

دستگاه معادلات خطی

مرتبه اول

در بسیاری از مسئله‌های فیزیکی چند عنصر مختلف به نحوی به یکدیگر مرتبط شده‌اند. به عنوان مثال، شبکه‌های الکتریکی و بسیاری از مسئله‌های مکانیک و زمینه‌های دیگر، چنین خصوصیتی دارند. در این موارد و موارد مشابه، مسئله ریاضی متناظر شامل دستگاهی از دو یا چند معادله دیفرانسیل است که همواره می‌توان آنها را به صورت معادله‌های مرتبه اول نوشت. در این فصل دستگاه معادلات خطی مرتبه اول را بررسی می‌کنیم و به ویژه به معادله‌های با ضرایب ثابت می‌پردازیم، و از جبر خطی مقدماتی برای ارائه منسجم موضوع استفاده می‌کنیم. از جهات بسیاری، در این فصل هم همان روندی را که در فصل ۳ برای بررسی معادلات خطی مرتبه دوم دیدیم پی می‌گیریم.

۱.۷ مقدمه

مسئله‌هایی که شامل چند متغیر وابسته‌اند که همه تابع یک متغیر مستقل هستند، به طور طبیعی به دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی منجر می‌شوند. متغیر مستقل را با t و متغیرهای وابسته را با $x_1, x_2, x_3, \dots$ به عنوان تابع t نشان می‌دهیم. مشتق‌گیری نسبت به t را با پریم نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، دستگاه فنر-وزنه شکل ۱.۱.۷ را در نظر بگیرید. دو وزنه تحت تأثیر نیروهای خارجی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در سطحی بدون اصطکاک حرکت می‌کنند، حرکت آنها به ترتیب با سه فنر با ثابتهای k_1, k_2, k_3 محدود شده است. با بحثی مشابه آنچه در بخش ۷.۳ دیدیم، مختصات x_1 و x_2 وزنه‌ها در معادله‌های

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

صدق می‌کنند. مراحل به دست آوردن معادله (۱) را در مسئله ۱۷ آورده‌ایم.

پس x_1 و x_2 در دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - 0.125x_2 \end{aligned} \quad (۴)$$

صدق می‌کند.

معادله عمومی حرکت دستگاه فنر-وزنه، یعنی

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t) \quad (۵)$$

را هم به روشی مشابه می‌توانیم به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنیم. اگر مانند مثال ۱ فرض کنیم $x_1 = u$ و $x_2 = u'$ ، به دستگاه

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\left(\frac{k}{m}\right)x_1 - \left(\frac{\gamma}{m}\right)x_2 + \frac{F(t)}{m} \end{aligned} \quad (۶)$$

می‌رسیم.

برای تبدیل معادله مرتبه n امی مانند

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (۷)$$

به دستگاه معادلات مرتبه اول، روش مثال ۱ را با تعریف متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ که با

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)} \quad (۸)$$

تعریف شده‌اند تعمیم می‌دهیم. بلافاصله نتیجه می‌شود که

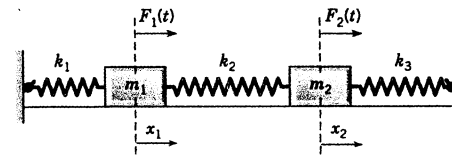
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \end{aligned} \quad (۹)$$

و از معادله (۷)،

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (۱۰)$$

معادله‌های (۹) و (۱۰) حالت خاصی از دستگاه کلی‌تر

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

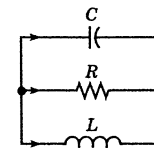


شکل ۱.۱.۷. دستگاه فنر-وزنه با دو درجه آزادی.

اکنون مدار موازی LRC را، که در شکل ۲.۱.۷ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید V افت ولتاژ روی خازن و I جریان گذرا از القاگر باشد؛ در این صورت با مراجعه به بخش ۷.۳ و مسئله ۱۹ این بخش می‌توانیم نشان بدهیم که ولتاژ و جریان در دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC} \end{aligned} \quad (۲)$$

صدق می‌کنند که در آن L ضریب القا، C ظرفیت خازن و R مقاومت است.



شکل ۲.۱.۷. مدار LRC موازی.

یکی از دلایل اهمیت دستگاه معادلات خطی مرتبه اول این است که همواره می‌توانیم معادلات مرتبه بالاتر را به چنین دستگاهی تبدیل کنیم. اگر بخواهیم از روشهای عددی استفاده کنیم، معمولاً باید چنین کنیم؛ چون اکثر برنامه‌هایی که جوابهای عددی تقریبی معادله‌های دیفرانسیل را به دست می‌دهند، برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نوشته شده‌اند. در مثال زیر می‌بینید که این تبدیل چقدر ساده انجام می‌شود.

حرکت دستگاه فنر-وزنه خاصی (مثال ۳ بخش ۷.۳ را ببینید) با معادله مرتبه دوم

$$u'' + 0.125u' + u = 0 \quad (۳)$$

توصیف می‌شود: این معادله را به صورت دستگاه معادلات مرتبه اول بنویسید.

فرض کنید u و $x_1 = u'$ ؛ در نتیجه $x_2 = u$. علاوه بر این $x_1' = u'' = -0.125u' - u$. با قرار دادن این مقادیر به جای u' ، u'' در معادله (۳) نتیجه می‌شود

$$x_1' + 0.125x_2 + x_1 = 0;$$

هستند. به روشی مشابه، می‌توانیم دستگاه (۱) را به دستگاهی با چهار معادله مرتبه اول به صورت (۱۱) تبدیل کنیم، و دستگاه (۲) به همین صورت است. در واقع، تقریباً در همه موارد می‌توانیم مسئله را به شکل دستگاهی به صورت (۱۱) تبدیل کنیم، لذا در قسمت اعظم نظریه معادلات دیفرانسیل پیشرفته به چنین معادلاتی می‌پردازند.

هر جواب دستگاه (۱۱) در بازه $\alpha < t < \beta$ از مجموعه‌ای از n تابع

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \phi_n(t) \quad (12)$$

است که در همه نقاط بازه I مشتق‌پذیرند و در همه نقاط این بازه در دستگاه (۱۱) صدق می‌کنند. علاوه بر این، در دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، ممکن است شرایط اولیه‌ای به صورت

$$x_1(t_0) = x_1^*, \quad x_2(t_0) = x_2^*, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^* \quad (13)$$

مفروض باشند که t_0 مقدار مشخصی در بازه I است و $x_1^*, \dots, x_n^*$ از قبل تعیین شده‌اند. معادلات دیفرانسیل (۱۱) به همراه شرایط اولیه (۱۳) مسئله مقدار اولیه تشکیل می‌دهند.

جواب دستگاه (۱۲) را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از معادله‌های پارامتری در فضایی n بعدی در نظر گرفت. به ازای هر مقدار مفروض t ، معادله‌های (۱۲) مختصات $x_1, \dots, x_n$ نقطه‌ای در فضا را مشخص می‌کنند. در حالت کلی با تغییر t این مختصات تغییر می‌کنند. مجموعه نقاط متناظر $\alpha < t < \beta$ منحنی‌ای در فضا تشکیل می‌دهد، گاهی مفید است که این منحنی را مسیر ذره‌ای در نظر بگیریم که طبق دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۱) حرکت می‌کند. شرایط اولیه (۱۳) نقطه شروع ذره متحرک را مشخص می‌کنند.

شرایط زیر روی $F_1, F_2, \dots, F_n$ که در هر مسئله به سادگی می‌توان آنها را تحقیق کرد — برای تضمین وجود جواب یکتای مسئله مقدار اولیه (۱۱) و (۱۳) کافی است. قضیه ۱.۱.۷ مشابه قضیه وجود و یکتایی جواب معادله خطی مرتبه اول (قضیه ۲.۴.۲) است.

قضیه ۱.۱.۷

فرض کنید تابعهای $F_1, \dots, F_n$ و مشتقات جزئی آنها، $\partial F_1 / \partial x_1, \dots, \partial F_1 / \partial x_n, \dots, \partial F_n / \partial x_1, \dots, \partial F_n / \partial x_n$ در ناحیه R تعریف شده با $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$ در فضای $x_1 x_2 \dots x_n$ پیوسته باشند و فرض کنید $(t_0, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ نقطه‌ای در R باشد. در این صورت بازه‌ای مانند $h > 0$ وجود دارد که در آن جواب یکتای $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۱) موجود است که در شرایط اولیه (۱۳) صدق می‌کند.

این قضیه را می‌توان با تعمیم بحث بخش ۸.۲ ثابت کرد، اما در اینجا به آن نمی‌پردازیم. به هر حال، توجه کنید که در مفروضات قضیه، چیزی درباره مشتقات جزئی $F_1, \dots, F_n$ برحسب متغیر مستقل t گفته نشده است. همچنین در حکم قضیه، طول بازه وجود جواب دقیقاً مشخص نشده است، و این طول گاهی ممکن است بسیار کوچک باشد. دست آخر، می‌توان تحت شرایط ضعیف‌تر اما پیچیده‌تر، نتیجه مشابهی به دست آورد. بنابراین، این صورت قضیه کلی‌ترین حالت شناخته شده نیست، و این شرایط برای اخذ نتیجه کافی هستند اما لازم نیستند.

اگر همه تابعهای $F_1, \dots, F_n$ در معادله (۱۱) تابع خطی از متغیرهای وابسته $x_1, \dots, x_n$ باشند، به دستگاه معادلات خطی و در غیر این صورت به آن غیرخطی می‌گوییم. پس شکل کلی دستگاه n معادله خطی مرتبه اول به صورت

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (14)$$

است. اگر همه تابعهای $g_1(t), \dots, g_n(t)$ در همه نقاط بازه I صفر باشند، به دستگاه (۱۴) همگن می‌گوییم و در غیر این صورت به آن ناهمگن می‌گوییم. توجه کنید که دستگاههای (۱) و (۲) هر دو خطی هستند، اما دستگاه (۳) غیرخطی است. دستگاه (۱) ناهمگن است مگر اینکه $F_1(t) = F_2(t) = 0$ ؛ در حالی که دستگاه (۲) همگن است. در مورد دستگاه خطی (۱۴)، قضیه وجود و یکتایی جواب شرایط ساده‌تری دارد و نتیجه آن هم قوی‌تر است. این قضیه شبیه قضیه‌های ۱.۴.۲ و ۱.۲.۳ است.

قضیه ۲.۱.۷

اگر تابعهای $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}, g_1, \dots, g_n, p_{n1}, \dots, p_{nn}$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند، جواب یکتای $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ برای دستگاه (۱۴) موجود است که در شرایط اولیه (۱۳) صدق می‌کند که در آن $x_1^*, \dots, x_n^*$ اعداد مفروضی هستند. علاوه بر این، جواب در همه بازه I موجود است.

توجه کنید که برخلاف دستگاه معادلات غیرخطی، وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی در سرتاسر بازه‌ای که فرضهای قضیه برقرار است تضمین شده است. علاوه بر این، برای دستگاه خطی، مقادیر اولیه $x_1^*, \dots, x_n^*$ در $t = t_0$ کاملاً دلخواه‌اند، در حالی که در دستگاه غیرخطی، نقطه اولیه باید در ناحیه R که در قضیه ۱.۱.۷ تعریف شده واقع باشد.

در بقیه این فصل به بررسی دستگاه معادلات خطی مرتبه اول می‌پردازیم (دستگاههای غیرخطی را در فصلهای ۸ و ۹ بررسی می‌کنیم). در این بررسی از نمادهای ماتریسی استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که خواننده تا حدی به ماتریس‌ها آشناست. مطالب لازم درباره ماتریس‌ها در بخش‌های ۲.۷ و ۳.۷ خلاصه شده و هر جا که لازم باشد مطالب پیشرفته‌تر را مطرح می‌کنیم.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، معادله موردنظر را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید.

$$u'' + 0.5u' + 2u = 3 \sin t \quad ۲. \quad u'' + 2u' + 2u = 0 \quad ۱.$$

$$u^{(4)} - u = 0 \quad ۴. \quad t^2 u'' + t u' + (t^2 - 1)u = 0 \quad ۳.$$

در هر یک از مسئله‌های ۵ و ۶، مسئله مقدار اولیه داده شده را به مسئله مقدار اولیه‌ای برای دو معادله مرتبه اول تبدیل کنید.

$$u'(0) = 3, u(0) = 1, u'' + u' + 4u = 2 \sin 4t \quad ۵.$$

را در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر $x = x_1(t)$ و $y = y_1(t)$ و $x = x_2(t)$ و $y = y_2(t)$ دو جواب دستگاه باشند، $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ و $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ به ازای هر مقدار از ثابتهای c_1 و c_2 جواب است. این را اصل برهم‌نهی می‌گویند.

