p: A57

معادلات غیرخطی

صورت کلی معادلات خطی مرتبه n ، به شکل زیر است

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

که در آن a_i ها و g توابعی برحسب x هستند و هر معادله‌ای که به شکل بالا نباشه، غیرخطی است. مثل

$$y' - 3y^2 = 0$$

$$y'' + x(y')^2 = 1$$

$$y''' + \sin y = 0$$

معادلات غیرخطی در دو حالت خاص زیر قابل تبدیل به معادله مرتبه اول است.

الف - معادلات دیفرانسیل به شکل $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (معادله فاقد y است) را با تغییر متغیر $u = y^{(n-1)}$ ، در نتیجه $u' = y^{(n)}$ حل می‌کنیم.

ب - معادلات دیفرانسیل به شکل $F(y, y', y'') = 0$ (فاقد x است) را با تغییر متغیر زیر حل کنید

$$\boxed{u := y'} \Longrightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u \Longrightarrow \boxed{y'' = u\frac{du}{dy}}$$

Ex $\quad y'' + x(y')^2 = 0 \qquad y(\sqrt{2}) = 0 \ , \ y'(\sqrt{2}) = 1$

حل: معادله دیفرانسیل فوق به واسطه توان y' ، غیرخطی است و چون فاقد متغیر y است در قالب (الف) می‌گنجد. پس می‌نویسیم:

$$u := y' \ , \ u' = y'' \longrightarrow u' + xu^2 = 0$$

(ادامه در صفحه بعد)

P: A58

$$\frac{du}{dx} = -xu^2 \Longrightarrow \frac{du}{u^2} = -x\,dx$$ (معادله جدای پذیر)

$$\xrightarrow{\int} \frac{-1}{u} = \frac{-x^2}{2} + c \xrightarrow[u(\sqrt{2})=1]{y'(\sqrt{2})=1} \frac{-1}{1} = \frac{-2}{2} + c \Longrightarrow \boxed{c=0}$$

$$\Longrightarrow \frac{-1}{u} = -\frac{x^2}{2} \Longrightarrow u = \frac{2}{x^2} \xrightarrow{u=y'} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2} \Longrightarrow dy = \frac{2}{x^2}\,dx$$ (جدای پذیر)

$$\xrightarrow{\int} y = -\frac{2}{x} + c' \xrightarrow{y(\sqrt{2})=0} 0 = \frac{-2}{\sqrt{2}} + c' \Longrightarrow c' = \sqrt{2}$$

$$\boxed{y = \frac{-2}{x} + \sqrt{2}}$$ جواب آخر

GK $y'' - 3y^2 = 0$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

حل: معادله داده شده فاقد x است از این رو با توجه به نکته (ب) می نویسیم

$$u = y' \rightarrow y'' = u\frac{du}{dy} \longrightarrow u\frac{du}{dy} - 3y^2 = 0 \Longrightarrow u\,du = 3y^2\,dy$$ (جدای پذیر)

$$\xrightarrow{\int} \frac{u^2}{2} = y^3 + c \xrightarrow[y(0)=2]{u(0)=y'(0)=4} \frac{4^2}{2} = 8 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{u^2}{2} = y^3 \Longrightarrow u^2 = 2y^3 \Longrightarrow u = \pm\sqrt{2}\,y^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[y(0)=2>0]{u(0)=4>0}$$

$$u = \sqrt{2}\,y^{3/2} \xrightarrow{u=y'} y' = \sqrt{2}\,y^{3/2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\,y^{3/2}$$

P: A 59

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, y^{-\frac{3}{2}}\, dy = dx \xrightarrow[\int]{\text{جداسازی}} \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{y^{-1/2}}{-1/2} = x + c'$$

$$\Longrightarrow -\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}} = x + c' \xrightarrow{y(0)=2} -\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 + c' \Rightarrow c' = -1$$

و جواب آخر

$$y = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Ex $\quad x y''' + y'' = 1$

حل: دقت کنید که عبارت خطی است اما فاقد متغیر y می‌باشد یعنی نیاز به الف داریم

$$\xrightarrow{u = y'',\ u' = y'''} x u' + u = 1 \Longrightarrow u' + \frac{1}{x} u = 1/x \quad \text{(خطی مرتبه اول)}$$

$$\Longrightarrow u = \frac{\int \mu(x)\,\frac{1}{x}\,dx + c_1}{\mu(x)} \ ; \quad \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x|$$

$$\Longrightarrow u = \frac{\int x\,\frac{1}{x}\,dx + c_1}{x} = \frac{x + c_1}{x} = 1 + \frac{c_1}{x}.$$

$$\xRightarrow{u = y''} y'' = 1 + \frac{c_1}{x} \xrightarrow{\int} y' = x + c_1 \ln|x| + c_2$$

$$\xrightarrow{\int} y = \frac{x^2}{2} + c_1\left(x \ln|x| - x\right) + c_2 x + c_3$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c_1 x \ln|x| + (c_2 - c_1) x + c_3$$

$$\rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c_1 x \ln|x| + C x + c_3$$

p: A60

تست

Ex: اگر $y''+\sin y=0$ و $y(0)=\frac{\pi}{3}$ و $y'(0)=0$ در این صورت y' برابر است با:

