z \in \mathbb{C}$  در نامساوی  $|f(z) - 2z^2 - iz| \leq \sqrt{2}$  صدق کند. در

این صورت مقدار  $\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$  کدام است؟

(۱)  $2\pi i$

(۲)  $-2\pi i$

(۳)  $2\pi$

(۴)  $-2\pi$

۱۳- تصویر خط راست  $2x + 3y = 5$  تحت نگاشت  $w = u + iv = \frac{1}{z}$  کدام است؟

(۱)  $(u - \frac{1}{5})^2 + (v + \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$

(۲)  $(u - \frac{1}{5})^2 + (v - \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$

(۳)  $(u + \frac{1}{5})^2 + (v - \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$

(۴)  $(u + \frac{1}{5})^2 + (v + \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$

۱۴- فرم کلی جواب مسئله موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) - 9\nabla^2 u(x,y,t) = \begin{cases} te^{-|x+y|} & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}, y \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,y,0) = \begin{cases} x+y & 0 < x < 1, -2 < y < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \\ u_t(x,y,0) = 0, x > 0, y \in \mathbb{R} \\ u(0,y,t) = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(۱)  $u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 (A_{\omega} \cos \nu \omega t + B_{\omega} \sin \nu \omega t + C_{\omega} t + D_{\omega}) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$

(۲)  $u(x,y,t) = \int_{-2}^2 \int_0^1 (A_{\omega} \cos \nu \omega t + B_{\omega} \sin \nu \omega t + C_{\omega} t + D_{\omega}) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$

(۳)  $u(x,y,t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (A_{\omega} \cos \nu \omega t + B_{\omega} \sin \nu \omega t + C_{\omega} t + D_{\omega}) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$

(۴)  $u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (A_{\omega} \cos \nu \omega t + B_{\omega} \sin \nu \omega t + C_{\omega} t + D_{\omega}) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$

۱۵- اگر  $y(x)$  جواب معادله دیفرانسیل  $y'' - 4y' + 3y = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$  با شرط  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = 0$  باشد، تبدیل فوری  $y(x)$  کدام است؟

(راهنمایی:  $(F\{y(x)\}) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{-i\omega x} dx$ )

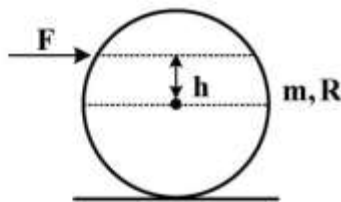
$$\frac{\sin 2\omega}{\omega^2 + 4i\omega - 3} \quad (1)$$

$$\frac{\sin \omega}{\omega^2 + 4i\omega - 3} \quad (2)$$

$$\frac{-2\sin \omega}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)} \quad (3)$$

$$\frac{2\sin \omega}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)} \quad (4)$$

۱۶- یک توپ کروی توپر همگن به جرم  $m$  و شعاع  $R$  مطابق شکل زیر بر روی سطح افقی قرار دارد. اگر نیروی افقی  $F$  به فاصله  $h$  از مرکز کره وارد شود،  $h$  چقدر باید باشد تا نیروی اصطکاک بین توپ و سطح صفر شود؟ (فرض کنید



توپ غلتش بدون لغزش می کند)

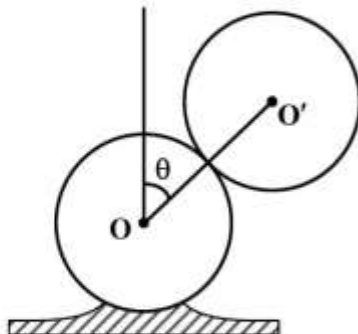
$$h = R \quad (1)$$

$$h = 0.4R \quad (2)$$

$$h = 0.2R \quad (3)$$

$$h = 0 \quad (4)$$

۱۷- کره توپر همگنی به جرم  $m$  و شعاع  $R$  بر روی کره ثابتی به شعاع  $R$  در موقعیت تعادل ( $\theta = 0$ ) قرار دارد. اگر کره بالایی را اندکی از موقعیت تعادل خارج کنیم و کره شروع به غلت بدون لغزش بر روی کره ثابت پایینی کند، تابع لاگرانژین کره متحرک کدام است؟ (فرض شده دو کره تماس خود را از دست نمی دهند).



