فصل ۱ آنالیز فوریه

مقدمه

روش حداقل مربعات را می‌توان برای یافتن تقریب‌هایی از توابع خوش رفتار به کار گرفت. این روش، برای انتخاب کردن ثابت‌هایی برای به حداقل رساندن انتگرال مربع یک تفاضل است، مثلاً اگر بخواهیم تابع $f(x)$ای را که در بازه $[-\pi,\pi]$ داده شده با $a+b\cos x+c\sin x$ تقریب بزنیم، با تشکیل $I(a,b,c)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-a-b\cos x-c\sin x)^2\,dx$ به دنبال ثابت‌های a و b و cای هستیم که انتگرال مذکور را مینیمم کند.

چنین فرایندی یعنی تخمین یک تابع به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های مختلف ایده اصلی بحث سری فوریه است که در ریاضیات کاربردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

با وجود اینکه اغلب دستگاه‌های مکانیکی و الکتریکی شامل نیروهایی هستند که به صورت ترکیبات خطی از سینوس و کسینوس بیان نشده‌اند، با این حال بیان این نیروها به صورت مجموعی متناهی یا نامتناهی از جملات مثلثاتی، می‌تواند تحلیل سیستم‌های مذکور را با سهولت بیشتری انجام‌پذیر کند.

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با سری‌های تیلور آشنا شده‌ایم. این سری‌ها بسط یک تابع را به صورت مجموعی از جملات توانی ارائه می‌دهند و البته دیده‌ایم که شرط لازم برای داشتن چنین بسط‌هایی آن است که تابع تا هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد.

بنابراین اگر تابعی پیوسته نباشد، وجود سری تیلور برای آن منتفی می‌شود، اما در شرایط بسیار عمومی‌تر می‌توان تابع را به صورت مجموعی از توابع دیگر نوشت. یکی از کاربردی‌ترین این بسط‌ها، سری فوریه است که در آن، تابع برحسب مجموعی از توابع اصطلاحاً متعامد نوشته می‌شود.

اگر توابع متعامد مذکور از نوع مثلثاتی باشند، ایده بیان توابع برحسب سینوس و کسینوس به دو صورت تشریح می‌شود.

برای توابعی که در یک فاصله متناهی تعریف شده‌اند و به صورت متناوب گسترش یافته‌اند، سری فوریه مطرح می‌شود، درحالی‌که برای توابع غیرمتناوبی که در فاصله‌ای نامتناهی تعریف شده‌اند، انتگرال فوریه در مفهوم حدی سری فوریه قابل طرح است.

درواقع تفاوت عمده بین استفاده از سری فوریه و انتگرال فوریه همان تفاوت بین مجموع‌های گسسته و مجموع‌های پیوسته است که به ترتیب با Σ و $\int$ مطرح می‌شوند.
اگر تابعی متناوب در اختیار باشد، به‌جای آن سری فوریه‌اش را در نظر می‌گیریم، سپس با هر جملهٔ آن سری چنان رفتار می‌کنیم که گویی تنها جمله موجود است و سرانجام همه آن نتایج جزئی را با هم جمع می‌کنیم.
اگر تابعی غیرمتناوب در اختیار باشد، به‌جای آن انتگرال فوریه‌اش را در نظر می‌گیریم. ازآنجاکه جملات گسسته‌ای که آن‌ها را تک‌تک به کار ببریم، وجود ندارد؛ بنابراین این‌بار با قطعات بسیار کوچک نمایش پیوسته چنان رفتار می‌کنیم که گویی جملات گسسته هستند و سپس مجموع کل سهم‌های بی‌نهایت کوچک آن‌ها را با عمل انتگرال‌گیری می‌یابیم.

در این فصل شرایط وجود سری فوریه و انتگرال فوریه شرح و روش نوشتن هر کدام ارائه می‌گردد، نقش زوج یا فرد بودن تابع در محاسبه ضرایب مربوطه و نیز قضایای دیریکله و پارسوال در دو بحث مذکور معرفی و استفاده از آن‌ها برای محاسبه سری‌های نامتناهی و انتگرال‌های ناسره توصیف می‌گردد.
در انتها ضمن تعریف تبدیلات فوریه،تبدیل فوریه توابع مهم و قضایای مربوط به آن آورده می‌شود، خواهیم دید بسیاری از این قضایا درصدد پاسخ به این سؤال مطرح می‌شوند که با دانستن فوریه یک تابع، انجام عملی روی آن تابع چه تغییری در تبدیل فوریه‌اش ایجاد می‌کند.

مثلاً خواهیم دید تبدیل فوریه توابعی مانند $f'(x)$ و $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ ، $f(x-a)$ ،$e^{iax}f(x)$ و $xf(x)$ چه ارتباطی با تبدیل فوریه $f(x)$ دارد.

سری فوریه

سری فوریه یک تابع بیان آن تابع به‌صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های مختلف است. از آن‌جا که توابع سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های خطی متناوب می‌باشند، لذا بدیهی است شرط لازم برای وجود سری فوریه، متناوب بودن تابع است. مطابق تعریف $f(x)$ را تابعی متناوب با دوره p می‌گویند هرگاه:

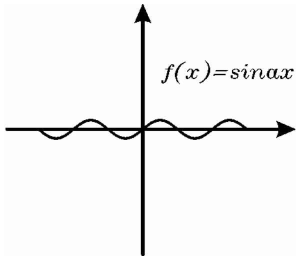
$$\begin{cases} \forall x \in D_f \quad \to \quad (x+p) \in D_f \\ f(x+p) = f(x) \end{cases}$$

که شرط می‌کنیم p باید عددی مثبت باشد و به کوچکترین p ای که شرط فوق را ارضاء می‌کند دوره تناوب اصلی تابع $f(x)$ گفته می‌شود.

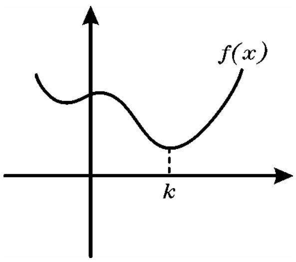
از نظر هندسی وقتی می‌گوئیم $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب p است، یعنی نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها هر p واحد به‌صورت متوالی تکرار می‌شود. تابع $f(x)$ به دو صورت ممکن است متناوب باشد:

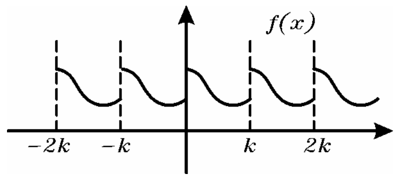
۱ـ تناوب ذاتی: توابعی مانند $\cos\alpha x$ و $\sin\alpha x$ به ازاء هر عدد حقیقی α بخودی خود متناوبند.

۲ـ تناوب ساختگی: ممکن است تابع $f(x)$ که به خودی خود متناوب نمی‌باشد را در فاصله محدود (a,b) مد نظر قرار داده و فرض کنیم همین رفتار در بیرون بازه مذکور هر $b-a$ واحد در امتداد محور x ها تکرار شود، در این شرایط اصطلاحاً تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) را توسیع (گسترش) متناوب با دوره تناوب $p=b-a$ داده‌ایم.



تابع $f(x)$ ذاتاً طبیعت متناوب دارد.

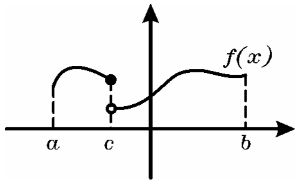




تابع $f(x)$ در فاصله $(0,k)$ مد نظر قرار گرفته و به‌صورت متناوب با دوره تناوب $P=k$ گسترش یافته است.

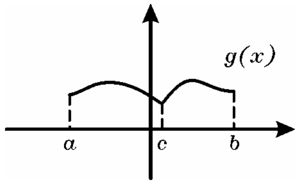
شرایط وجود سری فوریه

تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ هموار گفته می‌شود، هرگاه $f(x)$ و $f'(x)$ در این بازه پیوسته باشند. تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ تکه‌ای هموار گفته می‌شود هرگاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم کرد، بطوری که $f(x)$ در هر یک از آن‌ها هموار باشد.

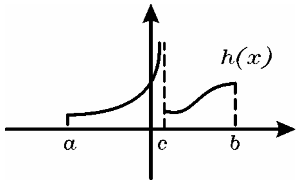


از نظر هندسی نمودار یک تابع هموار یک منحنی هموار است که در هیچ نقطه‌ای از آن منحنی دارای گوشه و یا تیزی نمی‌باشد. همچنین نمودار یک تابع تکه‌ای هموار، شامل تعداد متناهی از منحنی‌های هموار است.

تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ تکه‌ای هموار است اگرچه در نقطه $x=c$ پیوسته نمی‌باشد.



تابع $g(x)$ در بازه $[a,b]$ تکه‌ای هموار است. اگرچه در نقطه $x=c$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.



تابع $h(x)$ در بازه $[a,b]$ تکه‌ای هموار نیست زیرا در نقطه $x=c$ حد تابع متناهی نمی‌باشد.

قضیه دیریکله در بحث همگرائی سری‌های فوریه

اگر تابع $f(x)$ در بازه $[-L,L]$ تکه‌ای هموار بوده و $f(x+2L)=f(x)$ باشد، یعنی f در بیرون بازه مذکور به تناوب تکرار شده باشد، سری فوریه تابع موجود است و:

الف ـ چنانچه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشد داریم:

$$f(x_0) = \text{مقدار سری فوریه تابع در نقطه } x = x_0$$

ب ـ چنانچه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 گسسته باشد داریم:

$$\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2} = \text{مقدار سری فوریه تابع در نقطه } x = x_0$$

مشاهده می شود که رابطه بالا برای حالتی که x_0 نقطه پیوستگی می باشد نیز صادق است، چراکه در این نقطه حدود چپ و راست برابر $f(x_0)$ بوده و میانگینشان نیز $f(x_0)$ خواهد بود.

تذکر: اگر ضابطه تابعی به صورت $f(x)$ در بازه $(0,h)$ داده شده باشد برای محاسبه مقدار سری فوریه تابع در نقطه x_0 یکی از دو حالت زیر مطرح می‌شود:

الف) اگر $x_0 \in (0,h)$ حاصل مورد نظر برابر $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$ خواهد بود.

ب) اگر $x_0 \notin (0,h)$ با توجه به دوره تناوب تابع که h می‌باشدکافی است عددی مانند $x_1 \in (0,h)$ پیدا کنیم که $x_1 = x_0 + kh$ (که در آن k عددی صحیح است) و حاصل مورد نظر $\dfrac{f(x_1^-)+f(x_1^+)}{2}$ خواهد بود.

طبیعی است در هر دو مورد فوق اگر f در x_0 یا x_1 پیوسته باشد به جای مجموع حد چپ و راست در نقطه مورد بحث می‌توان دو برابر مقدار تابع در آن نقطه را لحاظ کرد.

همچنین اگر x_0 یا x_1 خود 0 یا h باشند، حاصل مورد نظر $\frac{f(0^+)+f(h^-)}{2}$ خواهد بود.

شرایط دیریکله

برای آنکه تابع $f(x)$ دارای سری فوریه باشد شرط متناوب بودن اساسی‌ترین موضوع است. البته وقتی بحث سری فوریه تابع مطرح می‌شود مرسوم آن است که تابع یا ذاتاً متناوب است و یا در فاصله‌ای تعریف شده و در بیرون آن بازه بطور متناوب گسترش یافته است. (حتی اگر این موضوع تصریح نشود فرض بر انجام آن می‌باشد) اما شرایط کافی برای وجود سری فوریه عبارتند از:

۱) انتگرال معین تابع در یک فاصله تناوب آن همگرا باشد.

۲) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در یک فاصله تناوب آن محدود باشد.

۳) تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم (اکسترمم) تابع در یک فاصله تناوب محدود باشد.

به عنوان مثال:

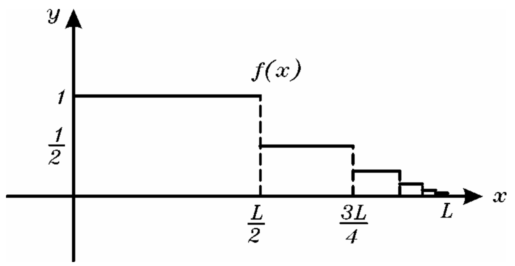
الف) تابع $f(x)=\sin x^2$ دارای سری فوریه نمی‌باشد، زیرا این تابع نه ذاتاً متناوب است (بواسطه آرگومان غیرخطی x^2) و نه در بازه‌ای محدود تعریف شده تا تداعی‌کننده آن باشد که در بیرون آن فاصله تابع را بطور متناوب گسترش داده‌ایم.

تابع $0<x<L$ و $f(x)=\frac{1}{x^2}$ دارای سری فوریه نمی‌باشد، زیرا انتگرال معین آن در یک فاصله تناوب تعریف شده واگرا است.

$$\int_0^L \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{0^+}^{L}=+\infty$$

ب) تابع
$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\frac{L}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{2}<x<\frac{3L}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3L}{4}<x<\frac{7L}{8} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \frac{(2^n-1)L}{2^n}<x<\frac{(2^{n+1}-1)L}{2^{n+1}} \end{cases}$$
دارای سری فوریه نمی‌باشد زیرا در یک فاصله تناوب دارای بیشمار نقطه ناپیوستگی است.

در حقیقت در همسایگی نقطه $x=L$ تعداد نقاط انفصال تابع قابل شمارش نبوده و گسستگی‌ها در حال انباشته شدن در $x=L$ می‌باشند.



ج) تابع $0<x<1 \quad , \quad f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ دارای سری فوریه نمی‌باشد، زیرا در یک فاصله تناوب دارای بیشمار نقطه اکسترمم است. در واقع وجود جمله $\sin\frac{1}{x}$ طبیعت تابع را نوسانی کرده و چون در نقاط $x=\frac{1}{\pi},\frac{1}{2\pi},\frac{1}{3\pi},\ldots$ تابع $f(x)$ صفر می‌شود (نمودار آن محور x ها را قطع می‌کند) بین هر دو نقطه فوق یک اکسترمم نسبی در تابع رخ می‌دهد. طبیعتاً در همسایگی نقطه $x=0$ تعداد این ماکسیمم و مینیمم‌های تابع قابل شمارش نبوده و این اکسترمم‌ها در حال انباشته شدن در $x=0$ می‌باشند.

بیان سری فوریه تابع

هرگاه $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ باشد، سری فوریه آن (در صورت وجود) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi}{L}x+b_1\sin\frac{\pi}{L}x+a_2\cos\frac{2\pi}{L}x+b_2\sin\frac{2\pi}{L}x+\cdots$$

که در آن ضرایب سری فوریه از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_k^{k+2L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

(k عدد ثابت و انتگرال‌گیری در یک فاصله متناوب)

$$b_n=\frac{1}{L}\int_k^{k+2L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

به سادگی می‌توان دید a_n ها برحسب n تابعی زوج و b_n ها برحسب n تابعی فرد هستند.

چند نکته مهم در سری های فوریه

۱ـ بسط فوریه یک عدد ثابت در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد، خود آن عدد است.

۲ـ جمله $\frac{a_0}{2}$ در بسط سری فوریه تابع را ثابت سری فوریه یا مقدار dc تابع می‌نامند، که همان مقدار متوسط تابع $f(x)$ در یک فاصله تناوب آن است. با توجه به رابطه عمومی a_n ها طبیعی است $a_0=\frac{1}{L}\int_k^{k+2L} f(x)\,dx$ می‌باشد و چنانچه نمودار $f(x)$ معلوم باشد می‌توان گفت:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\text{جمع جبری سطوح محصور به } f(x) \text{ و محور } x \text{ ها در یک فاصله تناوب}}{\text{طول فاصله تناوب}}$$

دقت کنید در اینجا جمع جبری سطوح یعنی سطوحی که بالای محور x ها واقعند با مساحت مثبت و سطوحی که پایین محور x ها واقعند با مساحت منفی لحاظ می‌شوند.

۳ـ چنانچه در محاسبه رابطه عمومی b_n و a_n، به ازاء n ای خاص با مخرج صفر مواجه شویم لازم است آن ضرایب خاص به طور مستقیم به‌دست آیند.

۴ـ انتگرال‌های مربوط به ضرایب b_n و a_n در یک فاصله تناوب تابع مورد محاسبه قرار می‌گیرند. مرسوم است تابع $f(x)$ را در فاصله $(-L,L)$ تعریف و در بیرون این فاصله گسترش متناوب دهند، لذا در این شرایط که ضابطه حاکم بر تابع متناوب مورد بحث در بازه $(-L,L)$ معلوم است خواهیم نوشت:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

لذا طبیعی است ضابطه تابع متناوب مورد نظر برای نوشتن سری فوریه در هر بازه‌ای که معلوم باشد، انتگرال‌های مربوط به ضرایب را نیز در همان فاصله محاسبه می‌کنیم.

توجه دارید که برای تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\int_{k}^{k+2L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)dx \quad , \quad k\in R$$

۵ـ مناسب است وقتی تابعی در یک فاصله داده می‌شود و هدف یافتن ضرایب سری فوریه آن می‌باشد، شکل تابع را در بازه داده شده رسم کرده و پس از گسترش متناوب آن، با شناخت تقارن‌های احتمالی موجود در نمودار به محاسبه ضرایب بپردازیم.

اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ باشد، تأثیر تقارن‌های احتمالی موجود در نمودار تابع اطلاعات مفیدی در رابطه با ضرایب سری فوریه تابع به‌دست خواهد داد.

الف) می‌گوئیم $f(x)$ تابعی زوج است هرگاه $f(-x)=f(x)$ (نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن می‌باشد)

برای چنین تابعی داریم:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad b_n = 0$$

یعنی کلیه ضرایب جملات سینوسی صفر است و در سری فوریه تابع زوج، جملات سینوسی تولید نمی‌شود.

ب) می‌گوئیم $f(x)$ تابعی فرد است هرگاه $f(-x)=-f(x)$ (نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد)

برای چنین تابعی داریم:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad a_n = 0$$

یعنی کلیه ضرایب جملات کسینوسی صفر است و در سری فوریه تابع فرد، جملات کسینوسی تولید نمی‌شود.

تذکر: در تابعی غیر فرد ممکن است همه a_nها به جز $\frac{a_0}{2}$ یا a خاص دیگری صفر شوند ولی همه a_nها با همدیگر صفر نخواهند شد، به تعبیری صفر شدن همه a_nها و $\frac{a_0}{2}$ تصریح می‌کند تابع مورد نظر فرد بوده است.

در تابعی غیر زوج ممکن است همه b_nها به جز b خاصی صفر شوند ولی همه b_nها با همدیگر صفر نخواهند شد، به تعبیری صفر شدن تمامی b_nها تصریح می‌کند تابع مورد نظر زوج بوده است.

ج) می‌گوئیم $f(x)$ تابعی با تقارن نیم موجی است هرگاه:

$$f(x-L)=f(x+L)=-f(x)$$

(اگر قرینه نیم پریود چنین تابعی را نسبت به مقدار متوسط $\left(\frac{a_0}{2}\right)$ به‌دست آوریم و آن را به اندازه نیم پریود به سمت جلو (یا عقب) جابجا کنیم، حاصل کار بر نیم پریود دیگر منطبق می‌شود)

برای چنین تابعی تمامی ضرایب هارمونیک‌های زوج صفرند و داریم:

$$a_{2k-1}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2k-1)\pi}{L}x\,dx$$

$$b_{2k-1}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi}{L}x\,dx$$

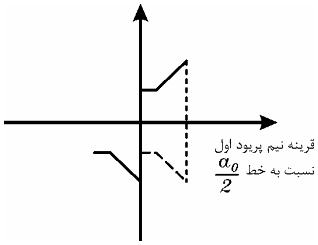
د) می‌گوئیم $f(x)$ تابعی با تقارن ربع موجی است هرگاه تابع یا زوج یا فرد بوده و بعلاوه دارای تقارن نیم‌موجی نیز باشد. اگر $f(x)$ تابعی فرد با تقارن نیم‌موجی باشد، داریم:

$$a_n=0 \qquad b_{2k}=0 \qquad b_{2k-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi}{L}x\,dx$$

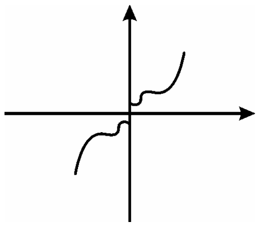
اگر $f(x)$ تابعی زوج با تقارن نیم‌موجی باشد داریم:

$$b_n=0 \qquad a_{2k}=0 \qquad a_{2k-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\frac{(2k-1)\pi}{L}x\,dx$$

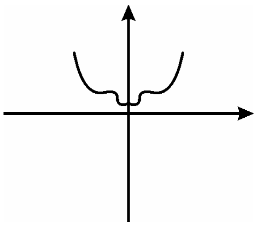
هـ) می‌گوئیم $f(x)$ تابعی با تقارن مخفی است هرگاه با اضافه کردن مقداری ثابت به آن تقارن خاصی در آن دیده شود، به تعبیری وقتی نمودار تابع را بطور عمودی منتقل می‌کنیم به یکی از تقارن‌های گفته شده برسیم. طبیعی است در این شرایط تابع اصلی (که دارای تقارن مخفی است) و تابع با تقارن متناظر آن تنها در ثابت سری فوریه اختلاف دارند.



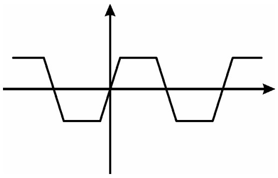
تابع با تقارن نیم‌موجی



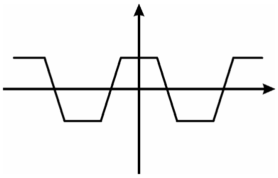
تابع فرد با تقارن نسبت به مبدأ مختصات



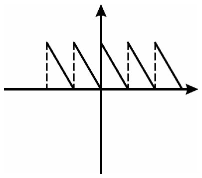
تابع زوج با تقارن نسبت به محور y



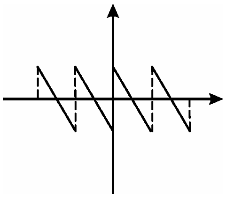
تابع فرد با تقارن نیم‌موجی (تقارن ربع موجی)



تابع زوج با تقارن نیم موجی (تقارن ربع موجی)



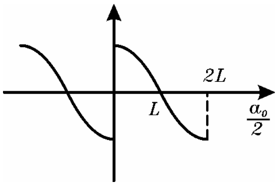
تقارن مخفی فرد



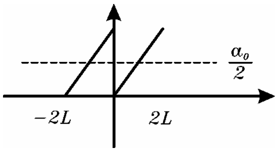
تقارن فرد

و) اگر قرینه نیم پریود تابعی را نسبت به مقدار متوسط $\left(\frac{a_0}{2}\right)$ به دست آوریم و گسترش زوج آن نسبت به خط $x = L$ روی نیم پریود دیگر منطبق شود، تمامی هارمونیک‌های فرد صفرند.

(تابع فرد)
$$\begin{cases} a_n = 0 \quad , \quad \frac{a_0}{2} = 0 \\ b_{2n-1} = 0 \end{cases}$$



(تقارن مخفی فرد)
$$\begin{cases} a_n = 0 \quad , \quad \frac{a_0}{2} \neq 0 \\ b_{2n-1} = 0 \end{cases}$$



۶ـ اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 2L$ بوده و سری فوریه آن به شکل زیر داده شده باشد: (ضرایب سری فوریه کاملاً معلوم است)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

از این‌جا می‌توان انتگرال‌های زیر را بسادگی به دست آورد:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = La_n$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = Lb_n$$

۷ـ توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ توابعی ذاتاً متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{a}$ است. اگر بخواهیم سری فوریه آن‌ها را در هر فاصله‌ای کوچکتر از یک دوره تناوب مذکور بنویسیم، باید ضرایب سری فوریه به طریقه مرسوم محاسبه شوند. اما طبیعی است سری فوریه این توابع در هر فاصله‌ای که طول آن مضرب صحیحی از دوره تناوب اصلی $\left(T = \frac{2\pi}{a}\right)$ می‌باشد با خود تابع یکسان است.

۸ـ از آن‌جا که سری فوریه یک تابع بیان آن به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های خطی متفاوت می‌باشد، لذا در توابعی ذاتاً متناوب بوده و از عبارت‌های سینوسی و کسینوسی ساخته شده‌اند، می‌توان با اعمال جبری مثلثاتی بیان سری فوریه تابع را بدون نیاز به محاسبه انتگرال‌های مربوط به ضرایب مشخص نمود.

برای استفاده از این موضوع مهم است یا تابع داده شده بدون هیچ قیدی و یا طول بازه تعریف شده برای آن، مضرب صحیحی از دوره تناوب تابع اصلی باشد، وگرنه منطق گفته شده قابل استفاده نبوده و باید به محاسبه ضرایب از طریق روابط کلی پرداخت.

در این موارد روابط تبدیل توان به کمان و نیز روابط تبدیل ضرب به جمع مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \qquad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

۹ـ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ را در فاصله $(-L,L)$ از طریق تابع $a+b\cos\frac{\pi}{L}x + c\sin\frac{\pi}{L}x$ تقریب بزنیم، بطوری‌که بهترین تخمین در مفهوم حداقل مجموع مربعات حاصل گردد، کافی است سه جمله اول سری فوریه تابع مورد نظر را در بازه داده شده به‌دست آوریم و یا:

$$a = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$b = a_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi}{L}x\,dx$$

$$c = b_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi}{L}x\,dx$$

تذکر: به طور کلی هر چه جملات بیشتری از سری فوریه را در نظر بگیریم (با ترتیب صعودی برای n) مجموع جملات نوشته شده به رفتار تابع اصلی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، به طوری که برای $n\to\infty$، سری فوریه و تابع اصلی بر هم منطبق خواهند شد.

یعنی اگر بخواهیم شکل سری فوریه یک تابع را ترسیم کنیم، کافی است نمودار گسترش متناوب تابع مورد نظر را رسم کنیم.

۱۰ـ اگر سری فوریه تابعی به صورت $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$ باشد و بخواهیم آن را از طریق $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$ تخمین بزنیم، اختلاف بین $f(x)$ و $F(x)$ خطای تقریب مورد نظر را تعیین می‌کند.

با فرض $E=\int_{-L}^{L}\left(f(x)-F(x)\right)^2 dx$ حداقل خطای E برابر است با:

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx - L\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)$$

مثلاً می‌دانیم سری فوریه تابع $f(x)=x$ در بازه $(-\pi,\pi)$ به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ می‌باشد، یعنی داریم:

$$\frac{a_0}{2}=a_n=0 \quad , \quad b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

حال اگر بخواهیم این تابع را برای $N=3$ تخمین بزنیم، می‌توان گفت:

$$\text{حداقل مقدار خطای } E=\int_{-\pi}^{\pi}(x)^2\,dx-\pi\left(\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)^2\right)=\frac{2\pi^3}{3}-\pi\left(4+\frac{4}{4}+\frac{4}{9}\right)=\frac{\pi}{9}\left(6\pi^2-49\right)$$

۱۱ـ به‌خاطر داشته باشید هرگاه ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $(-L,L)$ به ترتیب b_n و a_n و b_n^* و a_n^* فرض شوند، ضرایب سری فوریه تابع $c_1 f(x)+c_2 g(x)$ در فاصله مزبور به صورت $c_1 b_n + c_2 b_n^*$ و $c_1 a_n + c_2 a_n^*$ خواهند بود.

۱۲ـ سری فوریه یک تابع را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$f(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}+\theta\right)$$

که در آن:

$$\begin{cases} C_0=\dfrac{a_0}{2} \\ C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ \theta=\operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) \end{cases}$$

۱۳ـ اگر بسط دو تابع f و g به صورت زیر داده شده باشد:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(nx+\phi_n\right)$$

$$g(x)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\left(nx+\psi_n\right)$$

آن‌گاه بسط مجموع این دو تابع را می‌توان بفرم زیر نمایش داد:

$$h(x)=f(x)+g(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx+\theta_n)$$

که در آن:

$$c_0=a_0+b_0$$

$$c_n^2=a_n^2+b_n^2+2a_n b_n \cos(\phi_n-\psi_n)$$

$$\tan\theta_n=\frac{a_n \sin\phi_n+b_n \sin\psi_n}{a_n \cos\phi_n+b_n \cos\psi_n}$$

۱۴ـ طرفین یک سری فوریه را می‌توان در یک عدد ثابت ضرب و یا با یک عدد ثابت جمع نمود. همچنین اگر دوره تناوب تابع $2L$ باشد، طرفین سری فوریه آن را می‌توان در $\sin\frac{m\pi}{L}x$ یا $\cos\frac{m\pi}{L}x$ ضرب نمود (m عدد طبیعی است) فقط لازم است پس از انجام این کار، در سری حاصله، ضرب توابع سینوسی یا کسینوسی در هم را به حاصل جمع تبدیل کنیم.

۱۵ـ اگر سری فوریه دو تابع $g(x)$ و $f(x)$ در فاصله $(-L,L)$ به‌صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x+b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$g(x)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^* \cos\frac{n\pi}{L}x+b_n^* \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

می‌توان نشان داد:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx=\frac{a_0 a_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n a_n^*+b_n b_n^*\right)$$

و در حالت خاص $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

که رابطه فوق به تساوی پارسوال در سری‌های فوریه موسوم است. از تساوی پارسوال می‌توان نتیجه گرفت چنانچه $\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx$ همگرا باشد الزاماً داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

به تعبیری در اکثر توابع دارای سری فوریه بدون محاسبه می‌توان گفت حد ضرایب جملات سینوسی و کسینوسی وقتی n به بی‌نهایت می‌گراید صفر است. (این موضوع برای ضرایب سری فوریه تابع دلتای دیراک صحت ندارد.)

۱۶ـ وقتی n به بی‌نهایت می‌گراید ضرایب b_n و a_n در بسط فوریه یک تابع پریودیک (بجز تابع خاص دلتای دیراک) همواره با سرعت حداقل $\frac{c}{n}$ به صفر میل می‌کنند (c عددی ثابت است).

اگر تابع در یک فاصله تناوب خود یک و یا چند نقطه ناپیوستگی داشته باشد b_n و a_n نمی‌توانند همزمان با سرعت بیشتر از $\frac{c}{n}$ به سمت صفر میل کنند. در حالت کلی اگر تابع و $(k-1)$ مشتق اول آن در یک بازه تناوب پیوسته باشند b_n و a_n حداقل با سرعت $\frac{c}{n^{k+1}}$ به سمت صفر میل می‌کند و اگر مشتق k ام تابع ناپیوسته باشد b_n و a_n نمی‌توانند همزمان با سرعت بیشتر از $\frac{c}{n^{k+1}}$ به صفر بگرایند. به عنوان مثال:

الف) ضرایب سری فوریه یک تابع واقعی نمی‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$a_n = \frac{1}{n}\sin n \qquad\qquad b_n = n\sin\frac{1}{n}$$

زیرا اگرچه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ اما $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$ و این برخلاف اصل به صفر میل کردن ضرایب سری فوریه برای $n\to\infty$ می‌باشد.

ب) ضرایب سری فوریه یک تابع می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} \qquad\qquad b_n = \frac{n}{n^2+1}$$

زیرا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ بوده و چون در $n\to\infty$ سرعت به صفر میل کردن a_n مانند $\frac{1}{n^2}$ و سرعت به صفر میل کردن b_n مانند $\frac{1}{n}$ است. به تعبیری b_n و a_n همزمان نتوانسته‌اند با سرعت بیشتر از $\frac{c}{n}$ به صفر بگرایند. لذا چنین ضرایب سری فوریه‌ای مربوط به تابعی هستند که در یک فاصله تناوب دارای نقطه ناپیوستگی است.

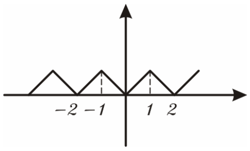
به تعبیری:

اگر $f(x)$ حداقل یک نقطه ناپیوستگی در یک دوره تناوب داشته باشد آنگاه حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ به صفر می‌گراید و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n}$ به صفر همگرا شود.

اگر $f(x)$ در یک دوره تناوب پیوسته ولی $f'(x)$ لااقل در یک نقطه ناپیوستگی داشته باشد آنگاه حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ به صفر می‌گراید و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n^2}$ به صفر همگرا شود.

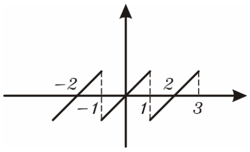
و به طور کلی اگر $f(x)$، $f'(x)$،...، $f^{(k-1)}(x)$ در یک دوره تناوب پیوسته باشند ولی $f^{(k)}(x)$ لااقل در یک نقطه ناپیوستگی داشته باشد آنگاه حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^{k+1}}$ به صفر می‌گراید و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n^{k+1}}$ به صفر همگرا شود.

تذکر: این قضیه تصریح می‌کند هر چه تابع هموارتر باشد، بسط فوریه آن سرعت همگرایی بالاتری خواهد داشت.



در تابع مقابل، f در یک تناوب همه جا پیوسته است ولی f' در یک تناوب نقطه ناپیوستگی دارد.

به واسطه زوج بودن تابع، $b_n = 0$ لذا باید $a_n = \frac{c}{n^2}$



در تابع مقابل، f در یک تناوب نقطه ناپیوستگی دارد.

به واسطه فرد بودن تابع، $a_n = 0$ لذا باید $b_n = \frac{c}{n}$

قضیه فوق ابزاری مناسب برای رد گزینه کردن در مسایل سری فوریه می‌باشد.

برای مثال: اگر قرار باشد سری فوریه تابع $0 < x < 2\pi$ و $f(x) = |\sin x|$ یکی از چهار مورد زیر باشد:

۱) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n+1}$ ۲) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2n-1}$

۳) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$ ۴) $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}$

این‌طور استدلال می‌شود:

به واسطه زوج بودن f گزینه‌های شامل سینوس یعنی جواب‌های 1 و 4 مردود می‌شوند.

همچنین چون f پیوسته و f' ناپیوسته است و دیدیم $b_n = 0$، لذا a_n باید با سرعت معادل $\frac{1}{n^2}$ به صفر بگراید و مورد۲ نیز مردود می‌شود و باید مورد ۳ صحیح باشد.

۱۷ـ همان‌طوری که انتظار داریم، هر چه تعداد بیشتری از جملات سری فوریه مورد استفاده قرار گیرد، مجموع نوشته شده به شکل واقعی تابع نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (و به تعبیری خطا کاهش می‌یابد)، اما مجموع مذکور در همسایگی نقاط ناپیوستگی تابع اصلی، حاوی پرش‌هایی است که با افزایش تعداد جملات هم، دامنه این پرش‌ها کوچک نمی‌شود.

گیبس نشان داده که در نقاط ناپیوستگی چیزی حدود ده درصد خطا وجود دارد و این موضوع با استفاده جملات بیشتر از سری فوریه نیز تغییر نمی‌کند.

مثال ۱ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 \le x \le L \\ 2L - x & ; \ L \le x \le 2L \end{cases}$ به‌صورت زیر است:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right]$$

کدام گزاره صحیح است؟ (هوافضا ۸۵)

۱) $b_k = 0 , a_0 = L$ ۲) $b_k = \frac{2L}{k\pi} , a_0 = \frac{L}{2}$ ۳) $b_k = 0 , a_0 = 2L$ ۴) $b_k = \frac{2L}{k\pi} , a_0 = L$

حل: گزینه ۱ درست است.

گسترش متناوب تابع اصلی با دوره تناوب 2L   شکل تابع اصلی

ملاحظه می‌شود تابع مورد نظر زوج بوده و چون دوره تناوب $2L$ است داریم:

$$b_k = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{2}{L}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = L$$

مثال ۲ اگر سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ و $f(x) = x$ به صورت $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$ باشد سری فوریه $-\pi < x < \pi$ و $g(x) = x\sin x$ به صورت $1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\Psi_n \cos nx$ نوشته می‌شود، Ψ_n کدام است؟

۱) $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}$ ۲) $\frac{(-1)^n}{n^2-1}$ ۳) $\frac{1}{n^2-1}$ ۴) $\frac{-1}{n^2-1}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$x\sin x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \sin x$$

با تبدیل ضرب به جمع به دست می‌آید:

$$x\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos(n-1)x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos(n+1)x$$

در سری چپی تبدیل $n-1 \to n$ و در سری راستی تبدیل $n+1 \to n$ را انجام می‌دهیم:

$$x\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos nx - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}\cos nx$$

با نوشتن دو جمله اول سری چپی داریم:

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos nx - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\cos nx = 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2(-1)^n\cos nx}{n^2-1} \rightarrow$$

$$\Psi_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$$

مثال ۳ سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ بوده و $f\left(\frac{\pi^+}{2}\right)=1$ و $f\left(\frac{\pi^-}{2}\right)=3$ و مقدار متوسط تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب 4 است حاصل $b_1-b_3+b_5-+\cdots$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -2 ۳) 0 ۴) -4

حل: گزینه ۲ درست است.

ثابت سری فوریه تابع = مقدار متوسط تابع در یک دوره تناوب $\rightarrow a_0=4$

چون تابع در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ گسسته است، طبق قضیه دیریکله داریم:

$$\frac{f\left(\frac{\pi^-}{2}\right)+f\left(\frac{\pi^+}{2}\right)}{2}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{2} \rightarrow \frac{3+1}{2}=4+\left(b_1-b_3+b_5-+\cdots\right) \rightarrow$$

$$b_1-b_3+b_5-+\cdots=-2$$

مثال ۴ تابع $f(x)=\sin\left(e^x\right)\ ;\ 0<x<\pi$

۱) دارای سری فوریه است.

۲) دارای سری فوریه نمی‌باشد زیرا متناوب نیست.

۳) دارای سری فوریه نمی‌باشد زیرا تعداد نقاط اکسترمم نسبی آن در بازه $(0,\pi)$ بیشمار است.

۴) دارای سری فوریه نمی‌باشد زیرا در بازه $(0,\pi)$ انتگرال‌پذیر نیست.

حل: گزینه ۱ درست است.

چون تابع را در بازه $(0,\pi)$ تعریف نموده‌ایم، فرض این است که در بیرون این بازه آن را با دوره تناوب $T=\pi$ گسترش می‌دهیم و سؤال این است که آیا بعد از انجام این کار، تابع متناوب حاصله دارای سری فوریه می‌باشد یا خیر؟

پس گزینه دوم صحیح نیست در حالی که می‌دانیم تابع $\sin\left(e^x\right)$ به خودی خود متناوب نمی‌باشد.

ازآنجاکه:

$$f'(x)=e^x\cos\left(e^x\right)$$

لذا معادله $f'(x)=0$ که ریشه‌های آن می‌تواند مبین طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ باشد در بازه $0<x<\pi$ دارای بیشمار جواب نبوده و گزینه سوم نیز مردود است.

از طرفی بدیهی است $\int_0^{\pi}\sin\left(e^x\right)dx$ موجود می‌باشد (اگر چه حاصل آن به راحتی قابل محاسبه نیست ولی چون هیچ ناسرگی در این انتگرال وجود ندارد، همگرا بودن آن تضمین شده است) بنابراین گزینه چهارم نیز مردود است.

طبیعی است تابع $f(x)=\sin\left(e^x\right)$ در همه‌جا و به تبع آن در بازه $(0,\pi)$ پیوسته است و لذا در این بازه تعداد نقاط ناپیوستگی تابع بیشمار نمی‌شود و لذا تابع مذکور در بازه $(0,\pi)$ دارای سری فوریه است.

مثال ۵ هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x)=x+\cos 2x$ به ازای $0 \le x \le \pi$، آن گاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ ضریب $\cos 2x$ کدام است؟ (برق ۸۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $1-\frac{1}{2\pi}$ ۴) $1+\frac{1}{2\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$p=2\pi \to L=\pi$

تابع زوج است و جمله عمومی $a_n \cos\frac{n\pi}{L}x=a_n\cos nx$ به ازاء $n=2$ به $a_2\cos 2x$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos 2x)\cos 2x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left(x\cos 2x+\underbrace{\cos^2 2x}_{\frac{1}{2}(1+\cos 4x)}\right)dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)=1$$

مثال ۶ تابع $f(x)$ در روابط $\begin{cases} f(x+4\pi)=f(x) \\ f(-x)=f(x)\end{cases}$ صدق می‌کند و برای $0<x<2\pi$ داریم $f(x)=e^{\sin x}$ ضریب $\cos x$ در سری فوریه این تابع چیست؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) $\frac{1}{2\pi}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$f(x+4\pi)=f(x)$ تصریح می‌کند تابع f متناوب با دوره تناوب $p=4\pi$ است.

$f(-x)=f(x)$ تصریح می‌کند تابع f زوج است.

دو شرط فوق ایجاب می‌کند ابتدا تابع $0<x<2\pi$; $f(x)=e^{\sin x}$ را در فاصله $-2\pi<x<0$ به فرم زوج گسترش داده و سپس برای تابع گسترش یافته در فاصله $-2\pi<x<2\pi$ سری فوریه بنویسیم و طبیعتاً $L=2\pi$ خواهد بود.

باید nای یافت که $\cos\frac{n\pi}{2\pi}x=\cos x$ و البته به دست می‌آید $n=2$ حال می‌گوئیم:

$$a_2=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\cos\frac{2\pi}{2\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x.e^{\sin x}\,dx=\frac{1}{\pi}e^{\sin x}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left(e^{\sin 2\pi}-e^{\sin 0}\right)=0$$

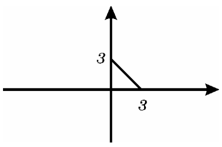
دقت داریم صفر بودن یکی از a_n ها به معنای فرد بودن تابع نخواهد بود.

مثال ۷ اگر $f(x)=3-x\ ,\ 0<x<3$ در سری فوریه این تابع (n عدد طبیعی فرض شده است)

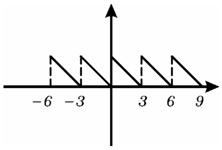
۱) کلیه a_nها مخالف صفرند. ۲) a_n ها همگی صفرند.

۳) a_{2n} ها همگی صفرند. ۴) نمی‌توان اظهارنظرکرد.

حل: گزینه ۲ درست است.

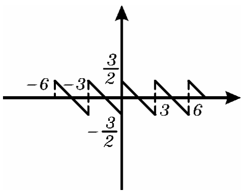


شکل f در بازه داده شده



شکل گسترش f با دوره تناوب $T = 3$

ملاحظه می‌شود شکل فوق نه زوج است و نه فرد اما اگر به مقادیر تابع $-\frac{3}{2}$ بیافزاییم شکل مقابل حاصل می‌شود:



البته تابع فوق فرد است و در سری فوریه آن فقط جملات سینوسی پدید می‌آید. به تعبیری بعد از گسترش متناوب تابع اولیه یک تابع با تقارن مخفی فرد داریم و لذا در سری فوریه تابع اصلی نیز صرف‌نظر از وجود ضریب ثابت $\frac{a_0}{2}$ فقط جملات سینوسی ظاهر می‌شود.

مثال ۸ سری فوریهٔ تابع متناوب $f(x) = |x| \;,\; -\pi < x \leq \pi$ با دورهٔ تناوب 2π کدام است؟ (هوافضا ۸۵)

۱) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{2m+1}$

۴) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

تابع مذکور زوج بوده و چون دوره تناوب $P = 2\pi$ می‌باشد داریم:

مشتق		انتگرال
x	$\searrow^{+}$	$\cos nx$
1	$\searrow^{-}$	$\frac{1}{n}\sin nx$
0		$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right\}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

و چون در همه گزینه‌ها ثابت سری فوریه $\frac{\pi}{2}$ داده شده پس می‌توان گفت:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x$$

مثال ۹ اگر $|x|<1 \; ; \; f(x)=\frac{1}{|x|+2}$ باشد حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\left(1-\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ ۲) $\frac{1}{2}-2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ۳) $\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ۴) $1-2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

حل: گزینه ۳ درست است.

تابع $|x|<1 \; ; \; f(x)=\frac{1}{|x|+2}$ تابعی زوج است و وقتی با دوره تناوب $p=2$ گسترش یابد داریم:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = 2\ln(x+2)\Big|_0^1 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

حال اگر به سری فوریه تابع یعنی:

$$f(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{1}x + b_n \sin\frac{n\pi}{1}x\right)$$

در $x=0$ که نقطه پیوستگی تابع است نگاه کنیم طبق قضیه دیریکله داریم:

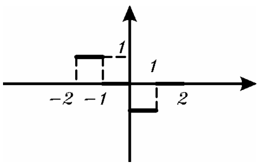
$$\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

مثال ۱۰ اگر $f(t)=\begin{cases} 1 & -2<t<-1 \\ 0 & -1<t<0 \\ -1 & 0<t<1 \\ 0 & 1<t<2 \end{cases}$ در سری فوریه تابع کدام ضرایب غیرصفرند؟

۱) a_{2k+1} ۲) $a_{2k+1} \,,\, b_{2k+1}$

۳) b_{2k+1} ۴) $a_n \,,\, b_n$ (همگی ضرایب)

حل: گزینه ۲ درست است.



بدیهی است مقدار متوسط تابع برابر صفر است و اگر قرینه شکل نیم پریود مربوط به $-2<t<0$ را نسبت به خط $y=0$ ترسیم کرده و آن را به اندازه طول نیم پریود (2) به جلو منتقل کنیم شکل حاصله دقیقاً منطبق به شکل نیم پریود مربوط به $0<t<2$ خواهد شد. لذا فقط b_{2k+1} و a_{2k+1} مخالف صفرند.

مثال ۱۱ ضرایب سری فوریه تابعی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a_n = \frac{n\pi}{n^4 + \pi^4}, \; b_n = \frac{\pi}{n^2 + n\pi + \pi^2}$$

درباره پیوستگی این تابع و مشتقاتش کدام گزینه صحیح است؟

۱) f همه‌جا پیوسته است ولی f' در هر دوره تناوب لااقل یک ناپیوستگی دارد.

