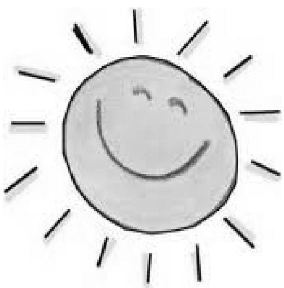
ریاضیات عمومی ۱

میان‌ترم اول، ۱۳۸۹/۷/۲۹، زمان: ۹۰ دقیقه

۱) معادلهٔ مختلط $z^6 = \frac{1+i}{1-i}$ را حل کنید و تعیین کنید ریشه‌های این معادله در صفحهٔ اعداد مختلط رؤوس چه شکلی هستند.



۲) سرعت نور نزدیک به ۳۰۰٬۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه است (در واقع کمی کم‌تر) و نور خورشید در مدت زمانی بین بین ۸ تا ۹ دقیقه به زمین می‌رسد. نشان دهید اگر بتوانیم سرعت نور را با دقت ۱۰ کیلومتر بر ثانیه و زمان رسیدن نور از خورشید به زمین را با دقت ۱۰ میلی‌ثانیه (میلی‌ثانیه = یک هزارم ثانیه) اندازه بگیریم، خواهیم توانست فاصلهٔ زمین از خورشید را با دقتی بهتر از ۱۰٬۰۰۰ کیلومتر محاسبه کنیم.

۳) الف) دو عدد گنگ بین صفر و یک مثال بزنید که رقم اول بعد از ممیز در بسط اعشاری آن‌ها متفاوت باشد ولی فاصله‌شان از 10^{-1000} کم‌تر باشد.

ب) فرض کنید α عددی گنگ باشد. نشان دهید اگر $x_1, x_2, x_3 \cdots$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی همگرا به α باشد، عدد طبیعی n وجود دارد که هزار رقم اول در بسط اعشاری همهٔ اعداد $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ با هم برابراند.

سوالات نمرهٔ برابر دارند.
لطفاً شمارهٔ صندلی خود را به خاطر بسپارید چون برای تقاضای تجدید نظر ضروری است.

سئوال 1

به طور کلی در کتاب خوانده ایم که ریشه های معادله به صورت $z^6 = \alpha \neq 0$ رئوس یک 6 ضلعی منتظم هستند. در اینجا:

$$z^6 = \frac{1+i}{1-i} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

پس ریشه ها عبارتند از:

$$z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$z = \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12})$$

$$z = \cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{12})$$

$$z = \cos(\pi+\frac{\pi}{12}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{12})$$

$$z = \cos(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{12})$$

$$z = \cos(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{12})$$

یا به طور کلی:

$$\cos(j\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}) + i\sin(j\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12})$$

سئوال 2

حروف C_0, T_0, D_0 را به ترتیب از چپ به راست برای سرعت دقیق نور($\frac{\text{کیلومتر}}{\text{ثانیه}}$)، زمان لازم برای رسیدن نور از خورشید به زمین (ثانیه) و فاصله خورشید از زمین (کیلومتر) به کار می گیریم و C, T, D را برای مقادیر تقریبی آنها. داریم $D_0 = T_0C_0$ و $D = TC$ ، پس:

$$|D-D_0| = |CT - C_0D_0| = |CT - C_0T + C_0T - C_0T_0| \leq |C-C_0|T + |C_0||T-T_0|$$
$$\leq (9\times 60)|C-C_0| + (3\times 10^5)|T-T_0|$$

فرض کرده ایم $|T-T_0| \leq 10^{-2}$ و $|C-C_0| \leq 10$ ، پس:

$$|D-D_0| \leq 5400 + 3000 = 8400 \leq 10000$$

سئوال 3

(الف) دو عدد زیر را در نظر بگیرید:

$$A = 0/100\cdots 001001000100001 \rightarrow$$
$$B = 0/099\cdots 901001000100001 \rightarrow$$

(تعداد 0ها و 9های پیش از $\rightarrow$ 01001000100001 ، 1000 رقم است.)

در اینجا پس از رقم 1001 در هر دو، دنباله غیرتناوبی و غیرمختوم $\rightarrow 01001000100001$ می آید، پس هر دو عدد گنگ هستند. از طرفی دیگر:

$$A-B=0/000\cdots01000\rightarrow=10^{-1001}\prec10^{-1000}$$

(ب) ابتدا فرض کنید $\alpha\succ0$. عدد گنگ α نقطه درونی بازه ای به شکل $[k,k+1]$ است که در آن $k\geq0$ عددی صحیح است. بازه $[k,k+1]$ را به 10^{1000} بازه برابر تقسیم می کنیم. نقاط تقسیم به شکل $k+m\cdot10^{-1000}$ هستند که در آن $m=0,1,\cdots,10^{1000}$. چون α گنگ است، α خود یکی از نقاط تقسیم نیست، پس در داخل یکی از این زیر بازه ها قرار دارد. به این ترتیب عددی m ، $0\leq m\leq10^{1000}$ وجود دارد که:

$$\alpha\in]k+m\cdot10^{-1000},k+(m+1)\cdot10^{-1000}[$$

همه اعدادی که در داخل این بازه قرار دارند 1000 رقم اولشان پس از اعشار برابر است. حال اگر کوتاهترین فاصله α از دو انتهای بازه را به ε نمایش دهیم ($\varepsilon\succ0$ چون α نقطه انتهایی بازه نیست.)، طبق تعریف همگرایی N وجود دارد که $|\alpha-x_n|\prec\varepsilon$ برای $n=N,N+1,N+2,\cdots$. بنابراین نقطه های x_n ، $n\geq N$ ، همه در داخل بازه فوق قرار می گیرند و طبق آنچه گفته شد هزار رقم اول پس از اعشار آنها یکی است.

اکنون فرض کنید $\alpha\prec0$ و دنباله x_n به α میل می کند. در این صورت دنباله $(-x_n)$ به $(-\alpha)$ میل می کند. طبق آنچه در بالا ثابت شد n وجود دارد که هزار رقم اول پس از اعشار اعداد $-x_n,-x_{n+1},\cdots$ همه با هم برابرند. نتیجه این که با تعویض علامت (-) به (+)، هزار رقم اول پس از اعشار اعداد $-x_n,-x_{n+1},\cdots$ نیز با هم برابرند.