$$\frac{14}{5} mR^2 \dot{\theta}^2 - 2mgR \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{7}{10} mR^2 \dot{\theta}^2 - 2mgR \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{7}{10} mR^2 \dot{\theta}^2 - 2mgR(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

$$\frac{7}{5} mR^2 \dot{\theta}^2 - 2mgR \cos \theta \quad (4)$$

۱۸- یک حلقه دایره‌ای شکل متقارن با توزیع جرم یکنواخت به هوا پرتاب می‌شود. در لحظه پرتاب، حلقه دارای سرعت زاویه‌ای و مرکزش دارای سرعت است. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر شود و بردار شدت جاذبه ثابت باشد، کدام گزینه نادرست است؟ ( $\vec{H}_G$  بردار اندازه حرکت زاویه‌ای حلقه حول مرکزش است).

(۱) مرکز حلقه بر روی یک سهمی حرکت می‌کند.

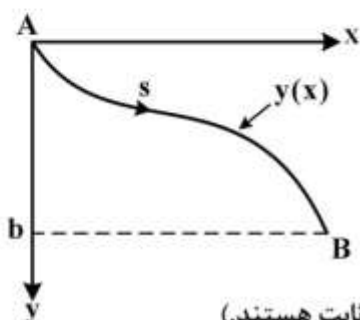
(۲) زاویه بین محور تقارن حلقه و بردار سرعت زاویه‌ای آن در طول حرکت ثابت است.

(۳) زاویه بین محور تقارن حلقه و  $\vec{H}_G$  در طول حرکت ثابت است.

(۴) بردار سرعت زاویه‌ای حلقه همواره در راستای  $\vec{H}_G$  است.

۱۹- ذره‌ای به جرم  $m$  مسیر شکل زیر را که در صفحه قائم  $xy$  قرار دارد، تحت نیروی گرانش، بدون اصطکاک در کوتاه‌ترین

زمان از نقطه  $A$  تا  $B$  طی می‌کند. گرانش در امتداد  $y$  فرض شود. معادله پارامتری مسیر کدام است؟ ( $a = \frac{1}{2}b, \phi = 2\theta$ )



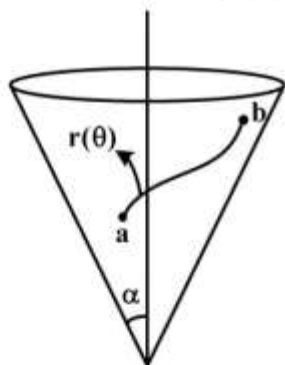
$$x = a(\phi - \sin \phi); y = a(1 - \cos \phi) \quad (۱)$$

$$x = a(\phi + \cos \phi); y = a(1 - \cos \phi) \quad (۲)$$

$$x = a(\phi + \sin \phi); y = a(1 + \cos \phi) \quad (۳)$$

$$x = a(\phi - \sin \phi); y = a(1 + \sin \phi) \quad (۴)$$

۲۰- کوتاه‌ترین مسیر بین نقاط  $a$  و  $b$  روی مخروط زیر، کدام است؟ ( $B$  و  $C$  اعداد ثابت هستند).