۲) f در هر دوره تناوب لااقل یک ناپیوستگی دارد.

۳) f, f' همه‌جا پیوسته‌اند.

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ درست است.

ملاحظه می‌شود a_n مانند $\frac{1}{n^3}$ به صفر میل می‌کند در حالتی که b_n با سرعت $\frac{1}{n^2}$ به صفر می‌گراید می‌دانیم وضعیت پیوستگی را عنصری از (a_n , b_n) که کندتر نزول می‌کند معین می‌سازد.

می‌دانیم اگر تابع $f(x)$ و $k-1$ مشتق اولش همه‌جا پیوسته باشند آن‌گاه برای $n \to \infty$ ضرایب a_n , b_n دست کم با سرعت $\frac{1}{n^{k+1}}$ به صفر میل می‌کنند و اگر مشتق kام تابع $f(x)$ همه‌جا پیوسته نباشد آن‌گاه a_n , b_n در حالت کلی هیچ یک نمی‌توانند سریع‌تر از $\frac{1}{n^{k+1}}$ به صفر میل کنند.

برای $\frac{1}{n^2}$ داریم $k+1=2$ یعنی $k=1$ یعنی در مسأله موردنظر $f(x)$ در همه‌جا پیوسته است ولی $f'(x)$ دست کم یک نقطه ناپیوستگی در هر دوره تناوب دارد.

مثال ۱۲ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = \begin{cases} x(\pi + x) , & -\pi \le x \le 0 \\ x(\pi - x) , & 0 < x < \pi \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3} \sin(nx)$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m-1)^3} \sin(2m-1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2m-1)^3} \sin(2m-1)x$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} \left(\sin(nx) + \cos(nx)\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

به واسطه فرد بودن تابع داریم:

$$a_n = a_0 = 0$$

مشتق		انتگرال
$\pi x - x^2$	$\searrow +$	$\sin nx$
$\pi - 2x$	$\searrow -$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
-2	$\searrow +$	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0		$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2 - \pi x}{n}\cos nx + \frac{\pi - 2x}{n^2}\sin nx - \frac{2}{n^3}\cos nx\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{n^3}\cos n\pi + \frac{2}{n^3}\right) = \frac{4}{\pi n^3}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m-1)^3}\sin(2m-1)x$$

مثال ۱۳ تابع g که در بازه $-a < x < a$ تعریف شده دارای ضرایب سری فوریه‌ای به صورت $a_n = 0$ و $b_n = \frac{1}{2^n}$ است حاصل $\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx$ کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{a}{2}$ ۲) a ۳) $\frac{a}{3}$ ۴) $2a$

حل: گزینه ۳ درست است.

طبق تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \rightarrow \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}} \rightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx = a\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) = a\frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2^2}} = a\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{a}{3}$$

مثال ۱۴ در سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \sin 2x \,, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 \,, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ \sin 2x \,, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ با دورهٔ تناوب $p = 2\pi$ به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

a_2 و b_2 به ترتیب عبارتند از: (اتوماسیون ۸۸)

۱) $1 , 0$ ۲) $\frac{3}{4} , 0$ ۳) $1 , \frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{4} , \frac{3}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\frac{2\pi}{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos 2xdx+\int_{0}^{\pi}\sin 2x\cos 2xdx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 4xdx+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 4xdx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{8}\cos 4x\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{8}\cos 4x\Big|_{0}^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{8}(1-1)-\frac{1}{8}(1-1)\right\}=0$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{2\pi}{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin 2xdx+\int_{0}^{\pi}\sin 2x\sin 2xdx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_{0}^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)+\frac{1}{2}(\pi-0)\right\}=\frac{3}{4}$$

مثال ۱۵ مقداری سری فوریه تابع $f(x)=\sqrt{1-x}\ ;\ 0<x<1$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) تعریف نشده

حل: گزینه ۳ درست است.

ضابطه $\sqrt{1-x}$ برای بازه $(0,1)$ مطرح شده و چون صحبت از سری فوریه تابع داده شده می‌باشد این طور فرض می‌شود که $\sqrt{1-x}$ برای $0<x<1$ مدنظر قرار گیرد و در بیرون این فاصله با دوره تناوب $P=1$ گسترش یابد. طبق قضیه دیریکله داریم:

مقدار سری فوریه تابع در $x=1$: $\dfrac{f(1^-)+f(1^+)}{2}=\dfrac{f(1^-)+f(0^+)}{2}=\dfrac{\sqrt{1-1^-}+\sqrt{1-0^+}}{2}=\dfrac{1}{2}$

مثال ۱۶ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases} e^{x} & , \quad 0<x<L \\ 0 & , \quad x=0 \\ -e^{-x} & , \quad -L<x<0 \end{cases}$ کدام است؟ (مکانیک ۸۶)

۱) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{\left(1-e^{L}\cos n\pi\right)}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۲) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{\left(1+e^{L}\cos n\pi\right)}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۳) $\displaystyle\frac{1}{L}\left(e^{L}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{\left(1-e^{L}\cos n\pi\right)}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۴) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{\left(n\pi\right)^{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{L}{n\pi^{2}}\right)}\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{\left(1-e^{L}\cos n\pi\right)}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

حل: گزینه ۱ درست است.

به واسطه فرد بودن تابع داریم:

$$a_{n}=a_{0}=0$$

پس گزینه‌های سوم و چهارم مردودند.

$$b_{n}=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}e^{x}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$I=\int e^{x}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad\rightarrow$$

مشتق		انتگرال
e^{x}		$\sin\frac{n\pi}{L}x$
	$\searrow +$	
e^{x}		$\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x$
	$\searrow -$	
e^{x}	$\overset{+}{\int}\rightarrow$	$-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}\sin\frac{n\pi}{L}x$

$$I=\frac{-L}{n\pi}e^{x}\cos\frac{n\pi}{L}x+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}e^{x}\sin\frac{n\pi}{L}x-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}\quad\rightarrow$$

$$I=\frac{1}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\frac{L}{n\pi}.e^{x}\left(-\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_{n}=\frac{2}{L}\frac{1}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\frac{L}{n\pi}e^{x}\left(-\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\Bigg|_{0}^{L}=\frac{2}{n\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\left(-e^{L}\cos n\pi+1\right)$$

مثال ۱۷ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x-[x]$ را بعد از تشخیص دوره تناوب آن بنویسید. (مواد ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$ ۲) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

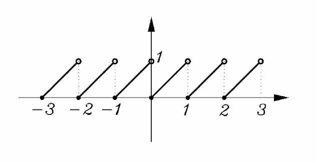
۳) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$ ۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{(n\pi)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با فرض $m>0$، دوره تناوب تابع $f(x)=mx-[mx]$ برابر $\frac{1}{m}$ است زیرا:

$$f\left(x+\frac{1}{m}\right)=m\left(x+\frac{1}{m}\right)-\left[m\left(x+\frac{1}{m}\right)\right]=mx+1-[mx+1]=mx+1-[mx]-1=f(x)$$

لذا در تابع $f(x)=x-[x]$ داریم $T=1$ اگر شکل تابع را در نظر بگیریم چنین است:



$$\text{مقدار متوسط تابع}=\frac{\text{سطح خالص محدود به منحنی و محور } x \text{ در یک دوره تناوب}}{\text{طول بازه یک دوره تناوب}}$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\frac{1\times 1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 (x-[x])\sin\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx$$

$$b_n=2\left(\frac{-x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{-1}{2n\pi}\right)=\frac{-1}{n\pi}$$

مشتق		انتگرال
x		$\sin 2n\pi x$
	$+$	
1		$\frac{-1}{2n\pi}\cos 2n\pi x$
	$-$	
0		$\frac{-1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 (x-[x])\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx$$

$$a_n=2\left(\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x+\frac{1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\right)\Bigg|_0^1=0$$

مشتق		انتگرال
x		$\cos 2n\pi x$
	$+$	
1		$\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x$
	$-$	
0		$\frac{-1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x$

پس داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

مثال ۱۸ اگر $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1+\cos n\pi}{1+3n^2}\sin nx$ باشد کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx=0$

۲) $\int_0^{\pi} f(x)\sin 4x\,dx=\dfrac{1}{98}$

۳) هردو

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۳ درست است.

صورت مسأله سری فوریه تابع $f(x)$ را نشان می‌دهد و وجود فقط جمله $\sin nx$ تصریح می‌کند f تابعی فرد بوده و دوره تناوب آن $2L=2\pi$ بوده است. با توجه به حد پایینی $\sum$ که از 3 شروع شده می‌توان گفت:

$$b_1=b_2=0$$

$$\forall n\ge 3: b_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1+\cos n\pi}{1+3n^2}$$

حال توجه داریم:

$$b_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx \quad\to\quad \int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx=\frac{\pi}{2}b_2=0$$

$$b_4=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 4x\,dx \quad\to\quad \int_0^{\pi} f(x)\sin 4x\,dx=\frac{\pi}{2}b_4=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{1+\cos 4\pi}{1+3(4)^2}=\frac{1}{98}$$

مثال ۱۹ ضرایب بسط فوریهٔ تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π، $\{a_0, a_n, b_n\}$ می‌باشد، اگر ضرایب بسط فوریهٔ تابع $g(x)=f(x)\cos x$ برابر با $\{a'_0, a'_n, b'_n\}$ باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (برق ۸۶)

۱) $a'_0=\dfrac{a_1}{2}\ ,\ a'_n=\dfrac{a_{n+1}-a_{n-1}}{2}\ ,\ b'_n=\dfrac{b_{n+1}-b_{n-1}}{2}$

۲) $a'_0=\dfrac{a_1}{2}\ ,\ a'_n=\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}\ ,\ b'_n=\dfrac{b_{n+1}+b_{n-1}}{2}$

۳) $a'_0=\dfrac{a_0}{2}\ ,\ a'_n=\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}\ ,\ b'_n=\dfrac{b_{n+1}+b_{n-1}}{2}$

۴) $a'_0=\dfrac{a_0}{2}\ ,\ a'_n=\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}\ ,\ b'_n=\dfrac{a_{n+1}+b_{n-1}}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{2}\big(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x\big)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n+1)x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n-1)x\,dx\right\}=\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+a_{n-1}\right)$$

البته با توجه به گزینه‌های پیشنهادی نیازی به محاسبه b'_n نیست. می‌توان نوشت:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{2}\big(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\big)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n+1)x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n-1)x\,dx\right\} = \frac{1}{2}\left(b_{n+1} + b_{n-1}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{2}a_1$$

مثال ۲۰ α را طوری بیابید که انتگرال $J = \int_{-1}^{1}\left(x - \alpha\sin\pi x - \beta\sin 2\pi x - \gamma\sin 3\pi x\right)^2 dx$ کم‌ترین مقدار شود.

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $-\frac{1}{\pi}$ ۴) $-\frac{2}{\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به آنکه سری فوریه یک تابع بهترین تقریب در نقطه نظر حداقل مجموع مربعات است لذا مسأله این است که تابع $f(x) = x\ ;\ -1 < x < 1$ را به‌صورت $\alpha\sin\pi x + \beta\sin 2\pi x + \gamma\sin 3\pi x$ تخمین حداقل مجموع مربعات بزنیم.

با توجه به فرم کلی $b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ داریم $L = 1$ و لذا:

انتگرال	مشتق
$\sin\pi x$	x (+)
$\frac{-1}{\pi}\cos\pi x$	1 (−)
$\frac{-1}{\pi^2}\sin\pi x$	0

$$\alpha = b_1 = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin\pi x\,dx$$

$$\alpha = 2\left(\frac{-x}{\pi}\cos\pi x + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{-1}{\pi}\cos\pi\right) = \frac{2}{\pi}$$

مثال ۲۱ با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<-1\\ 1 & -1<x<1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$ و $f(x+4)=f(x)$ کدام برابری حاصل می‌شود؟

(هوافضا ۸۷)

۱) $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$

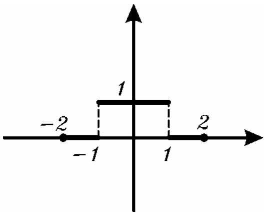
۲) $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

۳) $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$

۴) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

حل: گزینه ۴ درست است.

تابع داده شده زوج با دوره تناوب $P=4$ بوده و داریم:



$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=\int_0^1(1)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_1^2(0)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(1)\,dx+\int_1^2(0)\,dx=1$$

پس سری فوریه تابع چنین است:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

در $x=0$ طبق قضیه دیریکله به‌دست می‌آید:

$$1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\ \rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\ \rightarrow$$

$$\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots=\frac{\pi}{4}\ \rightarrow\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۲ بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos^3 x$، $0<x<2\pi$ را بیابید: (مواد ۸۷)

۱) $\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ ۲) $\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$ ۳) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ ۴) $\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$

حل: گزینه ۳ درست است.

دوره تناوب $\cos^3 x$ برابر 2π است و چون بازه داده شده در مسأله دارای طول 2π است، لذا سری فوریه تابع با خود تابع یکسان است.

می‌توان نوشت:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \rightarrow \quad \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

مثال ۲۳ هرگاه $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ باشد، حاصل $\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x dx$ کدام گزینه است؟ (برق ۸۵)

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{3\pi}{16}$ ۴) $\frac{13\pi}{36}$

حل: گزینه ۴ درست است.

رابطه $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ طبیعتاً نشان می‌دهد $f(x)$ تابعی فرد با دوره تناوب $p = 2\pi$ بوده که وقتی سری فوریه آن را نوشته‌ایم فقط شامل جملات سینوسی شده و مضافاً $\sin \frac{n\pi}{L} x = \sin \frac{n\pi x}{\pi} = \sin nx$ ظاهر شده است و طبیعتاً در این سری فوریه $b_n = \frac{1}{n^2}$ می‌باشد.

حال باتوجه به رابطه $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\, dx = \int_0^{\pi} f(x)\frac{3\sin x - \sin 3x}{4} dx = \frac{1}{4}\left\{3\int_0^{\pi} f(x)\sin x\, dx - \int_0^{\pi} f(x)\sin 3x\, dx\right\}$$

و باتوجه به آنکه $\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ $b_n = \frac{2}{\pi}$ به دست می‌آید:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\, dx = \frac{1}{4}\left(3\times\frac{\pi}{2}\times b_1 - \frac{\pi}{2}\times b_3\right) = \frac{\pi}{8}\left(3\frac{1}{(1)^2} - \frac{1}{(3)^2}\right) = \frac{\pi}{8}\,\frac{26}{9} = \frac{13\pi}{36}$$

توسیع زوج و فرد ـ سری فوریه کسینوسی و سینوسی

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $(0, L)$ تعریف شده باشد:

الف) چنانچه تابع را در فاصله $(-L, 0)$ طوری تعریف کنیم که تابع حاصله در بازه $(-L, L)$ زوج شود (گسترش زوج تابع اصلی) و سپس سری فوریه این تابع را بنویسیم، اصطلاحاً سری فوریه کسینوسی تابع اصلی نوشته شده و طبیعتاً به دست می‌آید:

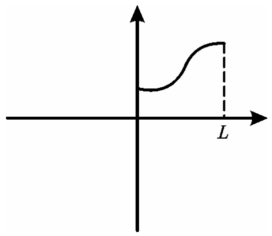
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

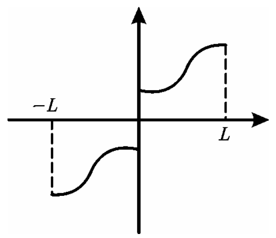
ب) چنانچه تابع را در فاصله $(-L,0)$ طوری تعریف کنیم که تابع حاصله در بازه $(-L,L)$ فرد شود (گسترش فرد تابع اصلی) و سپس سری فوریه این تابع را بنویسیم، اصطلاحاً سری فوریه سینوسی تابع اصلی نوشته شده و طبیعتاً به دست می‌آید:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

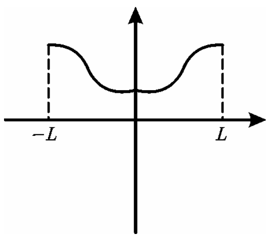
$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$



تابع f(x) در فاصله (0,L) تعریف شده است.



گسترش فرد تابع f(x)



گسترش زوج تابع f(x)

چند نکته:

۱ـ برای تابع $f(x)$ تعریف شده در بازه $(0,h)$:

الف) اگر مطلوب نوشتن سری فوریه تابع باشد در حقیقت فرض بر آن است که تابع مذکور در بیرون بازه $(0\,,\,h)$ با دوره تناوب $p=2L=h$ گسترش داده شده و سپس سری فوریه آن را به‌دست می‌آوریم.

ب) اگر مطلوب نوشتن سری فوریه کسینوسی یا سینوسی باشد در حقیقت فرض بر آن است که تابع مذکور نخست در بازه $(-h,0)$به‌صورت زوج یا فرد گسترش داده شده و سپس برای تابع حاصله که دارای دوره تناوب $p=2L=2h$ است سری فوریه آن را به‌دست آوریم.

۲ـ برای تابع $f(x)$ که در فاصله $(0,L)$ تعریف شده می‌توان هر دو نوع سری فوریه کسینوسی و یا سینوسی را نوشت. طبیعتاً در موارد کاربردی سری فوریه‌ای مناسبتر خواهد بود که با تعداد جملات کمتری به رفتار تابع واقعی همگرا شود (با خطایی معلوم). لذا سری فوریه‌ای کاربردی‌تر است که ضرایبش با افزایش n سریعتر به سمت صفر بگرایند.

۳ـ

الف) اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ (که در آن $f(x)$ و Ψ_n داده شده‌اند)

عبارت فوق باید سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ در بازه $(0,L)$ باشد و به تعبیری داریم:

$$\Psi_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

ب) اگر $f(x) = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n \cos\frac{n\pi}{L}x$ (که در آن $f(x)$ و Ψ_n و Ψ_0 داده شده‌اند)

عبارت فوق باید سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ در بازهٔ $(0,L)$ باشد و به تعبیری داریم:

$$\Psi_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$\Psi_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

۴ـ در سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & 0<x<L \\ 0 & -L<x<0 \end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

و در سری فوریه کسینوسی تابع $g(x)\,;\,0<x<L$ داریم:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

و در سری فوریه سینوسی تابع $g(x)\,;\,0<x<L$ داریم:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

یعنی می‌توان گفت:

a_n در بسط فوریه کسینوسی تابع $g(x)$ دو برابر a_n در بسط فوریه تابع $f(x)$ است.

b_n در بسط فوریه سینوسی تابع $g(x)$ دو برابر b_n در بسط فوریه تابع $f(x)$ است.

مثال ۲۴ بسط کسینوسی تابع $\sin x$ در محدوده $0 < x < \frac{\pi}{2}$ به کدام صورت زیر است؟ (مکانیک ۸۵)

۱) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(nx)$

۲) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}n}{4n^2-1}\cos(2nx)$

۳) $\sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(2nx)$

۴) تابع دارای بسط مذکور نمی‌باشد چون تابع فرد و بسط زوج است.

حل: گزینه ۳ درست است.

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

پس گزینه سوم صحیح است و البته داریم:

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\right) dx = -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos(1+2n)x}{1+2n} + \frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

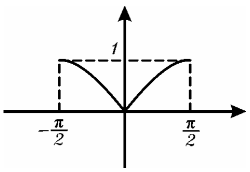
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{2}{1-4n^2} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

پس سری فوریه کسینوس تابع مورد نظر چنین است:

$$f(x) \simeq \frac{2}{\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos 2nx$$

توجه: بدیهی است گزینه چهارم اساساً بی‌مورد است زیرا وقتی تابعی در بازه $(0,a)$ای داده می‌شود، فارغ از ضابطه آن، می‌توان به دلخواه برایش سری فوریه سینوسی یا کسینوسی نوشت.

از طرفی چون $\frac{a_0}{2}$ مبین مقدار متوسط تابع در طول یک دوره تناوب است و گسترش زوج تابع $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و $\sin x$ به شکل زیر است:



پس مقدار متوسط آن نمی‌تواند صفر باشد و به دلیل حضور جمله $\frac{a_0}{2}$ فقط گزینه سوم می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۵ سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\cos 2x$ در فاصله $0<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\cos 2x$

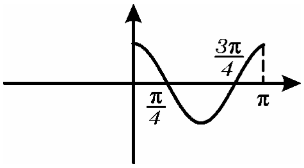
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos(2n-1)x$

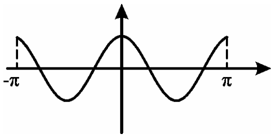
۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ درست است.

تابع $\cos 2x$ در فاصله $0<x<\pi$ به شکل مقابل می‌باشد:



بدیهی است گسترش زوج این تابع به شکل مقابل است:



و در اثر توسیع متناوب شکل فوق با دوره تناوب $P=2\pi$ همان شکل واقعی $\cos 2x$ حاصل می‌شود.

مثال ۲۶ سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=(x+1)^2\ ;\ 0<x<1$ به‌صورت $\frac{7}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(2\cos n\pi-1)\cos n\pi x$ است. حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{2}$

۲) $\frac{5\pi^2}{12}$

۳) $\frac{5\pi^2}{13}$

۴) $\frac{\pi^2}{24}$

حل: گزینه ۲ درست است.

طبق قضیه دیریکله در $x=1$ داریم:

$$\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2}=\frac{7}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(2\cos n\pi-1)\cos n\pi$$

چون سری فوریه کسینوسی تابع $0<x<1\ ;\ (x+1)^2$ را نوشته‌ایم مثل این است که تابع فوق را در بازه $-1<x<0$ گسترش زوج داده و سپس با دوره تناوب $P=2$ حاصل را توسیع داده‌ایم لذا باید $f(1^+)=f(1^-)$ و به دست می‌آید:

$$\frac{4+4}{2}=\frac{7}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(2(-1)^n-1\right)(-1)^n \;\rightarrow\; \frac{5}{3}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(2-(-1)^n\right) \;\rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n^2}=\frac{5\pi^2}{12}$$

مثال ۲۷ سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x) = 1 + \cos\frac{x}{2}$، $0 \le x \le \pi$، کدام است؟ (مواد ۸۵)

۱) $1 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}}\cos nx$

۲) $1 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2 - \frac{1}{4}}\cos nx$

۳) $2 + \frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}}\cos nx$

۴) $1 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m(2m-1)}\cos\frac{2m-1}{2}x$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(x + 2\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\pi + 2) = 2 + \frac{4}{\pi} \rightarrow \frac{a_0}{2} = 1 + \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos nx + \frac{1}{2}\left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sin nx + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{n - \frac{1}{2}}\right\}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}{n - \frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n + \frac{1}{2}} + \frac{-\cos n\pi}{n - \frac{1}{2}}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{n - \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2}}{n^2 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

پس داریم:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}\cos nx$$

مثال ۲۸ سری فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x) = x(\pi - x)$ در بازه $[0, \pi]$ به فرم زیر است:

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots\right)$$

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$$

کدام فرم سری فوریه فوق برای توصیف رفتار این تابع مناسب‌تر است؟

۱) سینوسی ۲) کسینوسی ۳) فرقی ندارد. ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

حل: گزینه ۱ درست است.

با توجه به فرض مسأله ملاحظه می‌شود:

سری فوریه سینوسی: $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$ سری فوریه کسینوسی: $\dfrac{\pi^2}{6}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n^2}$

چون وقتی n بزرگ می‌شود ضرایب سری فوریه سینوسی با سرعت بیشتری نسبت به ضرایب سری فوریه کسینوسی به سمت صفر می‌گرایند لذا سری فوریه سینوسی با تعداد جملات کمتری به رفتار تابع واقعی همگرا می‌شود و مناسب‌تر است.

قضایای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $(-L,L)$ دارای سری فوریه‌ای به شکل زیر باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

الف) چنانچه $f(-L)=f(L)$ و $f'(x)$ در فاصله $(-L,L)$ تکه‌ای پیوسته باشد، (تابع f نقطه گسستگی جهش‌دار، نداشته باشد) داریم:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

رابطه فوق تصریح می‌کند با شرایط گفته شده روی f، ثابت سری فوریه f' قطعاً صفر خواهد بود.

ب) همواره داریم:

$$\int f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)+k$$

البته طبیعی است در سری فوریه یک تابع فقط باید عدد ثابت و جملات سینوسی و کسینوسی وجود داشته باشد. لذا از رابطه فوق عملاً می‌توان سری فوریه تابع $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ در فاصله $(-L,+L)$ را یافت که k (ثابت انتگرال‌گیری) همان ثابت سری فوریه تابع $g(x)=\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ در بازه مورد نظر است و باید به طور معمول محاسبه شود. $\left(k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}g(x)dx\right)$ دقت داریم اگر سری فوریه تابع x در فاصله $(-L,L)$ را به‌دست آورده وآن را بجای x در سمت راست تساوی حاصل از انتگرال‌گیری جایگزین کنیم، سری فوریه تابع $\int f(x)dx$ در بازه $(-L,+L)$ تعیین می‌شود.

تذکر:

با هر بار عمل انتگرال‌گیری، سری فوریه‌ای پدید می‌آید که سرعت همگرایی آن بیشتر از سرعت همگرایی سری فوریه اولیه است. (به واسطه افزایش توان n در مخرج)

با هر بار عمل مشتق‌گیری، سری فوریه‌ای پدید می‌آید که سرعت همگرایی آن کمتر از سرعت همگرایی سری فوریه اولیه است. (به واسطه کاهش توان n در مخرج)

تذکر: وقتی سری فوریه تابعی در دست باشد و مقدار یک سری عددی را بخواهیم، نخست جمله عمومی سری مورد نظر را با جمله عمومی سری فوریه موجود مقایسه می‌کنیم:

۱ـ اگر سرعت همگرایی آن‌ها یکسان بود از قضیه دیریکله در یک نقطه مناسب استفاده می‌کنیم.

۲ـ اگر سرعت همگرایی جمله عمومی سری عددی مورد نظر بیشتر بود، با انتگرال‌گیری از سری فوریه موجود و سپس استفاد از قضیه دیریکله به خواسته مورد نظر می‌رسیم.

۳ـ اگر سرعت همگرایی جمله عمومی سری عددی مورد نظر کمتر بود، با مشتق‌گیری از سری فوریه موجود و سپس استفاده از قضیه دیریکله به خواسته مورد نظر می‌رسیم.

البته در مورد ۲ ممکن است استفاده از تساوی پارسوال حل مسئله را با سهولت بیشتری همراه کند، به خصوص زمانی که جمله عمومی سری عددی مورد نظر، مجموع توان دو a_n و b_n در ضرایب سری فوریه موجود باشند.

مثال ۲۹ در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x^2$، $-L\le x\le L$، به‌صورت $\frac{1}{3}L^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{x}{3}\left(\frac{x^2}{L^2}-1\right)$ کدام است؟ (برق ۸۷)

۱) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$

۲) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۳) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۴) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$x^2=\frac{1}{3}L^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{L}\xrightarrow{\int}\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}L^2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}+k$$

در $x=0$ تساوی فوق نتیجه می‌دهد $k=0$ و داریم:

$$\frac{x}{3}\left(x^2-L^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^3}{(n\pi)^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}\to\frac{x}{3}\left(\frac{x^2}{L^2}-1\right)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{\pi n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

مثال ۳۰ سری فوریه تابع $f(x) = x\sin x,\ -\pi < x < \pi$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\times 3} - \frac{\cos 3x}{2\times 4} + \frac{\cos 4x}{3\times 5} - + \cdots\right)$$

حاصل $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{(n-1)(n+1)}$$

چون $f(-\pi) = f(\pi)$ مجازیم از طرفین فرض مسأله مشتق بگیریم:

$$\sin x + x\cos x = \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(-n\sin nx)}{n^2-1}$$

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-1}$$

در $x = \frac{\pi}{3}$ طبق قضیه دیریکله داریم:

$$\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2-1} \rightarrow \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + 2I \rightarrow I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

مثال ۳۱ اگر سری فوریه تابع $f(x)=2x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$ باشد. سری فوریه تابع $g(x) = x^2 - \pi^2$ کدام است؟ (کامپیوتر ۸۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\left[\cos(nx)-(-1)^n\right]$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\sin(nx)-(-1)^n\right]$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n}\left[\cos(nx)+(-1)^n\right]$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n}\left[\sin(nx)+(-1)^n\right]$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin nx \quad \xrightarrow{\int} \quad x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx + k$$

k ثابت سری فوریه تابع x^2 در بازه $(-\pi,\pi)$ می‌باشد که چنین محاسبه می‌شود:

$$k=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

لذا داریم:

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx+\frac{\pi^2}{3}\qquad(*)$$

لذا می‌توان گفت:

$$g(x)=x^2-\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx-\frac{2\pi^2}{3}$$

که تنها با گزینه اول در انطباق است. (حضور $\cos nx$ و $\frac{1}{n^2}$)

توجه کنید در $x=\pi$ از قضیه دیریکله و رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos n\pi+\frac{\pi^2}{3}\ \rightarrow\ \frac{2\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

و استفاده از این عبارت در رابطه نوشته شده برای $g(x)$ نتیجه می‌دهد:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\left(\cos nx-(-1)^n\right)$$

توجه: واضح است اگر بخواهیم از سری فوریه تابع $f(x)=2x$ به سری فوریه تابع $g(x)=x^2-\pi^2$ برسیم باید از سری فوریه تابع $f(x)$ انتگرال‌گیری کنیم.

با این کار سرعت همگرایی افزایش می‌یابد و چون توان n در مخرج سری فوریه تابع $f(x)=2x$، عدد 1 می‌باشد، قطعاً در سری فوریه تابع $g(x)=x^2-\pi^2$، توان n در مخرج بیشتر از یک خواهد شد. پس گزینه‌های سوم و چهارم مردودند. از طرفی با انتگرال‌گیری از سری فوریه تابع $f(x)=2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$ جملات کسینوسی تولید می‌شود پس گزینه دوم نیز مردود بوده و گزینه اول صحیح می‌باشد.

مثال ۳۲ با توجه به رابطه $\sum_{n=1}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$ و انتگرال‌گیری از آن سری فوریه تابع $f(\theta)=\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$ چگونه خواهد شد؟

۱) $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos(n+1)\theta$

۲) $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta$

۳) $\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos(n+1)\theta$

۴) $\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta$

حل: گزینه ۱ درست است.

انتگرال‌گیری از رابطه داده شده نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-k^n}{n+1}\cos(n+1)\theta=\frac{1}{2k}\ln\left(1-2k\cos\theta+k^2\right)+c$$

به ازای $k=-1$ به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{n+1}\cos(n+1)\theta=-\frac{1}{2}\ln\left(2(1+\cos\theta)\right)+c \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos(n+1)\theta=\frac{1}{2}\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2-c \rightarrow$$

$$\ln 2+\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos(n+1)\theta+c \rightarrow \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos(n+1)\theta$$

$c-\ln 2$ ثابت سری فوریه تابع $\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود: (با محاسبات طولانی)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta=-\ln 2$$

روش جهش‌ها برای محاسبه ضرایب سری فوریه

اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب $2L$ باشد و در نقاط $x_1<x_2<\dots<x_n$ در یک دوره تناوب جهش‌های ناصفر $F_1, F_2, \dots, F_n$ را داشته باشد (x_1 می‌تواند نقطه شروع دوره تناوب باشد)

یعنی:

$$F_i=f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i^-\right)$$

و نیز f' در نقاط $x'_1<x'_2<\dots<x'_n$ در یک دوره تناوب جهش‌های ناصفر $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ را داشته باشد، یعنی:

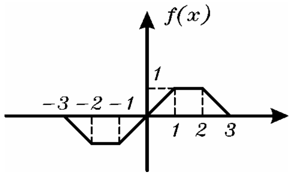
$$F'_i=f'\left(x'^+_i\right)-f'\left(x'^-_i\right)$$

و الی آخر، خواهیم داشت:

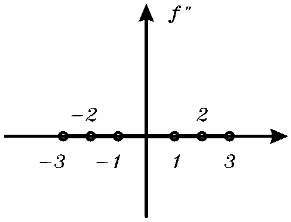
$$\begin{cases} a_n=-\dfrac{L}{n\pi}b'_n-\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}F_k\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x_k\right)\\ b_n=\dfrac{L}{n\pi}a'_n+\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}F_k\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}x_k\right)\end{cases} \quad و \quad \begin{cases} a'_n=-\dfrac{L}{n\pi}b''_n-\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}F'_k\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x'_k\right)\\ b'_n=\dfrac{L}{n\pi}a''_n+\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}F'_k\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}x'_k\right)\end{cases}$$

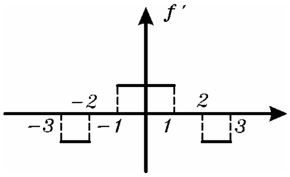
و الی آخر...

به عنوان مثال: ضرایب b_n در سری فوریه تابع نشان داده شده زیر را پیدا کنید.



نمودار f' و f'' به شکل زیر است:





نمودار f هیچ جهشی در یک تناوب ندارد.

نمودار f' در نقاط به طول $2,1,-1,-2$ جهش‌های غیر صفر $-1,-1,1,1$ دارد (دقت داریم f' در نقطه‌ای به طول -3 جهش غیر صفری ندارد)

نمودار f'' هیچ جهشی در یک تناوب ندارد.

به واسطه فرد بودن تابع f می‌توان نوشت:

$$b_n = 2\cdot\frac{L}{n\pi}a'_n = \frac{2L}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}\left(F'_1\sin\frac{n\pi}{L}x'_1 + F'_2\sin\frac{n\pi}{L}x'_2\right)\right) = \frac{6}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}\left((-1)\sin\frac{n\pi(1)}{3} + (-1)\sin\frac{n\pi(2)}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

فرم مختلط سری فوریه

سری فوریه حقیقی تابع $f(x)$ با دوره تناوب $p = 2L$ را می‌توان با توجه به روابط:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

به فرم زیر که به سری فوریه مختلط تابع موسوم است بازنویسی نمود:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

که در آن ضرایب c_n از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

روابط بین ضرایب سری فوریه در فرم حقیقی و مختلط به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)$$

تذکر: در سری فوریه به فرم مختلط اگر c_n و d_n به ترتیب ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ و $g(x)$ باشند، داریم:

ضرایب سری فوریه	تابع متناوب
$c_n e^{-in\frac{\pi}{L}\alpha}$	$f(x-\alpha)$
$c_{n-\alpha}$	$e^{i\alpha\frac{\pi}{L}x} f(x)$
c_{-n}	$f(-x)$
$2Lc_n d_n$	$\int_{-L}^{L} f(\lambda)g(x-\lambda)d\lambda$
$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i d_{n-i}$	$f(x)g(x)$
$in\frac{\pi}{L}c_n$	$f'(x)$
$\frac{L}{in\pi}c_n$	$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (با شرط $c_0=0$)
$\alpha c_n + \beta d_n$	$\alpha f(x)+\beta g(x)$

همچنین اگر $f(x)$ حقیقی باشد، داریم:

$$\mathrm{Re}(c_n)=\mathrm{Re}(c_{-n}) \qquad \mathrm{Im}(c_n)=-\mathrm{Im}(c_{-n})$$

$$|c_n|=|c_{-n}| \qquad \angle a_n=-\angle a_{-n}$$

قضیه پارسوال: اگر $f(x)$ تابعی حقیقی با ضرایب سری فوریه نمایی c_n باشد، داریم:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

مثال ۳۳ ضرایب سری فوریه در فرم مختلط برای تابع $f(x)=\cosh x \ ; \ -1\le x\le +1$ کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{(-1)^n \sinh 1}{1+n^2\pi^2}$ ۲) $\frac{\cosh 1}{1+n^2\pi^2}$ ۳) $\frac{(-1)^n \sinh 1}{n^2+\pi^2}$ ۴) $\frac{\cosh 1}{n^2+\pi^2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi}{L}x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cosh x\, e^{-in\pi x}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cosh x\,(\cos n\pi x-i\sin n\pi x)dx$$

$\cosh x \cos n\pi x$: تابع زوج

$\cosh x \sin n\pi x$: تابع فرد

مشتق	انتگرال
$\cos hx$	$\cos n\pi x$
$\sin hx$	$\dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
$\cosh x$	$\dfrac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

$$C_n = \int_0^1 \cos hx\ \cos n\pi x\, dx$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)C_n = \left(\frac{\cos hx\ \sin n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin hx \cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\frac{n^2\pi^2+1}{n^2\pi^2}C_n = \frac{\sin h1(-1)^n}{n^2\pi^2} \to C_n = \frac{(-1)^n \sin h1}{n^2\pi^2+1}$$

مثال ۳۴ سری فوریه مختلط تابع $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ، $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ به صورت $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i(8nx)}$ می‌باشد حاصل $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\pi}$ ۲) $\frac{8}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) $\frac{1}{\pi}$

حل: گزینه ۱ درست است.

طبق تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{1}{2L}\int_0^{2L}\{f(x)\}^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2$$

در این مسأله می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 dx = \frac{4}{\pi}(\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

مثال ۳۵ سری فوریه مختلط توابع زیر در بازه $(0\,,2\pi)$ داده شده است $g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$ و $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$، $f(x)g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n a^{inx}$، چه رابطه‌ای بین b_n و a_n با c_n برقرار است؟

۱) $c_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n$ ۲) $c_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$ ۳) $a_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n b_n$ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۲ درست است.

از ضرایب سری فوریه مختلط داریم:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}\,dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)e^{-inx}\,dx$$

طرفین تساوی $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ را در $g(x)e^{-ikx}$ ضرب کرده و در بازه $(0\,,2\pi)$ (یک دوره تناوب) انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,e^{-ikx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}\,e^{inx}\,dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} g(x)e^{-i(k-n)x}\,dx \;\rightarrow\; C_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$$

سری فوریه دوگانه

هرگاه تابع $f(x,y)$ نسبت به دو متغیر x و y متناوب با دوره تناوب 2π باشد، یعنی:

$$f(x+2\pi\,,\,y) = f(x\,,\,y+2\pi) = f(x\,,\,y)$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$f(x\,,\,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0n}\cos ny + b_{0n}\sin ny\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{m0}\cos mx + c_{m0}\sin mx\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos mx\cos ny + b_{mn}\cos mx\sin ny + c_{mn}\sin mx\cos ny + d_{mn}\sin mx\sin ny\right)$$

جایی که:

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\,,\,y)\cos mx\,\cos ny\,dx\,dy$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\,,\,y)\cos mx\,\sin ny\,dx\,dy$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\,,\,y)\sin mx\,\cos ny\,dx\,dy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\,,\,y)\sin mx\,\sin ny\,dx\,dy$$

مثال ۳۶ سری فوریه سینوسی دو گانه تابع $f(x,y)$ در دامنه‌های $0<x<L$ و $0<y<K$ عبارت است از $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{mn}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right)$. سری فوریه دو گانه تابع $f(x,y)=xy$ برای $0<x<\pi$ و $0<y<\pi$ کدام است؟ (کامپیوتر ۸۸)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4nm}{\pi^2}\sin(nx)\sin(my)$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm}{4}\sin(nx)\sin(my)$

حل: همه گزینه‌ها نادرست هستند.

$$b_{mn}=\frac{4}{LK}\int_0^K\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{K}dxdy=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi xy\sin nx\sin my\,dxdy$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin nxdx\int_0^\pi y\sin mydy=\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_0^\pi\left(-\frac{y}{m}\cos my+\frac{1}{m^2}\sin my\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{n}\cos m\pi\right)\left(-\frac{\pi}{m}\cos n\pi\right)=\frac{4(-1)^n(-1)^m}{mn}$$

و همهٔ گزینه‌ها نادرستند.

انتگرال فوریه

رفتار یک تابع غیرتناوبی که در فاصله نامتناهی $(-\infty,+\infty)$ تعریف شده است را نمی‌توان از طریق یک سری فوریه توصیف نمود. اما اگر $f(x)$ در فاصله $(-\infty,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ همگرا شود، $f(x)$ را می‌توان در قالب یک بیان انتگرالی از جملات سینوسی و کسینوسی که به انتگرال فوریه تابع موسوم است به فرم زیر نوشت:

$$f(x)=\int_0^\infty\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

که در آن ضرایب انتگرال فوریه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

به سادگی می‌توان دید $A(\omega)$ها برحسب ω تابعی زوج و $B(\omega)$ها برحسب ω تابعی فرد هستند.

نکته:

۱ـ تقارن‌های موجود در منحنی تابع می‌تواند در رابطه با ضرایب انتگرال فوریه اطلاعات مفیدی دهد.

الف) چنانچه $f(x)$ تابعی زوج باشد داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx \qquad B(\omega)=0$$

ب) چنانچه $f(x)$ تابعی فرد باشد، داریم:

$$A(\omega)=0 \qquad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

۲ـ مطابق قضیه دیریکله:

الف) اگر تابع $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشد، داریم:

$x=x_0$ مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطه $=f(x_0)$

ب) اگر تابع $f(x)$ در نقطه x_0 گسسته باشد داریم:

$x=x_0$ مقدارانتگرال فوریه تابع در نقطه $=\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

۳ـ در محاسبه ضرایب انتگرال فوریه (و تبدیلات فوریه) گاهی استفاده از **فرمول تعریف تبدیل لاپلاس** و نیز **تبدیلات لاپلاس توابع خاص** و احتمالاً بعضی **قضایای تبدیل لاپلاس** می‌تواند حجم محاسبات را بطور عمده‌ای تقلیل دهد.

به‌خاطر داریم:

الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L\{f(x)\}=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

ب) تبدیل لاپلاس برخی توابع خاص عبارتست از:

$f(x)$	x^n	e^{ax}	$\cos ax$	$\sin ax$
$F(s)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$

ج) چنانچه تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را $F(s)$ بنامیم، داریم:

$$L\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$L\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}=\int_s^{+\infty} F(s)\,ds$$

$$L\left\{u_a(t)\,f(t-a)\right\}=e^{-as}F(s)$$

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$
$$L\left\{\delta_a(t)\,f(t)\right\} = e^{-as}\,f(a)$$

۴ـ

الف) در معادله انتگرالی به‌صورت زیر که $f(x)$ تابعی معلوم و هدف یافتن $\psi(\omega)$ است:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \psi(\omega)\cos\omega x \, d\omega \qquad (x>0)$$

در حقیقت باید این‌طور فکر کرد که تابع $f(x)$ برای x های مثبت مد نظر قرار گرفته و برای x های منفی به فرم زوج گسترش یافته و انتگرال فوریه تابع حاصله نوشته شده است. لذا داریم:

$$\psi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x \, dx$$

ب) در معادله انتگرالی به‌صورت زیر که $f(x)$ تابعی معلوم و هدف یافتن $\psi(\omega)$ است:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \psi(\omega)\sin\omega x \, d\omega \qquad (x>0)$$

در حقیقت باید این‌طور فکر کرد که تابع $f(x)$ برای x های مثبت مد نظر قرار گرفته و برای x های منفی به فرم فرد گسترش یافته و انتگرال فوریه تابع حاصله نوشته شده است. لذا داریم:

$$\psi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x \, dx$$

۵ـ اگر $B(\omega)$ و $A(\omega)$ ضرایب انتگرال فوریه تابع $f(x)$ باشند داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\left(A^2(\omega)+B^2(\omega)\right)d\omega$$

رابطه فوق به تساوی پارسوال در انتگرال‌های فوریه موسوم است.

۶ـ انتگرال فوریه‌های زیر را که به انتگرال‌های لاپلاس موسومند به‌خاطر می‌سپاریم. (k عدد ثابت مثبت فرض شده است)

$$\text{تابع زوج}:\begin{cases}\dfrac{\pi}{2k}e^{kx} & x<0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2k}e^{-kx} & x>0\end{cases} = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

$$\text{تابع فرد}:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}e^{kx} & x<0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}e^{-kx} & x>0\end{cases} = \int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

۷ـ اگر $f(x)$ تابعی تکه‌ای هموار در بازه $(0\,,+\infty)$ بوده و در این فاصله مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد:

الف) می‌توان $f(x)$ را در بازه $(-\infty\,,0)$ به‌صورت زوج گسترش داده و انتگرال فوریه تابع حاصله را که انتگرال فوریه کسینوسی $f(x)$ نامیده می‌شود، به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\, d\omega \quad , \quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

ب) می‌توان $f(x)$ را در بازه $(-\infty\,,0)$ به‌صورت فرد گسترش داده و انتگرال فوریه تابع حاصله را که انتگرال فوریه سینوسی $f(x)$ نامیده می‌شود، به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad , \quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

صورت مختلط انتگرال فوریه

صورت مختلط انتگرال فوریه تابع $f(x)$ به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx$$

روابط بین ضرایب انتگرال فوریه در فرم حقیقی و مختلط به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$A(\omega)=C(\omega)+C(-\omega) \qquad B(\omega)=i\big(C(\omega)-C(-\omega)\big)$$

$$C(\omega)=\frac{1}{2}\big(A(\omega)-iB(\omega)\big) \qquad C(-\omega)=\frac{1}{2}\big(A(\omega)+iB(\omega)\big)$$

مثال ۳۷ انتگرال فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}1 & -1<t<1\\ 0 & t>1\,,t<-1\end{cases}$ عبارت است از: (کامپیوتر ۸۵)

۱) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega)\sin(\omega t)}{\omega}d\omega$

۲) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega$

۳) $\dfrac{2}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega+\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega)\sin(\omega t)}{\omega}d\omega\right]$

۴) $\dfrac{2}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega+\int_0^{\infty}\frac{\cos^2(\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega\right]$

حل: گزینه ۲ درست است.

f تابعی زوج است و داریم:

$$B(\omega)=0$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1(1)\cos\omega t\,dt+\int_1^{\infty}(0)\cos\omega t\,dt\right\}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^1=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

پس انتگرال فوریه تابع چنین است:

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega t\,d\omega$$

توجه: تابع داده شده زوج است لذا در انتگرال فوریه آن باید $B(\omega)=0$ و به تعبیری جمله $\sin\omega t$ ظاهر نمی‌شود و این نشان می‌دهد فقط گزینه دوم می‌تواند صحیح باشد.