1) $y'=\pm\sqrt{2\cos y-1}$

2) $y'=\pm\sqrt{2\cos y-\frac{1}{2}}$

3) $y'=\sqrt{4\cos y-2}$

4) $y'=\pm\sqrt{2\cos y-4}$

حل: معادله غیرخطی که فاقد x است از این رو بنابراین داریم

$$\xrightarrow[y''+\sin y=0]{u=y',\ y''=u\frac{du}{dy}} u\frac{du}{dy}+\sin y=0 \Rightarrow u\,du=-\sin y\,dy$$

$$\xrightarrow[\int]{\text{طرفین}} \frac{u^2}{2}=\cos y+c_1 \Rightarrow u^2=2\cos y+c$$

$$\Rightarrow u=\pm\sqrt{2\cos y+c} \xrightarrow[y(0)=\frac{\pi}{3}]{u(0)=y'(0)=0} 0=\pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{3}+c}$$

$$\Rightarrow 0=\pm\sqrt{2\times\frac{1}{2}+c} \Rightarrow 0=1+c \Rightarrow c=-1$$

$$\xrightarrow{u=y'} y'=\pm\sqrt{2\cos y-1}.$$ گزینه (۱)

P:6)

Ex6) جواب معادله $1+yy''+(y')^2=0$ چیست؟

1) $y=x^2-x-\frac{1}{2}c_1e^{-2x}+c_2$ 2) $(x+c_1)^2+y^2=c_2^2$

3) $x^2+y^2=1$ 4) $(y-c_1)^2=4c_2x$

حل: معادله فاقد x است درنتیجه داریم

$$1+\cancel{y}y''+(y')^2=0 \xrightarrow{y'=u\,,\ y''=u\frac{du}{dy}} 1+yu\frac{du}{dy}+u^2=0 \Rightarrow yu\,du+(1+u^2)dy=0$$

$$\frac{u}{1+u^2}du=-\frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{جداسازی}} \frac{1}{2}\int\frac{2u}{1+u^2}du=-\ln y+\ln c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln y+\ln c_1 \Rightarrow \ln(1+u^2)=-\ln y^2+\ln c_1^2$$

$$\Rightarrow \ln(1+u^2)=\ln\frac{c_1^2}{y^2} \Rightarrow 1+u^2=\frac{c_1^2}{y^2} \Rightarrow u^2=\frac{c_1^2}{y^2}-1$$

$$\Rightarrow u^2=\frac{c_1^2-y^2}{y^2} \xrightarrow[\text{گرفتن}]{\text{با جذر}} u=\cancel{\pm}\sqrt{\frac{c_1^2-y^2}{y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{c_1^2-y^2}}dy=dx \xrightarrow{\text{جداسازی شد}} -\frac{1}{2}\int\frac{-2y}{\sqrt{c_1^2-y^2}}dy=x+c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\times\frac{(c_1^2-y^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}}=x+c_2 \Rightarrow \sqrt{c_1^2-y^2}=-x-c_2$$

$$\Rightarrow (c_1^2-y^2)=(-c_2-x)^2 \Rightarrow (x+c_2)^2+y^2=c_1^2$$ (گزینه ۲ درست)

[redacted]

فصل هفت تبدیل لاپلاس (Laplace Transform)

تعریف: تبدیل لاپلاس تابع $f:[0,\infty)\to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

دقت کنید تبدیل لاپلاس تابع f، تابع جدیدی است بر حسب s. به همین ترتیب گوییم $f(t)$ تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ است و می‌نویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

مثال) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=c$ (c عدد ثابتی است) را بدست آورید

حل:
$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, c\,dt = c\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt$$

$$= c\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}\,dt = c\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^b\right)$$

$$= c\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{s}\left(e^{-sb}-e^{0}\right)\right) = \frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-sb}\right)$$

$$= \frac{c}{s}\left(1-\cancel{\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{sb}}}\to 0\right) = \frac{c}{s}$$

نتیجه: $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$. $\left(f(t)=1 \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\right)$

p: A63

قضیه: اگر $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ، $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$ ،

$c\in\mathbb{R}$ آنگاه

$$\mathcal{L}\{cf(t)+g(t)\}=c\mathcal{L}\{f(t)\}+\mathcal{L}\{g(t)\}$$
$$\stackrel{\text{ف}}{=} cF(s)+G(s).$$