$$r(\theta) = B \sin \alpha \sec(\theta \sin \alpha - C) \quad (۱)$$

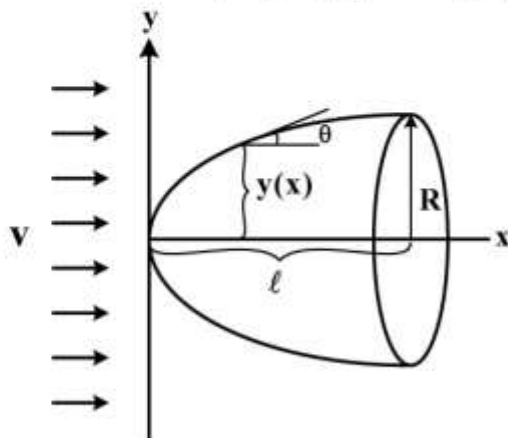
$$r(\theta) = \frac{B}{\sin \alpha} \sin(\theta \sin \alpha - C) \quad (۲)$$

$$r(\theta) = \frac{B}{\cos \alpha} \sec(\theta \sin \alpha - C) \quad (۳)$$

$$r(\theta) = \frac{B}{\sin \alpha} \sec(\theta \sin \alpha - C) \quad (۴)$$

۲۱- کدام منحنی  $y(x)$  نیروی درگ ناشی از جریان سیال با سرعت  $v$  را مینیمم می‌کند؟ (فشار برابر

$P = 2\rho v^2 \sin^2 \theta$  است و فرض شود  $\tan \theta = \sin \theta$  یعنی  $y'$  قابل ملاحظه ولی  $y''$  صفر است.)



$$y = R \left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۱)$$

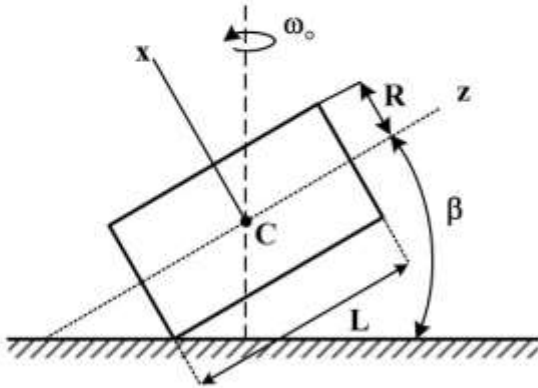
$$y = R \left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (۲)$$

$$y = R \left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (۳)$$

$$y = R \left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (۴)$$



۲۲- استوانه همگنی مطابق شکل زیر به طور مایل بر روی سطح زمین قرار دارد. محور استوانه حول محور قائمی که از مرکز جرم استوانه می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای  $\omega_0$  می‌چرخد به گونه‌ای که مرکز جرم استوانه هیچ‌گونه حرکتی نمی‌کند. با فرض اینکه لبه استوانه بر روی زمین بدون لغزش می‌غلتد و زاویه  $\beta$  بین محور استوانه و خط افقی ثابت می‌ماند، بردار سرعت زاویه‌ای استوانه کدام است؟ (طول استوانه  $L$  و شعاع آن  $R$  فرض شود).



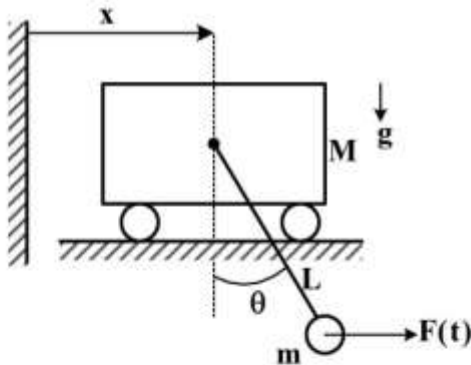
$$\omega_0 \cos\beta \vec{i} + \omega_0 \sin\beta \vec{k} \quad (1)$$

$$\omega_0 \cos\beta \vec{i} + \frac{L}{R} \omega_0 \sin\beta \vec{k} \quad (2)$$

$$\omega_0 \cos\beta \vec{i} + \frac{L}{R} \omega_0 \tan\beta \vec{k} \quad (3)$$

$$\omega_0 \cos\beta \vec{i} + \frac{L}{2R} \omega_0 \cos\beta \vec{k} \quad (4)$$