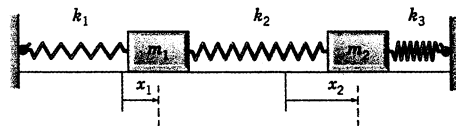
۱۶. فرض کنید $x = x_1(t)$ و $y = y_1(t)$ و $x = x_2(t)$ و $y = y_2(t)$ دو جواب دستگاه معادلات غیرهمگن

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t),$$

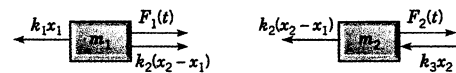
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t)$$

باشند. ثابت کنید $x = x_1(t) - x_2(t)$ و $y = y_1(t) - y_2(t)$ جواب دستگاه همگن متناظر است.

۱۷. معادله‌های (۱) را می‌توان با استفاده از نمودار جسم آزاد که اثر نیروها روی وزنه را نشان می‌دهد به دست آورد. شکل ۳.۱.۷ (الف) وضعی را نمایش می‌دهد که در آن جابه‌جایی x_1 و x_2 هر یک از وزنه‌ها مثبت (به طرف راست) است و $x_1 > x_2$. در این صورت فنرهای ۱ و ۲ کشیده شده و فنر ۳ فشرده شده است که منجر به نیروهای نشان داده شده در شکل ۳.۱.۷ (ب) می‌شود. با استفاده از قانون نیوتن ($F = ma$) معادله‌های (۱) را به دست بیاورید.



(الف)



(ب)

شکل ۳.۱.۷ (الف) جابه‌جایی x_1 و x_2 هر دو مثبت هستند. (ب) نمودار جسم-آزاد برای دستگاه فنر-وزنه.

۱۸. دستگاه (۱) را با قرار دادن $x_1 = y_1$ ، $x_2 = y_2$ ، $x'_1 = y'_1$ و $x'_2 = y'_2$ به دستگاهی از معادله‌های مرتبه اول تبدیل کنید.

مدارهای الکتریکی. نظریه مدارهای الکتریکی‌ای که مانند آنچه در شکل ۲.۱.۷ نشان داده شده، شامل القاگر، مقاومت و خازن هستند، بر قوانین کیرشهف مبتنی است: (۱) مجموع جریان ورودی به هر گره (یا نقطه اتصال) صفر است؛ (۲) مجموع افت ولتاژ در هر حلقه بسته صفر است. علاوه بر قوانین کیرشهف، رابطه بین جریان I برحسب آمپر روی هر عضو مدار و افت ولتاژ V در دو سر آن را هم می‌دانیم؛ یعنی

$$V = RI, \quad R = \text{مقاومت برحسب اهم}$$

$$C \frac{dV}{dt} = I, \quad C = \text{ظرفیت خازن برحسب فاراد}^1$$

$$L \frac{dI}{dt} = V, \quad L = \text{ضریب القایی برحسب هانری}$$

۱. ظرفیت خازنهای واقعی به میکروفاراد اندازه‌گیری می‌شود. ما برای سادگی محاسبات عددی از فاراد به عنوان واحد استفاده کردیم.

$$6. \quad u'(\circ) = u', \quad u(\circ) = u, \quad u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t)$$

۷. گاهی می‌توانیم دستگاهی از معادله‌های مرتبه اول را به یک معادله از مرتبه بالاتر تبدیل کنیم. دستگاه

$$x'_1 = -2x_1 + x_2, \quad x'_2 = x_1 - 2x_2$$

را در نظر بگیرید.

الف) معادله اول را برحسب x_2 حل کنید و در معادله دوم قرار بدهید؛ به این ترتیب یک معادله مرتبه دوم برحسب x_1 به دست می‌آید. این معادله را برحسب x_1 حل کنید و x_2 را هم معین کنید.

ب) جوابی برای دستگاه به دست بیاورید که در شرایط اولیه $x_1(\circ) = 3$ و $x_2(\circ) = 2$ صدق کند.

ج) به ازای $t \geq \circ$ ، منحنی جواب را که به صورت پارامتری برحسب عبارتهایی که در قسمت (ب) برای x_1 و x_2 به دست آمده داده می‌شود، رسم کنید.

در هر یک از مسئله‌های ۸ تا ۱۲، خواسته‌های مسئله ۷ را انجام بدهید.

الف) دستگاه داده شده را به یک معادله مرتبه دوم تبدیل کنید.

ب) x_1 و x_2 را طوری بیابید که در شرایط اولیه داده شده صدق کنند.

ج) به ازای $t \geq \circ$ نمودار جواب را در صفحه x_1x_2 رسم کنید.

$$8. \quad x_1(\circ) = 3, \quad x'_1 = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(\circ) = -2, \quad x'_1 = 1/25x_1 + 0/75x_2$$

$$x_2(\circ) = 1, \quad x'_2 = 0/75x_1 + 1/25x_2, \quad x_2(\circ) = \frac{1}{y}, \quad x'_2 = 2x_1 - 2x_2$$

$$9. \quad x_1(\circ) = 3, \quad x'_1 = 2x_2, \quad x_1(\circ) = -1, \quad x'_1 = x_1 - 2x_2$$

$$x_2(\circ) = 4, \quad x'_2 = -2x_1, \quad x_2(\circ) = 2, \quad x'_2 = 3x_1 - 4x_2$$

$$10. \quad x_1(\circ) = -2, \quad x'_1 = -0/5x_1 + 2x_2, \quad x_1(\circ) = -2, \quad x'_1 = 0/5x_1 + 2x_2$$

$$x_2(\circ) = 2, \quad x'_2 = -2x_1 - 0/5x_2$$

۱۳. معادله‌های (۲) (معادله‌های مدار موازی) را به یک معادله مرتبه دوم تبدیل کنید.

۱۴. ثابت کنید اگر $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ثابت باشند و اقلاً یکی از a_{12} و a_{21} صفر نباشد و اگر تابعهای g_1 و g_2 مشتق‌پذیر باشند، مسئله با مقدار اولیه

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \quad x_1(\circ) = x_1^*$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \quad x_2(\circ) = x_2^*$$

را می‌توان به یک معادله مرتبه دوم با مقدارهای اولیه تبدیل کرد. آیا اگر $a_{11}, \dots, a_{22}$ تابع t باشند هم می‌توان روندی مشابه را پیش گرفت؟

۱۵. دستگاه خطی همگن

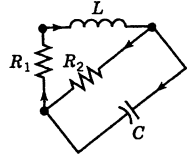
$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y,$$

$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y$$

۲۱. مدار نشان داده شده در شکل ۵.۱.۷ را در نظر بگیرید. با استفاده از روشی که در مسئله ۱۹ طرح کردیم، ثابت کنید جریان I روی القاگر و ولتاژ V بر خازن در دستگاه معادلات دیفرانسیل

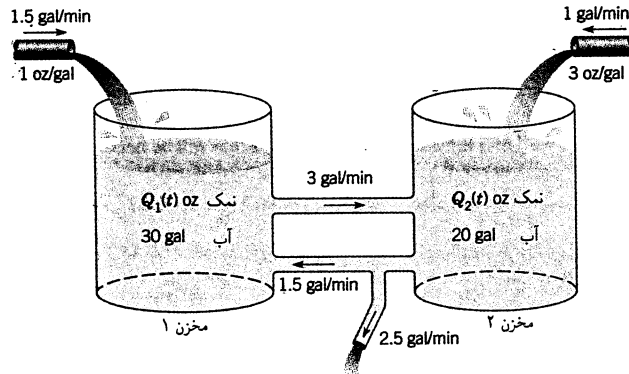
$$L \frac{dI}{dt} = -R_1 I - V, \quad C \frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}$$

صدق می‌کند.



شکل ۵.۱.۷ مدار مسئله ۲۱.

۲۲. دو مخزن را در نظر بگیرید که مانند شکل ۶.۱.۷ به یکدیگر متصل شده‌اند. مخزن ۱ در ابتدا حاوی ۳۰ گالن آب و ۲۵ اونس نمک است و مخزن ۲ در ابتدا حاوی ۲۰ گالن آب و ۱۵ اونس نمک است. آبی که در هر گالن آن ۱ اونس نمک موجود است با نرخ $\frac{1}{5} \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ وارد مخزن ۱ می‌شود. مایع مخلوط شده از مخزن ۱ با نرخ $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ به مخزن ۲ وارد می‌شود. آبی حاوی ۳ اونس نمک نیز با نرخ $\frac{1}{5} \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ (از خارج) به مخزن ۲ وارد می‌شود. محلول حاصل با نرخ $\frac{4}{5} \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ از مخزن ۲ خارج می‌شود. بخشی از این مایع با نرخ $\frac{1}{5} \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ به مخزن برمی‌گردد و بقیه آن از دستگاه خارج می‌شود.



شکل ۶.۱.۷ مخزنهای متصل (مسئله ۲۲).

الف) فرض کنید $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ به ترتیب مقدار نمک در زمان t در هر مخزن باشند. معادله‌های دیفرانسیل و شرایط اولیه‌ای را بنویسید که روند این جریان را مدل می‌کنند. توجه کنید که دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرهمگن است.

ب) مقداری از Q_1 و Q_2 را بیابید که در آنها دستگاه در حال تعادل است (یعنی با زمان تغییر نمی‌کند). فرض کنید Q_1^E و Q_2^E مقادیر تعادلی باشند. می‌توانید پیش‌بینی کنید که کدام مخزن سریع‌تر به وضع تعادلی نزدیک می‌شود؟

قوانین کیرشهف و رابطه جریان-ولتاژ در هر عضو مدار به دستگاهی از معادله‌های جبری و دیفرانسیلی منجر می‌شوند که ولتاژ و جریان مدار را معین می‌کند. در مسئله‌های ۱۹ تا ۲۱ روند انجام این کار را نشان می‌دهیم.

۱۹. مدار نشان داده شده در شکل ۲.۱.۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید I_1 ، I_2 و I_3 به ترتیب جریان گذرا از خازن، مقاومت و القاگر باشند. به همین ترتیب فرض کنید V_1 ، V_2 و V_3 افت ولتاژهای متناظر آنها باشند. پیکانها جهت انتخابی دلخواهی را نشان می‌دهند که در آن افت جریان و ولتاژ مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

الف) با استفاده از قانون دوم کیرشهف در حلقه بالایی مدار، ثابت کنید

$$V_1 - V_2 = 0. \quad (i)$$

به همین ترتیب، ثابت کنید

$$V_2 - V_3 = 0. \quad (ii)$$

ب) با استفاده از قانون اول کیرشهف در یکی از گروه‌های مدار ثابت کنید

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (iii)$$

ج) با استفاده از رابطه جریان-ولتاژ در هر یک از اجزای مدار، معادله‌های

$$CV'_1 = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad LI'_2 = V_2 \quad (iv)$$

را به دست بیاورید.

د) با حذف V_1 ، V_2 ، I_1 و I_2 از معادله‌های (i) تا (iv)، ثابت کنید

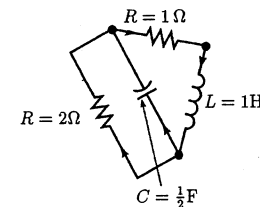
$$CV'_1 = -I_2 - \frac{V_1}{R}, \quad LI'_2 = V_1. \quad (v)$$

توجه کنید که اگر در معادله (v) اندیس پایینی را حذف کنیم به دستگاه (۲) متن می‌رسیم.

۲۰. مدار نشان داده شده در شکل ۴.۱.۷ را در نظر بگیرید. با استفاده از روشی که در مسئله ۱۹ طرح کردیم، ثابت کنید جریان I روی القاگر و ولتاژ V بر خازن در دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dI}{dt} = -I - V, \quad \frac{dV}{dt} = 2I - V$$

صدق می‌کند.



شکل ۴.۱.۷ مدار مسئله ۲۰.

در سطر i ام و ستون j ام واقع است با a_{ij} نشان می‌دهیم، اندیس اول نشانگر سطر و دومی نشانگر ستون است. گاهی برای نمایش ماتریسی که درایهٔ عمومی a_{ij} است از نماد (a_{ij}) استفاده می‌کنیم.

متناظر هر ماتریس A ، می‌توانیم ماتریس A^T را تعریف کنیم، که به آن ماتریس ترانپوز A می‌گوییم و جابه‌جا کردن سطرها و ستونهای ماتریس A به‌دست می‌آید. پس اگر $A = (a_{ij})$ آنگاه $A^T = (a_{ji})$. مزدوج مختلط a_{ij} را با $\bar{a}_{ij}$ نشان می‌دهیم و ماتریسی را که از جایگزینی هر عضو a_{ij} ماتریس A با $\bar{a}_{ij}$ حاصل می‌شود با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. به ماتریس $\bar{A}$ مزدوج ماتریس A می‌گوییم. گاهی لازم است که ترانپوز مزدوج ماتریس، $\bar{A}^T$ را در نظر بگیریم. به این ماتریس الحاقی ماتریس A می‌گوییم و آن را با A^* نشان می‌دهیم.