همچنین

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF(s)+G(s)\}=c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$
$$\stackrel{\text{ف}}{=} cf(t)+g(t).$$

برای شروع چند فرمول مهم و کاربردی را بدون اثبات می‌آوریم، حتماً آنها را حفظ کنید

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

,

$f(t)$	$F(s)$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$

Ex: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید:

① $$\mathcal{L}\{3t-1+\sin 2t\}=3\mathcal{L}\{t\}-\mathcal{L}\{1\}+\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$
$$=3\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2+4}.$$

p: A64

(2) $\mathcal{L}\{4t^2-2\cos 3t+5e^{-2t}+\sin t+1\}$

$$=4\mathcal{L}\{t^2\}-2\mathcal{L}\{\cos 3t\}+5\mathcal{L}\{e^{-2t}\}+\mathcal{L}\{\sin t\}+\mathcal{L}\{1\}$$

$$=4\times\frac{2!}{s^3}-2\times\frac{s}{s^2+9}+5\frac{1}{s-(-2)}+\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s}$$

Ex) تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید

(1) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+2}+\frac{3}{s^2+5}+\frac{1}{s+5}\right\}$

$$=\frac{\mathcal{L}^{-1}}{2}\left\{\frac{1\times 2}{s^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right\}+\frac{3}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2t+\cos(\sqrt{2}t)+\frac{3}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)+e^{-5t}.$$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}}_{F(s)}\right\}=f(t)\longrightarrow f(t)=?$

حل: در مواردی که مخرج کسر ریشه داشته باشد (تجزیه شود) از روش تجزیه کسرها کسر F(s) را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}\Longrightarrow 3s+7=A(s+1)+B(s-3)$$

$$\longrightarrow 3s+7=As+A+Bs-3B$$

$$\Longrightarrow 3s+7=(A+B)s+A-3B\Longrightarrow\begin{cases}3=A+B\\7=A-3B\end{cases}\rightarrow A=4,\ B=-1$$

[redacted]

Scanned with CamScanner

p: A65

$$F(s) = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}.$$

(3) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^3+3s^2+2s}$

do: $$\frac{2s+1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$(s+1)(s+2)$

$$\rightarrow 2s+1 = A(s^2+3s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

$$\Rightarrow 2s+1 = \cancel{As^2} + 3As + 2A + \cancel{Bs^2} + 2Bs + \cancel{Cs^2} + Cs$$

$$\Rightarrow 2s+1 = (A+B+C)s^2 + (3A+2B+C)s + 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A+B+C \\ 2 = 3A+2B+C \\ 1 = 2A \longrightarrow A = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 2A+B \\ A = 1/2 \end{cases} \longrightarrow B = 1, \quad C = -3/2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}.$$

p: A66

۵۸) مقادیر a و b را طوری تعیین نمایید که تابع $\frac{as+b}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $2\sin 2t + 4\cos 2t$ باشد.

1) $a=-1,\ b=-2$

2) $a=b=1$

3) $a=b=3$

4) $a=b=4$

حل:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{s^2+4}\right\} = a\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{b}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$= a\cos 2t + \frac{b}{2}\sin 2t$$

$$= 2\sin 2t + 4\cos 2t$$

$$= 4\cos 2t + 2\sin 2t$$

$$\Longrightarrow a=4,\quad \frac{b}{2}=2 \rightarrow b=4$$

گزینه ۴ صحیح است.

تعمیم لم انتقال: فرض شود $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ باشد

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

یا

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

p: A67

~ فرمول مهم زیر را برای تعیین لاپلاس انتقال توصیه می‌کنند.

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

E) از توابع زیر تبدیل لاپلاس بگیرید.

① $f(t) = t^2 e^{3t}$

حل: $\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = \dfrac{2!}{(s-3)^3}$

② $g(t) = e^t \cos t + e^{-3t}\sin 2t + t^6 e^{-6t}$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\cos t\} + \mathcal{L}\{e^{-3t}\sin 2t\} + \mathcal{L}\{t^6 e^{-6t}\}$$

$$= \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{2}{(s+3)^2+4} + \frac{6!}{(s+6)^7}$$

G) از توابع زیر تبدیل لاپلاس معکوس بگیرید.