۲۳- مطابق شکل زیر یک پاندول ساده به جرم  $m$  و طول  $L$  به یک ارابه به جرم  $M$  که بر روی سطح افقی بر روی خط راست حرکت می‌کند، متصل شده است. نیروی همواره افقی  $F(t)$  بر انتهای پاندول وارد می‌شود. برای توصیف حرکت ارابه و پاندول از مختصات تعمیم یافته  $x$  و  $\theta$  استفاده می‌کنیم. نیروی تعمیم یافته متناظر با مختصات



تعمیم یافته  $x$  و  $\theta$  کدام است؟

$$Q_\theta = F(t), \quad Q_x = 0 \quad (1)$$

$$Q_\theta = F(t)L \cos\theta, \quad Q_x = F(t) \quad (2)$$

$$Q_\theta = F(t)L, \quad Q_x = F(t) \quad (3)$$

$$Q_\theta = 0, \quad Q_x = F(t) \quad (4)$$

۲۴- نیروی  $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j}$  که در آن  $A$  و  $B$  ثابت هستند، بر نقطه مادی به جرم  $m$  وارد می‌شود. در لحظه  $t = 0$  سرعت جرم برابر صفر است. کار انجام شده توسط نیرو تا لحظه  $t = T$  برابر کدام است؟

$$W = \frac{T^2}{2m} (A^2 + B^2) \quad (1)$$

$$W = \frac{T^2}{m} (A^2 + B^2) \quad (2)$$

$$W = \frac{T^2}{2m} (A^2 + B^2) \quad (3)$$

$$W = \frac{T^2}{3m} (A^2 + B^2) \quad (4)$$

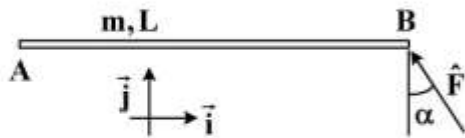
۲۵- در شکل زیر، میله AB به طول L و جرم m، ابتدا در حالت سکون است. ضربه  $\hat{F}$  تحت زاویه  $\alpha$  به انتهای B وارد می‌شود. سرعت ایجاد شده در انتهای B کدام است؟ (توزیع جرم میله را یکنواخت فرض کنید).

$$\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m} \cos \alpha \vec{i} \quad (۱)$$

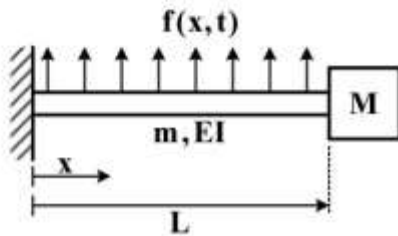
$$\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m} (\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}) \quad (۲)$$

$$\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m} (-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}) \quad (۳)$$

$$\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m} (\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j}) \quad (۴)$$



۲۶- معادله ارتعاش عرضی تیر مقابل که تحت بار گسترده  $f(x, t)$  است و جرم متمرکز M در انتهای آن قرار دارد، کدام است؟



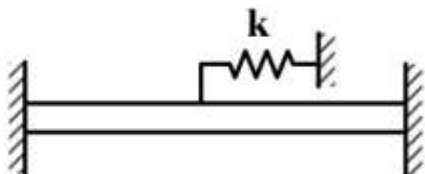
$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + f = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۲)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] - f = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۳)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + f = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۴)$$

۲۷- نقطه وسط یک میله یکنواخت به طول  $\ell$  مطابق شکل زیر به فنر  $k = \frac{\varphi EA}{\ell}$  متصل شده است. اولین فرکانس طبیعی میله با استفاده از خارج قسمت ریلی و تابع آزمایشی  $u(x) = x(x - \ell)$ ، کدام است؟ ( $\rho$ : جرم واحد طول، E: مدول یانگ، A: سطح مقطع).