به‌عنوان مثال فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix};$$

در این صورت

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}.$$

به دو نوع نسبتاً خاص از ماتریس‌ها به‌طور خاص علاقه‌مندیم: ماتریس‌های مربعی، که تعداد سطر و ستونهایشان برابر است، یعنی $m = n$ ؛ و بردارها (یا بردارهای ستونی)، که می‌توان آنها را به‌عنوان ماتریس‌های $n \times 1$ در نظر گرفت، یا ماتریس‌هایی که تنها یک ستون دارند. ماتریس‌های مربعی را که n ستون و n سطر هستند مرتبهٔ n می‌گوییم. بردارها (ی ستونی) را با حروف سیاه کوچک، $x, y, \xi, \eta, \dots$ نشان می‌دهیم. ترانپوز بردار ستونی $1 \times n$ مانند x, x^T ، بردار سطری $n \times 1$ است، یعنی ماتریسی که تنها یک سطر دارد و درایه‌هایش همان درایه‌های متناظر در بردار x هستند.

خواص ماتریس‌ها.

۱. تساوی. می‌گوییم دو ماتریس $m \times n$ مانند A و B برابرند اگر درایه‌های متناظرشان برابر باشند؛ یعنی وقتی به‌ازای هر i و j ، $a_{ij} = b_{ij}$.

۲. صفر. O را برای نمایش ماتریسی (یا برداری) به‌کار می‌بریم که همهٔ درایه‌هایش صفر باشند.

۳. جمع. مجموع دو ماتریس $m \times n$ مانند A و B با ماتریسی تعریف می‌شود که درایه‌هایش از جمع کردن درایه‌های متناظر در این ماتریس‌ها به‌دست می‌آیند:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \quad (2)$$

ج) فرض کنید $x_1 = Q_1(t) - Q_2^E$ و $x_2 = Q_2(t) - Q_1^E$. مسئلهٔ مقدار اولیه را برحسب x_1 و x_2 بیان کنید. توجه کنید که دستگاه معادلات برحسب x_1 و x_2 همگن است.

۲۳. فرض کنید دو مخزن مشابه شکل ۶.۱۰۷ به یکدیگر متصل شده‌اند. مخزن ۱ در ابتدا حاوی 60° گالن آب و Q_1 اونس نمک است، در حالی که مخزن ۲ در ابتدا حاوی 80° گالن آب و Q_2 اونس نمک است. آبی حاوی $q_1 \frac{\text{oz}}{\text{gal}}$ نمک با سرعت $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ وارد مخزن می‌شود. محلول مخزن با نرخ $4 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ خارج می‌شود که نصف آن به مخزن ۲ و بقیه کلاً از دستگاه خارج می‌شود. همچنین آبی حاوی $q_2 \frac{\text{oz}}{\text{gal}}$ نمک از خارج با نرخ $1 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ به مخزن ۲ وارد می‌شود. محلول مخزن ۲ با نرخ $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ از آن خارج می‌شود که از آن $1 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ به مخزن برمی‌گردد و بقیه از دستگاه خارج می‌شود.

الف) نموداری رسم کنید که روند توصیف‌شده در بالا را نشان بدهد. فرض کنید $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ به‌ترتیب مقدار نمک در هر یک از مخزنها در زمان t باشند. معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه‌ای را برای Q_1 و Q_2 بنویسید که این روند را مدل کند.

ب) مقادیر تعادلی Q_1^E و Q_2^E را برحسب q_1 و q_2 به‌دست بیاورید.

ج) آیا ممکن است (با تغییر مقادیر q_1 و q_2) به حالت تعادلی‌ای برسیم که $Q_1^E = 60^\circ$ و $Q_2^E = 50^\circ$ ؟

د) حالت‌های تعادلی ممکن را برحسب مقادیر مختلف q_1 و q_2 به‌دست بیاورید.

۲.۷. مروری بر ماتریس‌ها

هم به دلایل نظری و هم به دلایل محاسباتی، مناسب است که از بعضی از خواص جبر ماتریس‌ها^۱ برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی استفاده کنیم. برای ارجاعات بعدی، در این بخش و بخش بعد به‌طور کوتاه مطالب موردنیاز بخش‌های آینده را مرور می‌کنیم. جزئیات بیشتر را می‌توان در هر کتاب مقدماتی جبر خطی یافت. با این حال، در اینجا فرض می‌کنیم که خواننده با درمیان و طریقهٔ محاسبهٔ آن آشناست.

ماتریس‌ها را با حروف سیاه بزرگ $A, B, C, \dots$ و یا گاهی با حروف یونانی سیاه بزرگ $\Phi, \Psi, \dots$ نشان می‌دهیم. ماتریس A آرایه‌ای مستطیلی از اعداد و یا درایه‌ها است که از m سطر و n ستون تشکیل شده است، یعنی

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

می‌گوییم A ماتریسی $m \times n$ است. هرچند در ادامهٔ این فصل فرض می‌کنیم که درایه‌های ماتریس‌ها حقیقی هستند، در این بخش فرض می‌کنیم که بعضی از درایه‌های ماتریس‌ها ممکن است مختلط باشند. درایه‌ای را که

۱. خواص ماتریس‌ها را اولین بار جبردان انگلیسی آرثور کیلی (۱۸۲۱-۱۸۹۵م) به‌طور گسترده در مقاله‌ای در سال ۱۸۵۸ میلادی بررسی کرد. اما واژهٔ ماتریس را دوست خوب وی جیمز سیلوستر (۱۸۱۴-۱۸۹۷م) در سال ۱۸۵۰ میلادی معرفی کرد. کیلی بعضی از بهترین کارهای ریاضیش را بین سالهای ۱۸۴۹ تا ۱۸۶۳ میلادی که به شغل وکالت مشغول بود انجام داد و پس از آن استاد دانشگاه کمبریج شد و تا آخر عمر در همین شغل باقی ماند. پس از کارهای اساسی کیلی، توسعهٔ نظریهٔ ماتریس‌ها از جمله با کارهای مهم شارل هرمیت، گئورگ فروبنیوس و کامی ژوردان شتاب گرفت.

از این تعریف نتیجه می‌شود که جمع ماتریس‌ها، جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است؛ یعنی

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C. \quad (3)$$

۴. ضرب در عدد. حاصلضرب ماتریس A و عدد مختلط α با

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \quad (4)$$

تعریف می‌شود؛ یعنی همه درایه‌های A در α ضرب می‌شوند. این نوع ضرب در قانون پخش‌پذیری، یعنی

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (5)$$

صدق می‌کند. به‌ویژه، منفی A را با $-A$ نشان می‌دهیم و با

$$-A = (-1)A \quad (6)$$

تعریف می‌کنیم.

۵. تفاضل. تفاضل $A - B$ را برای دو ماتریس $m \times n$ با

$$A - B = A + (-B) \quad (7)$$

تعریف می‌کنیم. پس

$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}) \quad (8)$$

که مشابه معادله (۲) است.

۶. ضرب. حاصلضرب دو ماتریس وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس اول برابر با تعداد سطرهاى ماتریس دوم باشد. اگر به‌ترتیب A و B ماتریس‌های $m \times n$ و $n \times r$ باشند، ماتریس حاصلضرب $C = AB$ ماتریسی $m \times r$ است. درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس C را می‌توان با ضرب درایه‌های سطر i ام ماتریس A در درایه‌های متناظر سطر j ام B و جمع این حاصلضربها به‌دست آورد؛ یعنی

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (9)$$

با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که ضرب ماتریسی در قانون شرکت‌پذیری، یعنی

$$(AB)C = A(BC) \quad (10)$$

و قانون پخش‌پذیری، یعنی

$$A(B + C) = AB + AC \quad (11)$$

صدق می‌کند. با این حال، در حالت کلی، این ضرب جابه‌جایی نیست. برای اینکه حاصلضرب AB و BA هر دو موجود و هم‌اندازه باشند، لازم است A و B ماتریس‌های مربعی با مرتبه یکسان باشند. حتی در این حالت، حاصلضربها معمولاً مساوی نیستند، بنابراین در حالت کلی

$$AB \neq BA. \quad (12)$$

برای نمایش روش ضرب ماتریس‌ها و اینکه حاصلضرب ماتریس‌ها لزوماً جابه‌جایی نیست، ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. از تعریف حاصلضرب ماتریس‌ها در معادله (۹) نتیجه می‌شود

$$AB = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

واضح است که $AB \neq BA$.

۷. ضرب بردارها. برای تشکیل حاصلضرب دو بردار n مؤلفه‌ای x و y راههای مختلفی وجود دارد. یکی از این راهها، تعمیم مستقیم حاصلضرب نقطه‌ای (که از فیزیک و حسابان با آن آشناییم) به n بعد است؛ این حاصلضرب را با $x^T y$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (13)$$

حاصل معادله (۱۳) عدد (مختلط) است و مستقیماً از معادله (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$x^T y = y^T x, \quad x^T (y + z) = x^T y + x^T z, \quad (\alpha x)^T y = \alpha (x^T y) = x^T (\alpha y). \quad (14)$$

یک نوع ضرب برداری دیگر هم هست که برای دو بردار با تعداد مؤلفه‌های یکسان تعریف می‌شود. این ضرب، که آن را با (x, y) نشان می‌دهیم و به آن ضرب اسکالر یا ضرب داخلی می‌گوییم، با

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (15)$$

تعریف می‌شود. حاصلضرب اسکالر هم عدد (مختلط) است و با مقایسه معادله‌های (۱۳) و (۱۵) درمی‌یابیم که

$$(x, y) = x^T \bar{y}. \quad (۱۶)$$

بنابراین، اگر همه درایه‌های y حقیقی باشند، دو ضرب (۱۳) و (۱۵) یکی هستند. از معادله (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z), \quad (۱۷)$$

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y).$$

توجه کنید اگر بردار x درایه‌هایی با قسمت موهومی ناصفر داشته باشد حاصلضرب اسکالر بردار x در خودش عددی حقیقی و نامنفی است؛ یعنی

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2. \quad (۱۸)$$

مقدار نامنفی $(x, x)^{1/2}$ را اغلب با $\|x\|$ نشان می‌دهیم و به آن طول یا اندازه بردار x می‌گوییم. اگر $(x, y) = 0$ ، می‌گوییم دو بردار x و y متعامد هستند. به عنوان مثال، بردارهای یکته i و j و k در هندسه برداری سه‌بعدی مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر اگر بعضی از درایه‌های حقیقی نباشند، حاصلضرب

$$x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (۱۹)$$

ممکن است عدد حقیقی نباشد.

به عنوان مثال، فرض کنید

$$x = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix};$$

در این صورت

$$x^T y = (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4 + 3i,$$

$$(x, y) = (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2 + 7i,$$

$$x^T x = (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3 + 2i,$$

$$(x, x) = (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7.$$

۸. همانی. عنصر یکه ضرب ماتریسی، یا ماتریس همانی I عبارت است از

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (۲۰)$$

از تعریف حاصلضرب ماتریسی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر ماتریس A (مربع)

$$AI = IA = A; \quad (۲۱)$$

بنابراین هرگاه یکی از ماتریس‌ها ماتریس همانی باشد، قانون جابه‌جایی برای ماتریس‌های مربعی برقرار است.

۹. معکوس. می‌گوییم ماتریس مربعی A نامنفرد و یا معکوس‌پذیر است اگر ماتریس دیگری مانند B موجود باشد که $AB = I$ و $BA = I$ ، که در آن I ماتریس همانی است. اگر چنین B ای موجود باشد، می‌توان ثابت کرد که یکتا است. به چنین ماتریسی معکوس ضربی و یا فقط معکوس A می‌گوییم و می‌نویسیم $B = A^{-1}$. به این ترتیب

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad (۲۲)$$

به ماتریس‌هایی که معکوس ندارند، منفرد و یا غیروارون‌پذیر می‌گوییم.

با فرض وجود A^{-1} ، روشهای مختلفی برای محاسبه آن با استفاده از A موجودند. یک روش استفاده از دترمینانها است. به درایه a_{ij} از ماتریس داده شده، کهاد M_{ij} نسبت داده می‌شود، که برابر دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس اولیه به دست می‌آید، یعنی حذف سطر و ستونی که شامل a_{ij} است. همچنین به هر درایه a_{ij} همساز C_{ij} نسبت داده می‌شود که با معادله

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (۲۳)$$

تعریف می‌شود. اگر $B = A^{-1}$ ، می‌توان ثابت کرد که درایه عمومی b_{ij} عبارت است از

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det A}. \quad (۲۴)$$

اگرچه که استفاده از معادله (۲۴) برای محاسبه A^{-1} روش کارایی نیست^۱، شرطی برای وجود معکوس ماتریس A بیان می‌کند. در حقیقت این شرط هم لازم و هم کافی است: $\det A \neq 0$. اگر $\det A = 0$ ، ماتریس A منفرد است.