① $F(s) = \dfrac{4}{(s+3)^6}$

حل: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{(s+3)^6}\right\} = \dfrac{4}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1\times 5!}{(s+3)^6}\right\} = \dfrac{1}{30}t^5 e^{-3t}$

Scanned with CamScanner

(2) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - 2s + 26}$

حل: مخرج کسر فاقد ریشه است زیرا $\Delta = 4 - 4\times 26 < 0$ از این رو داریم

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2 + 25},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1+1}{(s-1)^2+25}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+25}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 5}{(s-1)^2+25}\right\}$$

$$= e^{t}\cos 5t + \frac{1}{5}e^{t}\sin 5t$$

---

(3) $F(s) = \dfrac{s^3}{s^4 - 5s^2 + 4}$

حل: دقت کنید که مخرج کسر دارای تجزیه است زیرا

$$s^4 - 5s^2 + 4 = (s^2 - 4)(s^2 - 1) = (s-2)(s+2)(s-1)(s+1)$$

از این رو از روش تجزیه کسرها، $F(s)$ را تجزیه می کنیم به کسرهای ساده

$$\frac{s^3}{s^4 - 5s^2 + 4} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$$

$$\Rightarrow s^3 = A(s^2-1)(s+2) + B(s-2)(s^2-1) + C(s^2-4)(s+1) + D(s^2-4)(s-1) \quad (*)$$

ps A69

اکنون A ، B ، C ، D را با مقدار دادن به s بدست می‌آوریم. ترجیحاً به s ریشه‌های مخرج را می‌دهیم:

$$\xrightarrow[*]{s=2} 8 = 12A \Longrightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow[*]{s=-2} -8 = -12B \Longrightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow[*]{s=1} 1 = -6C \Longrightarrow C = \frac{-1}{6}$$

$$\xrightarrow[*]{s=-1} -1 = 6D \Longrightarrow D = -\frac{1}{6}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t}.$$

لاپلاس مشتق‌ها

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\stackrel{L}{=} sF(s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\stackrel{L}{=} s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

P: A 70

(5A) $\mathcal{L}\{\cos^2 t\} = ?$

حل: نفرض لتكن $f(t) = \cos^2 t$ دالة

$$f'(t) = -2\cos t \sin t = -\sin 2t$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -\mathcal{L}\{\sin 2t\} = -\frac{2}{s^2+4}$$

$$\overset{\text{التحويل}}{=} sF(s) - f(0)$$

$$= sF(s) - 1$$

نعوض

$$sF(s) - 1 = -\frac{2}{s^2+4} \Longrightarrow$$

$$sF(s) = 1 - \frac{2}{s^2+4} \Longrightarrow$$

$$sF(s) = \frac{s^2+4-2}{s^2+4} \Longrightarrow$$

$$F(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

P: A71

صحیح

EX

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(te^{5t}\right)\right\} \overset{\text{لاپلاس مشتق}}{=} s\,\mathcal{L}\left\{te^{5t}\right\} - 0$$

$$\overset{\text{استفاده}}{=} s\,\frac{1}{(s-5)^2}$$

$$= \frac{s}{(s-5)^2}.$$

مشتق لاپلاس: فرض کنید $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ در این صورت

$$F'(s)=\mathcal{L}\{-t f(t)\} \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}=-t f(t)$$

یا

$$\left(\mathcal{L}\{f(t)\}\right)'=\mathcal{L}\{-t f(t)\}$$

در حالت کلی‌تر (مشتق n-ام لاپلاس)

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}=(-t)^n f(t)$$

مثلاً اگر $n=2$

$$F''(s)=\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F''(s)\}=t^2 f(t)$$

اگر $n=3$

$$F'''(s)=\mathcal{L}\{-t^3 f(t)\} \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F'''(s)\}=-t^3 f(t)$$

$\vdots$

p: A72

Ex) از توابع زیر تبدیل لاپلاس بگیرید

① $f(t) = t\cos t.$

$$\mathcal{L}\{t\cos t\} = \cancel{-\mathcal{L}\{-t\cos t\}} \overset{\text{مشتق لاپلاس}}{=} -\left(\mathcal{L}\{\cos t\}\right)'$$

$$= -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'$$

$$= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

---

② $f(t) = t^2 e^t.$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} \overset{\text{مشتق لاپلاس}}{=} \left(\mathcal{L}\{e^t\}\right)'' = \left(\frac{1}{s-1}\right)''$$ روش اول

$$= \left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right)' = \frac{2(s-1)}{(s-1)^4} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

روش دوم از ~~قضیه~~ انتقال اول می دانیم

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2!}{(s-1)^3} = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

ps A73

EX $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = ?$

حل: فرض کنید $F'(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ در این صورت

$$F(s) = \frac{1}{2}\int \frac{2s}{(s^2+1)^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(s^2+1)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$= \frac{-1}{2(s^2+1)} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{-1}{2}\sin t$$

از فرمول مشتق لاپلاس می دانیم

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -t\,f(t)$$

$$= -t \times \frac{-1}{2}\sin t$$

$$= \frac{t}{2}\sin t.$$

EX $\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{Ln}\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)\right\} = f(t) = ?$

$$F(s) = \operatorname{Ln}(s+1) - \operatorname{Ln}(s-1) \rightarrow F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = e^{-t} - e^{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \overset{\text{مشتق لاپلاس}}{=} -t\,f(t) \Longrightarrow e^{-t} - e^{t} = -t\,f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{t}.$$

Scanned with CamScanner