توجه داریم اگر دو گزینه حائز این شرط بود، این موضوع که $A(\omega)$ باید برحسب ω تابعی زوج باشد) ممکن کمک مناسبی بکند.

مثلاً $\frac{\cos\omega}{\omega}$ هیچ وقت نمی‌تواند مبین $A(\omega)$ تابعی باشد زیرا برحسب ω تابعی فرد است.

مثال ۳۸ اگر $u_0(x)-u_1(x)=\int_0^{\infty}p(\omega)\sin\omega x\,d\omega$ باشد $p(\omega)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}(1-\cos\omega)$ ۲) $\frac{2}{\pi\omega}(1+\cos\omega)$ ۳) $\frac{2}{\pi\omega}(1-\cos\omega)$ ۴) $\frac{2}{\pi}(1-\sin\omega)$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=u_0(x)-u_1(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

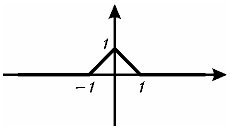
با توجه به معادله انتگرالی داده شده در فرض مسأله، این طور تداعی می‌شود که تابع $f(x)$ به فرم فردگسترش داده شده و سپس برای این تابع فرد انتگرال فوریه سینوسی نوشته‌ایم و $p(\omega)$ همان $B(\omega)$ تابع فرد توصیف شده است، لذا داریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\omega x\,dx=\frac{-2}{\pi\omega}\cos\omega x\Big|_0^1=\frac{-2}{\pi\omega}(\cos\omega-1)$$

مثال ۳۹ اگر $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ ضرایب $A(\omega)$ در انتگرال فوریه تابع از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

۱) $\frac{2}{\pi\omega^2}\cos\omega$ ۲) $\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\sin\omega)$ ۳) $\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$ ۴) 0

حل: گزینه ۳ درست است.



تابع زوج است و داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1 (1-|x|)\cos\omega x\,dx+\int_1^{\infty}(0)\cos\omega x\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1 (1-x)\cos\omega x\,dx\right\}$$

مشتق	انتگرال
$1-x$	$\cos\omega x$
-1	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
0	$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1-x}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right\}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

مثال ۴۰ فرض کنید $f(x)$ تابعی زوج باشد و بدانیم $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$ و $A(\omega)=\frac{\pi e^{-\omega}}{1+\omega^2}$ حاصل $\int_0^1 \left(f(x)-f''(x)\right)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۴) $\ln 2$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega \;\to\; f''(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} -\omega^2 A(\omega)\cos\omega x\,d\omega \;\to$$

$$f(x)-f''(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(1+\omega^2\right)A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(1+\omega^2\right)\frac{\pi e^{-\omega}}{1+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-\omega}\cos\omega x\,d\omega=L(\cos\omega x)\Big|_{s=1}=\frac{s}{s^2+x^2}\Big|_{s=1}=\frac{1}{1+x^2}$$

لذا داریم:

$$\int_0^1\left(f(x)-f''(x)\right)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۴۱ حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos^3 x\,dx$ با فرض $f(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x+\frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x\right)d\omega$ کدام است؟

۱) $\frac{44\pi}{65}$ ۲) $\frac{22\pi}{65}$ ۳) $\frac{11\pi}{65}$ ۴) $\frac{33\pi}{65}$

حل: گزینه ۳ درست است.

فرض مسأله انتگرال فوریه تابع f را نشان می‌دهد و داریم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega^2+4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx \quad \text{و} \quad B(\omega)=\frac{\omega}{\omega^2+4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

از آن‌جا که:

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x \quad\to\quad \cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

می‌توان نوشت:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos^3 x\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}dx=\frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 3x\,dx+3\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\{\pi A(3)+3\pi A(1)\}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3^2+4}+3\frac{1}{1^2+4}\right)=\frac{11\pi}{65}$$

مثال ۴۲ در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty} f(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ ، تابع $f(\omega)$ کدام است؟ (برق ۸۶)

۱) $\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$ ۲) $\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$

۳) $\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}(1-\cos\omega\pi)$ ۴) $\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1-\cos\omega\pi)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$f(\omega)$ باید ضریب انتگرال فوریه سینوسی تابع $g(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ باشد.

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} g(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(\omega+1)x+\sin(\omega-1)x\right)dx$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{\cos(\omega+1)x}{\omega+1}+\frac{\cos(\omega-1)x}{\omega-1}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{-1}{\pi}\left\{\frac{\cos(\omega\pi+\pi)}{\omega+1}+\frac{\cos(\omega\pi-\pi)}{\omega-1}-\frac{\cos 0}{\omega+1}-\frac{\cos 0}{\omega-1}\right\}$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(-\frac{\cos\omega\pi}{\omega+1}-\frac{\cos\omega\pi}{\omega-1}-\frac{1}{\omega+1}-\frac{1}{\omega-1}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\omega\cos\omega\pi}{\omega^2-1}+\frac{2\omega}{\omega^2-1}\right)=\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$$

مثال ۴۳ اگر $\int_0^{\infty} P(\omega)\sin\omega x\, d\omega = \begin{cases} \cos x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ حاصل $\int_0^{\infty} P^2(\omega)\, d\omega$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

عبارت داده شده در فرض مسأله انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ را نشان می‌دهد طبق تساوی پارسوال داریم:

$$f(x) = \int_0^{\infty} P(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad \to \quad \int_0^{\infty} P^2(\omega)\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f^2(x)\, dx$$

لذا در این مسأله داریم:

$$\int_0^{\infty} P^2(\omega)\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{\pi}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۴۴ کدام تابع زیر دارای انتگرال فوریه می‌باشد؟

۱) $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{e^{-x}}{1+x} & x>0 \end{cases}$ ۲) $g(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$

۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} |0|\, dx + \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-x}}{1+x}\right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx$$

از آن‌جا که $x \to +\infty$ داریم $\frac{e^{-x}}{1+x} < e^{-x}$ و می‌دانیم $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ همگرا است پس $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx$ نیز همگرا بوده و لذا f در بازه $(-\infty, +\infty)$ انتگرال‌پذیر و دارای انتگرال فوریه است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} |0|\, dx + \int_0^{1} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx + \int_1^{\infty} |0|\, dx = \int_0^{1} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx$$

از آن‌جا که $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{\sqrt{x}}$ و می‌دانیم $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ همگرا است پس $\int_0^{1} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx$ نیز همگرا بوده و g در بازه $(-\infty, +\infty)$ انتگرال‌پذیر بوده و دارای انتگرال فوریه است.

مثال ۴۵ با توجه به انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ حاصل $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 0

حل: گزینه ۲ درست است.

اگر تابع داده شده را به صورت زوج گسترش دهیم داریم:

انتگرال		مشتق
$\cos\omega x$	$+$	$1-x$
$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$	$-$	-1
$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$		0

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{1}(1-x)\cos\omega x\,dx+\int_1^{\infty}(0)\cos\omega x\,dx\right\}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1-x}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right\}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\right\}$$

لذا انتگرال فوریه کسینوسی تابع داده شده چنین است:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

در $x=0$ که نقطه پیوستگی تابع زوج توسیع داده شده می‌باشد طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0)=\int_0^{\infty}\frac{2(1-\cos\omega)}{\pi\omega^2}\cos\omega(0)\,d\omega\ \to\ \int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$$

تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی

فرض کنید $f(x)$ در فاصله $(0\,,+\infty)$ تکه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد:

الف) تبدیل فوریه کسینوسی تابع چنین تعریف می‌شود:

$$F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\tilde{f}_c(\omega)$$

تبدیل فوریه کسینوسی معکوس $\tilde{f}_c(\omega)$ که تابع $f(x)$ را نتیجه می‌دهد، چنین تعریف می‌کنیم:

$$F_c^{-1}(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{f}_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega=f(x)$$

ب) تبدیل فوریه سینوسی تابع چنین تعریف می‌شود:

$$F_s(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\tilde{f}_s(\omega)$$

تبدیل فوریه سینوسی معکوس $\tilde{f}_s(\omega)$ که تابع $f(x)$ را نتیجه می‌دهد چنین تعریف می‌کنیم:

$$F_s^{-1}(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{f}_s(\omega)\sin\omega x\ d\omega=f(x)$$

می‌توان نشان داد هرگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$F_s(f')=-\omega F_c(f)$$

$$F_c(f')=\omega F_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(0)$$

$$F_s(f'')=-\omega^2 F_s(f)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$$

$$F_c(f'')=-\omega^2 F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$$

تذکر: مطابق اتحادهای پارسوال داریم:

$$\int_0^{\infty}F_s^2(\omega)d\omega=\int_0^{\infty}f^2(x)dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty}F_c^2(\omega)d\omega=\int_0^{\infty}f^2(x)dx$$

مثال ۴۶ تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x)=e^{-\frac{1}{3}x}$ کدام است؟ (هوافضا ۸۷)

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}+\omega^2}\right)$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{3}{1+9\omega^2}\right)$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{3}{9+\omega^2}\right)$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{3}x}\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(L(\cos\omega x)\right)\Big|_{s=\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}+\omega^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{1+9\omega^2}$$

مثال ۴۷ با توجه به تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ حاصل $\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}(1)\sin\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

با توجه به تساوی پارسوال داریم:

$$\int_0^{\infty}\{F_s(\omega)\}^2 d\omega=\int_0^{\infty}\{f(x)\}^2 dx \rightarrow \int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\int_0^{1}(1)^2 dx \rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۴۸ تبدیل فوریه سینوسی $f(t)=\frac{e^{-at}}{t}$ برابر کدام است؟ (برق ۸۷)

۱) $\frac{a}{a^2+\omega^2}$ ۲) $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ۳) $\tan\frac{\omega}{a}$ ۴) $\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}}{t}\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(L\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)\right)\bigg|_{s=a}$$

اما می‌دانیم:

$$L\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)=\int_s^{+\infty}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}ds=\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{\omega}\right)\right)\bigg|_s^{+\infty}=\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{+\infty}{\omega}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{\omega}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{s}{\omega}\right)$$

$$=\operatorname{Arctan}\frac{\omega}{s}$$

لذا داریم:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Arctan}\frac{\omega}{s}\bigg|_{s=a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Arctan}\frac{\omega}{a}$$

توجه داریم عدم حضور $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ در گزینه صحیح (یعنی گزینه دوم) مربوط به تعریف می‌شود.

مثال ۴۹ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-x}\cos x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\omega^4+4}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2+2\omega+2}{\omega^4+4}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2}{\omega^4+4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x}\cos x\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)dx$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left\{L\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)\right\}\bigg|_{s=1}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{s}{s^2+(1+\omega)^2}+\frac{s}{s^2+(1-\omega)^2}\right)\bigg|_{s=1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(1+\omega)^2}+\frac{1}{1+(1-\omega)^2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{(\omega^2+2-2\omega)+(\omega^2+2+2\omega)}{(\omega^2+2+2\omega)(\omega^2+2-2\omega)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{2(\omega^2+2)}{(\omega^2+2)^2-(2\omega)^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}$$

مثال ۵۰ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=xe^{-ax}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2-a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2-a^2}{(a^2+\omega^2)}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty xe^{-ax}\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{L(x\cos\omega x)\right\}\Big|_{s=a}$$

اما می‌دانیم:

$$L(\cos\omega x)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad\rightarrow\quad L(x\cos\omega x)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)=-\frac{(1)(s^2+\omega^2)-(2s)(s)}{(s^2+\omega^2)^2}=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

پس داریم:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$$

مثال ۵۱ با توجه به انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $\frac{1-\cos\pi x}{x}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}\frac{2}{\pi} & 0<\omega<\pi\\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<\omega<\pi\\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 0<\omega<\pi\\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\frac{4}{\pi} & 0<\omega<\pi\\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$

حل: گزینه ۲ درست است.

اگر تابع $f(x)$ را به فرم فرد گسترش دهیم و سپس برایش انتگرال فوریه بنویسیم داریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\omega x\,dx+\int_\pi^\infty(0)\sin\omega x\,dx\right\}=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega\pi)$$

لذا انتگرال فوریه سینوسی تابع داده شده چنین است:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega\pi)\sin\omega x d\omega$$

با تبدیل $\omega \rightleftarrows x$ داریم:

$$f(\omega)=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\pi x}{x}\sin x\omega dx$$

سمت راست تساوی فوق تعریف تبدیل فوریه سینوسی تابع $\dfrac{1-\cos\pi x}{x}$ است.

لذا گزینه موردنظر جواب دوم می‌باشد.

مثال ۵۲ چنانچه برای تابع $f(x)$ داشته باشیم $\begin{cases} f''(x)=3f'(x)+2f(x) \\ f(0)=1 \quad , \quad f'(0)=2 \end{cases}$ تبدیل فوریه سینوسی $f(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\omega}{2+\omega^2}\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}-F_c(f(x))\right\}$

۲) $\dfrac{\omega}{2+\omega^2}\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}+3F_c(f(x))\right\}$

۳) $\dfrac{\omega}{2+\omega^2}\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}+F_c(f(x))\right\}$

۴) $\dfrac{\omega}{2+\omega^2}\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}-3F_c(f(x))\right\}$

حل: گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم:

$$F_s\{f'(x)\}=-\omega F_c\{f(x)\}$$

$$F_s\{f''(x)\}=-\omega^2 F_s\{f(x)\}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0)$$

حال طبق فرض مسأله داریم:

$$F_s\{f''(x)\}=F_s\{3f'(x)+2f(x)\} \rightarrow -\omega^2F_s\{f(x)\}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega(1)=3\{-\omega F_c(f(x))\}+2F_s\{f(x)\} \rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega+3\omega F_c\{f(x)\}=(2+\omega^2)F_s\{f(x)\} \rightarrow F_s\{f(x)\}=\frac{\omega}{2+\omega^2}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}+3F_c(f(x))\right\}$$

تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی محدود

الف) تبدیل فوریه کسینوسی محدود و معکوسش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_c(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$f(x)=\frac{F_c(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}F_c(n)\cos nx$$

ب) تبدیل فوریه سینوسی محدود و معکوسش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_s(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin nx$$

تبدیل فوریه

اگر $f(x)$ تابعی تکه‌ای هموار و در بازه $(-\infty\ ,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، دارای تبدیل فوریه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F\big(f(x)\big)=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

همچنین با دانستن تبدیل فوریه یک تابع، خود تابع از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$F^{-1}\big(F(\omega)\big)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega$$

توجه: برخی در تعریف تبدیل فوریه به‌جای ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ضریب $\frac{1}{2\pi}$ را قرار داده و در رابطه معکوس تبدیل فوریه ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ را نمی‌نویسند.

تذکر: با توجه به روابط $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در انتگرال فوریه تابع حقیقی f یعنی:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx \quad \text{و} \quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

و تعریف تبدیل فوریه تابع حقیقی f یعنی:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$$

می‌توان دید:

$$A(\omega)=\frac{F(\omega)+F(-\omega)}{2\pi} \qquad B(\omega)=\frac{F(\omega)-F(-\omega)}{2\pi i}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\big(F(\omega)\big) \qquad B(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\big(F(\omega)\big)$$

و از اینجا می‌توان گفت:

اگر f تابعی زوج باشد: $\mathrm{Im}\big(F(\omega)\big)=0$

اگر f تابعی فرد باشد: $\mathrm{Re}\big(F(\omega)\big)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}\left(F(\omega)\right) \\ \operatorname{Im}\left(F(\omega)\right)\end{array}\right\}$$

تابعی زوج از ω است.
تابعی فرد از ω است

تذکر: اگر تابعی به صورت $\begin{cases} f(x) & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ تعریف شده باشد، برای محاسبه تبدیل فوریه آن کافی است تبدیل لاپلاس تابع را به دست آورده و در آن s را به $i\omega$ تبدیل کنیم.

تذکر: می‌توان نشان داد:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha(x-k)\,dx\,d\alpha=\frac{f\left(k^-\right)+f\left(k^+\right)}{2}$$

خواص تبدیل فوریه و قضایای تبدیل فوریه

چنانچه تعریف کنیم:

$$F\left(f(x)\right)=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

$$F^{-1}\left(F(\omega)\right)=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega$$

۱ـ قضیه خطی بودن تبدیل فوریه: برای هر دو عدد ثابت c_1 و c_2 داریم:

$$F\left\{c_1 f(x)+c_2 g(x)\right\}=c_1 F(\omega)+c_2 G(\omega)$$

۲ـ قضیه تبدیل فوریه مشتق: اگر f تابعی n بار مشتق‌پذیر باشد به طوری‌که:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\lim_{|x|\to\infty} f'(x)=\cdots=\lim_{|x|\to\infty} f^{(n-1)}(x)=0$$

آنگاه:

$$F\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(i\omega)^n\,F\left\{f(x)\right\}$$

۳ـ قضیه انتگرال: اگر $F\left\{f(x)\right\}=F(\omega)$ باشد؛ آنگاه:

$$F\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right\}=\frac{1}{i\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

۴ـ قضیه تقارن: اگر $F\left\{f(x)\right\}=F(\omega)$ باشد آنگاه:

$$F\left\{F(x)\right\}=2\pi\,f(-\omega)$$

۵ ـ قضیه اول انتقال: اگر $F\left\{f(x)\right\}=F(\omega)$ و a عددی ثابت باشد آنگاه:

$$F\left\{f(x-a)\right\}=e^{-ia\omega}\,F(\omega)$$

۶ ـ قضیه دوم انتقال: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ باشد آنگاه:

$$F\left(e^{iax} f(x)\right) = F(\omega - a)$$

۷ـ قضیه معکوس زمان: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ باشد آنگاه:

$$F\{f(-x)\} = F(-\omega)$$

۸ ـ قضیه مشتق‌گیری از تبدیل فوریه: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ آنگاه:

$$F\left(x^n f(x)\right) = i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

۹ـ تعریف انتگرال هم‌گردشی (کانولوشن) و قضایای آن:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$F(f * g) = F(\omega)\, G(\omega)$$

$$F\left(f(x)\, g(x)\right) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

۱۰ـ قضیه مقیاس: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ آنگاه:

$$F\left(f(ax)\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

۱۱ـ قضیه پارسوال: اگر $F\left(f(x)\right) = F(\omega)$ آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

۱۲ـ قضایای تبدیل: اگر $F\left(g(x)\right) = G(\omega)$ و $F\left(f(x)\right) = F(\omega)$ آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, G(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, G(-\omega)\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, G(\omega)\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, \overline{G(\omega)}\, d\omega$$

تبدیل فوریه چند تابع خاص

اگر a عدد ثابت مثبتی باشد داریم:

$f(x)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(x)$	1
$\cos ax$	$\pi(\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a))$
$\sin ax$	$i\pi(\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a))$
$e^{-a\|x\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-a\|\omega\|}$
$\dfrac{x}{a^2+x^2}$	$-i\dfrac{\pi}{a}\dfrac{\omega}{\|\omega\|}e^{-a\|\omega\|}$
$u(x+a)-u(x-a)$	$\dfrac{2}{\omega}\sin\omega a$
$u(x)e^{-ax}$	$\dfrac{1}{a+i\omega}$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$
$\dfrac{\sin ax}{x}$	$\begin{cases}\pi & \|\omega\|<a\\ 0 & \|\omega\|>a\end{cases}$
$u(x)$	$\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$
e^{iax}	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\mathrm{sgn}(x)$	$\dfrac{2}{i\omega}$

نکته: به‌خاطر داشته باشید اگر $f(x)$ حقیقی باشد:

۱ـ قسمت حقیقی $F(\omega)$ تابعی زوج است.

۲ـ قسمت موهومی $F(\omega)$ تابعی فرد است.

۳ـ اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد داریم: $\mathrm{Im}\,(F(\omega))=0$

۴ـ اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد داریم: $\mathrm{Re}\,(F(\omega))=0$

۵ـ $\angle F(\omega)=-\angle F(-\omega)$ $\quad |F(\omega)|=|F(-\omega)|$

مثال ۵۳ تبدیل فوریه توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=e^{-a|x|}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$

۳) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ ۴) $f(x)=\dfrac{\sin ax}{x}$

۵) $f(x)=e^{-ax^2}$ ۶) $f(x)=\operatorname{Arc}\cot x$

حل:

۱ـ طبق تعریف داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-a|x|}\cos\omega x}_{\text{تابع زوج}}dx-i\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-a|x|}\sin\omega x}_{\text{تابع فرد}}dx$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-a|x|}\cos\omega x\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos\omega x\,dx=2\left(L(\cos\omega x)\right)\Big|_{s=a}=2\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=a}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

۲ـ طبق تعریف داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-a}^{a}1\,e^{-i\omega x}dx=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}=\frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}\right)=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}}{2i}$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin a\omega$$

۳ـ دیدیم تبدیل فوریه $e^{-a|x|}$ به صورت $\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$ است، لذا طبق قضیه تقارن داریم:

$$F\left(\frac{2a}{x^2+a^2}\right)=2\pi\,e^{-a|-\omega|}\ \rightarrow\ F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

۴ـ دیدیم تبدیل فوریه $\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ به صورت $\dfrac{2\sin a\omega}{\omega}$ است، لذا طبق قضیه تقارن داریم:

$$F\left(\frac{2\sin ax}{x}\right)=2\pi\begin{cases}1 & |-\omega|<a\\ 0 & |-\omega|>a\end{cases}\ \rightarrow\ F\left(\frac{\sin ax}{x}\right)=\begin{cases}\pi & |\omega|<a\\ 0 & |\omega|>a\end{cases}$$

۵ـ

$$f'(x)=-2axe^{-ax^2}=-2axf(x)\ \rightarrow\ F(f'(x))=F(-2axf(x))\ \rightarrow\ i\omega F(\omega)=-2ai\frac{dF(\omega)}{d\omega}\ \rightarrow$$

$$\frac{dF}{F(\omega)}=-\frac{\omega}{2a}d\omega\ \xrightarrow{\int}\ \ln F(\omega)=-\frac{\omega^2}{4a}+c\ \rightarrow\ F(\omega)=ke^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

برای محاسبه k توجه داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-i\omega x}dx \;\rightarrow\; F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx \;\rightarrow\; F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

پس باید $k=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ و به دست می‌آید:

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

۶ـ

$$f(x)=\operatorname{Arc}\cot x \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{-1}{1+x^2} \;\rightarrow\; F\big(f'(x)\big)=F\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) \;\rightarrow\; i\omega F(\omega)=-\pi e^{-|\omega|} \;\rightarrow$$

$$F(\omega)=\frac{-\pi e^{-|\omega|}}{i\omega}$$

مثال ۵۴ تبدیل فوریه تابع پله‌ای واحد هویساید $f(t)=u(t-a)$ کدام است؟ (هوافضا ۸۵)

۱) $\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}$ ۲) $\frac{-e^{ia\omega}}{i\sqrt{2\pi}}$ ۳) $\frac{\omega e^{ia\omega}}{i\sqrt{2\pi}}$ ۴) $\frac{e^{ia\omega}}{i\omega\sqrt{2\pi}}$

حل: همه گزینه‌ها نادرست هستند.

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-a)\,e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{a}(0)e^{-i\omega t}dt+\int_{a}^{+\infty}(1)e^{-i\omega t}dt\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right)\Bigg|_{a}^{+\infty}$$

$$=\frac{-1}{i\omega\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\infty}-e^{-i\omega a}\right)=\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}e^{-ia\omega}$$

که در گزینه‌ها نمی‌باشد.

مثال ۵۵ با توجه به فوریه تابع $f(x)=e^{-a|x|}$ و استفاده از تساوی پارسوال حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) $\frac{2\pi}{a^3}$ ۲) $\frac{\pi}{2a^3}$ ۳) $\frac{2\pi}{a^4}$ ۴) $\frac{\pi}{2a^4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F\left(e^{-a|x|}\right)=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$$

حال طبق تساوی پارسوال می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4a^2}{\left(\omega^2+a^2\right)^2}d\omega \;\rightarrow$$

$$2\int_{0}^{\infty} e^{-2ax}dx = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+a^2\right)^2} \;\rightarrow\; \frac{2}{-2a}e^{-2ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+a^2\right)^2} \;\rightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+a^2\right)^2} \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+a^2\right)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$$

مثال ۵۶ تابع f بر R مطلقاً انتگرال پذیر و در هر بازهٔ کراندار قطعه‌ای پیوسته است. اگر $f\left(2^+\right)=10$ و $f\left(2^-\right)=12$، مقدار $\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha(x-2)\,dx\,d\alpha$ کدام است؟ (هوافضا ۸۸)

۱) 5π ۲) 6 ۳) 11π ۴) 22

حل: گزینه ۳ درست است.

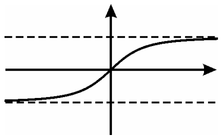
ازآنجاکه:

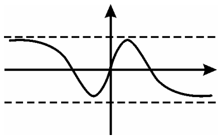
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha(x-k)\,dx\,d\alpha = \frac{f\left(k^-\right)+f\left(k^+\right)}{2}$$

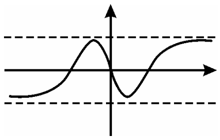
لذا، داریم:

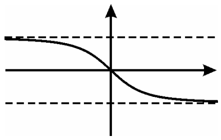
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha(x-2)\,dx\,d\alpha = \frac{f\left(2^-\right)+f\left(2^+\right)}{2} = \frac{12+10}{2} = 11$$

مثال ۵۷ اگر $F(\omega)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-kx} & x>0\end{cases}$ باشد $(k>0)$ نمودار $\operatorname{Arg}F(\omega)$ برحسب ω چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


حل: گزینه ۴ درست است.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_0^{\infty} e^{-kx}e^{-i\omega x}dx = \left(L\left(e^{-kx}\right)\right)\Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{s+k}\Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{i\omega+k}$$

می‌توان دید:

$$F(\omega)=\frac{k-i\omega}{k^2+\omega^2} \quad \to \quad \operatorname{Arg}F(\omega)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{-\omega}{k}\right)=\varphi(\omega)$$

با توجه به مثبت بودن k، ملاحظه می‌شود:

$$\lim_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega)=\operatorname{Arctan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to-\infty}\varphi(\omega)=\operatorname{Arctan}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$

پس گزینه‌های اول و سوم مردودند.

$$\varphi'(\omega)=\frac{-\frac{1}{k}}{1+\left(\frac{-\omega}{k}\right)^2}=\frac{-k}{k^2+\omega^2}<0$$

پس $\varphi(\omega)$ اکیداً نزولی است و گزینه دوم نیز مردود است و گزینه چهارم صحیح می‌باشد.

مثال ۵۸ اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=e^{-\alpha t^2}$ برابر با $F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ باشد، تبدیل فوریهٔ تابع $g(t)=te^{-\alpha t^2}$ عبارت خواهد بود؟ $\left(j=\sqrt{-1}\right)$ (کامپیوتر ۸۵)

۱) $\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
۲) $-\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
۳) $\frac{j\omega}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
۴) $-\frac{j\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$F\left(te^{-\alpha t^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\alpha t^2}e^{-i\omega t}\,dt$$

با اعمال روش جزء به‌جزء داریم:

$$\begin{cases} e^{-i\omega t}=u \\ te^{-\alpha t^2}dt=dv \end{cases} \to \begin{cases} -i\omega e^{-i\omega t}dt=du \\ \frac{-1}{2\alpha}e^{-\alpha t^2}=v \end{cases}$$

$$F\left(te^{-\alpha t^2}\right)=\frac{-1}{2\alpha}e^{-i\omega t}e^{-\alpha t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega}{2\alpha}e^{-\alpha t^2}e^{-i\omega t}dt=\frac{-i\omega}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t^2}e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{i\omega}{2\alpha}F\left(e^{-\alpha t^2}\right)=\frac{-i\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

توجه داریم:

$$\left|e^{-i\omega t}e^{-\alpha t^2}\right|=\left|e^{-i\omega t}\right|\left|e^{-\alpha t^2}\right|=e^{-\alpha t^2}$$

و حاصل فوق در $t\to\pm\infty$ برابر صفر خواهد بود.

راه‌دیگر: مطابق قضیه مشتق‌گیری از تبدیل فوریه داریم:

$$F\big(f(t)\big)=F(\omega)\ \rightarrow\ F\big(t^n f(t)\big)=i^n\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

$$F\left(te^{-\alpha t^2}\right)=i^1\frac{d}{d\omega}F\left(e^{-\alpha t^2}\right)=i\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\right)=i\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{-2\omega}{4\alpha}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}=-\frac{i\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

راه دیگر: مطابق قضیه تبدیل فوریه مشتقات یک تابع داریم:

اگر $F\big(f(t)\big)=F(\omega)\ \rightarrow\ F\big(f^{(n)}(t)\big)=(i\omega)^n F(\omega)$

از آن‌جا که:

$$f(t)=e^{-\alpha t^2}\ \rightarrow\ f'(t)=-2\alpha te^{-\alpha t^2}\ \rightarrow\ te^{-\alpha t^2}=\frac{-1}{2\alpha}f'(t)\ \rightarrow$$

$$F\left(te^{-\alpha t^2}\right)=\frac{-1}{2\alpha}F\big(f'(t)\big)=-\frac{1}{2\alpha}(i\omega)^1F\big(f(t)\big)=\frac{-1}{2\alpha}i\omega\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

مثال ۵۹ اگر تبدیل فوریه تابع f را با $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)dt$ تعریف کنیم، آنگاه تبدیل فوریهٔ تابع $f(t)=e^{-a|t|}.\sin bt$ (b ثابت و $a>0$) کدام است؟ (مکانیک ۸۸)

۱) $\dfrac{4iab\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$

۲) $\dfrac{-4iab\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$

۳) $\dfrac{4ib\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$

۴) $\dfrac{4ab\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

مطابق تعریف داریم:

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-a|t|}\sin bt\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\big(\underbrace{\cos\omega t}_{\text{زوج}}-i\underbrace{\sin\omega t}_{\text{فرد}}\big)\underbrace{e^{-a|t|}}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin bt}_{\text{فرد}}\,dt$$

$$=-2i\int_0^{\infty}\sin\omega t\,e^{-a|t|}\sin bt\,dt=-2i\int_0^{\infty}e^{-at}\sin bt\sin\omega t\,dt=-2i\big(L(\sin bt\sin\omega t)\big)\Big|_{s=a}$$

$$=-2i\left(L\left(\frac{1}{2}\big(\cos(b-\omega)t-\cos(b+\omega)t\big)\right)\right)\Bigg|_{s=a}=-i\left(\frac{s}{s^2+(b-\omega)^2}-\frac{s}{s^2+(b+\omega)^2}\right)\Bigg|_{s=a}$$

$$=-i\left(\frac{a}{a^2+(b-\omega)^2}-\frac{a}{a^2+(b+\omega)^2}\right)=-ia\left(\frac{1}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)-2b\omega}-\frac{1}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)+2b\omega}\right)$$

$$=-ia\frac{4b\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}=\frac{-4iab\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$$

راه دیگر:

می‌دانیم:

$$F\left(e^{-a|t|}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$F\left(e^{iat}f(t)\right)=F\left(f(t)\right)\Big|_{\omega\to\omega-a}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$F\left(e^{-a|t|}\sin bt\right)=F\left(e^{-a|t|}\frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left\{F\left(e^{ibt}e^{-a|t|}-e^{-ibt}e^{-a|t|}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\frac{2a}{a^2+\omega^2}\Big|_{\omega\to\omega-b}-\frac{2a}{a^2+\omega^2}\Big|_{\omega\to\omega+b}\right\}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{2a}{a^2+(\omega-b)^2}-\frac{2a}{a^2+(\omega+b)^2}\right\}$$

$$=\frac{a}{i}\frac{4\omega b}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4\omega^2b^2}=\frac{-4iab\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$$

مثال ۶۰ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را $F(\omega)$ نامیده‌ایم تبدیل فوریه تابع $xe^{-ix}f(x)$ چیست؟

۱) $iF'(\omega-1)$ ۲) $iF'(\omega+1)$ ۳) $-iF'(\omega+1)$ ۴) $-iF'(\omega-1)$

حل: گزینه ۲ درست است.

اگر $F\left(g(x)\right)=G(\omega)$ باشد داریم:

قضیه دوم انتقال : $F\left(e^{iax}g(x)\right)=G(\omega-a)$

قضیه مشتق‌گیری از تبدیل فوریه : $F\left(xg(x)\right)=iG'(\omega)$

لذا می‌توان نوشت:

$$F\left(f(x)\right)=F(\omega)\ \rightarrow\ F\left(e^{-ix}f(x)\right)=F(\omega+1)\ \rightarrow\ F\left(xe^{-ix}f(x)\right)=i\left(F(\omega+1)\right)'=iF'(\omega+1)$$

راه دیگر: طبق فرض مسأله داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\ \rightarrow\ F'(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}-ixf(x)e^{-i\omega x}\,dx\ \rightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-i\omega x}\,dx=iF'(\omega)$$

حال می‌توان گفت:

$$F\left(xe^{-ix}f(x)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-ix}f(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-i(1+\omega)x}f(x)dx=iF'(\omega+1)$$

مثال ۶۱ اگر $\begin{cases} u''-u=f(x) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u=\lim\limits_{|x|\to\infty} u'=0 \end{cases}$ داریم:

۱) $u(x)=-2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\lambda|} f(\lambda)d\lambda$

۲) $u(x)=-2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-\lambda|} f(\lambda)d\lambda$

۳) $u(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\lambda|} f(\lambda)d\lambda$

۴) $u(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|x-\lambda|} f(\lambda)d\lambda$

حل: گزینه ۳ درست است.

از معادله داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$(i\omega)^2 U(\omega)-U(\omega)=F(\omega) \quad\to\quad U(\omega)=\frac{-1}{\omega^2+1}F(\omega)$$

می‌دانیم:

$$F\left(e^{-a|x|}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad\to\quad F^{-1}\left(\frac{1}{\omega^2+1}\right)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

لذا داریم:

$$u(x)=F^{-1}\left(\frac{-1}{\omega^2+1}F(\omega)\right)=-\frac{1}{2}e^{-|x|}*f(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\lambda|} f(\lambda)d\lambda$$

مجموعه تست آنالیز فوریه

۱. تابع $f(x)=\tan x$

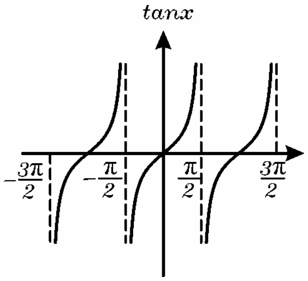
۱) دارای سری فوریه نمی‌باشد زیرا متناوب نیست

۲) دارای سری فوریه نمی‌باشد چون در یک فاصله تناوب مقادیر حداقل و حداکثر محدودی ندارد.

۳) دارای سری فوریه می‌باشد زیرا متناوب با دوره تناوب $P=\pi$ می باشد.

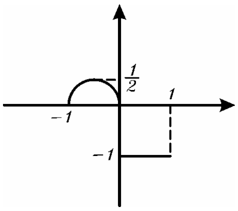
۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

حل: گزینه ۲ درست است.



تابع $f(x)=\tan x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $P=\pi$ است ولی با توجه به نمودار این تابع که مطابق شکل مقابل است ملاحظه می‌کنیم این تابع در هر فاصله تناوب خود مقادیر اکسترمم متناهی ندارد و لذا گزینه دوم صحیح است.

۲. ثابت سری فوریه تابع ترسیم شده در شکل مقابل کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

سطح خالص زیر نمودار تابع در فاصله $(-1\,,1)$ چنین است:

$$S = (\text{مساحت نیم‌دایره}) - (\text{مساحت مربع}) = \left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - (1\times1) = \frac{\pi}{8} - 1$$

لذا مقدار متوسط تابع در فاصله مذکور که همان ثابت سری فوریه نیز خواهد بود اینگونه محاسبه می‌شود:

$$\frac{\frac{\pi}{8}-1}{2} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{2}$$

۳.ثابت سری فوریه تابع $f(x) = x^2\cos x$ در فاصله $[-\pi\ ,\ \pi]$ کدام است؟

۱) -2π ۲) -4π ۳) -2 ۴) -4

حل: گزینه ۳ درست است.

چون $f(x)$ تابعی زوج است داریم:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$$

با اعمال روش جز به‌جزء می‌توان نوشت:

انتگرال		مشتق
$\cos x$	$+$	x^2
$\sin x$	$-$	$2x$
$-\cos x$	$+$	2
$-\sin x$		0

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left\{x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right\}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\{-2\pi\} = -4$$

لذا ثابت سری فوریه چنین است:

$$\frac{a_0}{2} = -2$$

۴.اگر $f(x) = \begin{cases} 4x & -1 < x < 1 \\ x^2 & 1 < x < 2 \end{cases}$ باشد حاصل سری فوریه تابع در $x = 1$ کدام است؟

۱) 5 ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) 3 ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ ناپیوسته است لذا طبق قضیه دیریکله داریم:

$$\text{مقدار سری فوریه تابع در } x=1 = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{(1)^2 + 4(1)}{2} = \frac{5}{2}$$

۵.سری فوریه کدامیک از توابع زیر با خودش یکسان نیست؟

۱) $-\pi < x < \pi$ و $f(x)=\sin\frac{x}{4}$ ‏ ‏ ‏ ۲) $-2\pi < x < 2\pi$ و $f(x)=\sin x$

۳) $-4\pi < x < 4\pi$ و $f(x)=\cos\frac{x}{4}$ ‏ ‏ ‏ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۲ درست است.

همگی توابع داده شده بخودی خود بدون نیاز به هیچ شرط اضافی متناوبند. لذا هر کدام که فاصله تعریف شده برای آنها هر مضرب صحیحی از دوره تناوبشان باشد، سری فوریه‌اش با خود تابع یکسان است.

$\sin\frac{x}{4}$ دوره تناوب خودش $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$ است که چهار برابر فاصله تعریف شده برای این تابع است.

$\sin x$ دوره تناوب خودش $\frac{2\pi}{1}=2\pi$ است که نصف فاصله تعریف شده برای این تابع است.

$\cos\frac{x}{4}$ دوره تناوب خودش $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$ است که برابر فاصله تعریف شده برای این تابع است.

پس گزینه اول جواب موردنظر است.

۶.در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\sin^2 x\cos^3 x$، ضریب جملات $\cos 2x\ ,\ \cos 3x$ به ترتیب کدام است؟

۱) $0\ ,\ \frac{-1}{16}$ ‏ ‏ ‏ ۲) $\frac{1}{16}\ ,\ 0$ ‏ ‏ ‏ ۳) $0\ ,\ \frac{-1}{8}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $\frac{1}{8}\ ,\ \frac{-1}{8}$

حل: گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم:

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x \quad\to\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x \quad\to\quad \cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sin^2 x\cos^3 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\right)=\frac{1}{8}\left(\cos 3x+3\cos x-\cos 2x\cos 3x-3\cos 2x\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\cos 3x+3\cos x-\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)-\frac{3}{2}(\cos 3x+\cos x)\right)=\frac{1}{8}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 5x\right)$$

پس ضرایب $\cos 2x$ و $\cos 3x$ به ترتیب صفر و $-\frac{1}{16}$ می‌باشد.

۷.اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^4+1}\sin n\pi x$ **باشد مقدار متوسط تابع** $f(x)\sin 2\pi x$ **در بازه** $[0,1]$ **کدام است؟**

۱) $\frac{-1}{17}$ ۲) $\frac{1}{17}$ ۳) $\frac{2}{17}$ ۴) $\frac{-2}{17}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ که در فرض مسأله داده شده است ملاحظه می‌شود $b_n=\frac{(-1)^n n}{n^4+1}$ یعنی داریم:

$$\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx=\frac{(-1)^n n}{n^4+1}$$

لذا به ازاء $n=2$ به دست می‌آید:

$$2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi x\,dx=\frac{(-1)^2(2)}{(2)^4+1}\ \rightarrow\ \int_0^1 f(x)\sin 2\pi x\,dx=\frac{1}{17}$$

حال می‌گوئیم:

$$\text{مقدار متوسط تابع } f(x)\sin 2\pi x \text{ در بازه } [0,1]=\frac{\int_0^1 f(x)\sin 2\pi x dx}{1-0}=\frac{1}{17}$$

۸.سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع f **را بنویسید هرگاه در ناحیه‌ای که** f **غیرصفر است تعریف آن بـه صـورت** $f(x)=H(-x)-2H(1-x)+H(2-x)$ **باشد که در آن** $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ **(برق ۸۵)**

۱) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۲) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۳) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۴) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases}0<x<1 & \rightarrow\ f(x)=0-2+1=-1\\ 1<x<2 & \rightarrow\ f(x)=0-0+1=1\\ x>2 & \rightarrow\ f(x)=0-0+0=0\end{cases}$$

لذا برای $0<x<2$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\end{cases}$$

و ضرایب بسط کسینوسی تابع چنین می‌شود:

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=\int_0^1 -1\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_1^2 1\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_1^2=\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\begin{cases}0 & n=2,4,6,\dots\\ 1 & n=1,5,9,\dots\\ -1 & n=3,7,11,\dots\end{cases}\qquad=\frac{-4}{\pi}\,\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 1\,dx+\int_1^2 -1\,dx=0$$

پس سری فوریه کسینوسی تابع موردنظر چنین است:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

۹. در تابع $f(x)=x-x^2$ با شرط $-\pi<x<\pi$ اگر بنویسیم:

$$f(x)\sim a+b\cos x+c\sin x$$

آنگاه ضرایب a و b و c عبارتند از:

۱) $a=\frac{-\pi^2}{3}$, $b=4$, $c=2$
۲) $a=\frac{-\pi^2}{6}$, $b=4$, $c=2$

۳) $a=\frac{-2\pi^2}{3}$, $b=4$, $c=2$
۴) $a=\frac{-\pi^2}{3}$, $b=8$, $c=2$

حل: گزینه ۱ درست است.

بدیهی است باید a,b,c را از طریق ضریب سری فوریه تابع $f(x)$ یافت بطوری که:

$$a=\frac{a_0}{2}\ ,\ b=a_1\ ,\ c=b_1$$

البته از گزینه‌ها مشخص است که نیازی به محاسبه c نداریم:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx\right\}=\frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{-2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{-2}{3}\pi^2\ \rightarrow$$

$$a=\frac{-\pi^2}{3}$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x-x^2\right)\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos x\,dx\right\}$$

$$=\frac{-2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos x\,dx$$

$$a_1=\frac{-2}{\pi}\left\{x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right\}\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi}\{-2\pi\}=4\ \to\ b=4$$

مشتق		انتگرال
x^2		$\cos x$
	$+\searrow$	
$2x$		$\sin x$
	$-\searrow$	
2		$-\cos x$
	$+\searrow$	
0		$-\sin x$

۱۰. سری فوریه $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ به‌صورت $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ می‌باشد، حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{27}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^3}{12}$

حل: گزینه ۲ درست است.

طبق تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f^2(x)dx$$

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{(1)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0^2+\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^2\right)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(0)^2dx+\int_{0}^{\pi}(1)^2dx\right\}\ \to$$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\pi}\ \to\ \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{2}\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

۱۱. اگر $f(x)=\begin{cases}x^4-3x^3+2x^2+x & 0\le x<1\\ 2x-x^3 & 1<x\le 2\end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه تابع، حداقل با چه سرعتی به صفر می‌گراید؟

۱) $\frac{1}{n}$ ۲) $\frac{1}{n^2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۲ درست است.

تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است زیرا:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}x^4-3x^3+2x^2+x=\lim_{x\to 1^+}2x-x^3=1$$

از طرفی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3-9x^2+4x+1 & 0\le x<1\\ 2-3x^2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

مشاهده می‌شود:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}4x^3-9x^2+4x+1=0$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}2-3x^2=-1$$

پس $f'(x)$ در یک بازه تناوب ناپیوستگی دارد.

لذا ضرایب سری فوریه تابع حداقل با سرعت $\frac{1}{n^2}$ به سمت صفر میل می‌کنند.

۱۲. در بسط سری فوریه سینوسی $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $b_{2k}=0$ ۲) $b_{2k+1}=0$ ۳) $b_{4k}=0$ ۴) $b_{4k+1}=0$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2)\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)-\frac{2}{n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left(2\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)=\begin{cases}\frac{-2}{n\pi}(2(1)-(1)-1)=0 & n=4k\\ \frac{-2}{n\pi}(2(-1)-0-1)=\frac{6}{n\pi} & n=4k+1\\ \frac{-2}{n\pi}(2(1)-(-1)-1)=\frac{-4}{n\pi} & n=4k+2\\ \frac{-2}{n\pi}(2(-1)-0-1)=\frac{6}{n\pi} & n=4k+3\end{cases}$$

لذا گزینه ۳ درست است.

۱۳. اگر $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<4 \\ 8-x & 4<x<8 \end{cases}$ **آنگاه:**

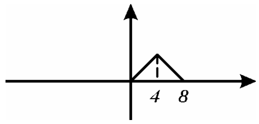
۱) سری فوریه کسینوسی و سری فوریه معمولی یکسانند.

۲) سری فوریه سینوسی قرینهٔ سری فوریه کسینوسی می‌باشد.

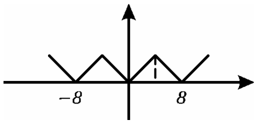
۳) هم سری فوریه سینوسی و هم کسینوسی با سری فوریه معمولی یکسانند.

۴) هیچ‌کدام

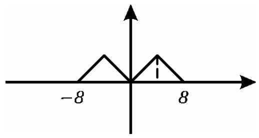
حل: گزینه ۱ درست است.