روش دیگر برای محاسبه A^{-1} که معمولاً بهتر است، استفاده از عملیات سطری مقدماتی است که شامل سه عمل زیر است:

۱. جابه‌جایی دو سطر،
۲. ضرب یک سطر در عددی ناصفر،
۳. جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

به تبدیل ماتریس با دنباله‌ای از عملیات سطری، ساده‌سازی سطری یا حذف گاوسی^۲ می‌گوییم. هر ماتریس

۱. به‌ازای n های بزرگ، تعداد ضربهای موردنیاز در معادله (۲۴) برای محاسبه A^{-1} متناسب با $n!$ است. با استفاده از روشهای کارتر، مانند روند ساده‌سازی سطرها که بعداً بررسی می‌شود، تعداد ضربها متناسب با n^3 است. حتی به‌ازای مقادیر کوچک n (مثلاً $n = 4$)، استفاده از دترمینان برای محاسبه معکوس ماتریس‌ها به صرفه نیست و روش ساده‌سازی سطری ترجیح دارد.

۲. کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵م) بیشتر عمرش را در گوتینگن گذراند و در بسیاری از شاخه‌های ریاضی، از جمله نظریه اعداد، جبر، هندسه ناقلیدسی و دیفرانسیل و آنالیز ریاضی و شاخه‌های کاربردی‌تری از جمله نقشه‌برداری، آمار و مکانیک سماوی کارهای بزرگی انجام داد. او را عموماً یکی از بهترین ریاضیدانان همه دورانها می‌دانند.

نامفرد A را می‌توان به روشی نظام‌مند با دنباله‌ای از این عملها به ماتریس همانی I تبدیل کرد. می‌توان ثابت کرد که اگر همان عملها را روی ماتریس I انجام بدهیم، این ماتریس به A^{-1} تبدیل می‌شود. انجام همزمان عملها روی هر دو ماتریس با تشکیل ماتریس افزوده $A | I$ مؤثرتر است. در مثال زیر این روند را نشان می‌دهیم.

معکوس ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

را به دست بیاورید.

با تشکیل ماتریس افزوده $A | I$ شروع می‌کنیم:

$$A|I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

با دنباله عملهای زیر، ماتریس A به I تبدیل می‌شود و همزمان، I به A^{-1} تبدیل می‌شود. نتیجه هر مرحله را زیر آن آورده‌ایم.

(الف) با افزودن (-3) برابر سطر اول به سطر دوم و افزودن (-2) برابر سطر اول به سطر سوم، خارج مواضع قطری را صفر کنید.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(ب) با ضرب سطر دوم در $1/2$ ، یک 1 در موضع قطر در ستون دوم به دست بیاورید.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(ج) با افزودن سطر دوم به سطر اول و اضافه کردن (-4) برابر سطر دوم به سطر سوم، خارج مواضع قطری را صفر کنید.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

(د) با ضرب سطر سوم در $(-1/5)$ ، یک 1 در موضع قطر در ستون سوم به دست بیاورید.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 2/5 & -1/5 \end{array} \right)$$

(ه) با افزودن $(-3/2)$ برابر سطر سوم به سطر اول و افزودن $(-5/2)$ برابر سطر سوم به سطر دوم، خارج مواضع قطری را صفر کنید.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/10 & -1/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 2/5 & -1/5 \end{array} \right)$$

این ماتریس آخر همان $A^{-1} | I$ است. این موضوع را می‌توان با ضرب مستقیم آن در ماتریس A تحقیق کرد.

این مثال با استفاده از اینکه ماتریس اولیه A یک 1 در گوشه بالایی دارد کمی ساده‌تر شده است. در غیر این صورت، اگر $a_{11} \neq 0$ ، اولین گام ایجاد یک 1 با ضرب سطر اول در $1/a_{11}$ است. اگر $a_{11} = 0$ ، باید اولین سطر را با سطر دیگری جابه‌جا کنیم تا درایه غیرصفری در موقعیت چپ بالا قرار بگیرد.

تابعهای ماتریسی. گاهی ممکن است بخواهیم بردارها یا ماتریس‌هایی را در نظر بگیریم که هر درایه‌شان تابعی از یک متغیر حقیقی t است. می‌نویسیم

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

می‌گوییم ماتریس $A(t)$ در $t = t_0$ یا بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته است اگر همه درایه‌های A در نقطه یا بازه موردنظر پیوسته باشند. به همین ترتیب، $A(t)$ مشتق‌پذیر است اگر همه درایه‌هایش مشتق‌پذیر باشند و مشتق آن، dA/dt ،

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right) \quad (26)$$

تعریف می‌شود؛ یعنی هر درایه ماتریس dA/dt مشتق درایه متناظرش در ماتریس A است. به همین ترتیب انتگرال تابع ماتریسی را تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b A(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt \right). \quad (27)$$

به عنوان مثال، اگر

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$A'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi A(t)dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

۷. قانونهای زیر را ثابت کنید.

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{الف})$$

$$A + B = B + A \quad (\text{ب})$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (\text{ج})$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\text{د})$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{ه})$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{و})$$

$$8. \text{ اگر } x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix} \text{ و } y = \begin{pmatrix} -1+i \\ -2 \\ 3-i \end{pmatrix}, \text{ حاصل عبارتهای زیر را بیابید.}$$

$$(y, y) \quad (\text{د})$$

$$(x, y) \quad (\text{ع})$$

$$y^T y \quad (\text{ب})$$

$$x^T y \quad (\text{الف})$$

$$9. \text{ اگر } x = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ و } y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}, \text{ ثابت کنید}$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad (\text{ب})$$

$$x^T y = y^T x \quad (\text{الف})$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۰ تا ۱۹، معکوس ماتریس داده‌شده را پیدا کنید، یا ثابت کنید که ماتریس منفرد است.

$$11. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

۲۰. ثابت کنید که اگر دو ماتریس B و C موجود باشند که $AB = I$ و $AC = I$ ، آنگاه $B = C$. بنابراین ماتریس A تنها می‌تواند یک معکوس داشته باشد.

بسیاری از قوانین حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به سادگی به تابعهای ماتریسی تعمیم داده می‌شوند، به‌ویژه

$$(28) \quad C \text{ ماتریس ثابت است} \quad \frac{d}{dt}(CA) = C \frac{dA}{dt},$$

$$(29) \quad \frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt},$$

$$(30) \quad \frac{d}{dt}(AB) = A \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} B.$$

باید توجه داشت که در معادله‌های (۲۸) و (۳۰)، ترتیب ضرب ماتریس‌ها جابه‌جا نشود. تعریفهای معادله‌های (۲۶) و (۲۷) را می‌توان برای بردارها هم به‌کار برد.

مسئله‌ها

$$1. \text{ اگر } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ حاصل عبارتهای زیر را به‌دست بیاورید.}$$

$$\text{الف) } 2A + B \quad (\text{ب) } A - 2B \quad (\text{ج) } AB \quad (\text{د) } BA$$

$$2. \text{ اگر } A = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 2+3i & 2-i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}, \text{ حاصل عبارتهای زیر را به‌دست بیاورید.}$$

$$\text{الف) } A - 2B \quad (\text{ب) } 3A + 2B \quad (\text{ج) } AB \quad (\text{د) } BA$$

$$3. \text{ اگر } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ حاصل عبارتهای زیر را به‌دست بیاورید.}$$

$$\text{الف) } A^T \quad (\text{ب) } B^T \quad (\text{ج) } A^T + B^T \quad (\text{د) } (A+B)^T$$

$$4. \text{ اگر } A = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & 1+5i \end{pmatrix}, \text{ حاصل عبارتهای زیر را به‌دست بیاورید.}$$

$$\text{الف) } A^T \quad (\text{ب) } \overline{A} \quad (\text{ج) } A^*$$

$$5. \text{ اگر } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ثابت کنید } 2(A+B) = 2A + 2B.$$

$$6. \text{ اگر } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ثابت کنید}$$

$$(\text{الف) } (AB)C = A(BC) \quad (\text{ب) } (A+B) + C = A + (B+C)$$

$$(\text{ج) } A(B+C) = AB + AC$$

را می‌توان به صورت

$$Ax = b \quad (2)$$

نوشت که در آن A ماتریسی $n \times n$ و b برداری مفروض است، و هدف تعیین مؤلفه‌های بردار x است. اگر $b = 0$ ، دستگاه را همگن می‌گوییم؛ در غیر این صورت می‌گوییم دستگاه غیرهمگن است.

اگر ماتریس ضرایب، A ، نامفرد باشد، یعنی اگر $\det A = 0$ (دستگاه (۲) جوابی یکتا دارد. چون A^{-1} نامفرد است، A^{-1} موجود است و جواب را می‌توان با ضرب دو طرف معادله (۲) از طرف چپ در A^{-1} به دست آورد؛ پس

$$x = A^{-1}b. \quad (3)$$

به خصوص، معادله همگن $Ax = 0$ ، متناظر $b = 0$ در معادله (۲)، فقط جواب بدیهی $x = 0$ را دارد. از طرف دیگر اگر A مفرد باشد، یعنی اگر $\det A \neq 0$ (معادله (۲) یا جواب ندارد و یا جوابهای آن یکتا نیستند. چون A مفرد است، A^{-1} موجود نیست و بنابراین معادله (۳) دیگر متغیر نیست. دستگاه همگن

$$Ax = 0 \quad (4)$$

علاوه بر جواب بدیهی، (تعداد نامتناهی) جواب ناصفر دارد. در مورد دستگاه غیرهمگن وضع بسیار پیچیده‌تر است. این دستگاه جواب ندارد، مگر اینکه b در شرط خاصی صدق کند. شرط این است که به ازای هر بردار y که در معادله $A^*y = 0$ صدق می‌کند،

$$(b, y) = 0. \quad (5)$$

اگر شرط (۵) برقرار باشد دستگاه (۲) (تعداد نامتناهی) جواب دارد. هر یک از این جوابها به صورت

$$x = x^{(0)} + \xi \quad (6)$$

است که در آن $x^{(0)}$ جواب خاص معادله (۲) است و ξ جواب دستگاه همگن (۴) است. توجه خواننده را به تشابه بین معادله (۶) و جواب معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن جلب می‌کنیم. طرح اثبات بعضی از گزاره‌های فوق را در مسئله‌های ۲۶ تا ۳۰ آورده‌ایم.

نتایج بند قبل به عنوان ابزاری برای دسته‌بندی جوابهای دستگاههای خطی مهم‌اند. اما برای حل دستگاههای خاص، معمولاً بهترین کار این است که با ساده‌سازی سطرها، دستگاه را به صورتی ساده‌تر تبدیل کنیم، که اگر جوابی وجود داشت بتوان آن را به راحتی نوشت. برای اینکه این کار را به صورت کارآمدی انجام بدهیم، ماتریس افزوده را، یعنی

$$A | b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad (7)$$

را با افزودن بردار b به عنوان یک ستون اضافی به ماتریس ضرایب، A ، تشکیل می‌دهیم. خط‌چین جایگزین علامت تساوی می‌شود و می‌گوییم ماتریس افزوده را به دو قسمت افراز می‌کند. اکنون عملیات سطری را طوری

۲۱. اگر $A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ و $B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$ ، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$\int_0^1 A(t) dt \quad (د) \quad dA/dt \quad (ج) \quad AB \quad (ب) \quad A + 3B \quad (الف)$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۲ تا ۲۴، ثابت کنید بردار داده‌شده در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

$$22. \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}, x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$23. \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t, x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$24. \quad x = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۵ و ۲۶ ثابت کنید ماتریس داده‌شده در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

$$25. \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{2t} \\ -4e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \Psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi$$

$$26. \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{2t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{2t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \Psi' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi$$

۳.۷ دستگاه معادلات جبری، استقلال خطی، مقدارهای ویژه، بردارهای ویژه

در این بخش بعضی از نتایج جبر خطی را که در حل دستگاه معادلات دیفرانسیل اهمیت دارند مرور می‌کنیم. بعضی از این نتایج به سادگی قابل اثبات‌اند و برخی نه؛ اما چون فقط می‌خواهیم خلاصه اطلاعات مفید را به صورت فشرده بیاوریم، در هیچ حالتی اثباتی ارائه نمی‌کنیم. همه نتایج این بخش بر مطالب پایه حل دستگاه معادلات جبری مبتنی‌اند.

دستگاه معادلات جبری خطی. مجموعه‌ای از n معادله جبری با n مجهول، یعنی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

روی ماتریس افزوده انجام می‌دهیم که ماتریس A را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کند، یعنی ماتریسی که همه درایه‌های زیر قطر اصلیش صفر هستند. توجه کنید که عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده (۷) متناظر عملیهای مجاز در معادله‌های دستگاه (۱) است. در مثال زیر این روند را نشان داده‌ایم.

دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned} \quad (8)$$

را حل کنید.

