بسمه تعالی

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم ریاضی عمومی ۲

شماره آزمون:

وقت: ۹۰ دقیقه

نام و نام‌خانوادگی:

شماره دانشجویی:

دانشکده:

رشته تحصیلی:

استاد درس:

سوال۱	سوال۲	سوال۳	سوال۴	جمع

توضیحات:

الف) به هیچ وجه برگه‌ها از محل دوخت جداً نشود.

ب) از نوشتن هرگونه مطلب اضافی بر روی پاسخ نامه جداً خودداری نمایید.

ج) پاسخ هر سوال بر روی برگه مربوط به همان سوال داده شود. در غیر این صورت از تصحیح برگه خودداری می‌شود.

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۱. نشان دهید منحنی $\mathbf{r}(t) = \langle ۳t^۲ - ۹t, ۳t - ۳t^۲, ۲t^۲ - ۳t + ۵\rangle$ مسطح است (یعنی در یک صفحه قرار دارد)، سپس معادلهٔ این صفحه (یعنی صفحه بوسان) را بیابید. (۱۵ نمره)

حل.

$r'(t) = (6t-9, 3-6t, 4t-3)$

$r''(t) = (6, -6, 4)$

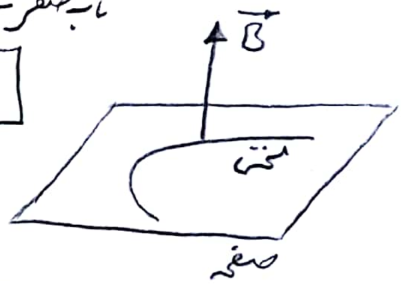
$r'''(t) = (0, 0, 0)$

$$\rightarrow r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & J & k \\ 6t-9 & 3-6t & 4t-3 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{(-6, 18, 36)}$$

تاب صفر ← مسطح

تاب: $\tau = \dfrac{(r' \times r'') \cdot r'''}{|r' \times r''|^2} = \dfrac{(-6, 18, 36) \cdot (0, 0, 0)}{|r' \times r''|^2} = \boxed{0}$

$\vec{B} = \dfrac{(r' \times r'')}{|r' \times r''|}$



چون منحنی روی صفحه قرار دارد هر نقطه آن هم روی صفحه قرار دارد؛ یعنی حتی اگر کسی فرض $t=0$ را هم جایگذاری می‌کرد باز هم به جواب می‌رسید.

$t = 0 \rightarrow \vec{r}(0) = (0, 0, 5)$

$r'(0) = (-9, 3, -3)$

$r''(0) = (6, -6, 4)$

$$\rightarrow r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & J & K \\ -9 & 3 & -3 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-6, 18, 36)$$

با ازای $t=0$ هم باز هم جواب شد.

$\xrightarrow{\text{معادله صفحه}} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$\rightarrow -6(x - 0) + 18(y - 0) + 36(z - 5) = 0$

$\rightarrow \boxed{-x + 3y + 6z = 30}$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۲. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

اولاً ضابطهٔ $f_y(x,y)$ را به دست آورید و پیوستگی f_y را در $(۰,۰)$ بررسی کنید، ثانیاً $f_{yx}(۰,۰)$ را تعیین نمایید. (۱۵ نمره)

حل.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(-2xy)(x^2+y^2)-2y(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \overset{\text{ساده سازی}}{=} \frac{-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\boxed{0}$$

$$\to f_y(x,y)=\begin{cases} \frac{-2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-2yx^3}{(x^2+y^2)} = \frac{0}{0}\ \text{مبهم} \xrightarrow{y=mx} \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{-2mx^4}{(x^2+m^2x^2)^2}=\frac{-2m}{(1+m^2)^2} \to$$

حد ندارد ← ناپیوسته

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^4}-0}{h}=\boxed{0}$$

بهمن ۹۸
اردی
ابراهیم شاه ابراهیمی

مسئله ۳. مشتق سویی (جهتی) تابع $f(x,y,z) = \sin(xyz) + \ln(xz)$ را در امتداد بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویهٔ

$$\begin{cases} x^{2} + \sin y + z^{2} = 2 \\ 2x^{3} - \cos y + z^{3} = 4 \end{cases}$$

در نقطهٔ $(1, \pi, 1)$ به دست آورید. (۱۵ نمره)

حل.

$$\vec{\nabla}_f = \left(yz\cos(xyz) + \frac{1}{x} \,,\, xz\cos(xyz) \,,\, xy\cos(xyz) + \frac{1}{z}\right)$$

$$\xrightarrow{(1,\pi,1)} \vec{\nabla}_f = (\pi\cos(\pi)+1 \,,\, \cos(\pi) \,,\, \pi\cos(\pi)+1) = \boxed{(1-\pi \,,\, -1 \,,\, 1-\pi)}$$

برای یافتن امتداد C، کافیست بردار گرادیان هرکدام از رویه‌ها را بیابیم و سپس به کمک ضرب خارجی بردار عمود بر هرکدام از آنها که می‌شود همان بردار موازی خم C را بیابیم که این بردارها جهت مطلوب است.

$$S_1 : x^2 + \sin y + z^2 - 2 \rightarrow \vec{\nabla}_{S_1} = (2x \,,\, \cos y \,,\, 2z) \xrightarrow{(1,\pi,1)} (2 \,,\, -1 \,,\, 2)$$

$$S_2 : 2x^3 - \cos y + z^3 - 4 \rightarrow \vec{\nabla}_{S_2} = (6x^2 \,,\, \sin y \,,\, 3z^2) \xrightarrow{(1,\pi,1)} (6 \,,\, 0 \,,\, 3)$$

$$\vec{u}_c = \vec{\nabla}_{S_1} \times \vec{\nabla}_{S_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{(-3, 6, 6)} \rightarrow \boxed{\vec{\lambda}_u = \frac{(-3, 6, 6)}{9}}$$

$$D_u f = \vec{\nabla}_f \cdot \vec{\lambda}_u$$

$$= (1-\pi, -1, 1-\pi) \cdot \left(\frac{-3}{9}, \frac{6}{9}, \frac{6}{9}\right) = \boxed{\frac{-1}{3}(1+\pi)}$$

ابراهیم صاحب ابراهیمی _ اردیبهشت ۹۸

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۴. فرض کنید $w = f(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z})$. حاصل

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z}$$

را به دست آورید. (۱۵ نمره)

حل.

$$w = f(\underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}_{\alpha}, \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}}_{\beta})$$

$$w \begin{cases} \alpha \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \beta \begin{cases} x \\ z \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial \alpha}\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial \beta}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial \beta}(0)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial \alpha}(0) + \frac{\partial w}{\partial \beta}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} x^2\left(-\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\right)\right) + y^2\left(\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + z^2\left(\frac{1}{z^2}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta} = \boxed{0}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