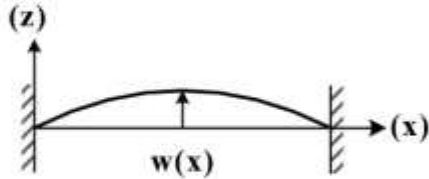
$$\sqrt{\frac{\varphi \Delta E}{\varphi \rho \ell^2}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{\varphi \Delta E}{\varphi \rho \ell^2}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{\varphi \Delta E}{\varphi \rho \ell^2}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{\varphi \Delta E}{\varphi \rho \ell^2}} \quad (۴)$$

۲۸- معادله ارتعاشات عرضی نخ به طول  $L$ ، مدول سطحی  $EA$ ، چگالی بر واحد حجم  $\rho$  و کشش درونی  $P$  با در نظر گرفتن اثر افزایش کشش ناشی از کشیدگی نخ، کدام است؟



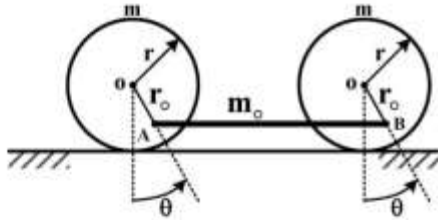
$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left( P + \frac{EA}{L} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۱)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[ P + EA \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[ P + \frac{EA}{L} w \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۳)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[ P + \frac{EA}{L} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۴)$$

۲۹- دیسک‌های یکنواخت در مکانیزم زیر دارای جرم  $m$ ، ممان اینرسی  $J_G = \frac{1}{2} m r^2$  و میله رابط دارای جرم  $m_0$  است. با فرض عدم لغزش و نوسانات کوچک، فرکانس نوسانات سیستم چقدر است؟



$$\omega_n = \sqrt{\frac{m_0 g r_0}{r m r^2 + m_0 (r - r_0)^2}} \quad (۱)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m_0 g r_0}{r m r^2}} \quad (۲)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m_0 g r_0}{r m (r - r_0)^2}} \quad (۳)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m_0 g r_0}{(r m + m_0) r^2}} \quad (۴)$$

۳۰- کدام رابطه مربوط به محاسبه فرکانس طبیعی ارتعاش عرضی یک تیر با مقطع و جنس یکنواخت از روش تقریبی ریلی است؟  $W(x)$  تابع شکل مود تیر است که حدس زده می‌شود.

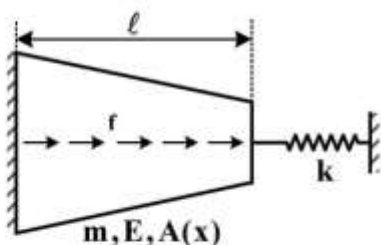
$$\omega^r = \frac{\rho A \int_0^\ell W^r dx}{EI \int_0^\ell \left(\frac{d^r W}{dx^r}\right)^r dx} \quad (۱)$$

$$\omega^r = \frac{EI \int_0^\ell \left(\frac{d^r W}{dx^r}\right)^r dx}{\rho A \int_0^\ell W^r dx} \quad (۲)$$

$$\omega^r = \frac{EI \int_0^\ell \left(\frac{d^r W}{dx^r}\right)^r dx}{\rho A \int_0^\ell W dx} \quad (۳)$$

$$\omega^r = \frac{EI \int_0^\ell \left(\frac{d^r W}{dx^r}\right) dx}{\rho A \int_0^\ell W^r dx} \quad (۴)$$

۳۱- معادله خیز استاتیکی  $u(x)$  که در آن تحت بار محوری گسترده  $f$  قرار گرفته است، کدام است؟



$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) - f = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} \left( EA \frac{du}{dx} \right) - f = 0 \quad (۲)$$

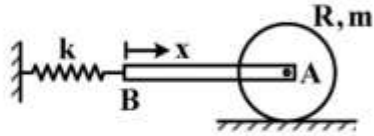
$$\frac{d^r}{dx^r} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + f = 0 \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + f = 0 \quad (۴)$$