ماتریس افزوده دستگاه (۸) عبارت است از

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right). \quad (9)$$

حال عملیات سطری را روی ماتریس (۹) با هدف صفر کردن قسمت پایین چپ ماتریس انجام می‌دهیم. هر قدم را شرح می‌دهیم و نتیجه را در زیر آن ثبت می‌کنیم.

(الف) سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم و (-2) برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array} \right)$$

(ب) سطر دوم را در -1 ضرب می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array} \right)$$

(ج) (-3) برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

(د) سطر سوم را بر (-4) تقسیم می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

مثال
۱

ماتریسی که به این صورت به‌دست آمد، متناظر دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= -2, \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

است که معادل دستگاه اولیه (۸) است. توجه کنید که ضرایب معادله (۱۰) ماتریسی مثلثی تشکیل می‌دهند. از آخرین معادله دستگاه (۱۰) نتیجه می‌شود که $x_3 = 1$ ، از معادله دوم نتیجه می‌شود $-1 + x_2 = -2$ و از معادله اول نتیجه می‌شود $2 = 7 + 2x_2 - 3x_3$ ؛ پس

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که جواب دستگاه (۸) است. ضمناً چون جواب یکتاست، نتیجه می‌گیریم که ماتریس ضرایب نامنفرد است.

در باره جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (11)$$

به‌ازای مقادیر مختلف b_1, b_2, b_3 بحث کنید.

توجه کنید که ضرایب دستگاه (۱۱) جز ضرایب x_2 در معادله سوم، همان ضرایب دستگاه معادله (۸) هستند. ماتریس افزوده دستگاه (۱۱) عبارت است از

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right). \quad (12)$$

با انجام قدمهای (الف)، (ب) و (ج) در مثال ۱، ماتریس (۱۲) را به ماتریس

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{array} \right) \quad (13)$$

تبدیل می‌کنیم. معادله مربوط به سطر سوم ماتریس (۱۳) عبارت است از

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0; \quad (14)$$

پس دستگاه (۱۱) جوابی ندارد مگر اینکه b_1, b_2, b_3 در شرط (۱۴) صدق کنند. می‌توان نشان داد که این شرط همان معادله (۵) برای دستگاه (۱۱) است.

مثال
۲

اکنون فرض کنید $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ و $b_3 = -5$; در این صورت معادله (۱۴) برقرار است. پس دو سطر ماتریس (۱۳) متناظر با معادله‌های

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned} \quad (15)$$

هستند. برای حل معادله (۱۵) می‌توانیم یکی از مجهولها را دلخواه بگیریم و معادله را نسبت به دو مجهول دیگر حل کنیم. فرض کنید $x_3 = \alpha$ که در آن α اختیاری است، در این صورت

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha - 3, \\ x_1 &= 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4. \end{aligned}$$

با نماد برداری، جواب عبارت است از

$$x = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که جمله دوم عبارت سمت راست معادله (۱۶) جواب دستگاه ناهمگن (۱۱) است و جمله اول جواب عمومی دستگاه همگن متناظر دستگاه (۱۱) است.

ساده‌سازی سطری برای حل دستگاههای همگن و دستگاههایی که تعداد معادله‌هایشان با تعداد مجهولها متفاوت است نیز مفید است.

استقلال خطی. مجموعه k بردار $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ را وابسته خطی می‌گوییم اگر اعداد (مختلط) $c_1, \dots, c_k$ که حداقل یکی از آنها ناصفر است موجود باشد که

$$c_1 x^{(1)} + \dots + c_k x^{(k)} = 0. \quad (17)$$

به عبارت دیگر $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ وابسته خطی هستند اگر رابطه‌ای خطی میان آنها برقرار باشد. از طرف دیگر، اگر معادله (۱۷) ایجاب کند که $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ ، می‌گوییم $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ مستقل خطی هستند.

اکنون مجموعه‌ای از n بردار را در نظر بگیرید که هر کدام n مؤلفه دارند. فرض کنید $x_{ij} = x_i^{(j)}$ مؤلفه j ام بردار $x^{(j)}$ باشد و فرض کنید $X = (x_{ij})$ را می‌توان به صورت

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} c_1 + \dots + x_{1n}^{(n)} c_n \\ \vdots \\ x_{n1}^{(1)} c_1 + \dots + x_{nn}^{(n)} c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} c_1 + \dots + x_{1n} c_n \\ \vdots \\ x_{n1} c_1 + \dots + x_{nn} c_n \end{pmatrix} = Xc = 0 \quad (18)$$

نوشت. اگر $\det X \neq 0$ ، تنها جواب معادله (۱۸)، $c = 0$ است، اما اگر $\det X = 0$ جوابهای ناصفر هم موجود هستند. پس بردارهای $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\det X \neq 0$.

معین کنید که بردارهای

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (19)$$

مستقل خطی هستند و یا وابسته خطی. اگر وابسته خطی هستند، رابطه‌ای خطی بین آنها بیابید. برای تعیین اینکه $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ وابسته خطی هستند یا نه، در جستجوی ثابتهای c_1 ، c_2 و c_3 هستیم که

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} = 0. \quad (20)$$

می‌توانیم معادله (۲۰) را به صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

بنویسیم و آن را با شروع از ماتریس افزوده

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array} \right) \quad (22)$$

با عملیات سطری مقدماتی حل کنیم.

مانند مثالهای ۱ و ۲ این کار را انجام می‌دهیم.

الف) (۲-) برابر سطر اول را به سطر دوم و سطر اول را به سطر سوم اضافه می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array} \right)$$

ب) سطر دوم را بر ۳- تقسیم می‌کنیم و سپس (۵-) برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

پس به دستگاه معادل

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0 \\ c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

می‌رسیم. از معادله دوم از معادله‌های (۲۳) نتیجه می‌شود $c_2 = 3c_3$ و از معادله اول به دست می‌آوریم $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. پس c_1 و c_2 را برحسب c_3 نوشتیم و c_3 را دلخواه گرفتیم. اگر c_3 را ۱- انتخاب کنیم آنگاه

مثال
۳

$c_1 = 2$ و $c_2 = -3$. به این ترتیب رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت

$$2x^{(1)} - 3x^{(2)} - x^{(3)} = 0$$

نوشت و بردارهای داده‌شده وابسته خطی هستند.

می‌توانستیم $\det(x_{ij})$ را، که ستونهایش مؤلفه‌های $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ هستند، حساب کنیم؛ یعنی

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

و ببینیم که برابر صفر است و نتیجه بگیریم که $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ وابسته خطی هستند. با این حال، اگر ضرایب c_1 ، c_2 و c_3 هم خواسته شده باشند، باز هم باید معادله (۲۰) را حل کنیم که آنها را به دست بیاوریم.

گاهی مفید است که ستونها (یا سطرها)ی ماتریس A را بردار در نظر بگیریم. این بردارهای ستونی (یا سطری) مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$. علاوه بر این، اگر $C = AB$ ، می‌توان نشان داد که $\det C = (\det A)(\det B)$ ؛ بنابراین اگر ستونها (یا سطرها)ی هر دو ماتریس A و B مستقل خطی باشند، ستونها (یا سطرها)ی ماتریس C هم مستقل خطی هستند.

اکنون مفهوم وابستگی و استقلال خطی را به مجموعه‌ای از تابعهای برداری مانند $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ که در بازه $\alpha < t < \beta$ تعریف شده‌اند تعمیم می‌دهیم. می‌گوییم بردارهای $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی هستند اگر ثابتهای $c_1, \dots, c_k$ وجود داشته باشند که اقلاً یکی از آنها ناصفر است و به ازای هر t در این بازه، $c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_k x^{(k)}(t) = 0$. در غیر این صورت می‌گوییم $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ در این بازه مستقل خطی هستند. توجه کنید که اگر $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ در بازه‌ای وابسته خطی باشند، در هر نقطه آن بازه وابسته هستند؛ اما اگر $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ در بازه‌ای مستقل خطی باشند، ممکن است در هر نقطه مشخص مستقل و یا وابسته خطی باشند — در حقیقت، ممکن است با ثابتهای متفاوت در نقاط متفاوت در هر نقطه وابسته خطی باشند. به عنوان مثال، مسئله ۱۵ را ببینید.

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه. معادله

$$Ax = y \quad (24)$$

را می‌توان تبدیل خطی‌ای دید که بردار داده‌شده x را به بردار جدید y می‌نگارد (یا تبدیل می‌کند). بردارهایی که به مضربی از خودشان تبدیل می‌شوند، نقش مهمی در بسیاری از کاربردها دارند.^۱ برای یافتن چنین بردارهایی فرض می‌کنیم $y = \lambda x$ که در آن λ ضریب اسکالر تناسب است و در جستجوی جوابهای معادله

$$Ax = \lambda x \quad (25)$$

۱. به عنوان مثال، در پیدا کردن محورهای اصلی فشار یا کشش یک جسم کُشان و در یافتن وضعهای نوسان آزاد در دستگاههای پایدار با تعداد متناهی درجه آزادی با این مسئله روبه‌رو می‌شویم.

و یا

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (26)$$

هستیم. معادله آخری جواب ناصفر دارد اگر و تنها اگر λ به گونه‌ای انتخاب شود که

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (27)$$

به مقدارهایی از λ که در معادله (۲۷) صدق می‌کنند مقدارهای ویژه ماتریس A می‌گوییم و به هر جواب ناصفر معادله‌های (۲۵) یا (۲۶)، که با چنین مقداری از λ به دست می‌آید، بردار ویژه وابسته به این مقدار ویژه می‌گوییم. اگر A ماتریسی 2×2 باشد، معادله (۲۶) به شکل

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

است و معادله (۲۷) تبدیل می‌شود به

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0. \quad (29)$$

در مثال بعدی چگونگی یافتن مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه را نشان داده‌ایم.

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

را به دست بیاورید.

مقدارهای ویژه λ و بردارهای ویژه x در معادله $(A - \lambda I)x = 0$ صدق می‌کنند؛ یعنی

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

مقدارهای ویژه ریشه‌های معادله

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (32)$$

هستند؛ پس مقدارهای ویژه عبارت‌اند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = -1$.

برای تعیین بردارهای ویژه به معادله (۳۱) بازمی‌گردیم و به جای λ مقدارهای ویژه را قرار می‌دهیم. به ازای $\lambda = 2$ ،

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (33)$$

بنابراین هر سطر این معادله برداری به شرط $x_1 - x_2 = 0$ منجر می‌شود که یعنی $x_1 = x_2$ مساوی هستند اما مقدارشان

مثال
۴

معین نیست. اگر $x_1 = c$ آنگاه $x_1 = c$ و بردار ویژه $x^{(1)}$ عبارت است از

$$x^{(1)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0; \quad (33)$$

پس خانواده‌ای نامتناهی از بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه λ_1 موجودند که با ثابت دلخواه c مشخص می‌شوند. تنها یک عضو از این خانواده را به عنوان نماینده انتخاب می‌کنیم. در این مثال ساده‌ترین انتخاب $c = 1$ است؛ پس به جای معادله (۳۳) می‌نویسیم

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

و به خاطر داریم که هر مضرب ناصفر این بردار هم بردار ویژه است. می‌گوییم $x^{(1)}$ بردار ویژه‌ای نظیر مقدار ویژه $\lambda_1 = 2$ است.

اکنون در معادله (۳۱) قرار می‌دهیم $\lambda = -1$ ، نتیجه می‌شود

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

مجدداً تنها یک معادله برحسب x_1 و x_2 به دست می‌آوریم، یعنی $x_1 - x_2 = 0$. پس بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda_2 = -1$ عبارت است از

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

یا هر مضرب ناصفر این بردار.

همان‌طور که در مثال ۴ دیدیم، بردارهای ویژه تا مضربی ثابت و ناصفر اما دلخواه تعیین می‌شوند. اگر این ثابت به نحوی مشخص شود، می‌گوییم بردارهای ویژه نرمال شده هستند. در مثال ۴، ثابت c را طوری انتخاب کردیم که مؤلفه‌های بردار ویژه اعداد صحیح کوچکی باشند؛ اما هر انتخاب دیگر c هم همین قدر معتبر است، هرچند که ممکن است کمتر مناسب باشد. گاهی مفید است که بردار ویژه x را طوری با انتخاب ثابت نرمال کنیم که طول آن، یعنی $\|x\| = (x, x)^{1/2} = 1$ برابر ۱ باشد.

معادله (۲۷) نسبت به λ چندجمله‌ای از درجه n است، بنابراین n مقدار ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ موجودند که ممکن است بعضی از آنها تکراری باشند. اگر یک مقدار ویژه مفروض، m بار در ریشه‌های معادله (۲۷) ظاهر شود، می‌گوییم تکرر جبری آن مقدار ویژه m است. هر مقدار ویژه حداقل یک بردار ویژه متناظر دارد، و مقدار ویژه‌ای با تکرر جبری m ممکن است q بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد. به عدد q تکرر هندسی مقدار ویژه می‌گوییم. می‌توان نشان داد که

$$1 \leq q \leq m. \quad (38)$$

علاوه بر این، می‌توان مثالهایی آورد که نشان می‌دهند q می‌تواند هر عدد صحیح در این بازه باشد. اگر هر مقدار ویژه A ساده باشد (یعنی تکرر جبریش یک باشد)، تکرر هندسی هر مقدار ویژه هم یک است.