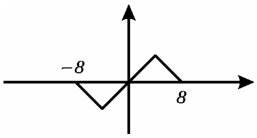
تابع تعریف شده



گسترش متناوب تابع



گسترش زوج تابع



گسترش فرد تابع

ملاحظه می‌شود از گسترش زوج تابع شکلی حاصل می‌شود که اگر به‌طور متناوب توسیع داده شده مشابه گسترش متناوب تابع اصلی خواهد شد پس گزینه اول صحیح است.

۱۴. سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x$ **و** $0\le x<L$ **، کدام است؟** **(مکانیک ۸۸)**

۱) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۲) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۳) $L+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مشتق		انتگرال
x		$\cos\frac{n\pi}{L}x$
	$+$	
1		$\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x$
	$-$	
0		$-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{L}x$

$$a_n=\frac{2}{L}\left(\frac{xL}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{L}x\right)\Bigg|_0^L=\frac{2}{L}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\right)=\begin{cases}0 & \text{زوج } n \\ -\frac{4L}{n^2\pi^2} & \text{فرد } n\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L xdx=\frac{2}{L}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L=L$$

لذا سری فوریه کسینوسی تابع چنین است:

$$f(x)=\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$$

۱۵. اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 1-x & 1<x<2\end{cases}$ **و داشته باشیم** $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{2}x$ **حاصل** $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

حل: گزینه ۴ درست است.

بازه مربوط به تعریف تابع $f(x)$ به‌صورت $0<x<2$ می‌باشد و این‌که در سری فوریه نوشته شده برای آن فقط جمله $\sin\frac{n\pi}{2}x$ ظاهر شده تصریح می‌شود این تابع به‌صورت فرد گسترش یافته و سپس برای آن بسط فوریه نوشته شده است. لذا داریم:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$

۱۶. با توجه به بسط سری فوریه سینوسی $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\ ,\ 0<x<\pi$ **حاصل سری عددی** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi-1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}-1$ ۳) $\frac{\pi+1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}+1$

حل: گزینه ۱ درست است.

مشتق	انتگرال
$\frac{\pi-x}{2}$	$\sin nx$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{n}\cos nx$
0	$\frac{-1}{n^2}\sin nx$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\left\{\frac{x-\pi}{2n}\cdot\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right\}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{n}$$

لذا:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته بوده و طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(1)=\frac{\pi-1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\ \rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$$

۱۷. کدام نوع سری فوریه برای تابع $f(x)=x,\ 0<x<2\pi$ مناسب‌تر است؟

۱) سری فوریه سینوسی ۲) سری فوریه کسینوسی ۳) تفاوتی نمی‌کند. ۴) نمی‌توان نظر داد.

حل: گزینه ۲ درست است.

در سری فوریه کسینوسی تابع داریم:

مشتق		انتگرال
x		$\cos\frac{n}{2}x$
	$+$	
1		$\frac{2}{n}\sin\frac{n}{2}x$
	$-$	
0		$\frac{-4}{n^2}\cos\frac{n}{2}x$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\cos\frac{n\pi}{2\pi}x\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2x}{n}\sin\frac{n}{2}x+\frac{4}{n^2}\cos\frac{n}{2}x\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n-\frac{4}{n^2}\right)=\frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

در سری فوریه سینوسی تابع داریم:

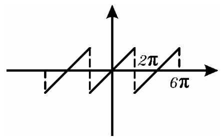
مشتق		انتگرال
x		$\sin\frac{n}{2}x$
	$+$	
1		$\frac{-2}{n}\cos\frac{n}{2}x$
	$-$	
0		$\frac{-4}{n^2}\sin\frac{n}{2}x$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{n\pi}{2\pi}x\,dx$$

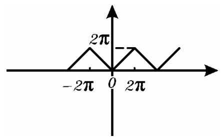
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{-2x}{n}\cos\frac{n}{2}x+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n}{2}x\right\}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-4\pi}{n}(-1)^n\right)=\frac{-4}{n}(-1)^n$$

چون با افزایش n، a_nها با سرعت بیشتری نسبت به b_nها به صفر می‌گرایند سری فوریه کسینوسی بهتر است.

راه دیگر:



توسیع فرد تابع $f(x)$



توسیع زوج تابع $f(x)$

با توجه به این‌که در توسیع زوج تابع نقطه ناپیوستگی ندارد اما در توسیع فرد نقطه ناپیوسته داریم بنابراین سری فوریه کسینوسی مناسب خواهد بود و یا به عبارت بهتر سریع‌تر همگرا می‌شود.

۱۸. اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\sin nx$ **باشد، حاصل** $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) صفر

حل: گزینه ۱ درست است.

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\sin nx\cdot\sin x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\sin x\,dx$$

اما داریم:

$$\int_0^{\pi}\sin nx.\sin x\;dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right\}\Bigg|_0^{\pi}=0\qquad (\text{بجز در } n-1=0)$$

و در $n=1$ به دست می‌آید:

$$\int_0^{\pi}\sin x\cdot\sin x\;dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$I=\frac{1}{4(1)^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

راه دیگر: از فرض مساله می‌توان دریافت که f تابعی فرد بوده (زیرا در سری فوریه آن فقط جمله $\sin nx$ وجود دارد) و داشته‌ایم $b_n=\frac{1}{4n^2-1}$ و به واسطه $\sin\frac{n\pi}{L}x=\sin nx$ مقدار $L=\pi$ می‌باشد.

لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\qquad (\text{تعریف } b_n)$$

به ازاء $n=1$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{4(1)^2-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx\;\rightarrow\;\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}$$

۱۹. سری فوریه تابع $-\pi\le x\le\pi$, $f(x)=|x|$ بصورت $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ می‌باشد. حاصل سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{11}$ ۴) $\frac{3\pi}{13}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x\le 0\\ +x & 0\le x\le\pi\end{cases}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

چون $f(-\pi)=f(\pi)$ لذا مجازیم از طرفین رابطه داده شده مشتق گرفته و بدست آوریم:

$$\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0<x\le\pi\end{cases}=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(2n-1)}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$$

در $x=\frac{\pi}{2}$ طبق قضیه دیریکله بدست می‌آید:

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}\to 1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\to S=\frac{\pi}{4}$$

۲۰. سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1+2x & -1\le x<0\\ 1-2x & 0<x\le 1\end{cases}$ **به صورت** $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$ **می‌باشد. حاصل سری** $S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^5}-+\cdots$ **کدام است؟**

۱) $\frac{9}{10}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{10}$ ۴) $\frac{\pi^3}{32}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases}1+2x & -1\le x<0\\ 1-2x & 0<x\le 1\end{cases}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق بدست می‌آید:

$$\begin{cases}x+x^2 & -1\le x<0\\ x-x^2 & 0<x\le 1\end{cases}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x+k$$

در $x=0$ طبق قضیه دیریکله بدست می‌آید $k=0$، حال اگر به رابطه حاصله در $x=\frac{1}{2}$ نگاه کنیم داریم:

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\to\frac{1}{4}=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}\to$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi^3}{16}\to\frac{2}{1^3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3^3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{2}{5^3}\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots=\frac{\pi^3}{16}\to$$

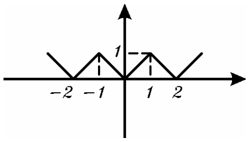
$$2\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-+\cdots\right)=\frac{\pi^3}{16}\to I=\frac{\pi^3}{32}$$

۲۱. در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\end{cases}$ **حاصل** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل: گزینه ۱ درست است.

گسترش متناوب تابع چنین است:



که تابعی زوج را نشان می‌دهد.

لذا:

$$b_n = 0$$

بدیهی است ثابت سری فوریه تابع $\left(\frac{a_0}{2}\right)$ که مقدار متوسط تابع در یک فاصله تناوب می‌باشد برابر است با:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{مساحت خالص محصور به نمودار تابع در یک بازه تناوب}}{\text{طول دوره تناوب}} = \frac{\frac{2\times 1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow a_0 = 1$$

حال اگر پارسوال استفاده کنیم داریم:

$$\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \rightarrow 2\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + 0^2\right) \rightarrow$$

$$2\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{6}$$

۲۲.فرض کنیم $\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = f(x)$ که در آن $k \neq 0$ ثابت حقیقی و $-L \leq x \leq L$ ($L > 0$ ثابت) و

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

در این‌صورت $u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]$، **که در آن:** **(مکانیک ۸۷)**

۱) $A_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $B_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $A_0 = \frac{a_0}{k^2}$

۲) $A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $A_0 = \frac{a_0}{k^2}$

۳) $A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $A_0 = 0$

۴) $A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $A_0 = \frac{a_0}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

فرض‌های داده شده را داخل معادله دیفرانسیل موجود قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(A_n \cos\frac{n\pi}{L}x + B_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) + k^2\left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{L}x + B_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

با متحد قرار دادن طرفین داریم:

$$\text{عدد ثابت} : k^2\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad \rightarrow \quad A_0 = \frac{a_0}{k^2}$$

$$\cos\frac{n\pi}{L}x \text{ ضریب} : \left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k^2\right)A_n = a_n \quad \rightarrow \quad A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

$$\sin\frac{n\pi}{L}x \text{ ضریب} : \left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k^2\right)B_n = b_n \quad \rightarrow \quad B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

۲۳. در سری فوریه مختلط $f(x) = e^x \quad , \quad -\pi < x < \pi$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $C_n = \frac{1-in}{\pi\left(1+n^2\right)}\cosh\pi$

۲) $C_n = \frac{1+in}{\pi\left(1+n^2\right)}\sinh\pi$

۳) $C_n = \frac{1-in}{\pi\left(1+n^2\right)}(-1)^n\cosh\pi$

۴) $C_n = \frac{1+in}{\pi\left(1+n^2\right)}(-1)^n\sinh\pi$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi}{L}x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\frac{1+in}{1+in}\left\{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left\{e^{\pi}\left(\cos n\pi - i\sin n\pi\right) - e^{-\pi}\left(\cos n\pi + i\sin n\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left\{e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n\right\} = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\sinh\pi$$

۲۴. تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x+1} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{خارج بازه} \end{cases}$

۱) دارای انتگرال فوریه می‌باشد

۲) دارای سری فوریه می‌باشد

۳) هر دو مورد فوق

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ درست است.

تابع $f(x)$ در تمام مجموعه اعداد حقیقی بجز نقاط $x=\pm1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و لذا خاصیت تکه‌ای پیوسته و هموار بودن را در فاصله $(-\infty\,,+\infty)$ دارد.

از طرفی بدیهی است این تابع در فاصله $(-\infty\,,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است زیرا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{-1}(0)dx+\int_{-1}^{+1}\frac{1}{e^x+1}dx+\int_{1}^{+\infty}(0)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{e^x+1}$$

حاصل عددی محدود و معلوم است.

لذا این تابع دارای انتگرال فوریه می‌باشد (اگرچه احتمالاً ما قادر نیستیم ضرایب انتگرال فوریه این تابع را بسادگی پیدا کنیم)

البته این تابع دارای سری فوریه نمی‌باشد زیرا تعریف تابع در بازه $(-\infty,+\infty)$ صورت گرفته که البته این تابع متناوب نیست و ما می‌دانیم شرط لازم برای داشتن سری فوریه، تناوبی بودن تابع می‌باشد.

۲۵.در معادله انتگرالی $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-x} & x>0\end{cases}=\int_0^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\big)d\omega$ **مقادیر** $A(\omega),B(\omega)$ **کدامند؟**

۱) $B(\omega)=\dfrac{\omega}{\pi(1+\omega^2)}$, $A(\omega)=\dfrac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

۲) $B(\omega)=\dfrac{2\omega}{\pi(1+\omega^2)}$, $A(\omega)=\dfrac{2}{\pi(1+\omega^2)}$

۳) $B(\omega)=\dfrac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, $A(\omega)=\dfrac{\omega}{\pi(1+\omega^2)}$

۴) $B(\omega)=\dfrac{2}{\pi(1+\omega^2)}$, $A(\omega)=\dfrac{2\omega}{\pi(1+\omega^2)}$

حل: گزینه ۱ درست است.

طبیعی است $A(\omega),B(\omega)$ باید ضرایب انتگرال فوریه تابع سمت چپ معادله یعنی $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-x} & x>0\end{cases}$ باشند یعنی:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}L\{\cos\omega x\}\Big|_{s=1}=\frac{1}{\pi}\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1}$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x}\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}L\{\sin\omega x\}\Big|_{s=1}=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1}$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

۲۶.در انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{خارج بازه}\end{cases}$ **حاصل** $\int_{-\infty}^{+\infty}B(\omega)d\omega$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $\dfrac{1}{\pi}$ ۳) $\dfrac{2}{\pi}$ ۴) 2

حل: گزینه ۱ درست است.

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{1}^{2}(1)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{-1}{\omega}\cos\omega x\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{\pi\omega}(\cos\omega-\cos 2\omega)$$

لذا با توجه به آنکه تابع $\dfrac{\cos\omega-\cos 2\omega}{\pi\omega}$ تابعی فرد است می‌توان گفت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega-\cos 2\omega}{\pi\omega}d\omega=0$$

۲۷.اگر $f(x)=\begin{cases}e^{2x} & x<0\\ e^{-x} & x>0\end{cases}$ **و** $A(\omega)$ **ضرایب جملات کسینوسی در انتگرال فوریه این تابع باشد حاصل** $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^2 A(\omega)$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{2}{\pi}$ ۲) 0 ۳) $\dfrac{3}{\pi}$ ۴) موجود نیست.

حل: گزینه ۳ درست است.

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\cos\omega x\,dx+\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\infty}^{0} e^{-2x}\cos(-\omega x)\,d(-x)+\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\cos\omega x\,dx+\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\big(L(\cos\omega x)\big)\Big|_{s=2}+\big(L(\cos\omega x)\big)\Big|_{s=1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=2}+\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1}\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2}{4+\omega^2}+\frac{1}{1+\omega^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{3\omega^2+6}{(4+\omega^2)(1+\omega^2)}\quad\to\quad\lim_{\omega\to\infty}\omega^2A(\omega)=\frac{3}{\pi}$$

۲۸.در معادله انتگرالی $\int_{0}^{\infty}P(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}e^{x} & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ **تابع** $P(\omega)$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}(e\omega\sin\omega+e\cos\omega-1)$

۲) $\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}(e\omega\sin\omega-e\cos\omega-1)$

۳) $\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}(-e\omega\sin\omega-e\cos\omega-1)$

۴) $\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}(-e\omega\sin\omega+e\cos\omega-1)$

حل: گزینه ۱ درست است.

با فرض $f(x)=\begin{cases} e^x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$ باید داشته باشیم:

$$P(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1} e^x\cos\omega x\,dx$$

با اعمال روش جزء به جزء برای محاسبه $I=\int e^x\cos\omega x\,dx$ داریم:

انتگرال	مشتق
$\cos\omega x$	e^x
$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$	e^x
$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$	e^x

$$I=e^x\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}+\frac{\cos\omega x}{\omega^2}\right)-\frac{1}{\omega^2}I \;\rightarrow\; I=\frac{\omega^2 e^x}{\omega^2+1}\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}+\frac{\cos\omega x}{\omega^2}\right)$$

$$P(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{e^x}{\omega^2+1}(\omega\sin\omega x+\cos\omega x)\Big|_{x=0}^{1}$$

$$=\frac{2}{\pi(\omega^2+1)}\{e(\omega\sin\omega+\cos\omega)-1\}$$

۲۹. با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ **حاصل** $\int_0^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}d\omega$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 1

حل: گزینه ۱ درست است.

تابع مورد نظر زوج بوده و داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x+\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)x\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega}\cos\frac{\omega\pi}{2}+\frac{1}{1-\omega}\cos\frac{\omega\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\,\frac{1-\omega+1+\omega}{1-\omega^2}=\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}$$

پس انتگرال فوریه تابع چنین است:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\cos\omega x\,d\omega$$

و در $x=\frac{\pi}{2}$ طبق قضیه دیریکله داریم:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)+f\left(\frac{\pi}{2}^+\right)}{2}=\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}d\omega \to \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+0}{2}=\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos^2\frac{\omega\pi}{2}d\omega \to$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}d\omega=0$$

۳۰. با توجه به تابع $f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos tx\,dt$ **حاصل** $\int_0^{\infty}(\operatorname{Arctan}x)\sin tx\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\pi\frac{e^t}{t}$ ۲) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{-t}}{t}$ ۳) πte^{-t} ۴) $2\pi te^{-t}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos tx\,dt=\left(L(\cos tx)\right)\Big|_{s=1}=\frac{s}{s^2+x^2}\Big|_{s=1}=\frac{1}{1+x^2}$$

حال می‌نویسیم:

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos tx\,dt \to \int\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\int e^{-t}\cos tx\,dx\,dt \to$$

$$\operatorname{Arctan}x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin tx\,dt+C$$

با نگاه در $x=0$ مقدار $C=0$ به‌دست می‌آید، سمت راست تساوی فوق مبین انتگرال فوریه سینوسی تابع $\operatorname{Arc\,tan}x$ است و طبیعتاً $\frac{e^{-t}}{t}$ همان $B(t)$ این انتگرال فوریه است، یعنی داریم:

$$\frac{e^{-t}}{t}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{Arc\,tan}x\sin tx\,dx \to \int_0^{\infty}\operatorname{Arctan}x\sin tx\,dx=\frac{\pi}{2}\frac{e^{-t}}{t}$$

۳۱. جواب معادله انتگرالی $\int_0^{\infty}P(\omega)\cos\omega x\,dx=\begin{cases}2-x & 0\le x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$ **برای** $P(\omega)$ **کدام است؟**

۱) $P(\omega)=\frac{2\sin\omega-\cos2\omega}{\pi\omega^2}$ ۲) $P(\omega)=\frac{2(1-\cos2\omega)}{\pi\omega^2}$

۳) $P(\omega)=\frac{2\cos2\omega}{\pi\omega^2}$ ۴) $P(\omega)=\frac{2\sin\omega+\cos2\omega}{\pi\omega^2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$P(\omega)$ ضریب جملات کسینوسی در بسط انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}2-x & 0\le x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$ است که به فرم زوج گسترش یافته یعنی:

$$P(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^2(2-x)\cos\omega x\,dx+\int_2^{\infty}(0)\cos\omega x\,dx\right\}$$

مشتق		انتگرال
$2-x$		$\cos\omega x$
	$\searrow^{+}$	
-1		$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
	$\searrow^{-}$	
0		$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$P(\omega)=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2-x}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right\}\Bigg|_0^2=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-1}{\omega^2}\cos 2\omega+\frac{1}{\omega^2}\right\}$$
$$=\frac{2(1-\cos 2\omega)}{\pi\omega^2}$$

۳۲.اگر $\int_0^{\infty} g(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ **باشد، آن‌گاه حاصل** $\frac{d}{d\omega}\left[\left(1-\omega^2\right)g(\omega)\right]$ **کدام گزینه است؟**

(مواد ۸۶)

۱) $-\sin\frac{\pi\omega}{2}$ ۲) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\omega}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$ ۴) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\omega}{2}-\frac{\omega}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$g(\omega)$ باید $A(\omega)$ در انتگرال فوریه تابع زوج $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ باشد:

$$g(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\cos\omega x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}+\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1+\omega}+\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\omega\pi}{2}\,\frac{2}{1-\omega^2}=\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{\pi\left(1-\omega^2\right)}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left(1-\omega^2\right)g(\omega)\right)=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\omega\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\omega\pi}{2}$$

۳۳. اگر $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\left(\cos\omega x+\frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}\sin\omega x\right)d\omega$ **باشد حاصل** $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^2\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{3\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{5\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{7\pi^2}{12}$ ۴) $\frac{5\pi^2}{8}$

حل: گزینه ۳ درست است.

طبیعتاً فرض مسأله انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را توصیف می‌کند و نشان می‌دهد.

$$B(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \quad و \quad A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

طبق تساوی پارسوال در انتگرال‌های فوریه داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)dx=\int_0^{\infty}\left(A^2(\omega)+B^2(\omega)\right)d\omega \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)dx=\pi\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\right)d\omega=\pi\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\omega^2+1}-\frac{1}{\omega^2+4}\right)\right)d\omega$$

$$=\pi\int_0^{\infty}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{\omega^2+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{\omega^2+4}\right)d\omega=\pi\left\{\frac{4}{3}\operatorname{Arctan}\omega-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{\omega}{2}\right\}\Bigg|_0^{\infty}=\pi\left(\frac{4}{3}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{7\pi^2}{12}$$

۳۴. اگر $f(x)=\int_0^{\infty}a(\omega)\cos\omega x\,d\omega$ **باشد حاصل** $x^2f(x)$ **کدام است؟**

۱) $\int_0^{\infty}\omega^2a''(\omega)\cos\omega x\,d\omega$ ۲) $\int_0^{\infty}\omega^2a(\omega)\cos\omega x\,d\omega$

۳) $-\int_0^{\infty}a''(\omega)\cos\omega x\,d\omega$ ۴) $-\int_0^{\infty}\omega^2a''(\omega)\cos\omega x\,d\omega$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\omega)\cos\omega x\,d\omega \rightarrow a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx \rightarrow$$

$$\frac{d^2a(\omega)}{d\omega^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\left(-x^2\cos\omega x\right)dx \rightarrow x^2f(x)=-\int_0^{\infty}a''(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

۳۵. اگر $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ **دارای انتگرال فوریه** $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$ **باشد حاصل** $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

طبق تساوی پارسوال در انتگرالهای فوریه داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx=\int_0^{\infty}\left(A^2(\omega)+B^2(\omega)\right)d\omega \rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1)^2\, dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega \rightarrow$$

$$\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega \rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$$

۳۶. تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\sin\omega}{\omega}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\omega}{\omega}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$

حل: گزینه ۱ درست است.

تبدیل فوریه سینوسی یک تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_s\left(f(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

لذا در این مساله داریم:

$$F_s\left(f(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\int_0^1 (1)\sin\omega x dx+\int_1^{\infty}(0)\sin\omega x dx\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-1}{\omega}(\cos\omega-1)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

۳۷. اگر تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1-x & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ را $F_s(\omega)$ بنامیم حاصل $\int_0^{\infty}F_s(\omega)^2\,d\omega$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است.

طبق اتحاد پارسوال داریم:

$$\int_0^{\infty}F_s^2(\omega)d\omega=\int_0^{\infty}f(x)^2\,dx=\int_0^1(1-x)^2\,dx=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

۳۸. تبدیل فوریه کسینوسی معکوس تابع $e^{-2\omega}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{4+x^2}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+x^2}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x}\cos x$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c^{-1}\left(F_c(\omega)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

و در این مساله داریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-2\omega}\cos\omega x\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,L\{\cos\omega x\}\Big|_{s=2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s}{s^2+x^2}\Big|_{s=2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+x^2}$$

۳۹.تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را $F(\omega)$ نامیده‌ایم تبدیل فوریه تابع $xf(x-3)$ کدام است؟

۱) $e^{-3i\omega}\left(3F(\omega)+iF'(\omega)\right)$

۲) $e^{-3i\omega}\left(4F'(\omega)-iF(\omega)\right)$

۳) $e^{-3i\omega}\left(4F'(\omega)+iF(\omega)\right)$

۴) $e^{-3i\omega}\left(3F(\omega)-iF'(\omega)\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

با فرض $F\left(g(x)\right)=G(\omega)$ داریم:

قضیه اول انتقال : $F\left(g(x-a)\right)=e^{-ia\omega}G(\omega)$

قضیه مشتق‌گیری از تبدیل فوریه : $F\left(xg(x)\right)=iG'(\omega)$

اینک داریم:

$$F\left(f(x)\right)=F(\omega)\quad\rightarrow\quad F\left(f(x-3)\right)=e^{-3i\omega}F(\omega)\quad\rightarrow$$

$$F\left(xf(x-3)\right)=i\left(e^{-3i\omega}F(\omega)\right)'=i\left(-3ie^{-3i\omega}F(\omega)+e^{-3i\omega}F'(\omega)\right)=ie^{-3i\omega}\left(F'(\omega)-3iF(\omega)\right)$$
$$=e^{-3i\omega}\left(3F(\omega)+iF'(\omega)\right)$$

راه دیگر: طبق فرض داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\quad\rightarrow\quad F'(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}-ixf(x)e^{-i\omega x}dx$$

حال می‌نویسیم:

$$F\left(xf(x-3)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x-3)e^{-i\omega x}dx$$

با تغییر متغیر $x-3=t$ داریم:

$$F\left(xf(x-3)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}(t+3)f(t)e^{-i\omega(t+3)}dt=e^{-3i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\left(tf(t)e^{-i\omega t}+3f(t)e^{-i\omega t}\right)dt$$
$$=e^{-3i\omega}\left\{\frac{F'(\omega)}{-i}+3F(\omega)\right\}=e^{-3i\omega}\left\{3F(\omega)+iF'(\omega)\right\}$$

۴۰. **تبدیل فوریه جواب معادله دیفرانسیل** $y''+y'=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega(i+\omega)(1+i\omega)}$

۲) $Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega(i-\omega)(1+i\omega)}$

۳) $Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega(i-\omega)(1+i\omega)^2}$

۴) $Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega(i+\omega)(1-i\omega)}$

حل: گزینه ۲ درست است.

اگر از طرفین معادله داده شده تبدیل فوریه بگیریم، بدست می‌آید:

$$(i\omega)^2 Y(\omega)+(i\omega)Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \to$$

$$-\omega^2 Y(\omega)+i\omega Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\omega x}\,dx \to$$

$$\omega(i-\omega)Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)x}\Big|_0^{\infty} \to$$

$$\omega(i-\omega)\,Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-(1+i\omega)}\left(e^{-\infty}-e^{-0}\right) \to Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega(i-\omega)(1+i\omega)}$$

۴۱. **تابع** $F(\omega)$ **تبدیل فوریه تابع** $f(x)=e^{-x^2}$ **در کدام‌یک از معادلات دیفرانسیل زیر صادق است؟** **(برق ۸۷)**

۱) $\frac{dF(\omega)}{d\omega}+\omega F(\omega)=0$

۲) $\frac{dF(\omega)}{d\omega}+\frac{\omega^2}{2}F(\omega)=0$

۳) $\frac{dF(\omega)}{d\omega}+\frac{\omega}{2}F(\omega)=0$

۴) $\frac{dF(\omega)}{d\omega}+\frac{2}{\omega}F(\omega)=0$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=e^{-x^2} \to f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

با فرض $F(f(x))=F(\omega)$ می‌دانیم:

$$\begin{cases} F\left(f^{(n)}(x)\right)=(i\omega)^n F(\omega) \\ F\left(x^n f(x)\right)=i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \end{cases}$$

چنانچه از طرفین رابطه به‌دست آمده تبدیل فوریه بگیریم داریم:

$$(i\omega)^1 F(\omega)=-2i^1\frac{d^1F(\omega)}{d\omega^1} \to i\omega F(\omega)=-2i\frac{dF(\omega)}{d\omega} \to \frac{dF(\omega)}{d\omega}+\frac{\omega}{2}F(\omega)=0$$

توجه: با حل معادله فوق و کمی محاسبات دیگر خواهیم داشت:

$$F(\omega)=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

۴۲. تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{-4}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}\left(\cos\omega-\dfrac{1}{\omega}\sin\omega\right)$

۲) $\dfrac{-4}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}\left(\sin\omega-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega\right)$

۳) $\dfrac{+4}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}\left(\cos\omega-\dfrac{1}{\omega}\sin\omega\right)$

۴) $\dfrac{+4}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}\left(\sin\omega-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1-x^2}{-i\omega}e^{-i\omega x}-\frac{2x}{\omega^2}e^{-i\omega x}-\frac{2}{i\omega^3}e^{-i\omega x}\right\}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{0-\left[\frac{2(1)}{\omega^2}e^{-i\omega}-\frac{2(-1)}{\omega^2}e^{+i\omega}\right]+\left[\frac{2}{i\omega^3}e^{+i\omega}-\frac{2}{i\omega^3}e^{-i\omega}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2}{\omega^2}(2\cos\omega)\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{i\omega^3}\right)(2i\sin\omega)$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}\left(\cos\omega-\frac{1}{\omega}\sin\omega\right)$$

مشتق		انتگرال
$1-x^2$		$e^{-i\omega x}$
	$+$	
$-2x$		$\dfrac{1}{(-i\omega)}e^{-i\omega x}$
	$-$	
-2		$\dfrac{1}{(-i\omega)^2}e^{-i\omega x}$
	$+$	
0		$\dfrac{1}{(-i\omega)^3}e^{-i\omega x}$

۴۳. اگر $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ **و داشته باشیم** $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ **، آن‌گاه** $\hat{f}(\omega)$ **(تبدیل فوریه** f**) کدام است؟**

(برق ۸۶)

۱) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

۲) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

۳) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}2\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

۴) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}(\cos\omega x-i\sin\omega x)\,dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\cos\omega x\,dx}_{\text{تابع زوج}}-i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\sin\omega x\,dx}_{\text{تابع فرد}}$$

$$=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\cos\omega x\,dx=1\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1+\omega)x+\sin(1-\omega)x}{x}dx$$

اما می‌دانیم:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\left(L\left(\frac{\sin tx}{x}\right)\right)\Bigg|_{s=0}$$

و چون:

$$L(\sin tx)=\frac{t}{s^2+t^2}\quad\rightarrow\quad L\left(\frac{\sin tx}{x}\right)=\int_{s}^{\infty}\frac{t}{s^2+t^2}ds=\operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{t}\right)\Bigg|_{s}^{+\infty}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arc\,tan}\dfrac{s}{t} & \text{اگر } t>0\\[2mm] \dfrac{-\pi}{2}-\operatorname{Arc\,tan}\dfrac{s}{t} & \text{اگر } t<0\end{cases}$$

پس:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{اگر } t>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & \text{اگر } t<0\end{cases}$$

لذا:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1+\omega)x}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & 1+\omega>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & 1+\omega<0\end{cases}\quad \text{و}\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1-\omega)x}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & 1-\omega>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & 1-\omega<0\end{cases}$$

لذا:

$$\hat{f}(\omega)=\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1+\omega)x}{x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1-\omega)x}{x}dx\right\}=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2} & \omega<-1\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2} & -1<\omega<1\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} & \omega>1\end{cases}=\begin{cases}0 & |\omega|>1\\ \pi & |\omega|<1\end{cases}$$

راه دیگر:

می‌دانیم:

$$\text{اگر } f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases} \rightarrow F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

از طرفی طبق قضیه تقارن می‌دانیم:

$$\text{اگر } F\big(f(x)\big)=F(\omega) \rightarrow F\big(F(x)\big)=2\pi f(-\omega)$$

حال می‌توان نوشت:

$$F\left(\frac{2\sin x}{x}\right)=2\pi\begin{cases}1 & |-\omega|<1\\ 0 & |-\omega|>1\end{cases} \rightarrow F\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

۴۴. تبدیل فوریه توابع $f(x)=\frac{e^{3ix}}{x^2+4}$ **و** $g(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$ **کدام است؟**

۱) $F(\omega)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-3|}\ ,\ G(\omega)=\pi e^{-2i\omega}e^{-|\omega|}$

۲) $F(\omega)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-3i|}\ ,\ G(\omega)=\pi e^{2i\omega}e^{-|\omega|}$

۳) $F(\omega)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-3i|}\ ,\ G(\omega)=\pi e^{-2i\omega}e^{-|\omega|}$

۴) $F(\omega)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-3|}\ ,\ G(\omega)=\pi e^{2i\omega}e^{-|\omega|}$

حل: گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم:

$$F\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

اگر تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را $F(\omega)$ بنامیم طبق قضایای انتقال داریم:

$$F\big(f(x-a)\big)=e^{-ia\omega}F(\omega) \qquad \text{قضیه اول انتقال}$$

$$F\big(e^{iax}f(x)\big)=F(\omega-a) \qquad \text{قضیه دوم انتقال}$$

حال می‌توان گفت:

$$F(\omega)=F\left(\frac{1}{x^2+4}\right)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|} \rightarrow F\left(e^{3ix}\frac{1}{x^2+4}\right)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-3|}$$

$$G(\omega)=F\left(\frac{1}{x^2+4x+5}\right)=F\left(\frac{1}{(x+2)^2+1}\right)=e^{2i\omega}F\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=e^{2i\omega}\frac{\pi}{1}e^{-1|\omega|}$$

۴۵. تبدیل فوریه تابع $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ چگونه است؟ (* علامت کانولوشن در تبدیل فوریه است.)

۱) $\dfrac{1}{\pi}\left(P(\omega)*P(\omega)\right)$ که در آن $P(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

۲) $\dfrac{1}{2\pi}\left(P(\omega)*P(\omega)\right)$ که در آن $P(\omega)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

۳) $\dfrac{1}{\pi}\left(P(\omega)*P(\omega)\right)$ که در آن $P(\omega)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

۴) $\dfrac{1}{2\pi}\left(P(\omega)*P(\omega)\right)$ که در آن $P(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x}$$

اما می‌دانیم تبدیل فوریه تابع $\begin{cases}\frac{1}{2} & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ به‌صورت $\dfrac{\sin\omega}{\omega}$ است لذا طبق قضیه مقیاس داریم:

$$F\left(\frac{\sin x}{x}\right)=2\pi\begin{cases}\frac{1}{2} & |-\omega|<1\\ 0 & |-\omega|>1\end{cases}\;\rightarrow\; F\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}=P(\omega)$$

حال از آن‌جا که $F\left(g(x)h(x)\right)=\dfrac{1}{2\pi}G(\omega)H(\omega)$ می‌توان گفت:

$$F\left(2\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x}\right)=2\frac{1}{2\pi}P(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{\pi}\left(P(\omega)*P(\omega)\right)$$

خودآزمایی

۱. اگر $: f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ x & 1<x<2 \\ -1 & 2<x<3 \\ 2-x & 3<x<4 \end{cases}$

۱) $a_{2k}=b_{2k}=0$ ✓
۲) $a_{2k+1}=b_{2k+1}=0$
۳) $a_n=0$
۴) $b_n=0$

۲. انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} |x| & -1<x<1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ چگونه است؟

۱) $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega\sin\omega+\cos\omega}{\omega^2}\right)\cos\omega x\, d\omega$
۲) $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega-\sin\omega}{\omega^2}\right)\cos\omega x\, d\omega$
۳) $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega\sin\omega-\cos\omega}{\omega^2}\right)\cos\omega x\, d\omega$
۴) $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}\right)\cos\omega x\, d\omega$ ✓

۳. در تبدیل فوریه، کانولوشن دو تابع $e^{-bx}u(x)$ و $e^{-ax}u(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{a-b}u(x)$ ✓
۲) $\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{a-b}$
۳) $\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{b-a}u(x)$
۴) $\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{b-a}$

۴. اگر $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\omega\cos\omega x+\sin\omega x}{\omega^3+1}d\omega$ حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos 2x+\sin 3x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{73\pi}{252}$
۲) $\frac{65\pi}{126}$
۳) $\frac{65\pi}{252}$ ✓
۴) $\frac{73\pi}{126}$

۵. با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=e^{-x}$ و تساوی پارسوال در تبدیلات فوریه حاصل $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۶. تبدیل فوریه جواب معادله $y''-y=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{(\omega^2+1)(2+i\omega)}$ ✓ ۲) $\frac{1}{(\omega^2-1)(2+i\omega)}$

۳) $\frac{-1}{(\omega^2+1)(2i+\omega)}$ ۴) $\frac{1}{(\omega^2-1)(2i+\omega)}$

۷. اگر $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$ حاصل $\hat{f}(\omega)$ کدام است؟ ($\hat{f}(\omega)$ تبدیل فوریه $f(x)$ را نشان می‌دهد.)

۱) $\begin{cases}\pi & |\omega|<\frac{1}{3}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{3}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{1}{3}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{3}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\pi & |\omega|<3\\ 0 & |\omega|>3\end{cases}$ ✓ ۴) $\begin{cases}1 & |\omega|<3\\ 0 & |\omega|>3\end{cases}$

۸. تبدیل فوریه تابع $f(x)=\frac{\sin 2x\cos x}{x}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}\pi & |\omega|<\frac{1}{3}\\ \frac{\pi}{2} & \frac{1}{3}<|\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ \frac{\pi}{2} & 1<|\omega|<3\\ 0 & |\omega|>3\end{cases}$ ✓

۳) $\begin{cases}\pi & 1<|\omega|<3\\ 0 & \text{بقیه جاها}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\pi & \frac{1}{3}<|\omega|<1\\ 0 & \text{بقیه جاها}\end{cases}$

۹. تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-3x^2}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-3\omega^2}$ ۲) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{12}}$ ✓ ۳) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ ۴) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-12\omega^2}$

۱۰. تابع $f(x)=\begin{cases}1 & , & |x|<a\\ 0 & , & |x|>a\end{cases}$، $a>0$ ثابت، مفروض است اگر $\hat{f}(0)=2a$، آنگاه $\hat{f}(1)$ چقدر است؟

(مکانیک ۸۵)

۱) $\sin a$ ۲) $2\sin a$ ✓ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin a$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sin a$

۱۱. در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\pi\\ 2\pi-x & \pi<x<2\pi\end{cases}$، ضریب b_n چگونه می‌باشند؟

۱) ضریبی از $\frac{1}{n}$ ۲) ضریبی از $\frac{1}{n^2}$ ۳) ضریبی از $\frac{1}{n^2+1}$ ۴) 0 ✓

۱۲. تبدیل فوریه تابع $f(x)=xe^{-2|x|}$ کدام است؟

۱) $\frac{2i(\omega^2-4)}{(4+\omega^2)^2}$ ۲) $\frac{8\omega^2}{(4+\omega^2)^2}$ ۳) $\frac{-8i\omega}{(4+\omega^2)^2}$ ✓ ۴) $\frac{i(\omega^2-4)}{(4+\omega^2)^2}$

۱۳. اگر تبدیل فوریه $f(x)$ را $F(\omega)$ بنامیم تبدیل فوریه تابع $e^{2x}f(x+1)$ کدام است؟

۱) $e^{i\omega}F(\omega+2i)$ ۲) $e^{-i\omega}F(\omega+2i)$ ۳) $e^{i(\omega+2i)}F(\omega+2i)$ ✓ ۴) $e^{-i(\omega+2i)}F(\omega+2i)$

۱۴. اگر $f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx+\frac{4}{n}\sin 2nx$ حاصل $\int_0^{\pi} f(x)\sin^2 3x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{36}$ ✓ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{36}$ ۴) $\frac{7\pi}{3}$

۱۵. اگر $f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$ حاصل $f(ax)$ کدام است؟

۱) $a\int_0^{\infty}f\left(\frac{\omega}{a}\right)\cos\omega x d\omega$ ۲) $a\int_0^{\infty}f(a\omega)\cos\omega x d\omega$

۳) $\frac{1}{a}\int_0^{\infty}f(a\omega)\cos\omega x d\omega$ ۴) $\frac{1}{a}\int_0^{\infty}f\left(\frac{\omega}{a}\right)\cos\omega x d\omega$ ✓

۱۶. با توجه به تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=xe^{-4x}$ حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{x}{(16+x^2)^2}\sin\frac{x}{2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{32e^2}$ ✓ ۲) $\frac{\pi}{16e^2}$ ۳) $\frac{\pi e^2}{32}$ ۴) $\frac{\pi e^2}{16}$

۱۷. با توجه به سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & \frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ حاصل سری $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{5}$

۱۸. با توجه به سری فوریه برای تابع $f(x)=\frac{x^2}{2}$ برای $|x|<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ که به شکل $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\frac{1}{16}\cos 4x+-\cdots\right)$ مقدار عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ کدام است؟

(اتوماسیون ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}$ ✓

۱۹. سری فوریه تابع $f(x)=\cos x,\ 0<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$ ۲) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}$

۳) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$ ✓ ۴) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}$

۲۰. با توجه به تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ حاصل $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\cos\frac{x}{2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ✓ ۳) π ۴) 2π

۲۱. با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$ که برای $0\le x\le 2\pi$ صحیح است حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{12}$ ۲) $\frac{\pi^3}{32}$ ✓ ۳) $\frac{\pi^3}{36}$ ۴) $\frac{\pi^2}{32}$

۲۲. در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty}\psi(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$ حاصل $\lim_{\omega\to 0}\psi(\omega)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ✓ ۴) ∞

۲۳.انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases} e^x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{1+\omega^2}\sin\omega x d\omega$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega+\sin\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega+e(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{1+\omega^2}\sin\omega x d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega-e(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{1+\omega^2}\sin\omega x d\omega$ ✓

۲۴.در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} \cos x & -\pi\le x\le 0 \\ \cos 2x & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ضرایب سری فوریه وقتی $n\to\infty$ حداقل با چه سرعتی به صفر می‌گرایند؟

۱) $\frac{1}{n^4}$

۲) $\frac{1}{n^3}$ ✓

۳) $\frac{1}{n^2}$

۴) $\frac{1}{n}$

۲۵.تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$ به‌صورت $F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2}$ است حاصل $I=\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x-x\sin 2x}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) π

۲) $\frac{\pi}{2}$ ✓

۳) $\sqrt{2\pi}$

۴) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۲۶.سری فوریهٔ تابع $f(x)=x\ ,\ x\in(-\pi\ ,\ \pi)$ کدام است؟ (هوافضا ۸۶)

۱) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

۲) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$

۳) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n}$

۴) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ ✓

۲۷.با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases} \sin x & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$ حاصل $\int_0^\infty \frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\frac{\omega\pi}{2}d\omega$ را محاسبه کنید.

۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ✓

۴) $\frac{\pi}{3}$

۲۸.ضریب $\sin 2x$ در سری فوریه تابع $f(x)=(3\sin x-2\cos x)^2\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{2}$ ✓

۲) $\frac{13}{4}$

۳) $\frac{-5}{4}$

۴) $\frac{-5}{8}$

۲۹. سری فوریه سینوسی تابع $0<x<1$, $f(x)=u_0(x)-u_1(x)$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n\pi}\sin(2n-1)\pi x$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n\pi}\sin 2n\pi$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)\pi x$ ✓
۴) هیچ‌کدام

۳۰. تابع $f(x)$ در روابط $\begin{cases}f(x+6\pi)=f(x)\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$ صدق می‌کند و برای $0<x<3\pi$ داریم $f(x)=e^{\cos x}$ ضریب $\sin 2x$ در سری فوریه این تابع کدام است؟

۱) $\frac{8e}{3\pi}$
۲) $\frac{8}{3\pi e}$ ✓
۳) $\frac{4e}{3\pi}$
۴) $\frac{4}{3\pi e}$

۳۱. تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-|x-3|}e^{2ix}$ کدام است؟

۱) $\frac{2e^{3i(2-\omega)}}{1+(2-\omega)^2}$ ✓
۲) $\frac{e^{3i(2-\omega)}}{1+(2-\omega)^2}$
۳) $\frac{2e^{-3i(2-\omega)}}{1+(2-\omega)^2}$
۴) $\frac{e^{-3i(2-\omega)}}{1+(2-\omega)^2}$

۳۲. تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$ عبارت است از: (اتوماسیون ۸۷)

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\cos 2w+2\cos w}{w}\right)$
۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin 2w-2\sin w}{w}\right)$ ✓
۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\cos 2w-2\cos w}{w}\right)$
۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin 2w+2\sin w}{w}\right)$

۳۳. سری فوریه تابع $f(x)=x\ ;\ -\pi<x<\pi$ به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ می‌باشد اگر پنج جملهٔ اول سری فوریه در نظر گرفته شود مقدار خطا چقدر است؟

۱) $\frac{2\pi^3}{3}-5\pi$ ✓
۲) $\frac{2\pi^3}{3}-\pi$
۳) $\frac{2\pi^2}{3}-5\pi$
۴) $\frac{2\pi^3}{2}-5\pi$

۳۴. با توجه به تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-\alpha x}$ حاصل $\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+9}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}e^{-6\beta}$
۲) $\frac{\pi}{3}e^{-3\beta}$ ✓
۳) $\frac{\pi}{6}e^{-3\beta}$
۴) $\frac{\pi}{3}e^{-6\beta}$

۳۵. با توجه به سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ و $f(x) = x - \sin x$ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ کدام می‌شود؟

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۶. سری فوریه تابع $f(x) = \sin\frac{x}{2} \; ; -1 < x < 1$ به‌صورت $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n\pi(-1)^n \sin\frac{1}{2}}{1-4n^2\pi^2} \sin n\pi x$ می‌باشد در سری فوریه تابع $g(x) = \cos\frac{x}{2} \; ; -1 < x < 1$ کدام مورد زیر صحیح است؟

۱) $\frac{4\sin\frac{1}{2}}{1-16\pi^2}$: ضریب جمله $\cos 2\pi x$

۲) $2\sin\frac{1}{2}$: ثابت سری فوریه ✓

۳) هردو

۴) هیچ‌کدام

۳۷. اگر $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ و $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ باشد حاصل $F(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{5\pi}$ ۲) $\frac{3}{5\pi}$ ✓ ۳) $\frac{2}{5\pi}$ ۴) $\frac{1}{5\pi}$

۳۸. ضرایب سری فوریه در فرم مختلط دو تابع متناوب $f(x)$ و $g(x)$ که دارای دوره تناوب $P = 4$ می‌باشند $c_n = \frac{2i}{n\pi}$ و $d_n = \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2}$ می‌باشد، ضرایب سری فوریه در فرم مختلط $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^4 f(\lambda) g(x-\lambda) d\lambda$ چگونه است؟

۱) $\frac{4i}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$ ✓ ۲) $-i\sin\frac{n\pi}{2}$ ۳) $\frac{-i}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2}$ ۴) $\frac{2i}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$

۳۹. سری فوریه تابع $f(x) = \sin\frac{\pi}{L} x$ و $0 < x < L$ کدام است؟ (اتوماسیون ۸۵)

۱) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3 \times 5} \cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5 \times 7} \cos\frac{6\pi x}{L} + \dots \right)$ ✓

۲) $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3 \times 5} \cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5 \times 7} \cos\frac{6\pi x}{L} + \dots \right)$

۳) $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos\frac{2\pi x}{L} - \frac{1}{3 \times 5} \cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5 \times 7} \cos\frac{6\pi x}{L} - \dots \right)$

۴) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos\frac{2\pi x}{L} - \frac{1}{3 \times 5} \cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5 \times 7} \cos\frac{6\pi x}{L} - \dots \right)$

۴۰. اگر $f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\cos 2nx$ **حاصل** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 x\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2\pi+3}{24}$ ✓ ۲) $\frac{2\pi+3}{12}$ ۳) $\frac{2\pi-3}{24}$ ۴) $\frac{2\pi-3}{12}$

۴۱. اگر $f(x)=\begin{cases}0 & -L<x<0\\ \sin\frac{\pi x}{2} & 0<x<L\end{cases}$ **ثابت سری فوریه این تابع در کدام حالت زیر بزرگتر است؟**

۱) $L=2$ ✓ ۲) $L=2\pi$

۳) در دو حالت مذکور ثابت سری فوریه یکسان است. ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۴۲. اگر سری فوریه تابع $f(x)=x\sin x\ ;-\pi<x<\pi$ **به‌صورت** $f(x)=1-\frac{\cos x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n(n+2)}\cos(n+1)x$

باشد حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n(n+2)}\cos\frac{n\pi}{2}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ✓ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴۳. اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2}}\sin nx$ **حاصل** $\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$ ✓

۴۴. اگر $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ x^2 & 0<x<1\end{cases}$ **ضرایب** A_n **در سری فوریه تابع چیست؟**

۱) $\frac{2\cos n\pi}{n^2\pi^2}$ ✓ ۲) $\frac{\cos n\pi-1}{n\pi}$ ۳) $\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi^2}$ ۴) $\frac{2\cos n\pi}{n\pi}$

۴۵. هرگاه $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ **و برای** $-1<x<4$ **داشته باشیم** $f(x)=2H(x)-H(1-x)+H(2-x)$ **ثابت سری فوریه تابع کدام است؟ (** H **تابع پله واحد می‌باشد.)**

۱) $\frac{9}{5}$ ✓ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{10}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۴۶. ضرایب سری فوریه تابع $f(x)\sin x$ با دوره تناوب 2π، به‌صورت $\{a_0, a_n, b_n\}$ و ضرایب سری فوریه تابع $f(x)\cos x$ به‌صورت $\{a'_0, a'_n, b'_n\}$ می‌باشد، کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) $a_n + b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n+1)x\,dx$ ✓

۲) $b_n + a'_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n-1)x\,dx$

۳) هردو

۴) هیچ‌کدام

۴۷. در سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & -\pi < x < 0 \\ -e^{-2x} & 0 < x < \pi \end{cases}$ داریم:

۱) $b_n = \frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+4}\left(e^{-2\pi}(-1)^n - 1\right)$ ✓

۲) $b_n = \frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+4}\left(e^{-2\pi} - 1\right)$

۳) $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2+4}\left(e^{-2\pi}(-1)^n - 1\right)$

۴) $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2+4}\left(e^{-2\pi} - 1\right)$

۴۸. اگر تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را $F(\omega)$ بنامیم تبدیل فوریه تابع $e^{-2x} f'(x)$ کدام است؟

۱) $(\omega + 2i)F(\omega + 2i)$

۲) $i(\omega - 2i)F(\omega - 2i)$ ✓

۳) $i\omega F(\omega - 2)$

۴) $-\omega F'(\omega + 2)$

۴۹. اگر $\int_0^{\infty} p(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ باشد حاصل $p(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\pi}(\sin 1 - 2\cos 1)$

۲) $\frac{4}{\pi}(\sin 1 + 2\cos 1)$

۳) $\frac{4}{\pi}(\sin 1 + \cos 1)$

۴) $\frac{4}{\pi}(\sin 1 - \cos 1)$ ✓

۵۰. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & -T < x < T \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ و $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ باشد $\lim_{\omega \to 0} F(\omega)$ کدام است؟

۱) 0

۲) ∞

۳) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ✓

۴) 1

۵۱. از معادله انتگرالی $\int_0^{\infty} P(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \begin{cases} \cos^2 x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ داریم $P(\omega) = \frac{\sin\omega\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\omega} + B(\omega)\right\}$ مقدار $B(\omega)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\omega}{4-\omega^2}$ ✓

۲) $-\frac{2\omega}{4-\omega^2}$

۳) $-\frac{2}{4-\omega^2}$

۴) $-\frac{4}{4-\omega^2}$

۵۲. اگر $0<x<2$ و $f(x)=1-x$ سری فوریه تابع کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\pi x$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$ ✓

۴) هیچ‌کدام

۵۳. اگر $f(t)=\begin{cases}1 & |t-1|<1\\ 0 & |t-1|>1\end{cases}$ باشد و تبدیل فوریه $f(t)$ را $F(\omega)$ بنامیم، $F(\omega)$ کدام است؟

۱) $\frac{2ie^{-i\omega}}{\omega}\sin\omega$

۲) $\frac{2ie^{-i\omega}}{\omega}\cos\omega$

۳) $\frac{2e^{-i\omega}}{\omega}\sin\omega$ ✓

۴) $\frac{2e^{-i\omega}}{\omega}\cos\omega$

۵۴. کدام تابع زیر انتگرال فوریه دارد؟

۱) $f(x)=\begin{cases}0 & x<2\pi\\ 1 & x>2\pi\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}0 & x<2\pi\\ e^{-x} & x>2\pi\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}0 & x<2\pi\\ \cos x & 2\pi<x<3\pi\\ 0 & x>3\pi\end{cases}$

۴) گزینه‌های دوم و سوم هردو صحیح‌اند. ✓

۵۵. در سری فوریه تابع $f(x)=x-2|x|,\ -\pi<x<\pi$ ضریب جمله $\cos 2x$ کدام است؟

۱) 0 ✓

۲) $\frac{2}{\pi}$

۳) $-\frac{2}{\pi}$

۴) $-\frac{1}{\pi}$

۵۶. با توجه به انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ حاصل $\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\sin 2x}{2x}\right)dx$ کدام است؟

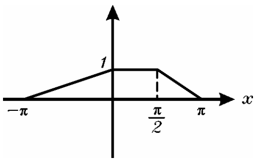
۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) $\frac{\pi}{4}$ ✓

۳) π

۴) 0

۵۷. برای تابع ترسیم شده حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ کدام است؟



۱) 1

۲) $\frac{3}{8}$ ✓

۳) $1-\frac{5\pi}{8}$

۴) $1-\frac{3\pi}{16}$

فصل ۲ توابع مختلط

مقدمه

در آنالیز فوریه اگر از ما بخواهند سری فوریه تابعی با ضابطه $f(x)=x^2$ را در بازه $[-\pi,\pi]$ بنویسیم، نتیجه $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$ به دست می‌آید، همچنین اگر خواسته شود انتگرال فوریه تابعی زوج را بنویسیم که برای xهای مثبت ضابطه $f(x)=e^{-x}$ را دارد ، نتیجه $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi(1+\omega^2)}\cos\omega x\, d\omega$ به دست خواهد آمد.

استفاده از قضیه دیریکله در $x=0$ و $x=a$ به ترتیب در سری و انتگرال فوریه حاصل، به نتایج زیر منجر خواهد شد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12} \qquad\qquad \int_0^{\infty}\frac{\cos a\omega}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

که البته محاسبه هر کدام از آن‌ها با تکنیک‌های معمول حساب دیفرانسیل و انتگرال با پیچیدگی‌های خاص خود روبه‌رو خواهد بود.

به صراحت دیده می‌شود، حصول به این نتایج مستلزم آن است که بدانیم با چه تابعی شروع کنیم تا به خواسته مورد نظر برسیم و درواقع به غیر از اشخاص خاص که احتمالاً بنا به تجربهٔ حل مداوم مسایل مختلف می‌توانند نقطه شروع مناسب را پیدا کنند، استفاده از آنالیز فوریه نیز کمکی چندانی برای محاسبه سری‌های نامتناهی و انتگرال‌های ناسره مورد دلخواه نخواهد کرد؛ اما تکنیک‌های مرتبط با انتگرال‌های مختلط می‌تواند بدون درگیر شدن با موضوع شرح داده شده، به حل چنین مسایلی کمک کند.

در واقع بسیاری از مسایل فیزیکی و مهندسی را می‌توان با روش‌هایی که متضمن اعداد مختلط و توابع مختلط هستند، بررسی و تحلیل کرد، به عنوان مثال:

۱ـ در دسته‌ای از توابع مختلط موسوم به توابع تحلیلی، هر کدام از قسمت‌های حقیقی و موهومی، جواب‌های معادله لاپلاس دوبعدی هستند که معادله حاکم بر بسیاری از پدیده‌های شناخته شده است؛ همچنین آن‌ها می‌توانند مسیرهای قائم همدیگر را توصیف کنند که کاربردهای وسیعی در مکانیک سیالات و الکترومغناطیس دارد.

۲ـ معنای هندسی یک تابع مختلط در مفهوم نگاشت که تبدیلی از یک صفحه به صفحه دیگر است، ایده حل بسیاری از معادلات لاپلاس در هندسه‌های پیچیده است.
۳ـ انتگرال‌های مختلط علاوه بر آنکه می‌توانند در محاسبه لاپلاس معکوس، فوریه معکوس قابل استفاده باشند، به تحلیل دسته‌ای خاص از سری‌های نامتناهی و انتگرال‌های ناسره که با روش‌های معمول حسابان حل نمی‌شوند، کمک می‌کنند.

در این فصل ضمن یادآوری مباحث اولیه اعداد مختلط و شناخت نواحی توصیف‌شده در صفحه مختلط، حد در توابع مختلط با تأکید بر حدهای دو متغیره و مشتق در توابع مختلط با تأکید بر قضایای کوشی ریمان مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.
خواهیم دید اساسی‌ترین مفهوم در بحث توابع مختلط، مفهوم تحلیلی بودن است که معنای تعمیم‌یافته‌تری از مفهوم مشتق‌پذیری را معرفی می‌کند.
در یک بیان ساده وقتی تابع مختلطی تحلیلی است، مشتقات و انتگرال‌های آن تا هر مرتبه‌ای تحلیلی‌اند، درحالی‌که وقتی یک تابع حقیقی یک‌بار مشتق‌پذیر باشد، هیچ نتیجه‌ای درباره وجود مشتقات بعدی آن به دست نمی‌آید، همچنین در بحث انتگرال‌های مختلط که نمونه‌ای از انتگرال‌های منحنی‌الخط هستند و طبعاً، حاصل آن‌ها به مسیر انتگرال‌گیری وابسته است، تحلیلی بودن تابع زیر علامت انتگرال می‌تواند نتایج بسیار ساده کننده‌ای در محاسبه انتگرال به دنبال داشته باشد.
در انتها و پس از معرفی مفهوم تحلیلی بودن در توابع مختلط، چند قضیه اساسی درخصوص این نوع توابع معرفی می‌شود.

اصول بحث مربوط به اعداد مختلط، در درس ریاضی عمومی یک مطرح گردیده است و مطالعه آن برای شروع مقوله توابع مختلط ضروری است. اکنون به بررسی روابط حاکم بر اعداد مختلط به طور مختصر می‌پردازیم.

اعداد مختلط

همان‌طوری‌که می‌دانیم ریشه دوم عدد -1 در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است؛ اما اگر تعریف کنیم $i=\sqrt{-1}$ آنگاه می‌توان مجموعه اعدادی به نام مجموعه اعداد مختلط را تعریف کرد که مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه‌ای از آن هستند. $i=\sqrt{-1}$ را اصطلاحاً عدد موهومی‌محض می‌نامند و با این تعریف، طبیعی است که $i^2=-1$ است.

فرم دکارتی اعداد مختلط

هر عدد مختلط در فرم دکارتی به صورت $z=a+ib$ تعریف می‌شود که در آن a و b اعدادی حقیقی هستند. طبق تعریف می‌گوییم:

$\mathrm{Re}(z)=a$: قسمت حقیقی عدد مختلط z

$\mathrm{Im}(z)=b$: قسمت موهومی عدد مختلط z

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$: مدول یا قدر مطلق عدد مختلط z

$\bar{z}=a-ib$: مزدوج عدد مختلط z

بنابراین اگر عدد مختلط را به منزله یک نقطه در مختصات دو بعدی در نظر بگیریم، $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ به ترتیب طول و عرض آن نقطه، $|z|$ فاصله نقطه تا مبدأ مختصات و $\bar{z}$ قرینه آن نقطه نسبت به محور x ها خواهد بود.

تساوی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط $z_2=a_2+ib_2$ و $z_1=a_1+ib_1$ را در نظر بگیرید؛ داریم:

$$z_1=z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1=a_2 \quad , \quad b_1=b_2$$

توجه کنید در مجموعه اعداد مختلط، «ترتیب» یا به عبارت دیگر، بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن معنا ندارد.
همچنین برای صفر بودن یک عدد مختلط لازم است هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن توأماً صفر باشند؛ به عبارت دیگر باید مدول آن عدد مختلط صفر باشد.

جمع و تفریق دو عدد مختلط

در جمع و تفریق دو عدد مختلط، به سادگی با انجام عمل مورد نظر بر روی قسمت‌های حقیقی و موهومی این دو عدد امکان پذیر است:

$$z_1 \pm z_2=(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$$

ضرب دو عدد مختلط

روال انجام ضرب دو عدد مختلط مانند ضرب دو عبارت دو جمله‌ای در همدیگر است؛ به طوری که داریم:

$$z_1z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ia_1b_2+ib_1a_2+i^2b_1b_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2)$$

چند نکته:

۱- با توجه به تعریف عدد موهومی i می‌توان دید:

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases} \qquad k = 0\,,1\,,2\,,\ldots$$

۲- با توجه به تعریف مزدوج یک عدد مختلط، دیده می‌شود حاصل‌ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن، جوابی صرفاً حقیقی دارد؛ زیرا:

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

۳- دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ را در نظر بگیرید. مطابق تعریف می‌گوییم:

$z_1\,,z_2$ ضرب داخلی : $z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 + b_1b_2$

$z_1\,,z_2$ ضرب خارجی : $z_1 \times z_2 = a_1b_2 - a_2b_1$

دقت کنید طبق تعریف صورت گرفته حاصل هر دو ضرب داخلی و ضرب خارجی یک عدد حقیقی است.

۴- زاویه بین دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + ib_1\ ,\ z_2 = a_2 + ib_2$ چنین به دست می‌آید:

$$\sin\theta = \frac{z_1 \times z_2}{|z_1||z_2|} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

یا

$$\cos\theta = \frac{z_1 . z_2}{|z_1||z_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

تقسیم دو عدد مختلط

برای انجام عمل تقسیم دو عدد مختلط کافی است صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم تا بدین ترتیب از وجود i در مخرج خلاص شویم؛ یعنی داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + ib_2}\,\frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1a_2 - i\,a_1\,b_2 + i\,b_1\,a_2 - i^2\,b_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + \,b_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - \,a_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_2|^2} + i\,\frac{z_2 \times z_1}{|z_2|^2}$$

چند خاصیت در مجموعه اعداد مختلط

وقتی z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشد؛ داریم:

۱) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

۲) $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

۳) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

۴) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

۵) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

۶) $|z| = |\bar{z}|$

۷) $|z|^2 = z\bar{z}$

۸) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

۹) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

۱۰) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

۱۱) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$

۱۲) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}\{z_1 \overline{z_2}\}$

۱۳) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = 2k\pi$

۱۴) $(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k$

۱۵) اگر f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد آنگاه $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$

معرفی چند منحنی در صفحه مختلط

اگر z_0 و z_1 دو عدد مختلط معلوم به صورت (x_0, y_0) و (x_1, y_1) باشند، $|z_0 - z_1|$ فاصله بین این دو نقطه را نشان می‌دهد، بنابراین اگر R یک عدد حقیقی باشد، می‌توان نشان داد:

الف) رابطه $|z - z_0| = R > 0$ بیانگر دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R خواهد بود.

ب) رابطه $|z - z_0| + |z - z_1| = R > 0$

اگر $|z_0 - z_1| = R$ باشد، معادله گفته شده بیانگر پاره خط واصل بین دو نقطه z_1 و z_0 خواهد بود.

اگر $|z_0 - z_1| > R$ باشد، معادله گفته شده شکلی را توصیف نمی‌کند.

اگر $|z_0 - z_1| < R$ باشد، معادله گفته شده بیانگر یک بیضی با کانون‌های z_1 و z_0 و قطر بزرگ R است.

ج) رابطه $|z - z_0| - |z - z_1| = R > 0$

اگر $|z_0 - z_1| = R$ باشد، معادله گفته شده یک نیم خط است که در امتداد پاره خط واصل بین دو نقطه z_1 و z_0 که از z_1 شروع می‌شود، می‌باشد.

اگر $|z_0 - z_1| > R$ باشد، معادله گفته شده بیانگر یک هذلولی با کانون‌های z_1 و z_0 و قطر بزرگ R است.

اگر $|z_0 - z_1| < R$ باشد، معادله گفته شده شکلی را توصیف نمی‌کند.

د) رابطه $\left|\frac{z - z_0}{z - z_1}\right| = k$

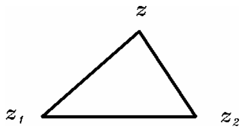
اگر $k = 1$ باشد، معادله گفته شده بیانگر عمود منصف پاره خطی با دوسر z_1 و z_0 است.

اگر $k \ne 1$ باشد، معادله گفته شده بیانگر یک دایره است، که شعاع آن $R = \frac{k}{|k^2 - 1|}|z_1 - z_0|$ و مرکزش روی خط واصل z_0, z_1 می‌باشد.

توجه: اساساً رابطه $|z_1 - z_2|$ مبین فاصله دو نقطه z_1, z_2 می‌باشد و توجه به این موضوع دلیل تمامی موارد فوق را به طور کیفی نشان می‌دهد؛ همچنین، $\operatorname{Arg}(z_1 - z_2)$ مبین زاویه خط z_1z_2 با جهت مثبت محور افقی (محور حقیقی) است.

تذکر: دقت کنید با توجه به نامساوی‌های مثلثی که شرط وجود مثلث را نشان می‌دهند، داریم:

$$|z - z_1| + |z - z_2| > |z_1 - z_2|$$
$$\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| < |z_1 - z_2|$$



به طور کلی برای مشخص کردن شکل معادله‌ای که برحسب z تعریف شده، کافی است قرار دهیم $z = x + iy$ و با ساده کردن رابطه حاصل و به‌دست آوردن معادله آن شکل برحسب x, y وضعیت آن را تعیین کنیم.

نکته:

مکان هندسی نقاط $z = \alpha z_0 + \beta z_1$ که در آن α و β ثابت‌هایی حقیقی با شرط $\alpha + \beta = 1$ هستند، پاره‌خط واصل بین نقاط z_1 و z_0 است.

مکان هندسی نقاط $\overline{z}_0 z + z_0 \overline{z} = R$ مبین یک خط راست است.

مکان هندسی نقاط $z\overline{z} - \overline{z} z_0 - z\overline{z}_0 + z_0 \overline{z} = R$ مبین دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R است.

معادله $z = z_0 + Re^{i\theta}$ بیانگر دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R است.

چند نکته:

۱ـ z حقیقی است، اگر و تنها اگر، $z = \overline{z}$.

۲ـ z حقیقی یا موهومی محض است، اگر و تنها اگر، $z^2 = \overline{z}^2$.

۳ـ z موهومی محض است، اگر و تنها اگر، $z + \overline{z} = 0$.

۴ـ $z\overline{w} + \overline{z}w$ همواره حقیقی است.

۵ ـ رابطه $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ که در آن γ و α یک عدد حقیقی و β یک عدد مختلط دلخواه است، به ازای $\alpha = 0$ مبین یک خط و به ازای $\alpha \neq 0$ مبین یک دایره می‌باشد.

نکته: معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ را در نظر بگیرید (a، b و c اعداد ثابت دلخواهی بوده که می‌توانند مختلط نیز باشند)؛ استفاده از روش مرسوم در حل معادلات درجه دوم در اینجا نیز اعتبار داشته و داریم:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و می‌دانیم:

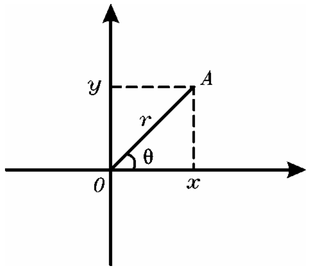
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{و} \quad |z_1 - z_2| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$$

نکته: دو مثلث با رؤوس z_1، z_2، z_3 و w_1، w_2، w_3 مشابه هستند، هرگاه:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

فرم قطبی اعداد مختلط

همان‌طوری‌که می‌دانیم متغیرهای دستگاه مختصات دکارتی؛ یعنی (x , y) و متغیرهای دستگاه مختصات قطبی؛ یعنی (r , θ) که در شکل نمایش داده شده‌اند، به‌صورت زیر به‌هم وابسته هستند:



$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \mathrm{Arc}\tan\frac{y}{x}$$

لذا عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به صورت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نوشت که اصطلاحاً به آن فرم قطبی عدد مختلط گفته می‌شود.

(مجددا یادآوری می‌کنیم از آنجا که $\tan\alpha = \tan(\pi + \alpha)$، برای محاسبه θ باید به مکان قرار گرفتن نقطه و اینکه در کدام ربع دستگاه مختصات واقع شده است توجه نماییم).

توجه: طبیعی است اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد، داریم:

$$\mathrm{Arg}(a) = 0 \qquad \mathrm{Arg}(-a) = \pi \qquad \mathrm{Arg}(ai) = \frac{\pi}{2} \qquad \mathrm{Arg}(-ai) = \frac{-\pi}{2}$$

با فرض $\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{cis}\,\theta = e^{i\theta}$ می‌توان فرم قطبی عدد مختلط را به‌صورت $z = re^{i\theta}$ بیان نمود، که برخی مواقع به‌صورت $z = r\angle\theta$ نیز بیان می‌گردد.

نکته: دقت کنید اگر $z = re^{i\theta}$ باشد، داریم:

$$\overline{z} = re^{-i\theta} \qquad -z = re^{i(\theta+\pi)} \qquad iz = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad -iz = re^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

تذکر: می‌توان نشان داد:

$$\sin iz = i\sinh z \qquad \cos iz = \cosh z$$

مزیت فرم قطبی اعداد مختلط

اعمال ضرب، تقسیم، توان رساندن و... در اعداد مختلط هنگامی که آنها را به فرم قطبی نمایش داده‌ایم، می‌تواند با سهولت زیادی صورت گیرد.

به عنوان مثال، اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند که در فرم قطبی به‌صورت $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ و $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ نمایش داده شده‌اند، روابط زیر به سادگی ملاحظه می‌شوند:

$$z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})\ (r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\ \sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$$z_1^n = (r_1e^{i\theta_1})^n = r_1^n e^{in\theta_1} = r_1^n\ (\cos n\theta_1 + i\ \sin\ n\theta_1) \quad ; \quad (n \in N)$$

(تساوی $(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ به رابطه دموآر موسوم است).

ریشه‌های n ام یک عدد مختلط

نشان داده می‌شود که هر عدد مختلط دارای n تا ریشه n ام است، به طوری که اگر $z=re^{i\theta}$ باشد، ریشه‌های n ام آن از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right\}=\sqrt[n]{r}\angle\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

که با قرار دادن n مقدار متوالی؛ مانند $k=0,1,2,\dots,n-1$ می‌توان n ریشه n ام عدد مختلط z را به‌دست آورد.

دقت کنید از نظر هندسی n جواب حاصل از $\sqrt[n]{z}$، n نقطه در صفحه هستند که رئوس یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند و فاصله هر کدام از نقاط تا مبدا مختصات $\sqrt[n]{|z|}$ بوده و زاویه بین هر دو ریشه متوالی $\frac{2\pi}{n}$ است.

نکته: می‌توان نشان داد هر معادله درجه n به‌صورت $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n=0$ که در آن $a_0,a_1,\dots,a_n$ اعداد حقیقی دلخواه می‌باشند دارای n ریشه است که این ریشه‌ها ممکن است برخی حقیقی و برخی مختلط باشند (ریشه‌های تکراری به تعداد تکرارشان مورد احتساب قرار گرفته‌اند). آنچه اهمیت دارد این است که اگر عدد مختلطی مانند z_0 یکی از ریشه‌های این معادله باشد مزدوج آن یعنی $\overline{z}_0$ نیز قطعاً یکی از ریشه‌های این معادله خواهد بود و از اینجا می‌توان دریافت اگر n فرد باشد، معادله مذکور دست کم یک ریشه حقیقی خواهد داشت.

نکته: برای حل معادلاتی به‌صورت $1+z+z^2+\dots+z^n=0$ کافی است با ضرب طرفین معادله در $(1-z)\neq 0$ به‌دست آوریم:

$$(1+z+z^2+\dots+z^n)(1-z)=0\quad\rightarrow\quad 1-z^{n+1}=0\quad\rightarrow\quad z=\sqrt[n+1]{1}$$

بنابراین ریشه‌های معادله مورد نظر تمام ریشه‌های $(n+1)$ام عدد 1 البته به‌جز خود 1 می‌باشد (چون باید $1-z\neq 0$). به تعبیری جواب‌های معادله $z=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$ به ازای $k=1,2,\dots,n$ می‌باشند.

نکته:

مجموع ریشه‌های n ام هر عدد مختلط همواره صفر است.

حاصل‌ضرب ریشه‌های n ام هر عدد مختلط مانند z برابر $(-1)^{n+1}z$ است.

نکته: مطابق اتحاد لاگرانژ داریم:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\dots+\sin n\theta=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}$$

نکته: با استفاده از رابطه دموآر می‌توان نشان داد:

$$\cos n\theta=\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-+\cdots$$

$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^{3}\theta+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^{5}\theta-+\cdots$$

$$\binom{n}{0}\cos\theta+\binom{n}{1}\cos 2\theta+\binom{n}{2}\cos 3\theta+\cdots+\binom{n}{n}\cos(n+1)\theta=2^{n}\cos^{n}\frac{\theta}{2}\cos\frac{n+2}{2}\theta$$

$$\binom{n}{0}\sin\theta+\binom{n}{1}\sin 2\theta+\binom{n}{2}\sin 3\theta+\cdots+\binom{n}{n}\sin(n+1)\theta=2^{n}\cos^{n}\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+2}{2}\theta$$

لگاریتم نپرین یک عدد مختلط

نشان داده می‌شود، لگاریتم نپرین هر عدد مختلط دارای بی نهایت جواب است؛ به‌طوری که اگر $(-\pi<\theta\leq\pi)$; $z=re^{i\theta}$ باشد، داریم:

$$\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$$

(که در آن k یک عدد صحیح نسبی دلخواه است).

لگاریتم نپرین هر عدد مختلط دارای بیشمار جواب است که قسمت حقیقی همگی آن‌ها $\ln r$ بوده و قسمت موهومی هر دو تای متوالی آن‌ها به اندازه 2π با هم اختلاف دارند.

چنانچه $k=0$ قرار داده شود به‌دست می‌آوریم:

$$\ln z=\ln r+i\theta$$

که اصطلاحاً به آن مقدار اصلی $\ln z$ گفته می‌شود.

مثال ۱ با بسط $(1+i)^{n}$ حاصل $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-+\cdots$ چگونه خواهد شد؟

۱) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ ۲) $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$ ۳) $2^{\frac{n+1}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ ۴) $2^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$(1+i)^{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^{2}+\binom{n}{3}i^{3}+\binom{n}{4}i^{4}+\binom{n}{5}i^{5}+\cdots\ \rightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{n}=\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}i^{2}+\binom{n}{4}i^{4}+\cdots\right\}+\left\{\binom{n}{1}i+\binom{n}{3}i^{3}+\binom{n}{5}i^{5}+\cdots\right\}\ \rightarrow$$

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=\left\{\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-+\cdots\right\}+i\left\{\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-+\cdots\right\}$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های موهومی طرفین تساوی به دست می‌آوریم:

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-+\cdots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$$

مثال ۲ با فرض آن‌که n عددی طبیعی است معادله $(z+i)^{n}=(z-i)^{n}$ در اعداد مختلط: (ریاضی ۸۷)

۱) $n-1$ ریشه متمایز دارد. ۲) n ریشه دارد.

۳) حداقل یک ریشه غیر ساده دارد. ۴) هیچ ریشه ساده ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\left(z+i\right)^n=\left(z-i\right)^n \rightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1 \rightarrow \frac{z+i}{z-i}=\sqrt[n]{1}$$

از آن‌جا که $\begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases} \rightarrow$ 1 می‌توان نوشت:

$$\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{2k\pi}{n}} \rightarrow z+i=e^{\frac{i2k\pi}{n}}\left(z-i\right) \rightarrow z\left(1-e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)=-i\left(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right) \rightarrow z=i\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}$$

به ازاء $k=0$ و $k=n$ مخرج عبارت سمت راست صفر می‌شود و جواب قابل قبولی به دست نمی‌آید.
و به ازای $k=1,2,\dots,n-1$، $(n-1)$ مقدار متمایز برای z قابل حصول است.

مثال ۳ فرض کنیم $z_1=2+i\sqrt{3}$ یک عدد مختلط ثابت باشد و $z_1 \neq z_2$ عددی باشد که در معادلات $|z_1|=|z_2|$ و $|1-z_1|=|1-z_2|$ صدق کند در این صورت: (اتوماسیون ۸۵)

۱) $z_2=2-i\sqrt{3}$

۲) $|z_1|+|z_2|=2$

۳) z_2 روی دایره‌ای به مرکز z_1 و به شعاع $\sqrt{3}$ قرار دارد.

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ درست است.

با فرض $z_2=x+iy$ از فرض‌های مسأله داریم:

$$|z_1|=|z_2| \rightarrow |2+i\sqrt{3}|=|x+iy| \rightarrow \sqrt{4+3}=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow x^2+y^2=7$$

$$|1-z_1|=|1-z_2| \rightarrow |-1-i\sqrt{3}|=|(1-x)-iy| \rightarrow$$

$$\sqrt{1+3}=\sqrt{(1-x)^2+y^2} \rightarrow (1-x)^2+y^2=4 \rightarrow x^2+y^2=3+2x$$

با توجه به دو معادله فوق داریم:

$$3+2x=7 \rightarrow x=2 \rightarrow y=\pm\sqrt{7-(2)^2}=\pm\sqrt{3}$$

لذا داریم:

$$z_2=2\pm\sqrt{3}\,i$$

مثال ۴ اگر $|\cos z|=\cosh y$ می‌توان نتیجه گرفت:

۱) $x=2k\pi$ ۲) $x=k\pi$ ۳) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\cos z=\cos\left(x+iy\right)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

$$|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y}=\sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\left(\cosh^2 y-1\right)}=\sqrt{\cosh^2 y-\sin^2 x}$$

اگر بخواهیم $|\cos z| = \cosh y$ باید:

$$\sin^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\pi$$

مثال ۵ اگر $\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right| \le \frac{1}{2}$ و $z \ne \bar{a}$، آن‌گاه: (ریاضی ۸۷)

۱) $|z| \ge \frac{1}{3}|\bar{a}|$ ۲) $|z| \le 2|a|$ ۳) $|z| \ge 2|\bar{a}|$ ۴) $|z| \le 3|a|$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$|z-a| \le \frac{1}{2}|z-\bar{a}|$$

اما می‌دانیم:

$$|z|-|a| \le |z-a| \le |z|+|a|$$
$$|z|-|\bar{a}| \le |z-\bar{a}| \le |z|+|\bar{a}|$$

لذا از نامعادله اصلی می‌توان گفت:

$$|z|-|a| \le \frac{1}{2}\left(|z|+|\bar{a}|\right) \rightarrow |z|-|a| \le \frac{1}{2}\left(|z|+|a|\right) \rightarrow \frac{1}{2}|z| \le \frac{3}{2}|a| \rightarrow |z| \le 3|a|$$

مثال ۶ مساحت شکل $|z-4i|+|z+4i|=10$ چقدر است؟

۱) 20π ۲) 15π

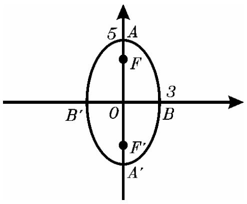
۳) 10π ۴) رابطه داده شده شکلی را توصیف نمی‌کند.

حل: گزینه ۲ درست است.

رابطه داده شده مبین مکان هندسی نقاطی است که مجموع فواصلشان تا دو نقطه $z_1 = 4i$ و $z_2 = -4i$ برابر عدد ثابت $R = 10$ است، چون فاصله z_1 و z_2 برابر است با:

$$|z_1 - z_2| = |4i + 4i| = 8$$

و این فاصله از R کمتر است لذا شکل مورد نظر یک بیضی با کانون‌های $z_1 = 4i$ و $z_2 = -4i$ می‌باشد و داریم:



$$AF + AF' = 10 \quad \rightarrow \quad OA = OA' = 5$$
$$OF = OF' = 4$$

چون B روی محیط بیضی است داریم:

$$BF + BF' = 10 \quad \rightarrow \quad BF = BF' = 5$$

حال می‌توان نوشت:

$$OB = \sqrt{(BF)^2 - (OF)^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = 3$$

لذا مساحت بیضی چنین است:

$$S = \pi(OA)(OB) = \pi(5)(3) = 15\pi$$

مثال ۷ برای اعداد مختلط z و w، عبارت $|z+w|^2+|z-w|^2$ برابر کدام است؟ (توجه: $\bar{z}$ مکمل مختلط z و $\bar{w}$ مکمل مختلط w است.) (کامپیوتر ۸۷)

۱) $2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ ۲) $2\left(|z|^2-|w|^2\right)$

۳) $2\left(|z|^2-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^2\right)$ ۴) $2\left(|z|^2+z\bar{w}+w\bar{z}-|w|^2\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم برای هر عدد مختلط v داریم $|v|^2=v\bar{v}$ لذا می‌توان نوشت:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})+(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{z}-z\bar{w}-w\bar{z}+w\bar{w}$$
$$=2(z\bar{z}+w\bar{w})=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$$

مثال ۸ اگر $A=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$، آنگاه مقدار A به ازای $n=3k$ و $n\neq 3k$ به ترتیب کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) $-1,2$ ۲) $2,-1$ ۳) $1,2$ ۴) $2,1$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$-1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad -1-i\sqrt{3}=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

اگر $n=3k$ باشد داریم:

$$A=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3k}+\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3k}=e^{2\pi ki}+e^{4\pi ki}=1+1=2$$

اگر $n=3k+1$ باشد داریم:

$$A=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3k+1}+\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3k+1}=e^{i\left(2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{i\left(4\pi k+\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1$$

اگر $n=3k+2$ باشد داریم:

$$A=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3k+2}+\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3k+2}=e^{i\left(2\pi k+\frac{4\pi}{3}\right)}+e^{i\left(4\pi k+\frac{8\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{4\pi}{3}}+e^{i\frac{8\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-1$$

راه دیگر: به ازای $n=0=3k$ داریم:

$$A=1+1=2$$

به ازای $n=1\neq 3k$ داریم:

$$A=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1$$

پس گزینه اول صحیح است.

مثال ۹ مساحت ناحیه محدود شده به $D=\left\{ z \,|\, 1 \le \left| z+1-2i \right| \le 2 \,,\, \frac{\pi}{6} \le \operatorname{Arg}\left(z+1-2i\right) \le \frac{\pi}{2} \right\}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

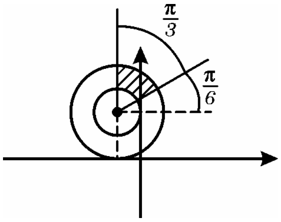
حل: گزینه ۲ درست است.

ناحیه $1 \le \left| z+1-2i \right| \le 2$ ناحیه داخل یک حلقه دایره‌ای به مرکز $-1+2i$ و شعاع داخلی 1 و شعاع خارجی 2 است و لذا مساحت آن $\pi(2)^2 - \pi(1)^2 = 3\pi$ می‌باشد.

شرط اضافه داده شده یعنی $\frac{\pi}{6} \le \operatorname{Arg}\left(z+1-2i\right) \le \frac{\pi}{2}$ باعث می‌شود قسمتی از این حلقه دایره‌ای مطابق شکل مدنظر باشد. و طبیعتاً مساحت قسمت هاشور خورده چنین به دست می‌آید:

مساحت	زاویه مرکزی
3π	2π
S	$\frac{\pi}{3}$

$$\rightarrow \quad S=\frac{3\pi\,\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{\pi}{2}$$



مثال ۱۰ یکی از مقادیر $\sqrt[5]{1+i}$ کدام است؟ (هوافضا ۸۵)

۱) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ ۲) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)$

۳) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$ ۴) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$z=1+i \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \rightarrow \sqrt[5]{1+i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)$$

که به ازاء $k=0$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)$$

مثال ۱۱ مقدار اصلی $(-3)^{3-i}$ عبارت است از: (اتوماسیون ۸۷)

۱) $27e^{\pi}\left[\cos(3\pi-\ln 3)-i\sin(3\pi-\ln 3)\right]$ ۲) $27e^{\pi}\left[\cos(3\pi+\ln 3)+i\sin(3\pi+\ln 3)\right]$

۳) $27e^{\pi}\left[\cos(3\pi+\ln 3)-i\sin(3\pi+\ln 3)\right]$ ۴) $27e^{\pi}\left[\cos(3\pi-\ln 3)+i\sin(3\pi-\ln 3)\right]$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$A=(-3)^{3-i}\quad\to\quad \ln A=(3-i)\ln(-3)=(3-i)\{\ln|-3|+i\text{Arg}(-3)\}$$
$$=(3-i)\{\ln 3+i\pi\}=(3\ln 3+\pi)+i(3\pi-\ln 3)\quad\to$$
$$A=e^{3\ln 3}e^{\pi}e^{i(3\pi-\ln 3)}=27e^{\pi}\{\cos(3\pi-\ln 3)+i\sin(3\pi-\ln 3)\}$$

مثال ۱۲ اگر $z=x+iy$، آن‌گاه مجموعه جواب‌های معادله $\sin z=2$ کدام است؟ (مواد ۸۵)

۱) $z_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}+i\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right)$

۲) $z_k=\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right)+i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

۳) $z_k=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

۴) $z_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\sin z=2\quad\to\quad\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\quad\to\quad\frac{e^{2iz}-1}{2ie^{iz}}=2\quad\to\quad e^{2iz}-4ie^{iz}-1=0\quad\to$$
$$e^{iz}=2i\pm\sqrt{(-2i)^2+1}=2i\pm\sqrt{-3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$$

ازآنجاکه:

$$\left|\left(2+\sqrt{3}\right)i\right|=2+\sqrt{3}\ ,\ \text{Arg}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)i\right)=\frac{\pi}{2}$$
$$\left|\left(2-\sqrt{3}\right)i\right|=2-\sqrt{3}\ ,\ \text{Arg}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)=\frac{\pi}{2}$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}e^{iz}=\left(2+\sqrt{3}\right)i\ \to\ iz=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\ e^{iz}=\left(2-\sqrt{3}\right)i\ \to\ iz=\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\end{cases}\ \to\ \begin{cases}z=-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\ z=-i\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\end{cases}$$

پس:

$$z=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$$

و چون:

$$2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$$

داریم:

$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)=-\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$
$$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

پس می‌توان مجموعه جواب را اینگونه نمایش داد:

$$z=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right)$$

راه دیگر:

$$\sin z=2 \quad\to\quad \sin(x+iy)=2 \quad\to\quad \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=2$$

پس باید:

$$\begin{cases}\sin x\ \cosh y=2\\ \cos x\sinh y=0\end{cases}$$

از معادله دوم نتیجه می‌شود $\sinh y=0$ یا $\cos x=0$ اگر $\sinh y=0$ باشد داریم $\cosh y=1$ و لذا از معادله اول به دست می‌آید $\sin x=2$ که غیرممکن است (زیرا x عددی حقیقی است و $-1\le\sin x\le1$) اگر $\cos x=0$ باشد داریم $\sin x=\pm1$ در حقیقت:

$$\text{اگر}\quad x=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \quad\to\quad \sin x=-1 \xrightarrow{\text{معادله اول}} \cosh y=-2 \qquad \text{غیرممکن}$$

$$\text{اگر}\quad x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad\to\quad \sin x=+1 \xrightarrow{\text{معادله اول}} \cosh y=2 \quad\to\quad \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=2 \quad\to\quad \frac{e^{2y}+1}{2e^{y}}=2 \quad\to$$

$$e^{2y}-4e^{y}+1=0 \quad\to\quad e^{y}=2\pm\sqrt{3} \quad\to\quad y=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$$

لذا جواب‌های معادله به صورت $z=x+iy=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$ است.

مثال ۱۳ مساحت ناحیه تعریف شده با رابطه $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z+i}\right)\ge1$ چقدر است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) نامتناهی

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{x+i(y+1)}=\frac{x-i(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

پس ناحیه موردنظر چنین است:

$$\frac{x}{x^2+(y+1)^2}\ge1 \quad\to\quad x^2+(y+1)^2\le x \quad\to\quad x^2-x+(y+1)^2\le0 \quad\to\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2\le\frac{1}{4}$$

که ناحیه داخل یک دایره به مرکز $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$ بوده و مساحت آن چنین می‌باشد:

$$S=\pi R^2=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۴ کدام‌یک از گزاره‌های زیر برای معادله $\tan z = i$ درست است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) معادله بی‌نهایت جواب دارد. ۲) معادله جواب ندارد.

۳) جواب‌های معادله به‌صورت $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ می‌باشند. ۴) جواب‌های معادله موهومی محض هستند.

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\tan z = i \rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} = i \rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -e^{iz} - e^{-iz} \rightarrow 2e^{iz} = 0$$

که غیرممکن است، پس معادله مورد نظر جواب ندارد. دقت کنید در مفهوم حدی (فقط حدی) معادله حاصله را می‌توان این‌طور ادامه داد:

$$e^{iz} = 0 \rightarrow iz = -\infty \rightarrow z = i\infty$$

که ممکن است گزینه چهارم را تداعی کند.

مثال ۱۵ مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $\left|\frac{z-1+i}{2z-3i}\right| = \frac{1}{2}$ صدق می‌کنند، کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

۱) یک خط مستقیم است. ۲) دایره است. ۳) بیضی است. ۴) هذلولی است.

حل: گزینه ۱ درست است.

رابطه $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$ که در آن z_1, z_2 دو عدد مختلط معلوم و k یک عدد مثبت می‌باشد برای $k=1$ مبین عمود منصف پاره‌خط $z_1 z_2$ و برای $k \neq 1$ مبین یک دایره است.

$$\left|\frac{z-1+i}{2z-3i}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow \left|\frac{z-1+i}{z-\frac{3i}{2}}\right| = 1$$

پس شکل موردنظر عمودمنصف پاره‌خطی است که دو سر آن نقاط $z_2 = \frac{3i}{2}$ و $z_1 = 1-i$ می‌باشد.

راه دیگر:

$$z = x + iy$$

$$\left|\frac{x-1+(y+1)i}{2x+(2y-3)i}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}\left(4x^2 + (2y-3)^2\right)$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow -2x + 2y + 2 = -3y + \frac{9}{4}$$

$$2x - 5y = -\frac{1}{4}$$

نواحی در صفحه مختلط

۱ـ صفحه‌ای که شامل یک دستگاه محورهای متعامد به صورت‌های افقی و عمودی است که به ترتیب محورهای حقیقی و موهومی نامیده می‌شوند و واحد بر محور x، (1) و واحد بر محور y، (i) می‌باشد یک صفحه مختلط می‌نامیم.

۲ـ فاصله بین هر نقطه z تا نقطه دلخواه z_0 به صورت $\left|z-z_0\right|$ نشان داده می‌شود، لذا دایره به شعاع R و مرکز z_0 را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\left\{ z \mid z \in C \quad , \quad \left|z-z_0\right| = R \right\}$$

که در آن C بیانگر مجموعه اعداد مختلط می‌باشد.

۳ـ نامساوی $\left|z-z_0\right| < R$ که نقاط درونی دایره فوق را نشان می‌دهد، قرص دایره‌ای باز به شعاع R و نامساوی $\left|z-z_0\right| \le R$ که شامل نقاط درونی و مرز دایره است را قرص دایره‌ای بسته به شعاع R می‌نامیم.

۴ ـ قرص باز با شعاع بی‌نهایت کوچک، که ε همسایگی از z_0 نیز نامیده می‌شود را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$N_\varepsilon\left(z_0\right) = \left\{ z \mid z \in C \, , \left|z-z_0\right| < \varepsilon \right\}$$

واضح است که نامساوی $\left|z-z_0\right| > \varepsilon$، نقاط بیرونی دایره بمرکز z_0 و شعاع ε و نامساوی $\varepsilon_1 < \left|z-z_0\right| < \varepsilon_2$ ناحیه بین دو دایره هم‌مرکز، به مرکز z_0 و شعاع‌های ε_1 و ε_2 را نشان می‌دهد که به آن طوق باز می‌گوئیم. همچنین همسایگی محذوف به مرکز z_0 و شعاع ε بصورت زیر نشان داده می‌شود:

$$N'_\varepsilon\left(z_0\right) = N_\varepsilon\left(z_0\right) - \left\{ z_0 \right\}$$

۵ ـ فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط C باشد، $z_0 \in S$ را یک نقطه داخلی S می‌نامیم، هرگاه یک همسایگی از z_0 موجود باشد به نحوی که $N_\varepsilon\left(z_0\right) \subset S$. نقطه z_1 را یک نقطه خارجی S می‌گوئیم، هرگاه یک ε همسایگی از z_1 یافت شود که $N_\varepsilon\left(z_1\right) \subset C-S$.