۳۲- میله یکنواخت ( $\ell, A, \rho$ ) در طرف راست به مرکز دیسک لولا شده و دیسک روی زمین غلتش ناب دارد.

$$I_A = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{دیسک}$$

شرایط مرزی میله برای ارتعاش طولی کدام است؟



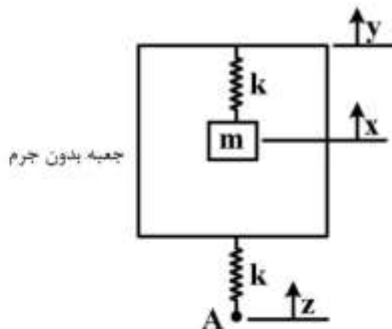
$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = k \cdot u \Big|_{(0,t)} \quad , \quad -EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\ell,t)} = \frac{3}{2} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(\ell,t)} \quad (1)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = k \cdot u \Big|_{(0,t)} \quad , \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\ell,t)} = \frac{3}{2} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(\ell,t)} \quad (2)$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = k u \Big|_{(0,t)} \quad , \quad -EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\ell,t)} = \frac{m}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(\ell,t)} \quad (3)$$

(۴) شرط مرزی سمت راست به R بستگی دارد.

۳۳- اگر به نقطه A در جهت z جابه‌جایی ناگهانی و ثابت h بدهیم، پاسخ بدون شرایط اولیه  $x(t)$  جرم m، کدام است؟



$$h(1 - \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t) \quad (1)$$

$$h(1 - \sin \sqrt{\frac{k}{2m}} t) \quad (2)$$

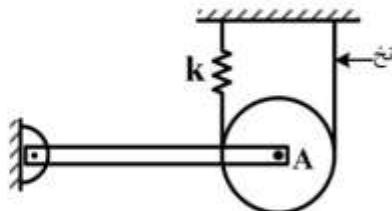
$$h(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{2m}} t) \quad (3)$$

$$h(1 - \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t) \quad (4)$$

۳۴- دیسکی یکنواخت به جرم m روی نخ که به فنر k متصل است، غلتش ناب دارد. اگر مرکز دیسک (A) به تیری

یکنواخت به جرم m لولا شده باشد و به نقطه A نیروی قائم هارمونیک  $F = F_0 \sin \omega t$  وارد شود، دامنه پاسخ

پایدار نقطه A کدام است؟



$$\frac{F_0}{k - 2m\omega^2} \quad (1)$$

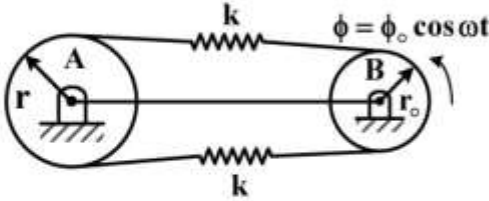
$$\frac{6F_0}{24k - 11m\omega^2} \quad (2)$$

$$\frac{12F_0}{48 - 7m\omega^2} \quad (3)$$

$$\frac{18F_0}{72k - 13m\omega^2} \quad (4)$$

۳۵- دیسک A دارای شعاع  $r$  و جرم  $m$  بوده و توسط دیسک B به صورت هارمونیک تحریک می‌گردد. شعاع ژیراسیون دیسک A برابر  $b$  است. دامنه پاسخ حالت ماندگار دیسک A به تحریک هارمونیک کدام است؟

$$\bar{\theta} = \phi_0 \quad (۱)$$



$$\omega_n = \frac{r}{r_0 b} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{که در آن } \bar{\theta} = \phi_0 \frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (۲)$$

$$\omega_n = \frac{r}{b} \sqrt{\frac{k}{r_0 m}} \quad \text{که در آن } \bar{\theta} = \phi_0 \frac{2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (۳)$$

$$\omega_n = \frac{r}{b} \sqrt{\frac{r_0 k}{m}} \quad \text{که در آن } \bar{\theta} = \phi_0 \frac{\frac{r_0}{r}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (۴)$$