می‌توان نشان داد که اگر λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه متمایز A باشند، بردارهای ویژه نظیر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ مستقل

خطی هستند (مسئله ۳۴ را ببینید). این حکم را می‌توان به هر مجموعه $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ از مقدارهای ویژه تعمیم داد: بردارهای ویژه $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ متناظر آنها مستقل خطی هستند؛ پس اگر همه مقدارهای ویژه ماتریس $n \times n$ می‌مانند A ساده باشند، n بردار ویژه A ، یکی به ازای هر مقدار ویژه، مستقل خطی هستند. از طرف دیگر اگر A یک و یا بیشتر مقدار ویژه تکراری داشته باشد، ممکن است کمتر از n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد، چون به ازای یکی از مقدارهای ویژه تکراری ممکن است $q < m$. همان‌طور که در بخش ۸.۷ خواهیم دید، این موضوع ممکن است باعث پیچیدگیهایی در حل دستگاه معادلات دیفرانسیل شود.

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

را بیابید.

مقادیر ویژه λ و بردارهای ویژه x در معادله $(A - \lambda I)x = 0$ یا

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

صدق می‌کنند. مقدارهای ویژه ریشه‌های معادله

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \quad (41)$$

هستند. ریشه‌های معادله (۴۱) عبارت‌اند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ؛ پس ۲ مقدار ویژه ساده است و ۱- مقدار ویژه‌ای با تکرر ۲ است.

برای یافتن بردار ویژه $x^{(1)}$ وابسته به مقدار ویژه λ_1 ، در معادله (۴۰) قرار می‌دهیم $\lambda = 2$ ؛ در نتیجه

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

این معادله را می‌توانیم با استفاده از عملیات سطری مقدماتی به دستگاه معاد

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

ساده کنیم. با حل این دستگاه به بردار ویژه

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

مثال

۵

می‌رسیم. به‌ارای $\lambda = -1$ ، معادله (۴۵) بلافاصله به معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (45)$$

تبدیل می‌شود؛ پس می‌توانیم مقدار دو متغیر از x_1 ، x_2 و x_3 را دلخواه انتخاب کنیم و سومی را از معادله (۴۵) تعیین کنیم. به‌عنوان مثال اگر $c_1 = x_1 = c_2 = x_2 = -c_1 - c_2 = x_3$ با نماد برداری،

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

به‌عنوان مثال، با انتخاب $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ ، بردار ویژه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

به‌دست می‌آید. هر مضرب ناصفر $x^{(2)}$ هم بردار ویژه است، اما بردار ویژه دیگری را هم، که مستقل خطی است، می‌توان با انتخاب دیگری از c_1 و c_2 به‌دست آورد؛ به‌عنوان مثال با $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$. به این ترتیب

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

که بردار ویژه است و مستقل خطی از $x^{(2)}$ است. بنابراین در این مثال، متناظر مقدار ویژه مضاعف، دو بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد.

رده خاص مهمی از ماتریس‌ها، که به آنها ماتریس‌های خودالحاق یا هرمیتی می‌گوییم، ماتریس‌هایی هستند که $A^* = A$ ؛ یعنی $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. ماتریس‌های هرمیتی ماتریس‌های متقارن حقیقی را در بر دارند؛ یعنی ماتریس‌هایی که درایه‌هایشان حقیقی هستند و $A^T = A$. مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های هرمیتی خاصیت‌های جالبی دارند:

۱. همه مقادیر ویژه حقیقی هستند؛

۲. چه مقدارهای ویژه ساده باشند و چه تکراری، همواره مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد.

۳. اگر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ بردارهای ویژه وابسته به مقدارهای ویژه متمایز باشند، $(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$. پس اگر همه مقدارهای ویژه ساده باشند، بردارهای ویژه وابسته به آنها مجموعه‌ای متعامد از بردارها تشکیل می‌دهند.

۴. متناظر هر مقدار ویژه با تکرر جبری m ، می‌توان m بردار ویژه دوبه‌دو متعامد انتخاب کرد. پس همواره می‌توان مجموعه‌ای از n بردار ویژه متعامد و همچنین مستقل خطی انتخاب کرد.

خطوط اساسی اثبات گزاره‌های ۱ و ۳ را در مسئله‌های ۳۲ و ۳۳ آورده‌ایم. در مثال ۵ بالا که ماتریس حقیقی و متقارن است، خواص ۱، ۲ و ۳ را دیدیم؛ اما انتخاب $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ خاصیت ۴ را نداشت. می‌توانستیم $x^{(3)}$ را

با $c_1 = 1$ و $c_2 = -2$ در معادله (۴۶) انتخاب کنیم؛ اگر چنین می‌کردیم،

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

را به‌عنوان بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda = -1$ به‌دست می‌آوردیم. این بردارهای ویژه هم به یکدیگر و هم بر بردار $x^{(1)}$ متناظر مقدار ویژه $\lambda = 2$ عمود هستند.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، با دستگاه معادلات داده‌شده را حل کنید و یا ثابت کنید جوابی موجود نیست.

$$\begin{array}{ll} 1. & x_1 - x_2 = 0 \\ 2. & x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3. & x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4. & x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5. & x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 6. & x_1 - x_2 = 0 \\ 7. & 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 8. & 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 9. & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 10. & 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 11. & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 12. & 2x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{array}$$

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۱، معین کنید که اعضای مجموعه داده‌شده از بردارها مستقل خطی هستند یا نه. اگر وابسته خطی بودند، رابطه‌ای خطی بین آنها بیابید. برای صرفه‌جویی در فضا بردارها به‌صورت سطری نوشته شده‌اند، اما آنها را به‌صورت بردارهای ستونی در نظر می‌گیریم، یعنی به‌جای خود بردارها از ترانزاده‌شان استفاده می‌کنیم.

$$7. \quad x^{(2)} = (1, 0, 1), x^{(3)} = (0, 1, 1), x^{(1)} = (1, 1, 0)$$

$$8. \quad x^{(2)} = (-1, 2, 0), x^{(3)} = (1, 1, 0), x^{(1)} = (2, 1, 0)$$

$$9. \quad x^{(2)} = (-3, 0, -1, 3), x^{(3)} = (-2, -1, 1, 0), x^{(4)} = (-1, 0, 3, 1), x^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$$

$$10. \quad x^{(2)} = (3, -1, 1, 3), x^{(3)} = (-1, 0, 2, 2), x^{(4)} = (2, 3, 1, -1), x^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$$

$$11. \quad x^{(2)} = (4, 3, 0), x^{(3)} = (2, 3, 1), x^{(4)} = (3, 1, -1), x^{(1)} = (1, -1, -2)$$

۱۲. فرض کنید هر یک از بردارهای $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ مؤلفه داشته باشند که در آن $n < m$. ثابت کنید بردارهای $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ وابسته خطی هستند.

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ و ۱۴، معین کنید که در $-\infty < t < \infty$ ، مجموعه مفروض بردارها مستقل خطی هستند یا خیر. اگر وابسته خطی بودند، رابطه‌ای خطی بین آنها بیابید. مانند مسئله‌های ۷ تا ۱۱، برای صرفه‌جویی در فضا، بردارها به‌صورت سطری نوشته شده‌اند.

$$13. \quad x^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0), x^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t}), x^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$$

$$۱۴. \quad x^{(1)}(t) = (\sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad x^{(2)}(t) = (\sqrt{2} \sin t, \sin t)$$

۱۵. فرض کنید

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

ثابت کنید در هر یک از نقاط بازه $0 \leq t \leq 1$ ، $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ وابسته خطی هستند؛ اما $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ روی بازه $0 \leq t \leq 1$ مستقل خطی هستند.

در هر یک از مسئله‌های ۱۶ تا ۲۵، همه مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس داده شده را بیابید.

$$۱۶. \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ۱۷. \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$۱۸. \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad ۱۹. \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$۲۰. \quad \begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad ۲۱. \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$۲۲. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ۲۳. \quad \begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

$$۲۴. \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad ۲۵. \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

در مسئله‌های ۲۶ تا ۳۰، به حل مسئله $Ax = b$ می‌پردازیم که در آن $\det A = 0$.

۲۶. الف) فرض کنید که A ماتریس $n \times n$ و حقیقی مقدار باشد. ثابت کنید به ازای هر دو بردار دلخواه x و y ، $(Ax, y) = (x, A^T y)$.

راهنمایی: شاید ساده‌تر باشد که ابتدا حالت $n = 2$ را در نظر بگیرید و سپس نتیجه را به n دلخواه تعمیم بدهید.

ب) اگر حقیقی بودن A معلوم نباشد، ثابت کنید به ازای هر دو بردار x و y ، $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

۲۷. فرض کنید به ازای ماتریس مغزوف A ، بردار ناصفری مانند x موجود است که $Ax = 0$. ثابت کنید که بردار ناصفری مانند y نیز موجود است که $A^* y = 0$.

۲۸. فرض کنید $\det A = 0$ و $Ax = b$ جواب دارد. ثابت کنید $(b, y) = 0$ که در آن y جواب دلخواهی از $A^* y = 0$ است. ثابت کنید که این گزاره برای مجموعه معادله‌های مثال ۲ درست است.

راهنمایی: از نتیجه مسئله ۲۶ (ب) استفاده کنید.

۲۹. فرض کنید که $\det A = 0$ و $x = x^{(0)}$ جواب $Ax = b$ است. ثابت کنید که اگر ξ جواب $A\xi = 0$ باشد و α ثابت باشد، $x + \alpha\xi$ هم جواب $Ax = b$ است.

۳۰. فرض کنید که $\det A = 0$ و y جواب $A^* y = 0$ است. ثابت کنید که اگر به ازای هر چنین y ، $(b, y) = 0$ آنگاه $Ax = b$ جواب دارد. توجه کنید که این حکم، عکس مسئله ۲۸ است. شکل جواب را در مسئله ۲۹ آورده‌ایم. راهنمایی: رابطه $A^* y = 0$ درباره سطرهای A چه می‌گوید؟ مجدداً در نظر گرفتن حالت $n = 2$ در ابتدا مفید است.

۳۱. ثابت کنید $\lambda = 0$ مقدار ویژه است اگر و تنها اگر A منفرد باشد.

۳۲. در این مسئله نشان می‌دهیم که مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی A حقیقی هستند. فرض کنید x بردار ویژه‌ای متناظر مقدار ویژه λ باشد.

الف) ثابت کنید $(Ax, x) = (x, Ax)$. راهنمایی: مسئله ۲۶ (ج) را ببینید.

ب) ثابت کنید $\lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x)$. راهنمایی: یادآوری می‌کنیم که $Ax = \lambda x$.

ج) ثابت کنید $\bar{\lambda} = \lambda$ ، یعنی مقدار ویژه λ حقیقی است.

۳۳. ثابت کنید که اگر λ_1 و λ_2 مقدارهای ویژه ماتریس هرمیتی A باشند و اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، بردارهای ویژه متناظرشان، $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ متعامدند.

راهنمایی: با استفاده از نتایج مسئله‌های ۲۶ (ج) و ۳۲ ثابت کنید که $(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$.

۳۴. ثابت کنید که اگر λ_1 و λ_2 مقدارهای ویژه ماتریس دلخواه A باشند و اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، بردارهای ویژه متناظرشان، $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ مستقل خطی هستند.

راهنمایی: با $c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} = 0$ شروع کنید، آن را در A ضرب کنید تا به $c_1 \lambda_1 x^{(1)} + c_2 \lambda_2 x^{(2)} = 0$ برسید. سپس ثابت کنید $c_1 = c_2 = 0$.

۴.۷. نظریه پایه‌ای دستگاه معادلات خطی مرتبه اول

نظریه عمومی دستگاه n معادله مرتبه اول خطی، یعنی

$$x'_1 = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t),$$

$$\vdots$$

$$(۱)$$

$$x'_n = p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)$$

کاملاً مشابه معادله خطی مرتبه n است، بنابراین در این بخش همان خطوط بحث بخش‌های ۲.۳ و ۱.۴ را دنبال می‌کنیم. برای اینکه دستگاه (۱) را بهتر بررسی کنیم آن را با استفاده از نمادهای ماتریسی می‌نویسیم؛ یعنی $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ را مؤلفه‌های $x = \phi(t)$ در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب، $g_1(t), \dots, g_n(t)$ را مؤلفه‌های بردار $g(t)$ و $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ را به مؤلفه‌های ماتریس $n \times n$ می‌نامیم مانند $P(t)$ در نظر می‌گیریم در این صورت، معادله (۱) به شکل

$$x' = P(t)x + g(t) \quad (۲)$$

درمی‌آید. با استفاده از بردارها و ماتریس‌ها، علاوه بر صرفه‌جویی در فضا و راحتی محاسبات، بر تشابه دستگاه معادلات و تک‌معادله (اسکالر) هم تأکید می‌کنیم.