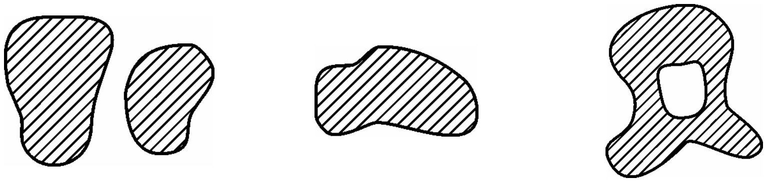
۶ ـ هرگاه نقطه‌ای نه نقطه داخلی S باشد و نه نقطه خارجی آن، نقطه مرزی S نامیده می‌شود. مرز S، مجموعه کلیه نقاط مرزی S می‌باشد.

۷ـ مجموعه S را باز می‌گوئیم، هرگاه هر نقطه متعلق به آن، یک نقطه داخلی باشد. مجموعه S را بسته گوئیم، هرگاه مکمل آن باز باشد.

۸ ـ مجموعه S را کراندار گوئیم هرگاه داشته باشیم:

$$\exists N \in R \qquad \forall z \in S \quad , \quad \left|z\right| < N$$

۹ـ مجموعه باز S را همبند گوئیم، اگر هر دو نقطه دلخواه آن را بتوان بوسیله یک خط شکسته بهم وصل کرده، به گونه‌ای که تمام آن خط شکسته درون S قرار داشته باشد. مجموعه همبند باز را حوزه می‌گوئیم. مجموعه S را همبند ساده گوئیم، اگر هر منحنی بسته واقع در S را بتوان در یک نقطه منقبض کرد، به نحوی که ضمن انقباض، منحنی مذکور همواره در S واقع باشد.



ناحیه غیرهمبند　　　ناحیه همبند ساده　　　ناحیه همبند مرکب

۱۰ـ هرگاه S ناحیه‌ای از صفحه مختلط باشد و z_0 نقطه‌ای متعلق به S باشد:

الف) z_0 را یک نقطه مجزای S می‌گویند هرگاه z_0 دارای یک همسایگی باشد که شامل نقطه دیگری از S نیست.

ب) z_0 را یک نقطه انباشتگی S می‌گویند هرگاه هر همسایگی z_0 شامل حداقل یک نقطه (غیر از خود z_0) متعلق به S باشد و در نتیجه شامل بی‌نهایت نقطه متعلق به S باشد. به‌عنوان مثال مجموعه $z_n = \frac{i}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$ تنها یک نقطه انباشتگی در مبدأ دارد.

چند تعریف روی منحنی‌ها

۱ـ منحنی c با معادله پارامتری $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ که $t \in [a, b]$ را بسته می‌گوئیم هرگاه: $z(a) = z(b)$

۲ـ اگر یک منحنی خود را قطع نکند، یعنی برای هر t_1 و t_2 ای که $t_1 \neq t_2$ داشته باشیم $(t_1, t_2 \neq a, b)$ ، $z(t_1) \neq z(t_2)$، منحنی را ساده می‌گوئیم.

۳ـ هر منحنی ساده بسته را یک خم ژردان می‌گوئیم.

۴ـ خمی که دارای مشتقات پیوسته باشد هموار نامیده می‌شود. منحنی قطعه‌ای هموار منحنی است متشکل از تعداد متناهی منحنی هموار که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل است، این منحنی را کانتور می‌گوئیم.

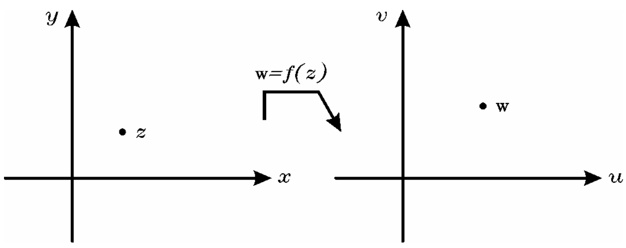
۵ ـ اگر c یک خم ژردان باشد، مکمل آن از دو مجموعه مجزا تشکیل می‌شود، یکی میدانی کراندار موسوم به درون و دیگری میدانی بیکران موسوم به بیرون، که خم c مرز این دو میدان است.

۶ ـ جهت مثبت روی منحنی بسته ساده c طوری تعریف می‌شود که اگر شخصی روی c در آن جهت حرکت کند، ناحیه محصور به c در سمت چپ او واقع گردد.

توابع مختلط

فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد. تابع $w = f(z)$ که در S تعریف شده، عبارت است از قاعده‌ای که به هر عدد مختلط z در S یک عدد مختلط مانند w را نسبت می‌دهد. مجموعه S را حوزه تعریف تابع $f(z)$ و مجموعه اعداد مختلطی را که w اختیار می‌کند، برد تابع می‌نامیم.

اگر در نظر بگیریم $z = x + iy$ و $w = u + iv$، ملاحظه می‌کنیم هر تابع $w = f(z)$، یک نقطه از صفحه $x - y$ را به یک نقطه از صفحه $u - v$ می‌نگارد و به تعبیر دیگر به هر زوج مرتب (x, y)، یک زوج مرتبه مانند (u, v) نسبت می‌دهد.



حد توابع مختلط

فرض کنید تابع f در همه نقاط همسایگی z_0، به‌جزء احتمالاً خود z_0، تعریف شده باشد. در این صورت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ می‌باشد، هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \delta > 0 \;;\; 0 < |z - z_0| < \delta \;\to\; |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

و تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گوئیم، هرگاه $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

توجه کنید هرگاه تابع $f(z)$ به صورت $f(z) = u(x\,,y) + i\,v(x\,,y)$ بیان شده باشد، آنگاه حد این تابع را در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x\,,y)\to(x_0\,,y_0)} u(x\,,y) + i \lim_{(x\,,y)\to(x_0\,,y_0)} v(x\,,y)$$

و لذا ملاحظه می‌کنیم، بررسی حد تابع مختلط $f(z)$، منجر خواهد شد به بررسی حد توابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$. لذا $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ هنگامی دارای حد است که توابع u و v در نقطه $(x_0\,,y_0)$ دارای حد باشند.

حد در بی‌نهایت، حدهای بی‌نهایت، حد بی‌نهایت در بی‌نهایت

تابع $w = f(z)$ دارای حد در بی‌نهایت است هرگاه $f(z)$ وقتی $|z| \to \infty$ به سمت عددی مشخص و محدود میل کند. شرط آنکه $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0$ باشد برقراری شرط منطقی زیر است:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists M > 0 \;,\; |z| > M \;\to\; |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

تابع $w = f(z)$ در z_0 دارای حد بی‌نهایت است هرگاه $|f(z)|$ وقتی $z \to z_0$، به سمت بی‌نهایت میل کند. شرط آن‌که $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ باشد برقراری شرط منطقی زیر است:

$$\forall N > 0 \qquad \exists \delta > 0 \;,\; 0 < |z - z_0| < \delta \;\to\; |f(z)| > N$$

اگر وقتی $|z| \to \infty$ داشته باشیم $|f(z)| \to \infty$ در این شرایط تابع $w = f(z)$ حد بی‌نهایت در بی‌نهایت دارد. شرط آنکه $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ باشد برقراری شرط منطقی زیر است:

$$\forall N > 0 \qquad \exists M > 0 \;,\; |z| > M \;\to\; |f(z)| > N$$

مثال ۱۶ کدام تابع زیر در $z = 0$ حد دارد؟

۱) $\dfrac{|z|}{z}$ ۲) $\dfrac{|z|^2}{z}$ ۳) هردو ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{r\cos\theta + ir\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \quad \text{وابسته به } \theta$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x+iy} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{r\cos\theta + ir\sin\theta} = \lim_{r\to 0} r\,\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \text{صفر حدی} \times \text{کراندار} = 0$$

بدیهی است $\cos\theta + i\sin\theta$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود زیرا وقتی $\cos\theta = 0$ داریم $\sin\theta = \pm 1$ و وقتی $\sin\theta = 0$ داریم $\cos\theta = \pm 1$ (در حقیقت $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ و البته $e^{i\theta}$ هرگز صفر نخواهد شد.)

مثال ۱۷ تابع $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2+1}}$ را درنظر می‌گیریم. وقتی z روی خط $y = x + 1$ در ربع اول و با xهای کاهشی به سمت نقطه $z = i$ میل کند، مقداری که $f(z)$ به‌خود می‌گیرد برابر است با: (برق ۸۵)

۱) صفر ۲) $+1$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

حل: گزینه ۴ درست است.

عبارت $-\frac{1}{z^2+1}$ روی خط $y = x + 1$ (یعنی $z = x + i(x+1)$) چنین می‌شود:

$$-\frac{1}{z^2+1} = -\frac{1}{(x + i(x+1))^2 + 1} = -\frac{1}{x^2 - (x+1)^2 + 2ix(x+1) + 1}$$

$$= -\frac{1}{x^2 - x^2 - 2x - 1 + 2i(x^2 + x) + 1} = -\frac{1}{-2x + 2i(x^2 + x)}$$

$$= \frac{1}{2x}\frac{1}{1 - i(x+1)} = \frac{1}{2x}\frac{1 + i(x+1)}{1 + (x+1)^2}$$

وقتی روی خط $y = x + 1$ در ربع اول و با xهای کاهشی به سمت نقطه $z = i$ نزدیک می‌شویم داریم $x \to 0^+$ و لذا

$$\lim_{x\to 0^+}\left|e^{-\frac{1}{z^2+1}}\right| = \lim_{x\to 0^+}\left|e^{\frac{1}{2x}\frac{1+i(x+1)}{1+(x+1)^2}}\right| = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}\frac{1}{1+(x+1)^2}} = e^{+\infty} = +\infty$$

(توجه داریم $\left|e^{\frac{i(x+1)}{1+(x+1)^2}}\right| = 1$)

مثال ۱۸ در چه ناحیه‌ای حد تابع $f(z) = z^2 e^{-\frac{1}{z^2}}$ وقتی $z \to 0$ موجود و محدود است؟

۱) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ۲) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ۳) $-\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{8}$ ۴) $-\frac{\pi}{16} < \theta < \frac{\pi}{16}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با فرض $z = re^{i\theta}$ داریم:

$$f(z) = \left(re^{i\theta}\right)^2 e^{-\frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^2}} = r^2 e^{2i\theta} e^{-\frac{1}{r^2}e^{-2i\theta}} = r^2 e^{2i\theta} e^{-\frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)}$$

چون $\left|f(z)\right| = r^2 e^{-\frac{1}{r^2}\cos 2\theta}$ لذا برای آن‌که $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ موجود و محدود باشد باید $\lim\limits_{r\to 0}\left|f(z)\right|$ موجود و محدود باشد و این می‌طلبد:

$$\cos 2\theta > 0 \quad \to \quad -\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad \to \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۹ حد تابع $f(z) = z - e^z$ وقتی z به بی‌نهایت میل کند کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

۱) $-\infty$ ۲) 0 ۳) وجود ندارد ۴) ∞

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z} - e^{\frac{1}{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x+iy} - e^{\frac{1}{x+iy}}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2} - e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} i\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

با استفاده از مختصات قطبی می‌توان دید توابع $\frac{x}{x^2+y^2}$ و $\frac{y}{x^2+y^2}$ در نقطه $(0,0)$ حد ندارند زیرا یکی به‌صورت $\frac{\cos\theta}{r}$ و دیگری به‌صورت $\frac{\sin\theta}{r}$ بیان می‌شوند، لذا گزینه سوم صحیح است.

راه دیگر:

اگر روی محور حقیقی z را به $+\infty$ میل دهیم داریم:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = +\infty - e^{+\infty} = -\infty$$

اگر روی محور حقیقی z را به $-\infty$ میل دهیم داریم:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = -\infty - e^{-\infty} = -\infty$$

پس حد $f(z)$ در بی‌نهایت موجود نمی‌باشد.

مثال ۲۰ تابع $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re}(z^3)}{|z|^2} & z \neq 0 \\ a & z = 0 \end{cases}$ به ازاء چه مقدار a در $z = 0$ پیوسته می‌شود؟

۱) $a = 0$ ۲) $a = 1$ ۳) $a = \frac{3}{2}$ ۴) هیچ مقدار α

حل: گزینه ۱ درست است.

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \quad \to \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z^3) = x^3 - 3xy^2 \\ \operatorname{Im}(z^3) = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re}(z^3)}{|z|^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

با نوشتن حد مذکور در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta - 3r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\left(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\right)$$

به‌واسطه آن‌که $\cos\theta\left(\cos^2\theta-3\sin^2\theta\right)$ به ازاء همه مقادیر θ محدود است حاصل حد فوق موجود و برابر صفر بوده و لذا با انتخاب $a=0$ تابع $f(z)$ در $z=0$ پیوسته خواهد شد.

مثال ۲۱ اگر با فرض $|y|\to\infty$، متغیر z به سمت بی‌نهایت میل کند، دراین‌صورت درمورد کرانداربودن و یا دارای حدبودن $|\sin z|$ کدام عبارت درست است؟ (برق ۸۵)

۱) به بی‌نهایت میل می‌کند.
۲) کراندار است و به صفر میل می‌کند.
۳) کراندار است اما به صفر میل نمی‌کند.
۴) کراندار است اما به سمت حدی میل نمی‌کند.

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x\left(1+\sinh^2 y\right) + \cos^2 x\sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)} = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

وقتی $|y|\to\infty$ داریم $\sinh y\to+\infty$ و لذا اگرچه $\sin^2 x$ همواره محدود و متعلق به بازه $[0,1]$ است ولی در کل $|\sin z|\to+\infty$

مشتق توابع مختلط

مشتق تابع مختلط $w=f(z)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

همچنین مشتق تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه z_0 (در صورت وجود) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

نکته: از آن‌جا که $y=\frac{z-\bar z}{2i}$ و $x=\frac{z+\bar z}{2}$، می‌توان نشان داد برای تابع حقیقی $F(x,y)$ داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{-1}{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

و بدین ترتیب عملگرهای زیر قابل تعریفند:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

تابع تحلیلی

هرگاه تابع مختلط $f(z)$ در تمام نقاط یک همسایگی از z_0 و خود z_0 مشتق‌پذیر باشد، تابع f را در نقطه z_0 تحلیلی می‌گوئیم. توجه کنید که مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه شرط لازم و نه کافی، برای تحلیلی بودن آن تابع در نقطه مورد نظر است. مثلاً تابع $|z|^2$ فقط و فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر است و به طبع در این نقطه تحلیلی نمی‌باشد.

اگر تابعی در هر نقطه از حوزه D تحلیلی باشد، گوئیم تابع در حوزه D تحلیلی است. و اگر $f(z)$ در کلیه نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد، به آن تابع تام می‌گوئیم.

توابع چند جمله‌ای مانند $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ که درآن n عدد طبیعی و $a_n,\dots,a_0$ اعداد مختلط ثابت می‌باشند، همواره تحلیلی هستند.

مجموع، حاصل‌ضرب، ترکیب دو تابع تحلیلی تابعی تحلیلی خواهد بود.

مجموع یک تابع تحلیلی و یک تابع غیرتحلیلی تابعی غیرتحلیلی خواهد بود.

توابع گویا به صورت $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ که در آن p و q چند جمله‌ای‌های دلخواه می‌باشند، در همه نقاط بجز احتمالاً صفرهای مخرج تحلیلی هستند.

توابع $\sin z$ و $\cos z$ و $\sinh z$ و $\cosh z$ و e^z همواره تحلیلی هستند.

توابع $\ln z$ و $\sqrt[n]{z}$ در همه‌جا بجز نقاط مربوط به بریدگی شاخه‌شان تحلیلی هستند.

توابع $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$ و $\bar{z}$ و $|z|$ و $\operatorname{Arg} z$ هیچ جایی تحلیلی نیستند.

برای دو تابع تحلیلی $f(z)$ و $g(z)$، مجموع، تفاضل و ضرب و ترکیب آن‌ها همواره تحلیلی می‌باشد و خارج قسمت آن‌ها در کلیه نقاط بجز احتمالاً صفرهای مخرج تحلیلی است.

اگر توابع $g(z)$ و $f(z)$ همه‌جا بجز احتمالاً در نقاطی خاص تحلیلی باشند و $I=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$ مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد با استفاده از قضیه هوپیتال می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه z_0 دارای مشتق از هر مرتبه‌ای باشد آن است که در این نقطه تحلیلی باشد.

توجه: قضایایی مانند قضیه بولتزانو، رول، لاگرانژ و ... که در توابع حقیقی مطرح می‌شوند در توابع مختلط برقرار نمی‌باشند.

مثلاً برای تابع e^z که همه جا پیوسته است اگرچه $\begin{cases} e^0 = 1 > 0 \\ e^{i\pi} = -1 < 0 \end{cases}$ ولی هیچ جایی وجود ندارد که $e^z = 0$ باشد.

نقطه تکین

اگر تابع $f(z)$ در همه نقاط صفحه مختلط بجز نقاط خاصی تحلیلی باشد، به آن نقاط خاص نقاط تکین تابع f گفته می‌شود. و به تعبیری z_0 را یک نقطه تکین تابع $f(z)$ می‌گوئیم هرگاه تابع در این نقطه تحلیلی نبوده ولی در همسایگی z_0 نقاطی وجود داشته باشد که $f(z)$ در آن‌جا تحلیلی است. توجه کنید اگر تابعی در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نباشد، دارای نقطه تکین نخواهد بود.

قضایای کوشی ـ ریمان

قضیه اول کوشی ریمان: هرگاه تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ دارای مشتق باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0\,,\,y_0)} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0\,,\,y_0)}$$

و معادلات زیر که به معادلات کوشی ریمان موسوم هستند، در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه دوم کوشی ریمان: هرگاه $v(x\,,\,y)$ و $u(x\,,\,y)$ مربوط به تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ در معادلات کوشی ریمان صدق کرده و در یک همسایگی از نقطه $(x_0\,,\,y_0)$ پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند، آنگاه $f'(z_0)$ موجود است.

در رابطه با بحث‌های فوق به موارد زیر دقت داشته باشید:

دقت کنید، برقراری روابط کوشی ـ ریمان یعنی $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ ، دلیل بر مشتق‌پذیر بودن تابع مختلط $w = f(z)$ نمی‌باشد، ولی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است. لذا هرگاه روابط مزبور در نقطه‌ای برقرار نباشند می‌توان نتیجه گرفت که تابع مختلط مورد نظر در آن نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود.

شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن تابع $f(z) = u + iv$ در حوزه D آن است که توابع u و v، u_x ، u_y، v_x و v_y در D پیوسته بوده و روابط کوشی ریمان نیز در D همواره برقرار باشند.

تذکر: تابع مختلط $f(z)$ نمی‌تواند فقط در نقاط روی یک منحنی و یا فقط در نقاطی مجزا تحلیلی باشد، بنابراین اگر معادلات کوشی ریمان فقط در نقاط روی یک منحنی و یا فقط در نقاطی مجزا برقرار باشند، تابع $f(z)$ در هیچ جایی تحلیلی نخواهد بود، اگرچه ممکن است در آنجا مشتق‌پذیر باشد.

معادلات کوشی ریمان در فرم قطبی

هرگاه تابع $f(z)$ در دستگاه مختصات قطبی به صورت مقابل بیان شده باشد:

$$f(z) = u(r\,,\,\theta) + iv(r\,,\,\theta) \qquad z = re^{i\theta}$$

معادلات کوشی ـ ریمان به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

و $f'(z)$ در صورت وجود از عبارات زیر قابل محاسبه است:

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$$

نکته: می‌توان نشان داد:

$$u_x=u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r} \qquad u_y=u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

توجه ۱: بسیاری مواقع برای تحقیق برقراری معادلات کوشی ریمان مناسب است از دستگاه مختصات قطبی استفاده شود. به عنوان مثال اگر هدف ارزیابی این موضوع برای تابع ساده‌ای مانند $f(z)=z^4$ باشد:

الف) در فرم دکارتی و با فرض $z=x+iy$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}w&=(x+iy)^4=x^4+4x^3(iy)+6x^2(iy)^2+4x(iy)^3+(iy)^4\\&=x^4-6x^2y^2+y^4+i\left(4x^3y-4xy^3\right)\end{aligned}$$

لذا $v=4x^3y-4xy^3$ و $u=x^4-6x^2y^2+y^4$ بوده و مشاهده می‌شود معادلات کوشی ریمان همواره برقرارند زیرا:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=4x^3-12xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}=-12x^2y+4y^3$$

ب) در فرم قطبی و با فرض $z=re^{i\theta}$ می‌نویسیم:

$$w=\left(re^{i\theta}\right)^4=r^4e^{4i\theta}=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$$

لذا $v=r^4\sin4\theta$ و $u=r^4\cos4\theta$ بوده و مشاهده می‌شود معادلات کوشی ریمان همواره برقرارند زیرا:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=4r^3\cos4\theta$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{-\partial v}{\partial r}=-4r^3\sin4\theta$$

نکته: این موضوع اهمیت دارد، بسته به آن‌که z را به صورت $x+iy$ یا $re^{i\theta}$ فرض کنیم، بتوانیم قسمت‌های حقیقی و موهومی هر تابع مختلط مانند $w=f(z)$ را بیابیم.

به عنوان مثال برای تابع $f(z)=\tan z$ چنانچه بخواهیم قسمت‌های حقیقی و موهومی را برحسب x و y بیابیم، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}f(z)=\tan z&=\frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}=\frac{\sin x\cos iy+\cos x\sin iy}{\cos x\cos iy-\sin x\sin iy}\\&=\frac{\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y}{\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y}\cdot\frac{\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y}{\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y}\\&=\frac{\left(\sin x\cos x\cosh^2y-\sin x\cos x\sinh^2y\right)+i\left(\sin^2x\sinh y\cosh y+\cos^2x\sinh y\cosh y\right)}{\cos^2x\cosh^2y+\sin^2x\sinh^2y}\\&=\frac{\sin x\cos x\left(\cosh^2y-\sinh^2y\right)+i\sinh y\cosh y\left(\sin^2x+\cos^2x\right)}{\cos^2x\left(1+\sinh^2y\right)+\sin^2x\sinh^2y}=\frac{1}{2}\frac{\sin2x+i\sinh2y}{\cos^2x+\sinh^2y}\end{aligned}$$

و یا به عنوان مثال برای تابع $f(z)=e^{\sqrt{z}}$ چنانچه بخواهیم قسمت‌های حقیقی و موهومی را برحسب θ و r بیابیم، می‌نویسیم:

$$f(z)=e^{\sqrt{z}}=e^{z^{\frac{1}{2}}}=e^{\left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}=e^{r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\theta}{2}}}=e^{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}=e^{\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=e^{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}e^{i\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}}=e^{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\left(\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

همچنین اگر بخواهیم مدول و آرگومان تابع $f(z)=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$ را بدست آوریم می‌نویسیم:

$$f(z)=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$
$$=\left\{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\}^n=\left(2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{in\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\begin{cases}\rho=2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}\\ \varphi=n\dfrac{\theta}{2}\end{cases}$$

توجه ۲: اگر تابع $f(z)$ در نقطه‌ای تحلیلی باشد، آنگاه مشتقات و انتگرال‌های آن نیز تا هر مرتبه‌ای در نقطه مذکور تحلیلی‌اند.

اگر تابع $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تام باشد:

الف) با داشتن هر کدام از توابع v و u می‌توان $f'(z)$ را با توجه به قضایای اول و دوم کوشی ریمان به‌دست آورد:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\quad \text{یا}\quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}\quad \text{یا}\quad f'(z)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

ب) چنانچه تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب y و x موجود باشد با تبدیل تمامی x ها به z و تمامی y ها به صفر بیان $f(z)$ برحسب z به‌دست خواهد آمد. لذا مثلاً اگر مشتق تابع تام $f(z)$ به‌صورت $f'(z)$ برحسب y و x در دست باشد می‌توان با تبدیلات $\begin{cases}x\to z\\ y\to 0\end{cases}$، $f'(z)$ را برحسب z نوشت و البته با انتگرال‌گیری از آن $f(z)$ را به‌دست آورد.

همچنین اگر تابع تحلیلی $f(z)$ بر حسب θ و r موجود باشد با تبدیل تمامی r ها به z و تمامی θها به صفر بیان $f(z)$ برحسب z به‌دست خواهد آمد.

توجه ۳: وقتی u معلوم است برای یافتن $f(z)$ می‌توان به طرق مختلف عمل کرد:

۱ـ از معادلات کوشی ریمان $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ مزدوج همساز u یعنی v را یافت. سپس تابع $f(z)=u+iv$ را بیان نموده و با تبدیل $\begin{cases}x\to z\\ y\to 0\end{cases}$ در آن‌جا f را برحسب z توصیف کرد.

۲ـ با داشتن u حاصل $f'(z)$ را با توجه به قضیه اول و معادلات کوشی ـ ریمان از رابطه $f'(z)=u_x-iu_y$ بەدست آورده و در آن‌جا با تبدیل $\begin{cases}x\to z\\ y\to 0\end{cases}$، f' را برحسب z بەدست آورده و با انتگرال‌گیری از آن $f(z)$ را پیدا می‌کنیم.

۳ـ از آن‌جا که $f(z)+\bar{f}(z)=2u(x,y)$ می‌باشد. با دانستن $2u$ حاصل $f(z)+\bar{f}(z)$ را پیدا کرده و با متحد قرار دادن طرفین $f(z)$ را پیدا کنیم.

۴ـ می‌توان از رابطه $f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -\frac{iz}{2}\right)$ استفاده کرد. یعنی در تابع $2u(x, y)$ به‌جای x عبارت $\frac{z}{2}$ و بجای y عبارت $-\frac{iz}{2}$ را قرار می‌دهیم.

به عنوان مثالی ساده اگر $u = x(1-y)$ باشد:

۱ـ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1-y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -x \end{cases} \xrightarrow{C.R} \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 1-y \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = x \end{cases}$$

انتگرال‌گیری از معادله اول نسبت به y نتیجه می‌دهد:

$$v = y - \frac{1}{2}y^2 + A(x)$$

و با قرار دادن این عبارت در معادله دوم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{1}{2}y^2 + A(x)\right) = x \quad \to \quad A'(x) = x \quad \to \quad A(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$$

و در نهایت $v = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + k$ بوده و خواهیم داشت:

$$f(z) = u + iv = x(1-y) + i\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + k\right)$$

با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ در رابطه فوق توصیف $f(z)$ برحسب متغیر مختلط z چنین می‌شود:

$$f(z) = z + \frac{i}{2}z^2 + c$$

۲ـ

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x(1-y)\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(x(1-y)\right) = (1-y) + ix$$

با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ دررابطه فوق $f'(z)$ برحسب متغیر z به‌صورت $f'(z) = 1 + iz$ خواهد شد که انتگرال‌گیری نسبت به متغیر z از طرفین آن نتیجه می‌دهد:

$$f(z) = z + \frac{i}{2}z^2 + c$$

۳ـ

$$f(z) + \bar{f}(z) = 2u(x, y) = 2x(1-y) = 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(1 - \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = (z+\bar{z})\left(\frac{2i - z + \bar{z}}{2i}\right)$$
$$= \frac{-i}{2}\left(2iz - z^2 + 2i\bar{z} + \bar{z}^2\right) = z + \frac{i}{2}z^2 + \bar{z} - \frac{i}{2}\bar{z}^2$$

لذا باید:

$$f(z)=z+\frac{i}{2}z^2+c$$

-۴

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{-iz}{2}\right)=2.\frac{z}{2}\left(1-\left(\frac{-iz}{2}\right)\right)=z+\frac{i}{2}z^2+c$$

توجه ۴: هرگاه تابع $w=f(z)=u+iv$ در D تحلیلی باشد، موارد زیر را با استفاده از روابط کوشی ریمان می‌توان بسادگی نشان داد:

$|f(z)|=$ ثابت $\quad\to\quad f(z)=$ ثابت

$\operatorname{Re}f(z)=$ ثابت $\quad\to\quad f(z)=$ ثابت

$\operatorname{Im}f(z)=$ ثابت $\quad\to\quad f(z)=$ ثابت

$\operatorname{Arg}f(z)=$ ثابت $\quad\to\quad f(z)$ ثابت

$f'(z)=0 \quad\to\quad f(z)=$ ثابت

$\overline{f(z)}=$ تحلیلی $\quad\to\quad f(z)=$ ثابت

(بین v و u ارتباطی تابعی موجود باشد) $\phi(u,v)=0 \quad\to\quad f(z)$ ثابت

تذکر: از موارد فوق می‌توان دریافت:

اگر تابع غیرثابت $f(z)$ حقیقی یا موهومی محض باشد، تحلیلی نخواهد بود.

اگر تابع غیرثابت $f(z)$ تحلیلی باشد، $\overline{f(z)}$ تحلیلی نخواهد بود.

توجه ۵: اگر $w=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، با توجه به آن‌که $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ و $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ در ظاهر w را می‌توان به عنوان تابعی از دو متغیر جدید $\bar{z}$ و z در نظر گرفت. ولی از آن‌جا که:

$$\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}+i\frac{\partial v}{\partial\bar{z}}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{-1}{2i}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{-1}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

و با توجه به معادلات کوشی ریمان $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}\end{cases}$ نتیجه می‌شود $\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}=0$ یعنی در عمل w مستقل از $\bar{z}$ بوده و w فقط تابعی از متغیر z می‌باشد. به تعبیر دیگر در تابع تحلیلی w قطعاً $\bar{z}$ حضور نخواهد داشت بنابراین وجود جمله $\bar{z}$ در یک تابع مختلط سبب غیر تحلیلی بودن آن می‌گردد اگرچه چنین تابعی ممکن است در نقاطی خاص مشتق‌پذیر باشد.

توابع همساز

تابع حقیقی h را در یک حوزه D همساز می‌گوئیم، اگر در آن حوزه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته بوده و در معادله لاپلاس صدق نماید.

معادله لاپلاس در مختصات دکارتی
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

معادله لاپلاس در مختصات قطبی
$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}=0$$

نکته: معادله لاپلاس در صفحه مختلط به صورت $\frac{\partial^2 h}{\partial z\,\partial \bar{z}}=0$ بیان می‌شود که در آن $\bar{z}=x-iy$ و $z=x+iy$ می‌باشد.

می‌توان نشان داد هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ در حوزه D تحلیلی باشد، توابع u و v در حوزه D، همسازند. اگر دو تابع مفروض u و v در حوزه D همساز باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها در حوزه D معادلات کوشی ـ ریمان را اقناع کند، می‌گوئیم v یک مزدوج همساز u است. لذا در کل می‌توان گفت v را مزدوج همساز تابع همساز u می‌گوئیم، هرگاه $f(z)=u+iv$ تابع تحلیلی باشد و برعکس.

نکته: در رابطه با بحث فوق، به موارد زیر توجه داشته باشید:

۱ـ مزدوج یک تابع همساز را به راحتی می‌توان از معادلات کوشی ـ ریمان به‌دست آورد. یعنی اگر $u(x,y)$ تابعی همساز باشد و مزدوج همساز آن $v(x,y)$ نامیده شود، باید داشته باشیم $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ و لذا با معلوم بودن u می‌توان v را یافت. (اختلاف بین دو مزدوج همساز u، مقداری ثابت است)

۲ـ هرگاه v یک مزدوج همساز برای u باشد، هیچ دلیلی وجود ندارد که u نیز یک مزدوج همساز برای v باشد. چنانچه در حوزه‌ای، u یک مزدوج همساز برای v و v نیز یک مزدوج همساز برای u باشد، می‌توان نشان داد که u و v توابعی ثابت و فاقد متغیرهای x و y می‌باشند.

البته به سادگی می‌توان نشان داد اگر v مزدوج همساز u باشد آنگاه $-u$ یک مزدوج همساز v خواهد بود. به تعبیری اگر تابع $u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه تابع $-v+iu$ نیز تحلیلی است و به تعبیری اگر $f(z)$ تحلیلی باشد $if(z)$ نیز تحلیلی است.

قضیه: هرگاه $f(z)=u+iv$ یک تابع تحلیلی باشد و $f'(z)\neq 0$، آنگاه می‌توان نشان داد دسته منحنی‌های $u(x,y)=c$ و $v(x,y)=k$ مسیرهای قائم یکدیگر می‌باشند.

قضیه: اگر تابع $f(z)=u+iv$ در ناحیه بسته و کراندار R تحلیلی و غیرثابت باشد توابع همساز v و u مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را روی مرز R اختیار می‌کنند.

مثال ۲۲ تابع $g(z)=z\left|z^2\right|$: (ریاضی ۸۵)

۱) در مجموعه تک‌عضوی $\{0\}$ تحلیلی است.
۲) در مجموعه تک‌عضوی $\{0\}$ مشتق‌پذیر است.
۳) در تمام C تحلیلی است.
۴) در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است.

به واسطه وجود $|z|$ در تابع $g(z)=z|z|^2$، این تابع هیچ جایی تحلیلی نمی‌باشد. اما دقت داریم:

$$g(z)=z|z|^2=(x+iy)\left(x^2+y^2\right) \rightarrow u=x\left(x^2+y^2\right) \quad , \quad v=y\left(x^2+y^2\right)$$

برای برقراری معادلات کوشی ریمان باید:

$$\begin{cases} u_x=v_y & \rightarrow \quad 3x^2+y^2=x^2+3y^2 \\ u_y=-v_x & \rightarrow \quad 2xy=-2xy \end{cases} \rightarrow \quad x=y=0$$

لذا تابع مذکور در نقطه $x=y=0$ شرط لازم برای مشتق‌پذیری را دارد و از آن‌جا که توابع v_y، v_x، u_y، u_x، v و u در نقطه $(0\,,0)$ و یک همسایگی این نقطه پیوسته‌اند، طبق قضیه دوم کوشی ریمان تابع g فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر است.

مثال ۲۳ تابع $f(z)=z^2-\bar{z}^2+2\operatorname{Re}\left(z^2\right)$ در چه نقاطی مشتق‌پذیر است؟

۱) همه‌جا ۲) هیچ‌جا ۳) فقط در $z=0$ ۴) فقط روی نقاط $y=\pm x$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\begin{aligned} f(z)&=z^2-\bar{z}^2+2\operatorname{Re}\left(z^2\right)=(x+iy)^2-(x-iy)^2+2\operatorname{Re}\left\{(x+iy)^2\right\} \\ &=\left(x^2-y^2+2ixy\right)-\left(x^2-y^2-2ixy\right)+2\operatorname{Re}\left\{\left(x^2-y^2\right)+2ixy\right\}=4ixy+2\left(x^2-y^2\right) \\ &=2\left\{\left(x^2-y^2\right)+2ixy\right\}=2z^2 \end{aligned}$$

و البته می‌دانیم $2z^2$ همه‌جا تحلیلی و به طبع مشتق‌پذیر است.

مثال ۲۴ کدام تابع یک جواب معادله لاپلاس دوبعدی است؟ (هوافضا ۸۷)

۱) $u=e^{-9x}\cos y$ ۲) $u=\cos 4y\sin 2x$ ۳) $u=e^{xy}\sin y$ ۴) $u=\cos x\sinh y$

حل: گزینه ۴ درست است.

باید ببینیم کدام تابع معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ را اقناع می‌کند که با امتحان گزینه‌ها صحت جواب چهارم مشخص می‌شود زیرا اگر:

$$u=\cos x\sinh y \quad \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\cos x\sinh y \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos x\sinh y \end{cases} \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

به‌خاطر داشته باشید:

تابع $\begin{cases}\sin by \\ \cos by\end{cases} e^{ax}$ زمانی در معادله لاپلاس صدق می‌کند که $|a|=|b|$

تابع $\begin{cases}\sinh by \\ \cosh by\end{cases} \cdot \begin{cases}\cos ax \\ \sin ax\end{cases}$ زمانی در معادله لاپلاس صدق می‌کند که $|a|=|b|$

مثال ۲۵ تابع مختلط $f(z)$ پس از جایگزینی $z=x+iy$ به صورت $f(z)=ax^3+bxy^2+i\left(x^2y+cy^3\right)$ درآمده است، به ازای کدام ثابت های حقیقی c,b,a تابع $f(z)$ نسبت به متغیر z مشتق‌پذیر است؟ (مواد ۸۸)

۱) $c=-\frac{1}{3}, b=-1, a=\frac{1}{3}$

۲) $b=0=c, a=1$

۳) $b=-1, a=0=c$

۴) به ازای هر مقدار برای a و b و c تابع $f(z)$ نسبت به z مشتق ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است.

باید توابع $\begin{cases} u=ax^3+bxy^2 \\ v=x^2y+cy^3 \end{cases}$ هر کدام همساز باشند یعنی معادلات لاپلاس $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ v_{xx}+v_{yy}=0 \end{cases}$ را ارضاء کنند و مضافاً v مزدوج همساز u باشد یعنی معادلات کوشی ریمان $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$ ارضا شوند.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \;\rightarrow\; 6ax+2bx=0 \;\rightarrow\; b=-3a \\ v_{xx}+v_{yy}=0 \;\rightarrow\; 2y+6cy=0 \;\rightarrow\; c=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x=vy \;\rightarrow\; 3ax^2+by^2=x^2+3cy^2 \;\rightarrow\; a=\frac{1}{3} \;,\; b=3c \\ u_y=-v_x \;\rightarrow\; 2bxy=-2xy \;\rightarrow\; b=-1 \end{cases}$$

و لذا داریم:

$$a=\frac{1}{3} \;,\; b=-1 \;,\; c=-\frac{1}{3}$$

مثال ۲۶ اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=x+e^x\cos y$ باشد، $f'(1)$ برابر است با: (برق ۸۵)

۱) $1+e$ ۲) $1-e$ ۳) $e+2i$ ۴) $(1+e)+i$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\left(1+e^x\cos y\right)-i\left(-e^x\sin y\right)$$

در $z=1$ داریم: $y=0$ و $x=1$ و لذا:

$$f'(1)=\left(1+e^1\cos 0\right)+i\left(e^1\sin 0\right)=1+e$$

راه دیگر:

با کمی دقت مشاهده می‌شود که:

$$\begin{aligned} z+e^z &= x+iy+e^{x+iy}=x+iy+e^xe^{iy}=x+iy+e^x\left(\cos y+i\sin y\right) \\ &= \left(x+e^x\cos y\right)+i\left(y+e^x\sin y\right) \end{aligned}$$

یعنی اگر $u = x + e^{x}\cos y$ قسمت حقیقی تابع مختلط تحلیلی باشد آن تابع به‌صورت $f(z) = z + e^{z}$ بوده و داریم:

$$f'(z) = 1 + e^{z} \quad \rightarrow \quad f'(1) = 1 + e$$

مثال ۲۷ اگر $f(z) = \begin{cases} \dfrac{y^3 + ix^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$:

۱) در $(0,0)$ معادلات کوشی ریمان برقرارند ولی $f(z)$ در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۲) در $(0,0)$ معادلات کوشی ریمان برقرارند و $f(z)$ در این نقطه مشتق‌پذیر می‌باشد.

۳) در $(0,0)$ معادلات کوشی ریمان برقرار نیستند و $f(z)$ در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۴) در $(0,0)$ معادلات کوشی ریمان برقرار نیستند ولی $f(z)$ در این نقطه مشتق‌پذیر می‌باشد.

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

پس معادله اول کوشی ریمان در $(0,0)$ برقرار است $(u_x = v_y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

پس معادله دوم کوشی ریمان در نقطه $(0,0)$ برقرار نیست $(u_y \neq -v_x)$ پس تابع $f(z)$ در $(0,0)$ معادلات کوشی ریمان را ارضاء نمی‌کند و به طبع در $z = 0$ مشتق‌پذیر نیز نمی‌باشد.

مثال ۲۸ اگر $u(x,y) = 3^x \sin(\alpha y)$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ باشد $(\alpha > 0)$، داریم:

۱) $f(z) = -i3^z$ ۲) $f(z) = i3^z$ ۳) $f(z) = 3^z$ ۴) $f(z) = -3^z$

حل: گزینه ۱ درست است.

اولاً لازم است u تابعی همساز باشد یعنی داشته باشیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (\ln 3)^2\, 3^x \sin \alpha y - \alpha^2 3^x \sin \alpha y = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \ln 3$$

اینک داریم $u = 3^x \sin(y \ln 3)$ و می‌توان نوشت:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \ln 3 \cdot 3^x \sin(y\ln 3) - i\left\{\ln 3 \cdot 3^x \cos(y \ln 3)\right\}$$

با تبدیلات $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ به دست می‌آید:

$$f'(z) = -i\ln 3 \cdot 3^z \xrightarrow{\int} f(z) = -i3^z$$

مثال ۲۹ اگر $w = f(z)$ یک تابع تحلیلی بوده و در $z = 1 - i$ حاصل $\frac{\partial w}{\partial r}$ برابر $3 + i$ باشد حاصل $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ در $z = 1 - i$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}(3i + 1)$ ۲) $\sqrt{2}(1 - 3i)$ ۳) $\sqrt{2}(3i - 1)$ ۴) $-\sqrt{2}(1 + 3i)$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$w = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$$

با توجه به معادلات کوشی ریمان $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + i\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{i}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$

حال چون طبق فرض مسأله در $z = 1 - i : \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ داریم $\frac{\partial w}{\partial r} = 3 + i$ می‌توان گفت در $z = 1 - i$ داریم:

$$3 + i = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2}(3 + i)}{-i} = \sqrt{2}(3i - 1)$$

مثال ۳۰ با توجه به تابع مختلط $w = \frac{1-2z}{z+2}$ مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $\frac{2-2x^2-3x-2y^2}{(x+2)^2+y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2-2x^2+3y-2y^2}{(x+2)^2+y^2} = k$ ۲) $\frac{-5y}{(x+2)^2+y^2} = k$

۳) $\frac{-5x}{(x+2)^2+y^2} = k$ ۴) $\frac{2+2x^2-3x+2y^2}{(x+2)^2+y^2} = k$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$w = \frac{1-2z}{z+2} = \frac{1-2(x+iy)}{x+iy+2} = \frac{(1-2x)-2iy}{(x+2)+iy}\cdot\frac{(x+2)-iy}{(x+2)-iy} = \frac{(2-2x^2-3x-2y^2)+i(-5y)}{(x+2)^2+y^2}$$

چون در تابع تحلیلی $f(z) = u+iv$ مسیرهای $v = k$ و $u = c$ بر هم عمودند گزینه دوم صحیح است.

مثال ۳۱ اگر $f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ تحلیلی باشد و u و v و مشتقات جزئی آن‌ها توابعی پیوسته باشد داریم:

۱) $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$

حل: گزینه ۲ درست است.

چون $f(z)$ تحلیلی است باید معادلات کوشی ریمان در آن ارضاء شوند:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\end{cases}$$

چون u و v و مشتقات جزئی آن توابعی پیوسته فرض شده‌اند داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\quad,\quad\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

لذا معادلات کوشی ریمان به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\quad,\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

مثال ۳۲ مشتق تابع $f(z)=z^2+3\bar{z}+\bar{z}^2$ در نقطه‌ای که مشتق وجود دارد کدام است؟

۱) -3

۲) 3

۳) در هیچ نقطه‌ای مشتق وجود ندارد.

۴) در بیش از یک نقطه مشتق وجود دارد.

حل: گزینه ۱ درست است.

$$f(z)=(x+iy)^2+3(x-iy)+(x-iy)^2=\left(x^2-y^2+2ixy\right)+\left(3x-3iy\right)+\left(x^2-y^2-2ixy\right)$$

$$=\left(2x^2-2y^2+3x\right)-3iy\quad\rightarrow\quad\begin{cases}u=2x^2-2y^2+3x\\ v=-3y\end{cases}$$

برای برقراری معادلات کوشی ریمان باید:

$$\begin{cases}u_x=v_y&\rightarrow\quad 4x+3=-3&\rightarrow\quad x=-\frac{3}{2}\\ u_y=-v_x&\rightarrow\quad -4y=0&\rightarrow\quad y=0\end{cases}$$

پس معادلات کوشی ریمان فقط در نقطه $z=-\frac{3}{2}+0i$ برقرارند و چون u و v و مشتقات جزئی آن‌ها همه‌جا پیوسته‌اند تابع $f(z)$ فقط و فقط در $z=-\frac{3}{2}$ مشتق‌پذیر است و در این نقطه داریم:

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(u_x+iv_x\right)\Big|_{x=-\frac{3}{2}\,,\,y=0}=\left(4x+3\right)\Big|_{\left(-\frac{3}{2},0\right)}=-3$$

مثال ۳۳ فرض کنید $v(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ و تابع $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، در این‌صورت تابع $u(x,y)$ کدام است؟ (مکانیک ۸۶)

۱) $\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$ ۲) $\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۳) $2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۴) $2\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$v=\ln\left(x^2+y^2\right)=\ln\left(r^2\right)=2\ln r$$

از معادلات کوشی ریمان داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases}$$

از معادله اول داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot 0=0 \quad\to\quad u=u(\theta)\,,\,u\neq u(r)$$

از این عبارت و معادله دوم به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{r}u'(\theta)=-\frac{2}{r}\quad\to\quad u'(\theta)=-2\quad\to\quad u(\theta)=-2\theta+c\quad\to\quad u(\theta)=-2\tan^{-1}\frac{y}{x}+c=2\tan^{-1}\frac{x}{y}+k$$

دقت داریم:

$$\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

راه دیگر: می‌دانیم برای تابع تحلیلی $\ln z$ داریم:

$$\ln z=\ln r+i\theta=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\tan^{-1}\frac{y}{x}\quad\to\quad 2i\ln z=-2\tan^{-1}\frac{y}{x}+i\ln\left(x^2+y^2\right)$$

از آن‌جا که $2i\ln z$ نیز تحلیلی است و در آن $v=\ln\left(x^2+y^2\right)$ پس باید:

$$u=-2\tan^{-1}\frac{y}{x}=2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$$

توجه: از v داده شده داریم $\begin{cases} v_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ v_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{cases}$، بنابراین گزینهٔ صحیح باید:

الف) با مشتق‌گیری نسبت به x حاصلش $\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ را ایجاد کند.