۳۶- چنانچه سیستم زیر را فیدبک خطی کنیم، وضعیت تعادل دینامیک صفر آن چیست؟

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 x_3 - x_3^2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

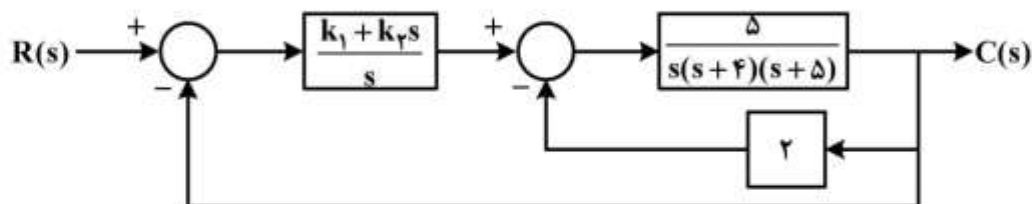
(۲) نقطه: ناپایدار

(۴) مجموعه نقاط در صفحه: ناپایدار

(۱) نقطه: پایدار

(۳) مجموعه نقاط روی خط: پایدار

۳۷- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک در شکل زیر نمایش داده شده است. معادلات حالت این سیستم در فرم **Controllable Canonical** کدام است؟



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Delta k_1 & -10 - \Delta k_2 & -20 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \text{ و } C(t) = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Delta k_1 \\ 1 & 0 & 0 & -10 - \Delta k_2 \\ 0 & 1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \text{ و } C(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 - \Delta k_2 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \text{ و } C(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Delta k_1 & -10 - \Delta k_2 & -20 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \text{ و } C(t) = [10k_1 \quad 10k_2 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۳۸- برای اثبات پایداری سیستم دینامیکی به فرم  $m\ddot{x} + b\dot{x} + k_0x + k_1x^3 = 0$  حول حالت تعادل  $x=0$  و  $\dot{x}=0$ ، کدام تابع زیر می تواند به عنوان تابع لیاپانوف در نظر گرفته شود؟

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 \quad (1)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \quad (2)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \quad (3)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^2 \quad (4)$$

۳۹- در کدام یک از توابع تبدیل زیر، شرایط کنترل پذیری کامل وجود دارد؟

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2} \quad (1)$$

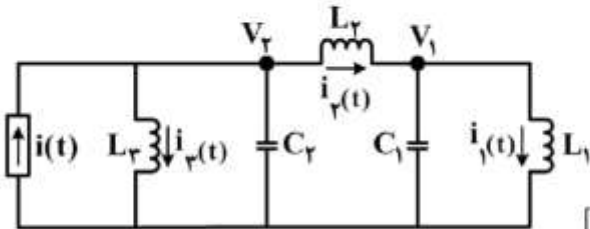
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+2s+1} \quad (2)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+4s+3} \quad (3)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+4} \quad (4)$$



۴۰- مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید. ورودی این مدار  $i(t)$  و خروجی آن ولتاژ  $V_1(t)$  است. با فرض شرایط اولیه صفر، متغیرهای حالت سیستم را  $x_1(t) = V_1(t)$  ،  $x_2(t) = V_2(t)$  ،  $x_3(t) = i_1(t)$  و  $x_4(t) = i_2(t)$  در نظر بگیرید. معادلات حالت سیستم کدام است؟