می‌گوییم بردار $x = \phi(t)$ جواب معادله (۲) است اگر مؤلفه‌هایش در دستگاه معادلات (۱) صدق کنند. در این بخش فرض می‌کنیم P و g روی بازه‌ای مانند $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند، یعنی همه تابعهای اسکالر $g_1, \dots, g_n, p_{11}, \dots, p_{nn}$ در این بازه پیوسته‌اند. طبق قضیه ۲.۱.۷ این شرط برای وجود جواب معادله (۲) در بازه $\alpha < t < \beta$ کافی است.

راحت‌تر است که ابتدا معادله همگن

$$x' = P(t)x \quad (۳)$$

را که با قرار دادن $g(t) = 0$ در معادله (۲) به دست می‌آید در نظر بگیریم. وقتی معادله همگن حل شد، برای حل معادله غیرهمگن (۲) روشهای مختلفی را می‌توان به کار گرفت؛ در بخش ۹.۷ به این موضوع می‌پردازیم. برای نمایش جوابهای مشخص مسئله (۳) از نماد

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (۴)$$

استفاده می‌کنیم. توجه کنید که $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ مؤلفه i ام جواب j ام $x^{(j)}(t)$ را نشان می‌دهد. نکات اصلی مربوط به ساختار جوابهای دستگاه (۳) را در قضایای ۱.۴.۷ و ۴.۴.۷ بیان کرده‌ایم. این قضیه‌ها کاملاً مشابه قضایای متناظرشان در بخش‌های ۲.۳ و ۱.۴ هستند، بعضی از اثباتها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار کرده‌ایم.

قضیه ۱.۴.۷

اگر تابعهای برداری $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشند، بازای هر ثابت c_1 و c_2 ترکیب خطی $c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$ هم جواب است.

این همان اصل برهم‌نهی است؛ به سادگی می‌توان آن را با گرفتن مشتق از $c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$ و استفاده از اینکه $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ در معادله (۳) صدق می‌کنند، ثابت کرد. با استفاده مکرر از قضیه ۱.۴.۷ به این نتیجه می‌رسیم که اگر $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ جوابهای معادله (۳) باشند، بازای هر ثابت $c_1, \dots, c_k$ بردار

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_k x^{(k)}(t) \quad (۵)$$

هم جواب است. به عنوان مثال، می‌توان نشان داد که

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (۶)$$

در معادله

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \quad (۷)$$

صدق می‌کند. طبق قضیه ۱.۴.۷، بردار

$$\begin{aligned} x &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (۸)$$

هم در معادله (۷) صدق می‌کند.

همان‌طور که قبلاً ذکر کردیم، با استفاده مکرر از قضیه ۱.۴.۷ نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی متناهی از جوابهای معادله (۳) هم جواب است. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان به این ترتیب همه جوابهای (۳) را یافت یا نه. به قیاس موارد قبلی، این انتظار منطقی است که در مورد دستگاهی به شکل (۳) از n معادله مرتبه اول تشکیل ترکیب خطی‌ای از n جواب مناسب کافی باشد. بنابراین فرض کنید $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ جوابهای دستگاه مرتبه n ام معادله (۳) باشند و ماتریس $X(t)$ را در نظر بگیرید که ستونهایش بردارهای $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ هستند؛ یعنی

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (۹)$$

از بخش ۳.۷ می‌دانیم که به ازای مقدار مفروضی از t ، ستونهای ماتریس $X(t)$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر به ازای آن مقدار t ، $\det X \neq 0$. به این دترمینان رانسکین n جواب $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ می‌گوییم و آن را با $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ هم نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) = \det X(t). \quad (۱۰)$$

در این صورت در هر نقطه مفروض، جوابهای $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر در آن نقطه $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ ناصفر باشد.

قضیه ۲.۴.۷

اگر تابعهای برداری $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در هر نقطه بازه $\alpha < t < \beta$ جوابهای مستقل خطی دستگاه (۳) باشند، هر جواب دستگاه (۳) مانند $x = \phi(t)$ را می‌توان به طور یکتا به صورت ترکیب خطی‌ای از $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مانند

$$\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t) \quad (۱۱)$$

نوشت.

قبل از اثبات قضیه ۲.۴.۷، توجه کنید که طبق قضیه ۱.۴.۷، هر عبارت به صورت (۱۱) جواب دستگاه (۳) است و در قضیه ۲.۴.۷ ادعا شده که همه جوابها را می‌توان به صورت (۱۱) نوشت. اگر $c_1, \dots, c_n$ دلخواه در نظر گرفته شوند، معادله (۱۱) دربرگیرنده همه جوابهای (۳) است، و متداول است که به آن جواب عمومی بگوییم. به هر مجموعه از جوابهای $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ برای معادله (۳) که در نقطه بازه $\alpha < t < \beta$ مستقل خطی باشند، مجموعه اساسی جوابها در آن بازه می‌گوییم.

برای اثبات قضیه ۲.۴.۷ نشان خواهیم داد که هر جواب معادله (۳) را می‌توان به‌ازای مقدارهای مناسب $c_1, \dots, c_n$ به‌صورت $\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$ نوشت. فرض کنید $t = t_0$ نقطه‌ای در بازه $\alpha < t < \beta$ باشد و فرض کنید $\xi = \phi(t_0)$. می‌خواهیم بدانیم که جوابی به‌صورت $x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$ وجود دارد که در همان شرط اولیه $x(t_0) = \xi$ صدق کند یا نه؛ یعنی می‌خواهیم بدانیم که مقدارهایی برای $c_1, \dots, c_n$ وجود دارند که

$$c_1 x^{(1)}(t_0) + \dots + c_n x^{(n)}(t_0) = \xi \quad (12)$$

یا به‌صورت اسکالر،

$$\begin{aligned} c_1 x_{11}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) &= \xi_1 \\ &\vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) &= \xi_n \end{aligned} \quad (13)$$

شرط لازم و کافی برای اینکه معادله (۱۳) جواب یکتایی برای $c_1, \dots, c_n$ داشته باشد، دقیقاً ناصفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب است که همان رانسکین $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ است که در $t = t_0$ محاسبه شده است. فرض استقلال خطی $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در طول بازه $\alpha < t < \beta$ ناصفر بودن $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ در $t = t_0$ را تضمین می‌کند و بنابراین جوابی (یکتا) به‌صورت $x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$ برای معادله (۳) موجود است که در شرط اولیه (۱۲) هم صدق می‌کند. با استفاده از قسمت یکتایی قضیه ۲.۱.۷، این جواب با $\phi(t)$ برابر است و بنابراین همان‌طور که می‌خواستیم، $\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$.

قضیه ۳.۴.۷

اگر $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ جوابهای معادله (۳) در بازه $\alpha < t < \beta$ باشند آنگاه $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ در این بازه یا متحد با صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود.

اهمیت قضیه ۳.۴.۷ در این است که ما را از محاسبه $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ در همه نقاط بازه راحت می‌کند و می‌توانیم صرفاً با محاسبه رانسکین در یک نقطه دلخواه این بازه، تعیین کنیم که $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند یا نه.

برای اثبات قضیه ۳.۴.۷، ابتدا نشان می‌دهیم که رانسکین $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn})W \quad (14)$$

صدق می‌کند (مسئله ۲ را ببینید)؛ بنابراین

$$W(t) = c \exp \left\{ \int [p_{11}(t) + p_{22}(t) + \dots + p_{nn}(t)] dt \right\} \quad (15)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است و حکم قضیه بلافاصله نتیجه می‌شود. عبارت معادله (۱۵) برای $W(t)$ به فرمول آبل مشهور است؛ به تشابه آن با معادله (۲۷) بخش ۲.۳ توجه کنید.

به‌طور معادل، قضیه ۳.۴.۷ را می‌توان به این‌صورت ثابت کرد که اگر n جواب $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در نقطه $t = t_0$ وابسته خطی باشند، باید در هر نقطه $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی باشند (مسئله ۸ را ببینید). در نتیجه اگر $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ در یک نقطه مستقل خطی باشند، باید در همه نقاط بازه مستقل خطی باشند.

قضیه بعد بیان می‌کند که دستگاه (۳) همواره مجموعه‌ای اساسی از جوابها دارد.

قضیه ۴.۴.۷ فرض کنید

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

و فرض کنید $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشند که به‌ترتیب در شرایط اولیه

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t_0) = e^{(n)} \quad (16)$$

صدق می‌کنند، که در آن نقطه‌ای در بازه $\alpha < t < \beta$ است. در این صورت $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای دستگاه (۳) تشکیل می‌دهند.

برای اثبات این قضیه باید توجه کنیم که وجود و یکتایی جوابهای $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ که در قضیه ۴.۴.۷ ذکر شده با استفاده از قضیه ۲.۱.۷ تضمین شده است. به‌سادگی می‌توان دید که رانسکین این جوابها در $t = t_0$ برابر با یک است، بنابراین $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند.

به محض اینکه یک مجموعه اساسی از جوابها پیدا شد، مجموعه‌های دیگر را می‌توان با تشکیل ترکیب (مستقل) خطی از جوابهای مجموعه اولی ایجاد کرد. مجموعه داده‌شده در قضیه ۴.۴.۷ معمولاً برای مقاصد نظری از بقیه ساده‌تر است. به‌طور خلاصه:

۱. هر مجموعه از n جواب مستقل خطی دستگاه (۳) مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهد.
۲. تحت شرایط مطرح شده در این بخش، این مجموعه‌های اساسی همواره موجودند.
۳. هر جواب دستگاه $x = P(t)x'$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از مجموعه اساسی جوابها نمایش داد.

مسئله ۱

۱. حکم بعد از قضیه ۱.۴.۷ را برای عدد صحیح دلخواه k ثابت کنید.

۲. در این مسئله طرح اثبات قضیه ۳.۴.۷ را در حالت $n = 2$ ارائه می‌کنیم. فرض کنید $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ جوابهای معادله (۳) در بازه $\alpha < t < \beta$ باشند و فرض کنید W رانسکین $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ باشد.

الف) ثابت کنید

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

(ب) با استفاده از معادله (۳) ثابت کنید

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

(ج) با حل معادله دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (ب)، $W(t)$ را پیدا کنید. با استفاده از این عبارت قضیه ۳.۴.۷ را ثابت کنید.

(د) با تعمیم روند بخش‌های (الف)، (ب) و (ج)، قضیه ۳.۴.۷ را به ازای هر مقدار دلخواه n ثابت کنید.

۳. ثابت کنید که رانسکین دو مجموعه اساسی از جوابهای دستگاه (۳) مضربی ثابت از هم هستند. راهنمایی: از معادله (۱۵) استفاده کنید.

۴. اگر $x_1 = y$ و $x_2 = y'$ ، معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (i)$$

با دستگاه

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{aligned} \quad (ii)$$

متناظر است. ثابت کنید اگر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله (ii) تشکیل بدهند و اگر $y^{(1)}$ و $y^{(2)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله (i) تشکیل بدهند آنگاه $cW[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[x^{(1)}, x^{(2)}]$ که در آن c ثابتی ناصفر است.

راهنمایی: $y^{(1)}(t)$ و $y^{(2)}(t)$ باید ترکیبی خطی از $x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$ باشند.

۵. ثابت کنید جواب عمومی معادله $x' = P(t)x + g(t)$ حاصل جمع جواب خاصی مانند $x^{(p)}$ برای این معادله و جواب عمومی $x^{(e)}$ برای معادله همگن متناظرش است.

۶. بردارهای $x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ و $x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

(الف) رانسکین $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ را محاسبه کنید.

(ب) در کدام بازها $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ مستقل خطی هستند؟

(ج) چه نتیجه‌ای درباره ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیلی که $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ در آن صدق می‌کنند می‌توان به دست آورد؟

(د) این دستگاه معادلات را پیدا کنید و نتایج بخش (ج) را ثابت کنید.

۷. بردارهای $x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ و $x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید و به همان سؤالاتی مسئله ۶ پاسخ بدهید.

در دو مسئله زیر اثبات دیگری برای قضیه ۲.۴.۷ آورده‌ایم.

۸. فرض کنید $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ جوابهای دستگاه $x' = P(t)x$ در بازه $\alpha < t < \beta$ باشند. فرض کنید P پیوسته باشد و t_0 نقطه‌ای دلخواه در این بازه باشد. ثابت کنید $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ در بازه $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی هستند اگر (و تنها اگر) $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(m)}(t_0)$ وابسته خطی باشند؛ به عبارت دیگر $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ در بازه (α, β) وابسته خطی هستند اگر در یک نقطه این بازه وابسته خطی باشند.