ب) با مشتق‌گیری نسبت به y حاصلش $-\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ را ایجاد کند.

با امتحان گزینه‌ها ملاحظه می‌کنیم فقط گزینه سوم می‌تواند صحیح باشد، زیرا:

$$2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c \;\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}\; 2\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{2y}{y^2+x^2}$$

$$2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c \;\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\; 2\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{-2x}{y^2+x^2}$$

مثال ۳۴ فرض کنید $u=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ و $f(z)=u+iv$ به جز در مبدأ همه جا تحلیلی باشد حاصل $f'(z)$ در نقطه $z=1+i$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}(1-i)$ ۲) $\frac{1}{2}(i-1)$ ۳) $\sqrt{2}(i-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(1-i)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

در این مسأله داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(2y)\left(x^2+y^2\right)^2-\left\{2\left(x^2+y^2\right)(2x)\right\}(2xy)}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(2x)\left(x^2+y^2\right)^2-\left\{2\left(x^2+y^2\right)(2y)\right\}(2xy)}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

در $x=y=1$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$$

$$f'(1+i)=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(i-1)$$

راه دیگر:

اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تحلیلی باشد داریم:

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$$

در این مسأله داریم:

$$u(x,y)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad\to\quad u(r,\theta)=\frac{2r\cos\theta r\sin\theta}{\left(r^2\right)^2}=\frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

$$f'(z)=\left(\frac{-2\sin 2\theta}{r^3}-\frac{i}{r}\frac{2\cos 2\theta}{r^2}\right)e^{-i\theta}$$

در نقطه $x=y=1$ یعنی $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $r=\sqrt{2}$ داریم:

$$f'(z)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-2\sin\frac{\pi}{2}-2i\cos\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{i\pi}{4}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(i-1)$$

مثال ۳۵ هر گاه $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد، آن‌گاه مقدار A در تساوی $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|f(z)\right|^2=A\left|f'(z)\right|^2$ برابر است با: (ریاضی ۸۷)

۱) $A=2$ ۲) $A=1$ ۳) $A=4$ ۴) $A=9$

حل: گزینه ۳ درست است.

تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$f'(z)=u_x+iv_x$$

حال دقت کنید:

$$\left|f(z)\right|^2=u^2+v^2\quad\to$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|f(z)\right|^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(uu_x+vv_x\right)\right)=2\left(u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx}\right)\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left|f(z)\right|^2=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\left(uu_y+vv_y\right)\right)=2\left(u_y^2+uu_{yy}+v_y^2+vv_{yy}\right)\end{cases}$$

$$\left|f'(z)\right|^2=u_x^2+u_y^2$$

ما می‌خواهیم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|f(z)\right|^2=A\left|f'(z)\right|^2\quad\to$$

$$2\left(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2+u\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+v\left(v_{xx}+v_{yy}\right)\right)=A\left(u_x^2+u_y^2\right)$$

اما چون u و v قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $f(z)$ هستند هر کدام توابعی همساز بوده یعنی $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ v_{xx}+v_{yy}=0 \end{cases}$ و همچنین از معادلات کوشی ریمان می‌دانیم:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

لذا خواسته ما این است که:

$$2\left(u_x^2+u_y^2+\left(-u_y\right)^2+u_x^2\right)=A\left(u_x^2+u_y^2\right) \rightarrow 4\left(u_x^2+u_y^2\right)=A\left(u_x^2+u_y^2\right) \rightarrow A=4$$

مثال ۳۶ اگر $u(r,\theta)=r^3\sin 3\theta-\frac{3}{r}\cos\theta$ در مزدوج همساز u، ضریب جمله $r^3\cos 3\theta$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-r$ ۳) $\frac{1}{r}$ ۴) 1

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \theta}=r\frac{\partial u}{\partial r}=r\left(3r^2\sin 3\theta+\frac{3}{r^2}\cos\theta\right)=3r^3\sin 3\theta+\frac{3}{r}\cos\theta \\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{-1}{r}\left(3r^3\cos 3\theta+\frac{3}{r}\sin\theta\right)=-3r^2\cos 3\theta-\frac{3}{r^2}\sin\theta \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} v=-r^3\cos 3\theta+\frac{3}{r}\sin\theta+A(r) \\ v=-r^3\cos 3\theta+\frac{3}{r}\sin\theta+B(\theta) \end{cases}$$

لذا باید $v=-r^3\cos 3\theta+\frac{3}{r}\sin\theta$ باشد.

راه دیگر:

با کمی دقت ملاحظه می‌شود برای $f(z)=-iz^3-\frac{3}{z}$ داریم:

$$f(z)=-i\left(re^{i\theta}\right)^3-\frac{3}{\left(re^{i\theta}\right)}=-i\left(r^3\left(\cos 3\theta+i\sin 3\theta\right)\right)-\frac{3}{r}\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)$$
$$=\left(r^3\sin 3\theta-\frac{3}{r}\cos\theta\right)+i\left(-r^3\cos 3\theta+\frac{3}{r}\sin\theta\right)$$

لذا قسمت حقیقی $f(z)$ همان $u(r,\theta)$ داده شده در مسأله بوده و طبعاً قسمت موهومی $f(z)$ مزدوج همساز u و خواسته مسأله را نشان می‌دهد.

مثال ۳۷ کدام‌یک از گزاره‌های زیر، در مورد تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^3}{z^2} & ; z\neq 0\\ 0 & ; z=0\end{cases}$ صحیح است؟ (برق ۸۷)

۱) در مبدأ o پیوسته نیست.

۲) در مبدأ o مشتق‌پذیر نیست، اما در روابط کشی ـ ریمان در این نقطه صدق می‌کند.

۳) در مبدأ o مشتق‌پذیر نیست و در روابط کشی ـ ریمان نیز در این نقطه صدق نمی‌کند.

۴) در مبدأ o پیوسته است و روابط کشی ـ ریمان نیز در این نقطه صدق می‌کند.

حل: هر دو گزینه ۲ و ۴ صحیح هستند.

برای $z\neq 0$ داریم:

$$f(z)=\frac{(\bar{z})^3}{z^2}=\frac{\left(re^{-i\theta}\right)^3}{\left(re^{i\theta}\right)^2}=\frac{r^3e^{-3i\theta}}{r^2e^{2i\theta}}=re^{-5i\theta}$$

ملاحظه می‌شود:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{r\to 0,\forall\theta} re^{-5i\theta}$$

و از آن‌جا که $\left|e^{-5i\theta}\right|=1$ حاصل حد فوق صفر خواهد شد و تابع $f(z)$ در $z=0$ پیوسته است.

برای $z\neq 0$ داریم:

$$f(z)=re^{-5i\theta}=r(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)\ \to\ \begin{cases}u=r\cos 5\theta\\ v=-r\sin 5\theta\end{cases}$$

معادلات کوشی ریمان در فرم قطبی $\begin{cases}u_r=\frac{1}{r}v_\theta\\ \frac{1}{r}u_\theta=-v_r\end{cases}$ هستند و برای چک کردن آن‌ها در مبدأ $(r=0)$ باید آن‌ها را به‌صورت $\begin{cases}ru_r=v_\theta\\ u_\theta=-rv_r\end{cases}$ بنویسیم.

در این مسأله داریم:

$$\begin{cases}ru_r=r(\cos 5\theta)\\ u_\theta=-5r\cdot\sin 5\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}v_\theta=-5r\cos 5\theta\\ -rv_r=-r(-\sin 5\theta)\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود در $r=0$ دو معادله کوشی ریمان برقرار می‌باشند بنابراین گزینه چهارم صحیح است.

برای تمرین عدم مشتق‌پذیری تابع را در $z=0$ نشان می‌دهیم:

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{r\to 0,\forall\theta}\frac{re^{-5i\theta}-0}{re^{i\theta}-0}=\lim_{\forall\theta} e^{-6i\theta}$$

حاصل فوق وابسته به θ بوده و لذا $f'(0)$ موجود نمی‌باشد.

قضایایی در بحث توابع مختلط

۱ـ مشتقات تابع تحلیلی

هرگاه $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد، آن‌گاه f در D دارای مشتق از هر مرتبه‌ای است و همه این مشتقات نیز در D تحلیلی هستند. مقادیر مشتقات مزبور در نقطه z_0 از D به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad n=1,2,\ldots$$

که در آن c یک منحنی بسته در D می باشد که نقطه z_0 را دربر می گیرد.

تذکر: یک تابع مختلط تحلیلی از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است و آن را می‌توان با یک سری تیلوری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ نمایش داد.

اما عکس این موضوع در حالت کلی صادق نیست.

درواقع توابعی وجود دارند که تا هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیرند ولی قابل نمایش به صورت سری تیلور نیستند.

مثلاً $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ در $z=0$ تا هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است (و تمام مشتقات آن در این نقطه صفرند)، ولی f را نمی‌توان به صورت سری تیلور حول $z=0$ نمایش داد.

۲ـ قضیه موررا

هرگاه f بر ناحیه همبند ساده D پیوسته باشد و به ازای هر مرز بسته c واقع در آن داشته باشیم $\oint_c f(z)\,dz=0$ ، آن‌گاه f در سراسر D تحلیلی است.

تذکر: دقت کنید ممکن است روی مرز بسته خاصی $\int_c f(z)dz$ صفر شود ولی f در سراسر D تحلیلی نباشد.

دقت کنید می‌توان نشان داد $\int \frac{1}{z^2}dz$ روی هر مسیر بسته‌ای در ناحیه همبند ساده $D:|z|\leq 1$ صفر است درحالی‌که $\frac{1}{z^2}$ در D تحلیلی نیست، (در $z=0$ نقطه تکین دارد) ولی این موضوع با قضیه موررا منافاتی ندارد زیرا $\frac{1}{z^2}$ در D پیوسته نمی‌باشد.

۳ـ قضیه ماکسیمم آهنگ توابع

اگر تابع f در یک همسایگی نقطه z_0 تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه حداقل یک نقطه z در آن همسایگی موجود است به طوری که $|f(z)|>|f(z_0)|$

۴ـ قضیه اصل ماکسیمم

هرگاه f در داخل ناحیه‌ای تحلیلی و غیرثابت باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ دارای هیچ مقدار ماکسیممی در داخل آن ناحیه نیست به تعبیر دیگر $|f(z)|$ مقدار ماکسیمم خود را روی مرز ناحیه اختیار می‌کند. همچنین اگر f در هیچ نقطه‌ای از این ناحیه صفر نشود مینیمم مقدار $|f(z)|$ نیز روی مرز این ناحیه رخ خواهد داد.

مثال ۳۸ تابع $f(z)=z^2+z$ مفروض است، حداکثر مقدار $|f(z)|$ روی ناحیه $|z|\le 2$ کدام می‌باشد؟

۱) 36 ۲) 14 ۳) 22 ۴) 28

حل: گزینه ۱ درست است.

چون $f(z)$ همه جا تحلیلی است طبق قضیه اصل ماکسیمم حداکثر مقدار $|f(z)|$ در ناحیه $|z|\le 2$ باید روی مرز این ناحیه یعنی روی $|z|=2$ رخ دهد.

ازآنجاکه:

$$|f(z)|^2=|z^2+z|^2=(z^2+z)\overline{(z^2+z)}=(z^2+z)(\bar{z}^2+\bar{z})=(z\bar{z})^2+z\bar{z}+z^2\bar{z}+z\bar{z}^2$$
$$=(z\bar{z})^2+z\bar{z}+(z+\bar{z})z\bar{z}=|z|^4+|z|^2+2x|z|^2$$

و روی $|z|=2$ حاصل عبارت فوق $20+8x$ خواهد شد که حداکثر مقدار آن به ازای $x=2$ بوده و برابر 36 می‌باشد.

مثال ۳۹ حداکثر مقدار $\left|e^{2z-i}\right|$ در ناحیه $|z|\le 3$ کدام است؟

۱) e^6 ۲) e^5 ۳) e^7 ۴) e^4

حل: گزینه ۱ درست است.

تابع $f(z)=e^{2z-i}$ همه‌جا و به طبع در ناحیه $|z|\le 3$ تحلیلی است، لذا طبق قضیه اصل ماکسیمم مقدار حداکثر خود را در این ناحیه روی مرز آن یعنی روی $|z|=3$ اختیار می‌کند.

$$|f(z)|=\left|e^{2z-i}\right|=\left|e^{2(x+iy)-i}\right|=\left|e^{2x}e^{i(2y-1)}\right|=\left|e^{2x}\right|\left|e^{i(2y-1)}\right|=e^{2x}$$

(زیرا برای هر θ حقیقی داریم $\left|e^{i\theta}\right|=1$, $\left|e^{\theta}\right|=e^{\theta}$)

و چون e^{2x} تابعی حقیقی و اکیداً صعودی است، ماکسیمم مقدار آن به‌ازاء حداکثر $2x$ رخ می‌دهد و ازآنجاکه روی $|z|=3$ بیشترین مقدار x برابر 3 می‌باشد، حداکثر $\left|e^{2z-i}\right|$ روی $|z|\le 3$ برابر e^6 خواهد بود.

۵ ـ قضیه لیوویل

هرگاه f تابعی تام (همه جا تحلیلی) و کراندار $\left(\forall z \ \ |f(z)|\le M\right)$ باشد، آن‌گاه $f(z)$ تابعی ثابت است. به عبارتی هیچ تابع تحلیلی غیرثابتی وجود ندارد که کراندار باشد.

مثلاً چون $\sin z$ تابعی تحلیلی و غیرثابت است $|\sin z|$ می‌تواند تا بی‌نهایت بزرگ شود. (برخلاف سینوس با متغیر حقیقی که قدرمطلق آن نمی‌تواند بزرگ‌تر از واحد گردد.)

مثال ۴۰ اگر f تابعی تام باشد و $|f'(z)|\le 2$ و $f(1)=1$ و $f(-1)=2$ حاصل $f(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 0 ۴) نیاز به اطلاعات بیشتر است.

حل: گزینه ۲ درست است.

چون f همه‌جا تحلیلی است f' نیز همه‌جا تحلیلی می‌باشد و ازآنجاکه f' کراندار فرض شده $(\forall z\ |f'(z)|\le 2)$ پس طبق قضیه لیوویل f' باید تابعی ثابت باشد، یعنی داریم:

$$f'(z)=c \xrightarrow{\int} f(z)=cz+k$$

با اعمال شرایط داده شده به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(1)=1 & \to \quad c+k=1 \\ f(-1)=2 & \to \quad -c+k=2 \end{cases} \to \quad c=-\frac{1}{2}\quad , \quad k=\frac{3}{2}$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2} \quad \to \quad f(0)=\frac{3}{2}$$

مثال ۴۱ اگر تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد و $|f'(z)|\le 3e^{\operatorname{Re} z}$ و بدانیم $f(i\pi)=i$ و $f'(0)=i$ حاصل $f(0)$ کدام است؟

۱) $3i$ ۲) $2i$ ۳) 0 ۴) چنین f ای وجود ندارد.

حل: گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم $|e^z|=e^x=e^{\operatorname{Re} z}$ پس از فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$|f'(z)|\le 3|e^z| \quad \to \quad |e^{-z}f'(z)|\le 3$$

حال چون f تحلیلی است پس f' نیز تحلیلی بوده و در کل $e^{-z}f'(z)$ تابعی تحلیلی می‌باشد و چون این تابع کراندار شده $\left(|e^{-z}f'(z)|\le M\right)$ پس باید ثابت باشد، یعنی:

$$e^{-z}f'(z)=k \quad \to \quad f'(z)=ke^z \xrightarrow{\int} f(z)=ke^z+C$$

با توجه به شرایط داده شده به دست می‌آید:

$$f'(0)=i \quad \to \quad ke^0=i \quad \to \quad k=i$$
$$f(i\pi)=i \quad \to \quad ke^{i\pi}+C=i \quad \to \quad -k+C=i \quad \to \quad C=2i$$

لذا داریم:

$$f(z)=ie^z+2i \quad \to \quad f(0)=3i$$

۶ ـ نامساوی کوشی

اگر $f(z)$ در روی دایره c و درون آن تحلیلی باشد و c دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r باشد و داشته باشیم $|f(z)|\le M$، آنگاه:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!M}{r^n} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

مثال ۴۲ اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تحلیلی در درون و روی دایره واحد $c:|z|=1$ باشد و چنانچه M حداکثر مقدار $|f(z)|$ روی c باشد، کدامیک از نامساوی‌های زیر برای ژاکوبین در مرکز دایره c برقرار است؟

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

۱) $J \le M$ ۲) $J^2 \le M$ ۳) $J \le 4M^2$ ۴) $J \le M^2$

حل: گزینه ۴ درست است.

چون $f(z)$ تابعی تحلیلی در $|z|\le 1$ می‌باشد، لذا در این ناحیه معادلات کوشی ریمان $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ برقرار بوده و داریم:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \ \rightarrow \ |f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

لذا می‌توان نوشت:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2$$

و حاصل J در مرکز دایره c عبارت است از:

$$J(0)=|f'(0)|^2$$

اما طبق نامساوی کوشی می‌توان نوشت:

$$|f'(0)|\le\frac{1!\,M}{(1)^1} \ \rightarrow \ |f'(0)|^2\le M^2 \ \rightarrow \ J(0)\le M^2$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

۷ـ قضیه اصلی جبر

هر چندجمله‌ای به صورت $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ لااقل دارای یک ریشه است. یعنی نقطه‌ای مانند z_0 موجود است به نحوی که $f(z_0)=0$.

از اینجا می‌توان دریافت هر معادله جبری به صورت $a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ دارای فقط و فقط n ریشه می‌باشد (با احتساب تکرار ریشه‌ها).

همچنین نشان داده می‌شود اگر تمام ضرایب $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ حقیقی باشند، ریشه‌های مختلط معادله مذکور به صورت مزدوج همدیگر ظاهر می‌شوند، یعنی اگر $\alpha+i\beta$ ریشه‌ای از معادله باشد $\alpha-i\beta$ نیز ریشه این معادله خواهد بود و لذا اگر در آن معادله، n فرد باشد وجود لااقل یک ریشه حقیقی تضمین شده است.

مثال ۴۳ اگر معادله $az^5+z^4+bz^3+cz^2+dz+e=0$ فاقد ریشه حقیقی و دارای ریشه‌های مختلط $1+2i$ و $3i$ باشد و ضرایب $a,b,\dots,e$ حقیقی باشند، حاصل $a+b+c+d+e$ کدام است؟

۱) 38 ۲) 40

۳) 39 ۴) نیاز به اطلاعات بیشتری است.

حل: گزینه ۳ درست است.

چون تمام ضرایب معادله حقیقی هستند، می‌توان گفت:

وجود ریشه $1+2i$ وجود ریشه $1-2i$ را تضمین می‌کند.

وجود ریشه $3i$ وجود ریشه $-3i$ را تضمین می‌کند.

اگر a مخالف صفر باشد معادله درجه پنج می‌شود و باید پنج ریشه داشته باشد که چهار تای آن‌ها همان چهار ریشه فوق بوده و ریشه پنجم باید عددی حقیقی باشد که خلاف فرض مسئله است، لذا باید $a=0$ و معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$(z-3i)(z+3i)\big(z-(1+2i)\big)\big(z-(1-2i)\big)=0 \rightarrow (z-3i)(z+3i)\big((z-1)-2i\big)\big((z-1)+2i\big)=0 \rightarrow$$

$$\left(z^2+9\right)\left((z-1)^2+4\right)=0 \rightarrow \left(z^2+9\right)\left(z^2-2z+5\right)=0 \rightarrow z^4-2z^3+14z^2-18z+45=0$$

با مقایسه معادله حاصله با معادله فرض مسئله می‌توان دید:

$$b=-2 \quad , \quad c=14 \quad , \quad d=-18 \quad , \quad e=45$$

$$a+b+c+d+e=39$$

۸ ـ قضیه روشه

اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ در روی مسیر ساده و بسته c و داخل آن تحلیلی باشند و در روی c داشته باشیم $|g(z)|<|f(z)|$ آنگاه تعداد صفرهای توابع $f(z)+g(z)$ و $f(z)$ که در داخل مرز بسته c واقع می‌شوند، یکسان خواهد بود.

نکته: می‌توان ثابت کرد کلیه ریشه‌های معادله $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0=0$ که در آن ضرایب $a_{n-1},\dots,a_0$ حقیقی هستند، در دایره $|z|=1+\max\left(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\right)$ واقعند.

مثال ۴۴ تعداد ریشه‌های معادله $e^z-10z+3=0$ که در داخل ناحیه $|z|\le 1$ قرار دارند چند تا است؟

۱) 0 ۲) 1

۳) بیشمار ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

حل: گزینه ۲ درست است.

با فرض $g(z)=e^z+3$ و $f(z)=-10z$ در روی $|z|=1$ داریم:

$$|f(z)|=|-10z|=10|z|=10$$

$$|g(z)|=\left|e^z+3\right|\le\left|e^z\right|+|3|\le e+3$$

لذا $|g(z)|<|f(z)|$ و طبق قضیه روشه تعداد صفرهای توابع $f(z)+g(z)$ و $f(z)$ که در داخل مرز بسته C قرار دارند یکسان است و چون $f(z)$ تنها یک صفر در $z=0$ دارد که داخل C واقع شده لذا $f(z)+g(z)=e^z-10z+3$ نیز تنها یک صفر واقع در $|z|\le 1$ خواهد داشت.

مثال ۴۵ تعداد صفرهای تابع $F(z) = z^6 - 4z^2 + 10$ که بین دوایر $|z| = 1$ و $|z| = 2$ قرار دارند کدام است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) 2 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

حل: گزینه ۴ درست است.

برای ناحیه $|z| < 1$ قرار می‌دهیم:

$$g(z)=10 \quad , \quad h(z)=z^6-4z^2 \quad \to \quad F=g+h$$

برای هر z روی $|z|=1$ داریم:

$$|g(z)|=10 \quad , \quad |h(z)| \le |z|^6+4|z|^2=5 \quad \to \quad |h(z)|<|g(z)|$$

بنابراین بنا به قضیه روشه تعداد صفرهای $F=g+h$ برابر تعداد صفرهای g در $|z|<1$ است که برابر صفر می‌باشد و لذا F در $|z|<1$ صفری ندارد.

برای ناحیه $|z|<2$ قرار می‌دهیم:

$$g(z)=z^6 \quad , \quad h(z)=-4z^2+10$$

برای هر z روی $|z|=2$ داریم:

$$|g(z)|=64 \quad , \quad |h(z)| \le 4|z|^2+10=26 \quad \to \quad |h(z)|<|g(z)|$$

بنابراین بنا به قضیه روشه تعداد صفرهای $F=g+h$ در ناحیه $|z|<2$ برابر تعداد صفرهای g در این ناحیه است که برابر 6 می‌باشد و لذا F نیز در ناحیه $|z|<2$، 6 صفر دارد.

و در کل F در ناحیه $1<|z|<2$ دارای 6 صفر می‌باشد.

۹ـ قضیه انتگرال کوشی گورسا

هرگاه f بر ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد به ازای هر مرز بسته c داخل ناحیه D حاصل $\int_c f(z)\,dz$ صفر خواهد بود.

تذکر: با شرایط گفته شده حاصل $\int_c f(z)\,dz$ روی هر مسیر باز دلخواه که از z_1 تا z_2 طی شده و داخل D قرار دارد، مستقل از مسیر بوده و برابر $F(z_2)-F(z_1)$ می‌باشد که در آن $F'(z)=f(z)$

مثلاً روی هر مسیر بسته دلخواهی حاصل $\int_C e^{z^2}dz$ صفر خواهد بود، زیرا e^{z^2} همه جا تحلیلی است.

همچنین حاصل $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^4+2}$ صفر خواهد بود، زیرا تابع $\frac{1}{z^4+2}$ همه جا تحلیلی است به جز در نقاطی که $z=\sqrt[4]{-2}$ و چون همه ریشه‌های چهارم -2 در فاصله $\sqrt[4]{2}$ از مبدأ قرار دارند، همگی در خارج دایره $|z|=1$ واقع می‌شوند.

اما دقت کنید مثلاً برای محاسبه $I_1=\int_C \frac{dz}{z}$، $I_2=\int_C \bar{z}\,dz$ و $I_3=\int_C \frac{dz}{z^2}$ که در آن $C:|z|=1$ می‌باشد، قضیه مذکور کمکی نمی‌کند ولی می‌توان دید روی $|z|=1$ داریم:

$$z=e^{i\theta} \quad \to \quad \bar{z}=e^{-i\theta} \quad , \quad dz=ie^{i\theta}d\theta \quad , \quad z^2=e^{2i\theta}$$

لذا به دست می‌آید:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}}=\int_0^{2\pi}id\theta=i\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi i$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}id\theta=i\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi i$$

$$I_3=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{2i\theta}}=\int_0^{2\pi}ie^{-i\theta}d\theta=-e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi}=0$$

مثلاً حاصل $I=\int ze^{z^2}dz$ روی هر مسیر واصل از $z=0$ تا $z=i$، به واسطه همواره تحلیلی بودن ze^{z^2}، مستقل از مسیر بوده و چون $\frac{1}{2}\left(e^{z^2}\right)'=ze^{z^2}$ می‌توان نوشت:

$$I=\left(\frac{1}{2}e^{z^2}\right)\Big|_0^i=\frac{1}{2}\left(e^{-1}-1\right)$$

۱۰ــ قضیه کران بالای اندازه یک انتگرال مختلط

همواره داریم $\left|\int_c f(z)dz\right|\le\int_c\left|f(z)\right|dz$ و لذا می‌توان گفت:

هرگاه L طول مسیر منحنی c و در هر نقطه از منحنی c داشته باشیم $\left|f(z)\right|\le M$ آنگاه:

$$\left|\int_c f(z)dz\right|\le ML$$

مثال ۴۶ اگر C نیم‌دایره واحد از $\left|z\right|=1$ برای $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ باشد، کوچک‌ترین کران بالا برای $\left|\int_C\left(x^2-iy^2\right)dz\right|$ کدام خواهد بود؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

حل: گزینه ۳ درست است.

روی $\left|z\right|=1$ داریم:

$$z=e^{i\theta}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\ \rightarrow\ x^2-iy^2=\cos^2\theta-i\sin^2\theta\ \rightarrow$$

$$\left|x^2-iy^2\right|=\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}=\sqrt{\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{2}(\sin2\theta)^2}$$

برای $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}-$، حداکثر مقدار عبارت فوق در $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد که برابر 1 می‌باشد، ازآنجاکه طول منحنی C برابر محیط نیم‌دایره به شعاع 1 یعنی π است لذا می‌توان نوشت:

$$\left|\int_C \left(x^2 - iy^2\right) dz\right| \le 1 \times \pi = \pi$$

مثال ۴۷ اگر دایره $C_R : |z| = R > 1$ مسیر انتگرال‌گیری باشد، آنگاه کوچکترین مقدار M که در نامساوی $\left|\int_{C_R} \frac{\log z}{z^2} dz\right| \le M$ صدق می‌کند (در صورتی که شاخه $-\pi < \text{Arg}z < \pi$ برای log در نظر گرفته شود)، عبارت است از: (ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{2\pi}{R}$ ۲) $2\pi + 1$ ۳) $\pi^2 + \log R$ ۴) $2\pi\left(\frac{\pi + \log R}{R}\right)$

حل: گزینه ۴ درست است.

داریم:

$$\left|\frac{\log z}{z^2}\right| = \frac{|\log z|}{|z^2|} = \frac{|\log|z| + i\text{Arg}z|}{|z|^2} \le \frac{|\log|z|| + |i\text{Arg}z|}{|z|^2}$$

که روی $C_R : |z| = R > 1$ می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{\log z}{z^2}\right| \le \frac{|\log R| + \pi}{R^2} = \frac{\log R + \pi}{R^2}$$

اگر P_{C_R} محیط منحنی C_R باشد، می‌توان گفت:

$$\left|\int_{C_R} \frac{\log z}{z^2} dz\right| \le \left(\max\left|\frac{\log z}{z^2}\right|\right) \cdot P_{C_R} = \frac{\log R + \pi}{R^2} \cdot 2\pi R = 2\pi\left(\frac{\pi + \log R}{R}\right)$$

۱۱ـ قضیه انتگرال کوشی

اگر $f(z)$ در داخل ناحیه همبند ساده D تحلیلی و c یک منحنی بسته واقع در ناحیه D و z_0 نقطه‌ای در درون مرز c باشد داریم:

$$\int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

مثال ۴۸ حاصل $\int_C \frac{z\cos z}{(z - \pi)^3} dz$ که در آن C دایره $|z| = 4$ می‌باشد کدام است؟

۱) $2\pi^2 i$ ۲) $3\pi^2 i$ ۳) $\pi^2 i$ ۴) 0

حل: گزینه ۳ درست است.

تابع $f(z)=z\cos z$ همه جا تحلیلی است و طبعاً در ناحیه محصور به $|z|=4$ نیز تحلیلی می‌باشد، ازآنجاکه $z=\pi$ داخل $|z|=4$ قرار دارد، طبق قضیه انتگرال کوشی می‌توان نوشت:

$$I=\int_C \frac{z\cos z}{(z-\pi)^3}dz=2\pi i\frac{f''(\pi)}{2!}$$

و چون:

$$f'(z)=\cos z-z\sin z$$
$$f''(z)=-2\sin z-z\cos z$$
$$I=2\pi i\frac{-2\sin\pi-\pi\cos\pi}{2!}=\pi^2 i$$

۱۲ـ قضیه میانگین گوس

اگر $f(z)$ در روی و درون دایره $c:|z-z_0|=R$ تحلیلی باشد می‌توان نشان داد:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)d\theta$$

به طور شهودی مقدار $f(z)$ در نقطه‌ای مثل z_0 در D برابر است با مقدار میانگین $f(z)$ روی هر دایره واقع در D به مرکز z_0 (دقت داریم رابطه $z=z_0+Re^{i\theta}$ بیانگر معادله دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R می‌باشد.)

مثال ۴۹ حاصل $I=\int_0^{2\pi}\sin^8\left(\frac{\pi}{4}+3e^{i\theta}\right)d\theta$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{8}$

حل: گزینه ۲ درست است.

تابع $f(z)=\sin^8 z$ همه جا و به طبع در ناحیه $\left|z-\frac{\pi}{4}\right|\le 3$ تحلیلی است، لذا طبق قضیه میانگین گوسی داریم:

$$I=2\pi f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sin^8\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8=\frac{\pi}{8}$$

۱۳ـ قضیه اصل بازتاب

اگر تابع f در حوزه D که شامل قطعه‌ای از محور x ها بوده و نسبت به آن محور متقارن است تحلیلی باشد، در این صورت برای هر نقطه z در حوزه D داریم $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه x بر آن قطعه $f(x)$ حقیقی باشد، همچنین داریم $\overline{f(z)}=-f(\bar{z})$ اگر و فقط اگر به ازاء هر نقطه x بر آن قطعه، $f(x)$ موهومی محض باشد.

به تعبیری داریم:

اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی و $f(x)$ حقیقی باشد آنگاه $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$

اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی و $f(x)$ موهومی محض باشد آنگاه $\overline{f(z)}=-f(\bar{z})$

مثلاً:

ازآنجاکه $\cos z$ همه جا تحلیلی است و $\cos x$ حقیقی می‌باشد، داریم: $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$

ازآنجاکه $i\sin z$ همه جا تحلیلی است و $i\sin x$ موهومی محض می‌باشد داریم: $\overline{(i\sin z)}=-i\sin\overline{z}$

اگر چه z^2+ie^z همه جا تحلیلی است اما چون x^2+ie^x نه حقیقی است و نه موهومی محض، از اصل بازتاب نمی‌توان استفاده کرد به جز آن که از دو قسمت این اصل جداگانه استفاده کرده و بنویسیم:

$$\overline{\left(z^2+ie^z\right)}=\overline{z}^2-ie^{\overline{z}}$$

مثال ۵۰ فرض کنید تابع f بر ناحیه $|z|>1$ تحلیلی باشد و بر روی فاصله $(1\,,+\infty)$ با مقدار حقیقی، در این‌صورت کدام مورد صحیح است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) اگر $x\in(-\infty\,,-1)$ آنگاه $\operatorname{Im}f(x)\neq 0$

۲) f بر فاصله $(-\infty\,,-1)$ مقدار حقیقی دارد.

۳) اگر $x\in(-\infty\,,-1)$ آنگاه $\operatorname{Re}f(x)=0$

۴) در مورد حقیقی یا موهومی بودن f بر فاصله $(-\infty\,,-1)$ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

حل: گزینه ۲ درست است.

طبق اصل بازتاب چون f تابعی تحلیلی است و در بازه $(1,+\infty)$ دارای مقدار حقیقی است باید در بازه $(-\infty,-1)$ نیز دارای مقدار حقیقی باشد.

۱۴ـ قضیه تابع ثابت

اگر در هر نقطه از ناحیه‌ای $f'(z)$ صفر باشد، آنگاه f در سراسر آن ناحیه ثابت است.

۱۵ـ اصل آرگومان

فرض کنید c مرز ساده و بسته‌ای باشد که در جهت مثبت پیموده شده است و $f(z)$ تابعی باشد که درون و روی c، جز احتمالاً در قطب‌های داخل c، تحلیلی است. چنانچه $f(z)$ هیچ صفری روی c نداشته باشد در این صورت داریم:

$$\Delta_c \operatorname{Arg} f(z)=2\pi(N-P)$$

که در آن N و P عبارتند از تعداد صفرها و تعداد قطب‌های f در داخل c (با این شرط که هر کدام از صفرها و قطب‌ها را به تعداد مرتبه‌شان به حساب می‌آوریم.) و $\Delta_c \operatorname{Arg} f(z)$ تغییر آرگومان $w=f(z)$ است وقتی z مرز c را در جهت مثبت یک دور می‌پیماید.

بنابراین اگر تبدیل‌یافته مرز c را تحت نگاشت $w=f(z)$ مرز c' بنامیم، $(N-P)$ نمایانگر تعداد دفعاتی است که نقطه w حول مبدأ در صفحه $u-v$ می‌چرخد وقتی که z مرز c را در جهت مثبت یک دور می‌پیماید. (طبیعی است اگر c' مبدأ را دربر نگیرد، $\Delta_c \arg f(z)$ صفر خواهد شد.)

مثال ۵۱ اگر C دایره واحد $|z|=1$ باشد که در جهت مثلثاتی طی شده مقدار $\Delta_C(\operatorname{Arg} f(z))$ برای توابع z^3 و $\dfrac{z^4+2}{2z+1}$ به ترتیب کدام است؟

۱) 2π و 6π ۲) 2π و -2π ۳) 6π و 6π ۴) 6π و -2π

حل: گزینه ۴ درست است.

تابع z^3 هیچ قطبی ندارد و $z=0$ تنها صفر آن است که دارای مرتبه سه می‌باشد و داخل C است لذا برای این تابع داریم:

$$\Delta_C\left(\operatorname{Arg} f(z)\right)=2\pi(N-P)=2\pi(3-0)=6\pi$$

تابع $\frac{z^4+2}{2z+1}$ دارای صفرهای $z=\sqrt[4]{-2}$ می‌باشد که همگی در فاصله $\sqrt[4]{2}$ از مبدأ قرار دارند و به تعبیری خارج C هستند و $z=-\frac{1}{2}$ تنها قطب آن است که دارای مرتبه یک می‌باشد و داخل C قرار دارد، لذا برای این تابع داریم:

$$\Delta_C\left(\operatorname{Arg} f(z)\right)=2\pi(N-P)=2\pi(0-1)=-2\pi$$

۱۶ـ قضیهٔ شرایط $f(z)\equiv 0$

اگر تابع f در سراسر حوزهٔ D تحلیلی باشد و در هر نقطه z از حوزه‌ای یا قوسی در داخل D داشته باشیم $f\equiv 0$، آنگاه در سراسر D تابع $f(z)$ متحد با صفر خواهد بود.

مثلاً برای تابع همه جا تحلیلی (تام) $f(z)=\sin^2 z+\cos^2 z-1$ ازآنجاکه روی محور حقیقی f همواره صفر می‌باشد $\left(\sin^2 x+\cos^2 x-1=0\right)$، لذا در سراسر صفحه مختلط داریم: $f(z)\equiv 0$

تذکر: با استفاده از این قضیه می‌توان بسیاری از اتحادهای نوشته شده برای توابع حقیقی را به توابع مختلط تعمیم داد.

۱۷ـ اگر f در $z=a$ تحلیلی باشد آنگاه تابع $g(z)$ با ضابطه:

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & z\neq a\\[2mm] f'(a) & z=a\end{cases}$$

نیز در $z=a$ تحلیلی است.

۱۸ـ (قضیه لیوویل تعمیم‌یافته)

اگر تابع f همه جا تحلیلی باشد و به ازای هر عدد صحیح نامنفی k، اعداد ثابت مثبتی مانند α و β موجود باشد به طوری که $|f(z)|\leq \alpha+\beta|z|^k$ آنگاه f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه k است.

۱۹ـ (قضیه یکتایی)

اگر دو تابع f و g در یک حوزه D تحلیلی باشند و بر مجموعه‌ای که یک نقطه انباشتگی در D دارد برابر باشند آنگاه بر D داریم:

$$f(z)\equiv g(z)$$

تذکر: $\sin\frac{1}{z}$ بر مجموعه $\left\{\frac{1}{n\pi};n=\pm1,\pm2,\ldots\right\}$ صفر است که دارای یک نقطه انباشتگی در $z=0$ می‌باشد، اما چون این نقطه انباشتگی در حوزه‌ای که $\sin\frac{1}{z}$ در آن تحلیلی است، قرار ندارد، لذا $\sin\frac{1}{z}$ در فرض قضیه فوق صدق نمی‌کند و البته انتظار نداریم $\sin\frac{1}{z}$ متحد با صفر باشد.

۲۰ـ اگر f تابعی همه جا تحلیلی باشد و $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ آنگاه f یک چندجمله‌ای است.

۲۱ــ اگر $f(z)$ در نقطه‌ای تحلیلی باشد، مشتقات و انتگرال‌های آن تا هر مرتبه‌ای در آن نقطه تحلیلی هستند.

۲۲ــ قضیه اردوش:

اگر تابع غیر ثابت f در قرص بسته‌ای تحلیلی باشد و ماکزیمم قدرمطلق خود را در نقطه‌ای مرزی مانند α اختیار کند، آنگاه $f'(\alpha)=0$

۲۳ــ قضیه نگاشت باز:

تحت یک نگاشت تحلیلی غیر ثابت، تصویر یک مجموعه باز یک مجموعه باز می‌باشد.

۲۴ــ قضیه شوارتز:

اگر تابع f در قرص واحد تحلیلی باشد و در این قرص $|f(z)|\le 1$ و $f(0)=0$ آنگاه داریم:

الف) $|f(z)|\le|z|$ ب) $|f'(0)|\le 1$

(در هر دو مورد حالت تساوی فقط زمانی رخ می‌دهد که $f(z)=e^{i\alpha}z$)

۲۵ــ اگر تابع f همه جا تحلیلی باشد و به ازای هر z داشته باشیم:

$$|f(z)|\le\frac{1}{|\operatorname{Im} z|}$$

آنگاه $f\equiv 0$

عملگر نابلا در فرم مختلط

از آن‌جا که $y=\dfrac{z-\bar z}{2i}$ و $x=\dfrac{z+\bar z}{2}$ می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

حال اگر اپراتور نابلا و مزدوج آن را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\bar\nabla=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z} \qquad \nabla=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial \bar z}$$

و تابع مختلط $A(x,y)=P(x,y)+iQ(x,y)$ برحسب $\bar z$ و z را به صورت $B(z,\bar z)$ نمایش دهیم، بحث‌های زیر مطرح می‌شود:

۱ـ گرادیان تابع مختلط A به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{grad} A=\nabla A \;\rightarrow\; \nabla A=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=2\left(\frac{\partial B}{\partial \bar z}\right)$$

اگر B یک تابع تحلیلی باشد در آن $\bar z$ موجود نیست، حاصل فوق صفر خواهد شد. البته این موضوع از معادلات کوشی ریمان

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{dy}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$$

که نتیجه تحلیلی بودن تابع می‌باشد، نیز قابل حصول است.

نکته: اگر $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه $\nabla f(z)=0$

۲ـ دیورژانس تابع مختلط A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div} A=\nabla . A=\operatorname{Re}(\bar{\nabla} A)=\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}-i \frac{\partial}{\partial y}\right)(P+i Q)\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=2 \operatorname{Re}\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

۳ـ کرل تابع مختلط A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl} A=\nabla \times A=\operatorname{Im}(\bar{\nabla} A)=\operatorname{Im}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}-i \frac{\partial}{\partial y}\right)(P+i Q)\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2 \operatorname{Im}\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

۴ـ لاپلاسین تابع مختلط A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta A=\nabla \cdot \nabla A=\operatorname{Re}(\bar{\nabla} \nabla A)=\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}-i \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i \frac{\partial}{\partial y}\right) A\right)=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=4 \frac{\partial^2 B}{\partial z\, \partial \bar{z}}$$

نکته:

الف ـ کرل گرادیان A صفر است اگر A حقیقی باشد و یا در حالت کلی‌تر اگر $\operatorname{Im}(A)$ تابعی همساز باشد.

ب ـ دیورژانس گرادیان A صفر است اگر A موهومی محض باشد و یا در حالت کلی‌تر اگر $\operatorname{Re}(A)$ تابعی همساز باشد.

مثال ۵۲ اگر f تابعی تحلیلی باشد حاصل $\nabla^2|f(z)|^2$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $|f'(z)|^2$ ۳) $2|f'(z)|^2$ ۴) $4|f'(z)|^2$

حل: گزینه ۴ درست است.

با فرض $f(z)=u+iv$، تحلیلی بودن این تابع می‌طلبد:

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ v_{xx}+v_{yy}=0 \end{cases}$$

حال توجه داریم:

$$\nabla^2|f(z)|^2=\nabla^2(u^2+v^2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)$$

و چون:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u^2)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2uu_x)=2(u_x^2+uu_{xx})$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \nabla^2|f(z)|^2 &=2(u_x^2+uu_{xx}+u_y^2+uu_{yy}+v_x^2+vv_{xx}+v_y^2+vv_{yy}) \\ &=2\left\{u(u_{xx}+u_{yy})+v(v_{xx}+v_{yy})+(u_x^2+v_y^2)+(u_y^2+v_x^2)\right\} \\ &=2\left\{0+0+2u_x^2+2u_y^2\right\}=4(u_x^2+u_y^2) \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$|f'(z)|^2=|u_x+iu_y|^2=u_x^2+u_y^2$$

مجموعه تست توابع مختلط

۱. جواب کلی معادله $\sin z = \cosh 4$ کدام است؟ (n یک عدد صحیح نامنفی است) **(ریاضی ۸۷)**

۱) $z=\left(\pm 2+\frac{1}{4}\right)\pi \pm 2i$

۲) $z=\left(\pm 2+\frac{1}{3}\right)\pi \pm \frac{4}{3}i$

۳) $z=\left(\pm 2+\frac{1}{2}\right)\pi \pm 4i$

۴) $z=\left(\pm 2+\frac{1}{5}\right)\pi \pm 3i$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\sin z=\cosh 4 \rightarrow \sin z=\cos 4i \rightarrow \sin z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4i\right) \rightarrow \begin{cases} z=2k\pi+\frac{\pi}{2}-4i \\ z=2k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-4i\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2}+4i \end{cases}$$

یعنی جواب کلی چنین است:

$$z=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \pm 4i$$

و به ازای $k=\pm 1$ گزینه سوم صحیح می‌باشد.

راه دیگر:

$$\sin z=\cosh 4 \rightarrow \sin(x+iy)=\cosh 4 \rightarrow \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=\cosh 4 \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x\cosh y=\cosh 4 \\ \cos x\sinh y=0 \end{cases}$$

از معادله دوم دو حالت قابل تعیین است:

$$\begin{cases} \cos x=0 \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \sinh y=0 \rightarrow y=0 \end{cases}$$

با قرار دادن $y=0$ در معادله اول داریم:

$$\sin x \cosh 0=\cosh 4 \quad \to \quad \sin x=\cosh 4>1$$

که غیرممکن است.