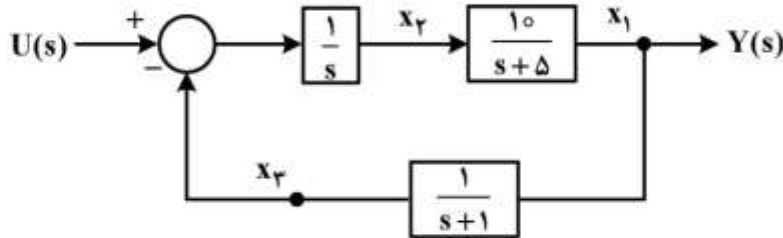
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{L_2 + L_1}{L_2 C_2} & \frac{1}{L_1} & \frac{L_2 + L_1}{L_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L_1}{L_2 C_2} & \frac{L_2 + L_1}{L_2 C_2} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-L_1}{L_2 C_2} & \frac{L_1 + L_2}{L_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{-L_1}{L_2 C_2} & \frac{-L_2 - L_1}{L_2 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{L_2} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4)$$

۴۱- متغیرهای حالت و خروجی سیستمی که در دیاگرام جعبه‌ای زیر نشان داده شده است، عبارتند از:  $x_1$ ،  $x_2$ ،  $x_3$  و  $y$ . معادلات حالت سیستم کدام است؟



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \text{ و } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) \text{ و } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \text{ و } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) \text{ و } y = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

۴۲- تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم کنترل به فرم  $\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{0.2}{(s+\delta)(s^2+s+0.5)}$  است. مقدار میرایی و ثابت

زمانی این سیستم کدام است؟

(۱)  $\zeta = 1$  و  $\tau = 0.2s$

(۲)  $\zeta = 0.85$  و  $\tau = 0.5s$

(۳)  $\zeta = 0.5$  و  $\tau = 1s$

(۴)  $\zeta = 0.707$  و  $\tau = 2s$

۴۳- ماتریس  $G$  در سیستم زیر برای اینکه مقادیر ویژه (eigenvalues) ماتریس  $A - BG$  در نقاط  $(-1)$ ،  $(-1 \pm j)$  و  $(-1 \pm j)$  قرار گیرند، کدام است؟

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = -Gx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4]$$

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

۴۴- مدل دینامیکی حرکت یک هواپیما که ارتفاع آن از سطح زمین قابل اندازه گیری بوده و بردار متغیرهای حالت آن به صورت [زاویه حمله؛ ارتفاع؛ سرعت طولی]  $X$  در نظر گرفته شده و به شرح زیر محاسبه شده است. کدام گزینه در مورد ماتریس های لازم برای طراحی مشاهده گر کاهش مرتبه، صحیح است؟

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -8 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{aa} &= [-1] & A_{ab} &= [-8 \quad -6] & B_a &= [1] \\ A_{ba} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & A_{bb} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & B_b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A_{aa} &= [-1] & A_{ab} &= [0 \quad 1] & B_a &= [0] \\ A_{ba} &= \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} & A_{bb} &= \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & B_b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A_{aa} &= [2] & A_{ab} &= [0 \quad 1] & B_a &= [0] \\ A_{ba} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} & A_{bb} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} & B_b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_{aa} &= [2] & A_{ab} &= [0 \quad 1] & B_a &= [0] \\ A_{ba} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} & A_{bb} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} & B_b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

۴۵- برای سیستم روبه‌رو، کوشه‌ی لی کدام است؟

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 3x_2 + \sin(x_1 + x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_1 \cos x_2 + \exp(x_2)u$$

$$[f, g] = \begin{bmatrix} \exp(x_2)(3 + \cos(x_1 + x_2)) \\ -x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 + \sin x_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$[f, g] = \begin{bmatrix} -\exp(x_2)(3 + \cos(x_1 + x_2)) \\ x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 + \sin x_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$[f, g] = \begin{bmatrix} \exp(x_2)(3 - \cos(x_1 + x_2)) \\ -x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 - \sin x_2 + 1) \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$[f, g] = \begin{bmatrix} -\exp(x_2)(3 - \cos(x_1 + x_2)) \\ x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 - \sin x_2 + 1) \end{bmatrix} \quad (۴)$$