

انتگرال معین

حل انتگرال معین دارای قید

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

اگر برای $a > 0$ همواره رابطه $f(a-x)f(a+x) = 1$ برقرار باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{1+f(x)}$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: دو بار باید از تغییر متغیر استفاده شود. ابتدا فرض شود:

$$a-x=u, \quad \Rightarrow \quad du=-dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2a} \frac{dx}{1+f(x)} \\ &= \int_a^{-a} \frac{-du}{1+f(a-u)} \\ &= \int_{-a}^a \frac{du}{1+f(a-u)} \end{aligned}$$

در رابطه فوق می‌توان بار دیگر از تغییر متغیر $u=x$ استفاده کرد. در نتیجه رابطه زیر برای انتگرال بدست می‌آید:

$$I = \int_{-a}^a \frac{dx}{1+f(a-x)} \quad (۱)$$

صورت و مخرج عبارت داخل انتگرال (۱) در $f(a+x)$ ضرب می‌شود:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \frac{dx}{1+f(a-x)} \\ &= \int_{-a}^a \frac{f(a+x)}{f(a+x)} \frac{dx}{1+f(a-x)} \\ &= \int_{-a}^a \frac{f(a+x)}{f(a+x) + f(a-x)f(a+x)} dx \\ &= \int_{-a}^a \frac{f(a+x)}{f(a+x) + 1} dx \end{aligned}$$

در نهایت رابطه زیر بدست آمد:

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(a+x)}{f(a+x) + 1} dx \quad (۲)$$

به تابع اصلی مورد انتگرال بازمی گردیم.

$$I = \int_0^{2a} \frac{dx}{1 + f(x)}$$

اگر از تغییر متغیر $x = w + a$ استفاده شود، انتگرال فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$I = \int_{-a}^a \frac{dw}{1 + f(w + a)}$$

تغییر متغیر $x = w$ لحاظ می شود:

$$I = \int_{-a}^a \frac{dx}{1 + f(x + a)} \quad (۳)$$

جمع دو رابطه (۲) و (۳) منجر به عبارت زیر می شود:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-a}^a \frac{f(a+x)}{f(a+x)+1} dx + \int_{-a}^a \frac{dx}{1+f(x+a)} \\ &= \int_{-a}^a \frac{1+f(a+x)}{f(a+x)+1} dx \\ &= \int_{-a}^a dx \\ &= 2a \end{aligned}$$

در نتیجه پاسخ نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$I = a$$

زندگی مانند راندن یک دوچرخه است.
برای حفظ تعادل باید به حرکت ادامه
دهید.

آلبرت انیشتین



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com