با قرار دادن $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ در معادله اول داریم:

$$\begin{cases} \text{اگر } x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad \to \quad \sin x=1 \quad \to \quad \cosh y=\cosh 4 \quad \to \quad y=\pm 4 \\ \text{اگر } x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2} \quad \to \quad \sin x=-1 \quad \to \quad \cosh y=-\cosh 4<0 \ (\text{غیرممکن}) \end{cases}$$

لذا جواب‌های معادله موردنظر عبارتند از:

$$z=x+iy=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\pm 4i$$

۲.حاصل $\operatorname{Im}\left(ze^{z^2}\right)$ کدام است؟

۱) $e^{x^2-y^2}\left(x\cos 2xy-y\sin 2xy\right)$

۲) $e^{x^2-y^2}\left(x\cos 2xy+y\sin 2xy\right)$

۳) $e^{x^2-y^2}\left(x\sin 2xy-y\cos 2xy\right)$

۴) $e^{x^2-y^2}\left(x\sin 2xy+y\cos 2xy\right)$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$ze^{z^2}=(x+iy)e^{(x+iy)^2}=(x+iy)e^{x^2-y^2+2ixy}=(x+iy)\left(e^{x^2-y^2}e^{2ixy}\right)$$
$$=e^{x^2-y^2}(x+iy)(\cos 2xy+i\sin 2xy)$$

لذا:

$$\operatorname{Im}\left(ze^{z^2}\right)=e^{x^2-y^2}\left(x\sin 2xy+y\cos 2xy\right)$$

۳.اگر α، β، γ اعداد مختلط با قدرمطلق واحد باشند به قسمی که $|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|=|\alpha\beta\gamma|$، مقدار $|\alpha+\beta+\gamma|$ کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) 1

۴) 2

حل: گزینه ۳ درست است.

$$|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|=|\alpha\beta\gamma| \quad \to \quad \left|\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right|=\left|\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right| \quad \to \quad \left|\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right|=1$$

چون α و β و γ اعداد مختلط با قدرمطلق واحد فرض شده‌اند. عکس هر کدام برابر مزدوجشان است.

زیرا مثلاً برای $z=e^{i\theta}$ که دارای قدرمطلق یک است. داریم:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\bar{z}$$

لذا داریم:

$$\left|\bar{\gamma}+\bar{\beta}+\bar{\alpha}\right|=1 \ \rightarrow \ \left|\overline{\alpha+\beta+\gamma}\right|=1 \ \rightarrow \ \left|\alpha+\beta+\gamma\right|=1$$

۴.اگر بخواهیم معادله $|z-i|+|z-1+i|=R$ مبین یک پاره‌خط باشد طول این پاره‌خط کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\sqrt{2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$|z-z_1|+|z-z_2|=R$ مبین نقاطی است که مجموع فواصلشان تا دو نقطه ثابت z_1 و z_2 عدد R باشد و اگر $|z_1-z_2|=R$ این رابطه معرف یک پاره‌خط با دو سر z_1 و z_2 است و طبیعتاً طول پاره‌خط مذکور $R=|z_1-z_2|$ خواهد بود. در این مسأله داریم:

$$z_1=i\ ,\ z_2=1-i$$
$$|z_1-z_2|=|2i-1|=\sqrt{5}$$

لذا با فرض $R=\sqrt{5}$ شکل حاصله پاره‌خطی به طول $\sqrt{5}$ می‌باشد.

۵.در مورد توابع f و g می‌توان گفت:

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases} \quad \text{و} \quad f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

۱) هر دو پیوسته‌اند. ۲) هر دو ناپیوسته‌اند.

۳) f پیوسته و g ناپیوسته است. ۴) g پیوسته و f ناپیوسته است.

حل: گزینه ۴ درست است.

$$I=\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{0}{0}$$

اما حد فوق موجود نمی‌باشد چرا که به عنوان مثال داریم:

بر روی خط $y=0$ به نقطه $z=0$ نزدیک می شویم:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

بر روی خط $x=0$ به نقطه $z=0$ نزدیک می شویم:

$$I=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{|y|}$$

و حاصل عبارت فوق وقتی $y\to 0^+$ برابر یک و هنگامی که $y\to 0^-$ معادل منفی یک خواهد بود.

$$J=\lim_{z\to 0} g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{0}{0}$$

و با استفاده از تغییر متغیرهای $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ داریم :

$$J = \lim_{r\to 0\,,\,\forall\theta} \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = \lim_{r\to 0\,,\,\forall\theta} r\cos^2\theta = 0$$

(توجه کنید اگر حد فوق به θ وابستگی پیدا می‌کرد، موجود نبود)

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت چون حد تابع $f(z)$ در نقطه $z=0$ موجود نمی‌باشد این تابع در نقطه مزبور پیوسته نبوده و از آنجاکه تابع $g(z)$ در $z=0$ دارای حدی برای $g(0)=0$ می‌باشد، لذا در این نقطه دارای پیوستگی است.

۶.اگر تابع $f(z)$ در حوزه D از صفحه z تحلیلی و $|f(z)|$ در حوزه مزبور ثابت باشد، آنگاه:

۱) $f(z)$ در D موهومی محض است.
۲) $f(z)$ در D حقیقی است.
۳) $f(z)$ در D ثابت است.
۴) نقاط $f(z)$ تشکیل یک دایره می‌دهند.

حل: گزینه ۳ درست است.

با فرض $f(z) = u + iv$ از تحلیلی بودن تابع، برقراری معادلات کوشی ـ ریمان تضمین می‌شود:

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

با توجه به فرض می‌توان نوشت :

$$|f(z)| = c \ \rightarrow\ \sqrt{u^2+v^2} = c$$

با مشتق‌گیری نسبت به متغیر x بدست می‌آید :

$$\frac{2uu_x + 2vv_x}{2\sqrt{u^2+v^2}} = 0 \ \rightarrow\ uu_x = -vv_x$$

با مشتق‌گیری نسبت به متغیر y بدست می‌آید:

$$\frac{2uu_y + 2vv_y}{2\sqrt{u^2+v^2}} = 0 \ \rightarrow\ uu_y = -vv_y$$

با تقسیم دو عبارت حاصل شده از مشتق‌گیری خواهیم داشت :

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{v_x}{v_y}$$

و با استفاده از معادلات کوشی ریمان داریم:

$$\frac{u_x}{-v_x} = \frac{v_x}{u_x} \ \rightarrow\ (u_x)^2 = -(v_x)^2$$

لذا باید $u_x = v_x = 0$ باشند و در نتیجه $u_y = v_y = 0$

پس بدیهی است که توابع u و v باید توابعی ثابت باشند، یعنی داریم :

$$f(z) = \text{ثابت}$$

۷.با فرض $f(z) = (\ln r)^2 - \theta^2 + 2i\theta\ln r$:

۱) معادلات کوشی ریمان همواره ارضاء شده و داریم $f'(z) = \frac{2}{r}e^{-i\theta}(\ln r + i\theta)$
۲) معادلات کوشی ریمان همواره ارضاء شده و داریم $f'(z) = \frac{2}{r}(\ln r + i\theta)$
۳) معادلات کوشی ریمان تحت شرایطی خاص ارضاء شده و $f'(z)$ فقط در همان شرایط موجود است.
۴) معادلات کوشی ریمان تحت شرایطی خاص ارضاء شده و $f'(z)$ در هیچ جایی موجود نمی‌باشد.

حل: گزینه ۱ درست است.

در این تابع داریم:

$$u=(\ln r)^2-\theta^2 \qquad v=2\theta\ln r$$

از آنجا که:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=2\left(\frac{1}{r}\right)\ln r \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-2\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=2\theta\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=2\ln r$$

ملاحظه می‌شود معادلات کوشی ریمان یعنی:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\end{cases}$$

همواره اقناع می‌شوند.

از طرفی داریم:

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=e^{-i\theta}\left(\frac{2}{r}\ln r+i\frac{2\theta}{r}\right)=\frac{2}{r}e^{-i\theta}(\ln r+i\theta)$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

۸.اگر $f(z)=x^3+y^3+i\left(x^3-y^3\right)$ **باشد حاصل** $f'(1-i)$ **کدام است؟**

۱) $3-3i$

۲) $3+3i$

۳) $f'(1-i)$ موجود نمی‌باشد

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۳ درست است.

در تابع $f(z)$ داریم:

$$u=x^3+y^3 \qquad v=x^3-y^3$$

ملاحظه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-3y^2$$

و در نقطه $z=1-i$ یعنی $y=-1$ و $x=1$ اصولاً اولین معادله کوشی ریمان یعنی $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ برقرار نمی‌باشد، این بدان معناست که تابع $f(z)$ در $z=1-i$ اساساً مشتق‌پذیر نیست.

۹. تابع مختلط $w=\sin^2 y+ix$

۱) در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۲) در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نمی‌باشد.

۳) در بیشمار نقطه (که نقاط روی خط $y=k\pi-\frac{\pi}{4}$ می‌باشد) تحلیلی است.

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۲ درست است.

$$u=\sin^2 y \quad , \quad v=x$$

برای برقراری معادلات کوشی ریمان باید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & \rightarrow \quad 0=0 \ \text{(همواره برقرار است)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} & \rightarrow \quad 2\sin y\cos y=-1 \ \rightarrow \ \sin 2y=-1 \ \rightarrow \ 2y=2k\pi-\dfrac{\pi}{2} \ \rightarrow \ y=k\pi-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادلات کوشی ریمان روی خطوط $y=k\pi-\frac{\pi}{4}$ (k عدد صحیح نسبی) برقرار است و از آنجا که توابع v_y و v_x و u_y و u_x و v و u همه جا پیوسته‌اند لذا تابع مختلط w روی خطوط مذکور مشتق‌پذیر است و مشتق آن روی این خطوط برابر است با:

$$w'=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=k\pi-\frac{\pi}{4}}=i$$

و البته چون تابع فقط روی خطوط $y=k\pi-\frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر است در همسایگی هر کدام از این نقاط، نقاطی وجود دارد که تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد، لذا تابع موردنظر هیچ جایی تحلیلی نیست.

۱۰. اگر $w=f(z)$ یک تابع تحلیلی بوده و در $z=2+i$ حاصل $\frac{\partial w}{\partial x}$ برابر $2-i$ باشد حاصل $\frac{\partial w}{\partial y}$ در $z=2+i$ کدام است؟

۱) $2+i$ ۲) $2-i$ ۳) $i-2$ ۴) $2i+1$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$w=u(x,y)+i\,v(x,y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$$

با توجه به معادلات کوشی ریمان $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-\partial v}{\partial x} \end{cases}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

حال چون طبق فرض مساله در $z = 2+i$ داریم $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2 - i$ لذا در این نقطه خواهیم داشت:

$$2 - i = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2 - i}{-i} = 2i + 1 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 2i + 1$$

۱۱. اگر $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ همه جا تحلیلی بوده و $f'(-1+i) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ باشد $\begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix}$ در $z = -1+i$ کدام است؟

۱) 0　　۲) 1　　۳) $\sqrt{2}$　　۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

در نقطه $z = -1+i$ طبق فرض داریم: $\rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$f' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow e^{-\frac{3i\pi}{4}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$(1+i)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial v}{\partial r} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

و چون از معادلات کوشی ریمان داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

لذا در نقطه مورد بحث به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = u_r v_\theta - u_\theta v_r = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه دیگر: می‌دانیم برای تابع تحلیلی $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ داریم:

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\ \rightarrow\ \left|f'(z)\right|=\sqrt{u_r^2+v_r^2}\ \rightarrow\ \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases}$$

لذا داریم:

$$J=\begin{vmatrix}u_r & u_\theta\\ v_r & v_\theta\end{vmatrix}=u_r v_\theta-u_\theta v_r=ru_r^2+rv_r^2=r\left|f'(z)\right|^2$$

لذا در این مسأله که:

$$\begin{cases}z=-1+i\ \rightarrow \begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \theta=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}\\ f'(z)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\left|f'(z)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

به‌دست می‌آید:

$$J=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲. اگر $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u=\left(x^2-y^2+1\right)^2-4x^2y^2$ باشد و داشته باشیم $v(0,0)=0$ آنگاه مقدار $v(1,1)$ برابر کدام است؟ **(مکانیک ۸۸)**

۱) -1 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 4

حل: گزینه ۴ درست است.

از معادلات کوشی ریمان داریم $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ با استفاده از u داده شده و قرار دادن آن در معادلات فوق به دست می‌آید:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=2\left(x^2-y^2+1\right)(2x)-8xy^2\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\left(2\left(x^2-y^2+1\right)(-2y)-8x^2y\right)\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=4x^3-12xy^2+4x\ \xrightarrow{\int \text{به } y}\ v=4x^3y-4xy^3+4xy+A(x)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=12x^2y-4y^3+4y\ \xrightarrow{\int \text{به } x}\ v=4x^3y-4xy^3+4xy+B(y)\end{cases}$$

لذا به دست می‌آید:

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + c$$

از شرط $v(0,0) = 0$ داریم $c = 0$ لذا:

$$v(1,1) = 4 - 4 + 4 = 4$$

۱۳. اگر u در حوزه D همساز باشد، آنگاه تابع $f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ در حوزه D : **(ریاضی ۸۵)**

۱) تحلیلی است.
۲) تحلیلی نمی‌باشد.
۳) یک تابع ثابت است.
۴) فقط در یک نقطه تحلیلی است.

حل: گزینه ۱ درست است.

برای برقراری معادلات کوشی ریمان باید:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

معادله دوم همواره برقرار است (با شرط پیوسته بودن مشتقات جزئی u) و معادله اول بواسطه همساز بودن تابع u، همواره برقرار است، لذا معادلات C ،Re همواره ارضاء می‌شوند و لذا تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی است.

راه دیگر: تابع همساز بر یک حوزه همبند ساده قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است.

لذا اگر u یک تابع همساز بر حوزه D باشد، آنگاه تابعی تحلیلی مانند $g: D \to \mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که $g(z) = u + iv$

با توجه به تحلیلی بودن g و طبق قضایای کوشی‌ریمان می‌توان نوشت:

$$g'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = f(z)$$

و چون g بر D تحلیلی است، تابع g' نیز بر D تحلیلی می‌باشد.

۱۴. اگر $f(z) = u(x,y) + i\left(3x^2y - y^3 + xy\right)$ تحلیلی باشد، حاصل $f'(i)$ کدام است؟

۱) $2i - 3$
۲) $i + 3$
۳) $-i + 3$
۴) $i - 3$

حل: گزینه ۴ درست است.

در تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ داریم:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

لذا در این‌جا چون $v = 3x^2y - y^3 + xy$ است داریم:

$$f'(z) = \left(3x^2 - 3y^2 + x\right) + i(6xy + y)$$

با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ نتیجه می‌شود:

$$f'(z) = 3z^2 + z \rightarrow f'(i) = 3(i)^2 + i = i - 3$$

۱۵. فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)$ است. $f'(1)$ برابر است با:
(مواد ۸۷)

۱) $2\cos1+2i\sin1$ ۲) $\cos1-2i\sin1$ ۳) $2\cos1+i\sin1$ ۴) $\cos1-i\sin1$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=\left(-2ye^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)+2xe^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)\right)-i\left(-2xe^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)-2ye^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)\right)$$

در $z=1$ یعنی $y=0$ و $x=1$ داریم:

$$f'(1)=2\cos1+2i\sin1$$

راه دیگر: تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$e^{iz^2}=e^{i\left(x^2-y^2+2ixy\right)}=e^{-2xy}e^{i\left(x^2-y^2\right)}=e^{-2xy}\left(\cos\left(x^2-y^2\right)+i\sin\left(x^2-y^2\right)\right)$$

لذا داریم:

$$-ie^{iz^2}=e^{-2xy}\left(\sin\left(x^2-y^2\right)-i\cos\left(x^2-y^2\right)\right)$$

تابع تحلیلی $-ie^{iz^2}$ دارای قسمت حقیقی مانند u داده شده در مسأله است، لذا هم‌می‌توان مزدوج همساز این u را مشخص کرد که $-e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)$ است و هم مشتق تابع $f(z)$ را به‌طور کلی یافت که چنین است:

$$f'(z)=-i(2iz)e^{iz^2}=2ze^{iz^2}\quad\rightarrow\quad f'(1)=2e^{i}=2(\cos1+i\sin1)$$

۱۶. با توجه به تابع مختلط $f(z)=\dfrac{z+i}{1+iz}$ ثابت α را طوری پیدا کنید که تابع $\dfrac{\alpha-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}$ همساز باشد.

۱) $\alpha=1$ ۲) $\alpha=-1$ ۳) $\alpha=2$ ۴) $\alpha=-2$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$w=\frac{z+i}{1+iz}=\frac{x+iy+i}{1+i(x+iy)}=\frac{x+i(y+1)}{(1-y)+ix}\,\frac{(1-y)-ix}{(1-y)-ix}=\frac{(x-xy+xy+x)+i\left(-x^2+1-y^2\right)}{(1-y)^2+x^2}$$
$$=\frac{2x}{(1-y)^2+x^2}+i\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}$$

چون قسمت‌های حقیقی و موهومی توابع از جنس تحلیلی همسازند لذا برای همساز بودن $\dfrac{\alpha-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}$ باید:

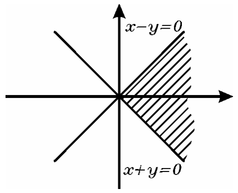
$$\alpha=1$$

۱۷. اگر $f(z)=|x-y|+i|x+y|$ حاصل $f'(2+i)$ کدام است؟

۱) $1+i$ ۲) $2+i$ ۳) $1+2i$ ۴) موجود نمی‌باشد.

حل: گزینه ۱ درست است.

در نقاطی که $x+y>0$ و $x-y>0$ یعنی ناحیه‌ای مطابق شکل زیر که $z=2+i$ نیز در داخل آن قرار دارد داریم:



$$f(z)=(x-y)+i(x+y)$$

$$\begin{cases} u_x=1 \quad , \quad v_y=1 \\ u_y=-1 \quad , \quad v_x=1 \end{cases}$$

لذا هر دو معادله کوشی ریمان $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$ در این ناحیه برقرارند و به واسطه پیوستگی توابع $v_y , v_x , u_y , u_x , v , u$ در این ناحیه $f'(z)$ در این ناحیه موجود است و داریم:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=1+i$$

۱۸. اگر $u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ باشد، تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ کدام است؟

۱) $i(z-1)e^{-z}$ ۲) $i(1-z)e^{-z}$ ۳) ize^{-z} ۴) $-ize^{-z}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\left\{-e^{-x}(x\sin y-y\cos y)+e^{-x}(\sin y)\right\}-i\left\{e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y)\right\}$$

با تبدیل $\begin{cases} x\to z \\ y\to 0 \end{cases}$ بدست می‌آید:

$$f'(z)=-ie^{-z}(z-1)$$

و با انتگرال گیری به روش جزءبه‌جزء داریم:

مشتق		انتگرال
$z-1$		e^{-z}
	$+$	
1		$-e^{-z}$
	$-$	
0		e^{-z}

$$f(z)=-i\left\{-(z-1)e^{-z}-e^{-z}\right\}=-ie^{-z}\{-z+1-1\}=ize^{-z}$$

۱۹. مقدار a چقدر باشد تا تابع $u(x,y)=ax^2y-y^3+xy$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ باشد؟

۱) $a=-3$ ۲) غیرممکن ۳) a دلخواه ۴) $a=3$

حل: گزینه ۴ درست است.

اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن یعنی v,u باید توابعی همساز باشند و برای همساز بودن هر تابعی کافی است، آن تابع معادله لاپلاس را ارضا کند، پس در اینجا باید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \;\to\; (2ay)+(-6y)=0 \;\to\; (2a-6)y=0 \;\to\; a=3$$

۲۰. اگر $u(x,y)=ax^2y-y^3+xy$ **همساز باشد و** $v(x,y)$ **مزدوج همساز آن فرض شود، با فرض** $v(0,0)=0$ **حاصل** $v(1,1)$ **کدام است؟**

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 1

حل: گزینه ۱ درست است.

$$u=ax^2y-y^3+xy \rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2ay\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6y\end{cases}$$

لذا برای همساز بودن u باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \rightarrow 2ay-6y=0 \rightarrow a=3$$

حال برای یافتن $v(x,y)$ داریم:

$$u=3x^2y-y^3+xy$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=6xy+y\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\left(3x^2-3y^2+x\right)=-3x^2+3y^2-x\end{cases}$$

و بسادگی بدست می‌آید:

$$v(x,y)=3xy^2+\frac{1}{2}y^2-x^3-\frac{1}{2}x^2+c$$

چون $v(0,0)=0$ لذا $c=0$ بوده و داریم:

$$v(1,1)=3+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=2$$

۲۱. اگر $f(z)$ **تابعی تحلیلی و** $\operatorname{Im}(f'(z))=3x^2-4y-3y^2$ **و** $f(0)=0$ **و** $f(1)=0$ **باشد، ضریب** z **در** $f(z)$ **کدام است؟**

۱) $1-i$ ۲) $1+i$ ۳) $2-i$ ۴) $2+i$

حل: گزینه ۳ درست است.

با فرض $f(z)=u+iv$ داریم:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

طبق فرض $\operatorname{Im}(f'(z))=3x^2-4y-3y^2$ می‌باشد لذا داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2 \rightarrow v=x^3-4yx-3y^2x+A(y)\\[2mm] \dfrac{-\partial u}{\partial y}=3x^2-4y-3y^2 \rightarrow u=-3x^2y+2y^2+y^3+B(x)\end{cases}$$

اما از معادلات کوشی ریمان باید داشته باشیم:

$$u_x = v_y \quad \rightarrow \quad -6xy + B'(x) = -4x - 6yx + A'(y)$$

لذا باید:

$$\begin{cases} B'(x) = -4x - c \\ A'(y) = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(x) = -2x^2 - cx + k_1 \\ A(y) = cy + k_2 \end{cases}$$

یعنی داریم:

$$f(z) = u + iv = \left(-3x^2y + 2y^2 + y^3 - 2x^2 - cx + k_1\right) + i\left(x^3 - 4yx - 3y^2x + cy + k_2\right)$$

با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ به دست می‌آید:

$$f(z) = -2z^2 + cz + iz^3 + k$$

با اعمال دوشرط $f(1) = 0 \, , \, f(0) = 0$ به دست می‌آید:

$$k = 0 \, , \, c = 2 - i \quad \rightarrow \quad f(z) = -2z^2 + (2-i)z + iz^3$$

۲۲. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد تابع مختلط $f(z) = \begin{cases} z(\bar{z})^2 & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ **در مبدأ** $z = 0$ **صحیح است؟**

۱) پیوسته نمی‌باشد.
۲) پیوسته است ولی در معادلات کوشی ریمان صدق نمی‌کند.
۳) پیوسته است و در معادلات کوشی ریمان صدق می کند اما مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۴) پیوسته و مشتق‌پذیر است.

حل: گزینه ۴ درست است.

برای $z \neq 0$ داریم:

$$f(z) = z(\bar{z})^2 = re^{i\theta}\left(re^{-i\theta}\right)^2 = re^{i\theta}r^2e^{-2i\theta} = r^3e^{-i\theta}$$

مشاهده می‌شود:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{r \to 0, \forall\theta} r^3e^{-i\theta} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

پس تابع در $z = 0$ پیوسته است.

برای $z \neq 0$ داریم:

$$f(z) = r^3e^{-i\theta} = r^3(\cos\theta - i\sin\theta) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = r^3\cos\theta \\ v = -r^3\sin\theta \end{cases}$$

معادلات کوشی ریمان می‌طلبد:

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \rightarrow \quad r\left(3r^2\cos\theta\right) = -r^3\cos\theta \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} & \rightarrow \quad -r^3\sin\theta = -r\left(-3r^2\sin\theta\right) \end{cases}$$

که البته هر دو معادله فوق در مبدأ (یعنی $r = 0$) برقرارند.

طبق تعریف مشتق در یک نقطه داریم:

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{n\to 0\,,\,\forall\theta}\frac{r^3e^{-i\theta}-0}{re^{i\theta}-0}=\lim_{r\to 0}r^2e^{-2i\theta}=0\times \text{کراندار}=0$$

پس $f'(0)$ موجود و برابر صفر می‌باشد.

۲۳.اگر $w=f(z)$ **تابعی تحلیلی باشد و در** $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$، $\frac{\partial w}{\partial(z+\overline{z})}=1+2i$ **باشد حاصل** $\frac{\partial w}{\partial(z-\overline{z})}$ **در** $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ **کدام است؟**

۱) $1+2i$ ۲) $-(1+2i)$ ۳) $1-2i$ ۴) $-(1-2i)$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} z+\overline{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x \\ z-\overline{z}=(x+iy)-(x-iy)=2iy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial(z+\overline{z})}=\dfrac{\partial w}{\partial(2x)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial(z-\overline{z})}=\dfrac{\partial w}{\partial(2iy)}=\dfrac{1}{2i}\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

$$w=u+iv \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial x}=i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases} \;\rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=i\frac{\partial w}{\partial x}\;\rightarrow\; 2i\frac{\partial w}{\partial(z-\overline{z})}=i\times 2\frac{\partial w}{\partial(z+\overline{z})}\;\rightarrow\;\frac{\partial w}{\partial(z+\overline{z})}=\frac{\partial w}{\partial(z-\overline{z})}$$

$z=2e^{\frac{i\pi}{4}}$ داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial(z+\overline{z})}=1+2i\;\rightarrow\;\frac{\partial w}{\partial(z-\overline{z})}=(1+2i)$$

۲۴.اگر $f(z)=z^2e^{iz}$ **باشد ماکزیمم** $|f(z)|$ **در ناحیه** $|z|\le 1$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) e ۳) e^2 ۴) $\frac{1}{e}$

حل: گزینه ۲ درست است.

طبق قضیه اصل ماکسیمم هرگاه f(z) در داخل ناحیه‌ای تحلیلی و غیر ثابت باشد آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکسیمم خود را روی مرز آن ناحیه اختیار می‌کند.

در این مساله می‌دانیم $f(z)=z^2e^{iz}$ همه جا تحلیلی است و طبیعتاً در ناحیه $|z|\le 1$ نیز تحلیلی است. لذا $|f(z)|$ حداکثر مقدار خود را روی مرز دایره $|z|=1$ پیدا می‌کند از آنجا که:

$$|f(z)|=\left|z^2e^{iz}\right|=\left|z^2\right|\left|e^{iz}\right|=|z|^2\left|e^{i(x+iy)}\right|=|z|^2\left|e^{ix}\right|\left|e^{-y}\right|$$

$$=|z|^2|\cos x+i\sin x|e^{-y}$$

در ضمن می دانیم:

$$|\cos x+i\sin x|=1$$

و روی مرز $|z|=1$ بیشترین مقدار e^{-y} برابر e^1 است لذا max مقدار $|f(z)|$ برابر $(1)^2(1)e^1=e$ خواهد شد.

۲۵. هرگاه c نیمدایره فوقانی از دایره $|z|=1$ باشد یک کران بالا برای $\left|\int_c \frac{e^z}{z}dz\right|$ کدام است؟

۱) πe ۲) $\frac{\pi e}{2}$ ۳) $2\pi e$ ۴) $\frac{\pi e}{4}$

حل: گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم هرگاه L طول مسیر c و M یک عدد حقیقی باشد که در هر نقطه c داشته باشیم $|f(z)|<M$ آنگاه:

$$\left|\int_c f(z)dz\right|\le ML$$

حال در این مساله از آنجاکه روی $|z|=1$ هستیم می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{e^z}{z}\right|=\frac{\left|e^{x+iy}\right|}{|z|}=\frac{\left|e^x\right|\left|e^{iy}\right|}{|z|}=\left|e^x\right|<e$$

دقت داریم $\left|e^{iy}\right|=|\cos y+i\sin y|=1$ همواره برقرار است و روی $|z|=1$ حداکثر مقدار x برابر 1 است لذا روی این مرز $e^x<e$ می‌باشد.

حال از آنجاکه طول مسیر c یعنی نیمدایره فوقانی از $|z|=1$ برابر π است می‌توان گفت:

$$\left|\int_c \frac{e^z}{z}dz\right|<\pi e$$

۲۶. ماکزیمم و مینیمم تابع $|iz-2|$ در ناحیه $|z|\le 2$ کدامند؟

۱) $0,4$ ۲) $1,4$ ۳) $0,\sqrt{12}$ ۴) $1,\sqrt{12}$

حل: گزینه ۱ درست است.

تابع $iz-2$ همواره تحلیلی و طبیعتاً در ناحیه $|z|\le 2$ نیز تحلیلی است و طبق قضیه اصل ماکزیمم مقادیر حداقل و حداکثر $|iz-2|$ در ناحیه $|z|\le 2$ روی مرز ناحیه یعنی $|z|=2$ رخ می‌دهد.

$$|iz-2|=|i(x+iy)-2|=|(-y-2)+ix|=\sqrt{(-y-2)^2+x^2}=\sqrt{y^2+4y+4+x^2}$$

روی مرزی $|z|=2$ داریم $x^2+y^2=4$ و لذا در اینجا $|iz-2|=\sqrt{8+4y}$ بوده و چون روی $|z|=2$ داریم $-2\le y\le +2$ پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases}\text{Max}|iz-2|=4\\ \text{Min}|iz-2|=0\end{cases} \text{ در ناحیه } |z|\le 2$$

۲۷. تابع $f(z)=a\sin^2 z+\cosh bz$ مفروض است اگر $f(z)$ درکل صفحه مختلط کراندار باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $2+2i$ ۲) $2-2i$ ۳) $1-i$ ۴) $1+i$

حل: گزینه ۲ درست است.

تابع $f(z)=a\sin^2 z+\cosh bz$ همه جا تحلیلی است و اگر بخواهد در کل مجموعه اعداد مختلط کراندار نیز باشد طبق قضیه لیوویل باید $f(z)$ تابعی ثابت باشد یعنی:

$$f'(z)=0 \;\to\; a\sin 2z+b\sinh bz=0 \;\to\; a\sin 2z-ib\sin ibz=0 \;\to$$

$$a\sin 2z=ib\sin ibz \;\to\; \begin{cases}a=ib\\ 2z=i\,bz\end{cases} \;\Rightarrow\; a=2 \text{ و } b=-2i$$

۲۸. تعداد ریشه‌های معادله $z^5+3z^2+1=0$ که در داخل دایره واحد قرار دارد، برابراست با :

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) صفر

حل: گزینه ۲ درست است.

بدیهی است توابع $f(z)=3z^2$ و $g(z)=z^5+1$ تام بوده و لذا در داخل دایره واحد نیز تحلیلی هستند.

اما طبق نامساوی مثلث می‌دانیم $|z_0+z_1|\le|z_0|+|z_1|$ پس:

$$|g(z)|=|z^5+1|\le|z^5|+1$$

بنابراین روی مرز $|z|=1$ (دایره واحد)، خواهیم داشت:

$$|g(z)|\le 1+1=2$$

از طرفی روی مرز $|z|=1$ داریم:

$$|f(z)|=|3z^2|=3|z^2|=3$$

لذا در روی دایره واحد موردنظر همواره $|f(z)|>|g(z)|$ بوده و از آنجا که تابع $f(z)$ در داخل دایره واحد دارای صفر مرتبه دوم می‌باشد ($z=0$ صفر مرتبه دوم تابع مزبور است)، لذا طبق قضیه روشه تابع $f(z)+g(z)=z^5+3z^2+1$ نیز در ناحیه $|z|<1$ دارای دو صفر خواهد بود.

دقت کنید معادله $z^5+3z^2+1=0$ در کل دارای پنج ریشه می‌باشد و این مساله بیان می‌کند که دو ریشه آن در داخل ناحیه $|z|\le 1$ واقع می‌باشند.

۲۹. اگر g,f توابعی تام باشند و g همواره مخالف صفر باشد و همچنین $\forall z: |f(z)|\le|g(z)|$ ، آن‌گاه: (ریاضی ۸۵)

۱) $g(z)\equiv 0$ ۲) $\exists k: f(z)=kg(z)$ ۳) $f(z)\equiv 0$ ۴) $f(z)\equiv g(z)$

حل: گزینه ۲ درست است.

از آن‌جا که برای هر $z\in\mathbb{C}$، $g(z)\neq 0$ می‌توان تعریف کرد $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$. در این صورت h تام است زیرا g,f تام هستند و چون $|f(z)|<|g(z)|$ داریم $|h(z)|<1$ بنابراین h تابع تام و کراندار است، در نتیجه بنا به قضیه لیوویل h یک تابع ثابت است.

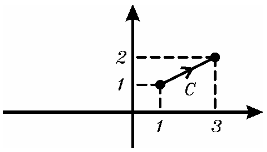
لذا داریم:

$$\exists k\in\mathbb{C}\quad h(z)=k\quad\Rightarrow\quad f(z)=kg(z)$$

۳۰. اگر C مسیر خطی واصل از $1+i$ تا $3+2i$ بوده و $I=\int_C \mathrm{Re}(z^{10})dz$ آنگاه «طبق اصل کران قدر مطلق انتگرال‌های مختلط» بدست می‌آوریم:

۱) $|I|\leq\sqrt{10}\times 13^5$ ۲) $|I|\geq\sqrt{10}\times 13^5$ ۳) $|I|\leq\sqrt{5}\times 13^5$ ۴) $|I|\geq\sqrt{5}\times 13^5$

حل: گزینه ۳ درست است.



هرگاه L طول مسیر C بوده و در هر نقطه از منحنی C بدانیم $|f(z)|\leq M$ آنگاه می‌توان گفت:

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leq ML$$

در این مسأله داریم:

$$f(z)=\mathrm{Re}(z^{10})=\mathrm{Re}(r^{10}e^{10i\theta})=r^{10}\cos 10\theta$$

روی مسیر C حداکثر مقدار r مربوط به نقطه $3+2i$ است که $\sqrt{13}$ می‌باشد و البته بدیهی است:

$$|\cos 10\theta|\leq 1$$

طول مسیر : $L=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

پس می‌توان گفت:

$$\left|\int_C \mathrm{Re}(z^{10})dz\right|\leq\left(\left(\sqrt{13}\right)^{10}\times 1\right)\left(\sqrt{5}\right)\ \rightarrow\ |I|\leq 5\times 13^5$$

۳۱. حاصل $\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) 0

حل: گزینه ۲ درست است.

طبق قضیه میانگین گوس می‌دانیم:

اگر $f(z)$ در روی و داخل دایره $|z-z_0|=R$ تحلیلی باشد داریم:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)d\theta$$

لذا در این مسأله با فرض:

$$f(z)=\sin^2 z \quad \text{و} \quad z_0=\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad R=2$$

بدیهی است $f(z)$ در روی و داخل دایره $\left|z-\frac{\pi}{6}\right|=2$ همواره تحلیلی بوده و می‌توان نوشت:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta=2\pi\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$$

۳۲. تابع $|z^2+4|$ در ناحیه $|z|\le 1$ مینیمم خود را در کدام نقاط می‌گیرد؟ **(ریاضی ۸۸)**

۱) در مبدأ ۲) درون دایرهٔ واحد ۳) روی دایرهٔ واحد ۴) خارج دایرهٔ واحد

حل: گزینه ۳ درست است.

قضیهٔ اصل ماکسیمم بیان می‌کند:

هرگاه f در داخل ناحیه‌ای تحلیلی و غیر ثابت باشد آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکسیمم خود را روی مرز ناحیه اختیار می‌کند.

همچنین اگر f در هیچ نقطه‌ای از این ناحیه صفر نشود، مینیمم مقدار $|f(z)|$ نیز روی مرز این ناحیه رخ خواهد داد.

از آن جا که تابع $f(z)=z^2+4$ در کل ناحیه $|z|\le 1$ تحلیلی و غیر ثابت است و همچنین ریشه‌های $f(z)=0$ نقاط $z=\pm 2i$ هستند که در خارج $|z|\le 1$ قرار دارند، لذا مینیمم مقدار $|f(z)|$ یعنی $|z^2+4|$ روی مرز ناحیه یعنی روی $|z|=1$ (روی دایره یکه) رخ خواهد داد. و گزینه سوم صحیح می‌باشد.

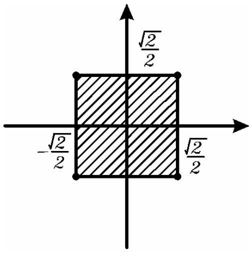
۳۳. ناحیهٔ بسته شامل درون و روی اضلاع چهار ضلعی با رئوس جواب‌های معادلهٔ $z^4+1=0$ را D می‌نامیم، مقدار ماکزیمم تابع $|\sin z|^2$ روی ناحیه D کدام است؟ **(مکانیک ۸۸)**

۱) $\cosh^2\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}+\sinh^2\frac{1}{2}$ ۳) $\cosh^2\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}+\sinh^2\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$z^4+1=0 \rightarrow$$

$$z=(-1)^{\frac{1}{4}}=\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{4}}=e^{i\frac{2k\pi+\pi}{4}}=\begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ e^{3i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ e^{5i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\ e^{7i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{cases}$$



$$|\sin z|^2=|\sin(x+iy)|^2=|\sin x\cos iy+\cos x\sin iy|^2=|\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y|^2$$
$$=\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y=\sin^2 x\left(\sinh^2 y+1\right)+\cos^2 x\sinh^2 y=\sinh^2 y+\sin^2 x$$

از آن جا که تابع $\sin z$ همه جا تحلیلی است طبق قضیه اصل ماکزیمم، مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ روی ناحیهٔ D روی مرزهای این ناحیه رخ خواهد داد.

و با توجه به آن که برای $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ حداکثر مقدار $\sin^2 x$ برابر $\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}$ است و برای $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ حداکثر مقدار $\sinh^2 y$ برابر $\sinh^2\frac{\sqrt{2}}{2}$ است لذا داریم:

$$\max|\sin z|^2=\sinh^2\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۴.کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) قضیه بولتزانو در توابع مختلط نیز صادق است.

۲) قضیه رول در توابع مختلط نیز صادق است.

۳) اگر u و v توابعی همساز باشند الزاماً $f(z)=u+iv$ تحلیلی است.

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۴ درست است.

گزینه اول نادرست است زیرا با فرض $f(z)=e^z$ مشاهده می‌شود:

$$f(0)=e^0=1 \quad , \quad f(i\pi)=e^{i\pi}=-1$$

حال اگرچه $f(0)f(i\pi)<0$ ولی اصولاً zای قابل یافتن نیست به‌طوری‌که $f(z)=0$

گزینه دوم نادرست است زیرا با فرض $f(z)=e^{iz}-1$ مشاهده می‌شود اگرچه $f(z)$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(2\pi)=0$

ولی اصولاً zای وجود ندارد که $f'(z)=0$ (زیرا $f'(z)=ie^{iz}$ هرگز صفر نمی‌شود.)

گزینه سوم نادرست است زیرا با فرض $u=v=x$ اگرچه هر دو تابع u و v همسازند اما تابع $f(z)=u+iv$ یعنی $f(z)=x+ix$ تحلیلی نیست زیرا معادله کوشی ریمان یعنی $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$ را هیچ‌گاه ارضاء نمی‌کند.

خودآزمایی

۱. اگر $f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ تحلیلی باشد و مشتقات جزئی u و v تا هر مرتبه‌ای پیوسته بوده و u تابعی همساز باشد داریم:

۱) $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0$

۲) $\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0\end{cases}$ ✓

۴) $\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0\end{cases}$

۲. ماکزیمم $\left|z^2-z\right|$ بر قرص $|z|\le 1$ برابر است با: (ریاضی ۸۵)

۱) 0 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ✓ ۴) $\sqrt{2}+1$

۳. یک دسته از جواب‌های معادله $\csc 2z=i$ را بیابید.

۱) $1-\sqrt{2}\to\begin{cases}r=\sqrt{2}-1\\ \theta=\pi\end{cases}$ و $1+\sqrt{2}\to\begin{cases}r=1+\sqrt{2}\\ \theta=0\end{cases}$

۲) $z=-\frac{i}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+k\pi+\frac{\pi}{2}$

۳) هردو ✓

۴) هیچ‌کدام

۴. اگر $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1$ باشد حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 4 ۳) $\frac{1}{4}$ ✓ ۴) -1

۵.اگر $u=e^{-2x}\left(x\cos 2y+y\sin 2y\right)$ **مزدوج همساز** u **کدام است؟**

۱) $-e^{-2x}\left(y\cos 2y+x\sin 2y\right)$
۲) $e^{-2x}\left(y\cos 2y+x\sin 2y\right)$
۳) $e^{-2x}\left(y\cos 2y-x\sin 2y\right)$ ✓
۴) $-e^{-2x}\left(y\cos 2y-x\sin 2y\right)$

۶.مزدوج همساز تابع $u=x^4+ax^2y^2+by^4$ **کدام است؟**

۱) $4xy\left(x^2-y^2\right)$ ✓
۲) $4xy\left(y^2-x^2\right)$
۳) $4x^2y^2\left(x^2-y^2\right)$
۴) $4x^2y^2\left(y^2-x^2\right)$

۷.کدام تابع همساز است؟ **(هوافضا ۸۷)**

۱) $u=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$
۲) $u=x^3-3y^2x+\cosh y\cos x$ ✓
۳) $u=\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}$
۴) $u=\sqrt{x^2+y^2}+x$

۸.قسمت حقیقی مقدار اصلی $(1+i)^{2-i}$ **کدام است؟**

۱) $2e^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\ln\sqrt{2}\right)$
۲) $2e^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\ln\sqrt{2}\right)$
۳) $2e^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)$ ✓
۴) $2e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)$

۹.مزدوج همساز $u=r\left(\cos\theta\ln r-\theta\sin\theta\right)$ **کدام است؟**

۱) $r\left(\sin\theta\ln r+\theta\cos\theta\right)$ ✓
۲) $r\left(-\sin\theta\ln r+\theta\cos\theta\right)$
۳) $-r\left(\sin\theta\ln r-\theta\cos\theta\right)$
۴) $r\left(\sin\theta\ln r-\theta\cos\theta\right)$

۱۰. یک کران بالا برای $\left|\int_{|z|=1}\left(x^4+iy^4\right)dz\right|$ **کدام است؟**

۱) 2π ✓
۲) π
۳) $\frac{3\pi}{2}$
۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۱. اگر α,β **ریشه‌های معادله** $z^2-2z+4=0$ **باشد حاصل** $\alpha^5+\beta^5$ **کدام است؟**

۱) -2^5
۲) -2^6
۳) 2^5 ✓
۴) 2^6

۱۲. اگر $u=\sin(x-1)\sinh y$**، و** v **مزدوج همساز** u **باشد و** $v(1,0)=0$ **حاصل** $v(\pi+1,\ln 2)$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{5}{4}$
۳) $-\frac{9}{4}$ ✓
۴) $-\frac{13}{4}$

۱۳. حاصل $\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\left(z^2+3z\right)}{\operatorname{Im}(z)}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 3 ۴) موجود نمی‌باشد. ✓

۱۴. روی منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در نقطه $(r,\theta)=\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$ داریم $\frac{\partial\theta}{\partial r}=-\frac{1}{2}$ حاصل $\frac{\partial\bar{z}}{\partial|z|}$ با فرض $z=re^{i\theta}$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)$ ۲) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓

۳) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)$ ۴) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

۱۵. اگر $u(x,y)=3xy+x-2y$ و $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ باشد با فرض $v(0,0)=1$ حاصل $v(1,1)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4 ✓

۱۶. اگر تابع $f(z)=\left(x^2y-y^2\right)+iv(x,y)$ در همه نقاط مشتق‌پذیر باشد $f'(1+2i)$ کدام است؟

۱) $4+3i$

۲) $4-3i$

۳) به ضابطه v نیاز است.

۴) $f(z)$ نمی‌تواند همواره مشتق‌پذیر باشد و فرض مسأله نادرست است. ✓

۱۷. چند ریشه از ریشه‌های معادله $2z^5-3z^3+z+8$ در مجموعه $1<|z|<2$ قرار دارد؟ (ریاضی ۸۶)

۱) 1 ریشه ۲) 3 ریشه ۳) 4 ریشه ۴) 5 ریشه ✓

۱۸. $\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2-\bar{z}^2}{z^2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) موجود نمی‌باشد. ✓

۱۹. اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تحلیلی باشد حاصل $\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\alpha\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$ به ازاء چه مقداری از α صفر می‌شود؟

۱) 1 ✓ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{r^2}$ ۴) $\frac{-1}{r^2}$

۲۰. اگر $f(z)=\begin{cases} x^2y(x+iy) & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ در $z=0$

۱) معادلات کوشی ریمان برقرار و مشتق‌پذیر می‌باشد. ✓
۲) معادلات کوشی ریمان برقرار نمی‌باشد و مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۳) معادلات کوشی ریمان برقرار ولی مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۴) هیچ‌کدام

۲۱. اگر $f(z)=u+iv$ **تحلیلی و** u^2+v^2 **ثابت باشد می‌توان نتیجه گرفت:**

۱) $f=k$ ✓   ۲) $f=0$ ۳) $f=az+b$ ۴) غیرممکن

۲۲. تابع $f(z)=\frac{2\bar{z}+3}{z}$ **با شرط** $z\neq 0$ **و** x,y **مخالف صفر:**

۱) روی دایره‌یکه تحلیلی است.   ۲) روی دایره یکه مشتق‌پذیر است.
۳) هردو   ۴) هیچ‌کدام ✓

۲۳. اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)\ ,\ u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta-\frac{2}{r}\cos\theta$ **حاصل** $f'(z)$ **در** $z=i$ **کدام است؟**

۱) $-2+2i$ ✓   ۲) $2+2i$ ۳) $-2-2i$ ۴) $2-2i$

۲۴. رابطه $\operatorname{Im}\left(\frac{2z-1}{z-1}\right)\geq 0$ **بیانگر چه فاصله‌ای می‌باشد؟**

۱) نیم‌صفحه بالایی   ۲) نیم‌صفحه سمت راستی
۳) نیم‌صفحه سمت چپی   ۴) نیم‌صفحهٔ پایینی ✓

۲۵. اگر z **یک عدد مختلط باشد،** iz

۱) قرینه z نسبت به محور موهومی است.   ۲) قرینه z نسبت به محور حقیقی است.
۳) دوران z حول مبدأ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ است. ✓   ۴) دوران z حول مبدأ به اندازه π است.

۲۶. طول منحنی $0\leq t\leq\pi$ **و** $z(t)=5i+\sqrt{3}e^{it}$ **چقدر است؟** $\left(i=\sqrt{-1}\right)$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ۲) $2\sqrt{3}\pi$ ۳) $\sqrt{3}\pi$ ✓   ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$