راهنمایی: ثابتهای $c_1, \dots, c_m$ موجودند که $c_1 x^{(1)}(t_0) + \dots + c_m x^{(m)}(t_0) = 0$. فرض کنید $z(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_m x^{(m)}(t)$ و با استفاده از قضیه یکتایی ثابت کنید به ازای هر t در بازه $\alpha < t < \beta$ ، $z(t) = 0$.

۹. فرض کنید $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ جوابهای مستقل خطی $x' = P(t)x$ در آن P در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته است.

(الف) ثابت کنید هر جواب $x = z(t)$ را به ازای ثابتهای مناسب $c_1, \dots, c_n$ می‌توان به صورت

$$z(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$$

نوشت.

راهنمایی: از نتایج مسئله ۱۲ بخش ۳.۷ و مسئله ۸ بالا استفاده کنید.

(ب) ثابت کنید عبارت جواب $z(t)$ در قسمت (الف) یکتاست؛ یعنی اگر $z(t) = k_1 x^{(1)}(t) + \dots + k_n x^{(n)}(t)$ آنگاه $k_n = c_n, \dots, k_1 = c_1$.

راهنمایی: ثابت کنید به ازای هر t در بازه $\alpha < t < \beta$ ، $(k_1 - c_1)x^{(1)}(t) + \dots + (k_n - c_n)x^{(n)}(t) = 0$ و از استقلال خطی $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ استفاده کنید.

۵.۷ دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

در این بخش دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت را بررسی می‌کنیم؛ یعنی دستگاهی به صورت

$$x' = Ax \quad (1)$$

که در آن A ماتریس $n \times n$ ثابتی است. علاوه بر این فرض می‌کنیم که همه درایه‌های A عددهایی حقیقی (و نه مختلط) هستند، مگر اینکه خلاف آن را تصریح کنیم. اگر $n = 1$ ، این دستگاه به تک معادله مرتبه اول

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (2)$$

ساده می‌شود که جواب آن $x = ce^{at}$ است. در بخش ۵.۲ دیدیم که اگر $a \neq 0$ ، $x = 0$ تنها جواب تعادلی است. اگر $a < 0$ ، جوابهای دیگر به $x = 0$ نزدیک می‌شوند و در این حالت می‌گوییم $x = 0$ جواب تعادلی مجانبی پایدار است. از طرف دیگر اگر $a > 0$ آنگاه $x = 0$ ناپایدار است، چون جوابهای دیگر از آن دور می‌شوند. برای دستگاه n معادله‌ای هم وضعیت مشابه است، اما پیچیده‌تر است. جوابهای تعادلی با حل $Ax = 0$ به دست می‌آیند. معمولاً فرض می‌کنیم که $\det A \neq 0$ ، بنابراین $x = 0$ تنها جواب تعادلی است. سؤال مهم این است که با افزایش t جوابهای دیگر به آن نزدیک می‌شوند یا از آن دور می‌شوند؛ به عبارت دیگر، $x = 0$ مجانبی پایدار است یا ناپایدار؟ یا احتمال دیگری هم موجود است؟

حالت $n = 2$ اهمیت خاصی دارد: در این حالت می‌توانیم جوابها را در صفحه $x_1 x_2$ — که به آن صفحه فاز می‌گوییم — نمایش بدهیم. با محاسبه Ax در چندین نقطه و رسم بردارهای حاصله، یک میدان جهت از بردارهای مماس بر جوابهای دستگاههای معادلات دیفرانسیل به دست می‌آوریم. معمولاً می‌توان با استفاده از میدان جهت تصویری کیفی از رفتار جوابها به دست آورد. با اضافه کردن چند منحنی جواب یا مدار در این نمودار،

اطلاعات دقیق‌تری به دست می‌آید. به نموداری که نمونه‌هایی از مدارهای دستگاه موردنظر در آن نمایش داده شده باشند، نمای فاز می‌گوییم. بعداً در این بخش مثالهایی از میدانهای جهت و نماهای فاز می‌آوریم.

برای یافتن جوابهای دستگاه (۱)، سعی می‌کنیم همان شیوه بررسی معادله‌های خطی مرتبه دوم در بخش ۱.۳ را تعمیم بدهیم؛ پس فرض می‌کنیم که یک جواب شامل تابع نمایی e^{rt} است. علاوه بر این، جوابهای معادله (۱) برداری هستند، بنابراین e^{rt} را در بردار ثابت ξ ضرب می‌کنیم. پس می‌خواهیم جوابی به صورت

$$x = \xi e^{rt} \quad (3)$$

برای معادله (۱) پیدا کنیم که در آن باید نمای r و بردار ثابت ξ تعیین شوند. با قرار دادن x از معادله (۳) در دستگاه (۱) نتیجه می‌شود

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}.$$

با حذف ضریب اسکالر ناصفر e^{rt} نتیجه می‌شود $A\xi = r\xi$ یا

$$(A - rI)\xi = 0 \quad (4)$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. پس برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) باید دستگاه معادلات جبری (۴) را حل کنیم. این مسئله همان مسئله تعیین مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A است؛ بنابراین اگر r مقدار ویژه ماتریس A و ξ بردار ویژه متناظر آن باشد، بردار x در معادله (۳) جواب معادله (۱) است.

در دو مثال زیر، روند حل دستگاه را برای ماتریس ضرایب 2×2 نشان داده‌ایم. به علاوه، نشان می‌دهیم که نمای فاز متناظر را چگونه باید ساخت. بعداً در همین بخش دستگاه کلی $n \times n$ را بیشتر بررسی می‌کنیم.

دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \quad (5)$$

را در نظر بگیرید. یک میدان جهت برای آن رسم کنید و رفتار کیفی جوابها را تعیین کنید. سپس جواب عمومی را پیدا کنید و چند مسیر آن را رسم کنید.

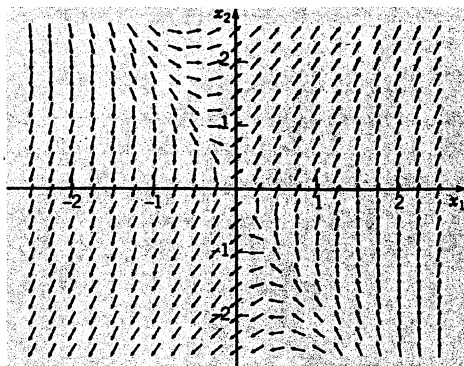
یک میدان جهت این دستگاه را در شکل ۱.۵.۷ نشان داده‌ایم. از این شکل به سادگی می‌توان دید که جواب، نوعاً همسایگی مبدأ را ترک می‌کند و در نهایت در ربع اول و سوم مختصات تقریباً شیب ۲ دارد.

برای یافتن جوابها، فرض می‌کنیم $x = \xi e^{rt}$ و x را در معادله (۵) قرار می‌دهیم و بالاخره به دستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

می‌رسیم. معادله‌های (۶) جواب غیربیهی دارند اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد؛ پس مقدارهای مجاز r را می‌توان از معادله

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad (7)$$



شکل ۱.۵.۷. میدان جهت دستگاه (۵).

به دست آورد. ریشه‌های معادله (۷)، $r_1 = 3$ و $r_2 = -1$ هستند که همان مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب در معادله (۵) هستند. اگر $r = 3$ ، دستگاه (۶) به تک معادله

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0 \quad (8)$$

تبدیل می‌شود. پس $2\xi_1 = \xi_2$ و بردار ویژه متناظر $r_1 = 3$ را می‌توان

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

در نظر گرفت. به همین ترتیب، اگر $r_2 = -1$ نتیجه می‌شود $2\xi_1 = -\xi_2$ ، بنابراین بردار ویژه متناظر عبارت است از

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

جوابهای متناظر دستگاه معادلات دیفرانسیل عبارت‌اند از

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (11)$$

رانسکین این جوابها عبارت است از

$$W[x^{(1)}, x^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t} \quad (12)$$

که هرگز صفر نمی‌شود؛ پس $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و جواب عمومی دستگاه (۵) عبارت است از

$$\begin{aligned} x &= c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند.

برای نمایش جواب (۱۳) می‌توانیم نمودار آن در صفحه x_1x_2 را به‌ازای مقدارهای مختلف ثابتهای c_1 و c_2 در نظر بگیریم. با $x = c_1x^{(1)}(t)$ و یا صورت اسکالر

$$x_1 = c_1e^{3t}, \quad x_2 = 2c_1e^{3t}$$

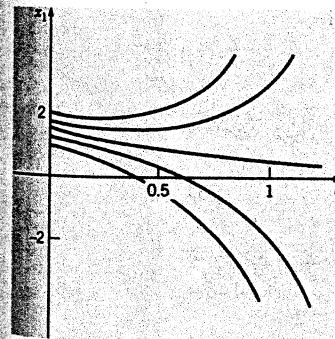
شروع می‌کنیم. با حذف t بین این دو معادله، معلوم می‌شود که این جواب روی خط مستقیم $x_2 = 2x_1$ واقع است (شکل ۲.۵.۷ (الف) را ببینید). این خط از مبدأ عبور می‌کند و در جهت بردار ویژه $\xi^{(1)}$ است. اگر به جواب به‌صورت مسیر ذره‌ای متحرک نگاه کنیم آنگاه وقتی $c_1 > 0$ ، ذره در ربع اول و وقتی $c_1 < 0$ در ربع سوم واقع است و در هر حالت ذره با افزایش t از مبدأ دور می‌شود. اکنون جواب $x = c_2x^{(2)}(t)$ یا

$$x_1 = c_2e^{-t}, \quad x_2 = -2c_2e^{-t}$$

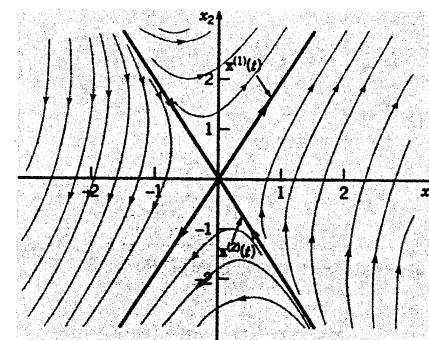
را در نظر می‌گیریم. این جواب روی خط $x_2 = -2x_1$ واقع است که جهتش با بردار ویژه $\xi^{(2)}$ معین می‌شود. وقتی $c_2 > 0$ جوابها در ربع چهارم و وقتی $c_2 < 0$ در ربع اول واقع‌اند (شکل ۲.۵.۷ (الف) را ببینید). در هر دو حالت ذره با افزایش t به طرف مبدأ حرکت می‌کند. جواب (۱۳) ترکیبی از $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ است. به‌ازای t های بزرگ، جمله $c_1x^{(1)}(t)$ غالب است و می‌توان از جمله $c_2x^{(2)}(t)$ چشم‌پوشی کرد؛ پس هر جوابی که در آن $c_1 \neq 0$ وقتی $t \rightarrow \infty$ به خط $x_2 = 2x_1$ می‌جانب می‌شود. به همین ترتیب، هر جوابی که در آن $c_2 \neq 0$ وقتی $t \rightarrow \infty$ به خط $x_2 = -2x_1$ می‌جانب می‌شود. نمودار چند جواب را در شکل ۲.۵.۷ (الف) نشان داده‌ایم. الگویی که در این شکل برای مسیرها دیده می‌شود، نوعاً برای هر دستگاه معادلات مرتبه دوم مانند $\dot{x} = Ax$ که مقدارهای ویژه حقیقی مختلف‌العلامه دارد هم دیده می‌شود. در این حالت به مبدأ نقطه زینی می‌گوییم. نقطه‌های زینی همیشه ناپایدارند، چون وقتی t افزایش می‌یابد، تقریباً همه مسیرها از آنها دور می‌شوند.

در بند قبل گفتیم که چطور با دست، پس از تعیین مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه، نمودارهای از مسیرهای دستگاه رسم کنیم که از نظر کیفی درست‌اند. اما برای به‌دست آوردن نموداری دقیق و با جزئیات مانند شکل ۲.۵.۷ (الف) و شکل‌های دیگری که بعداً در این فصل خواهیم دید، استفاده از رایانه اگر ضروری نباشد، بی‌اندازه مفید است.

به‌جای شکل ۲.۵.۷ (الف) می‌توان نمودار x_1 یا x_2 را به‌عنوان تابعی از t رسم کرد؛ چند نمودار نوعی x_1 برحسب t را در شکل ۲.۵.۷ (ب) نشان داده‌ایم، و نمودارهای x_2 برحسب t هم مشابه‌اند.



(ب)



(الف)

شکل ۲.۵.۷ (الف) مسیرهای دستگاه (۵)؛ مبدأ نقطه زینی است. (ب) نمودار x_1 برحسب t برای دستگاه (۵).

از شرایط اولیه معینی نتیجه می‌شود که در معادله (۱۳) $c_1 = 0$ ، بنابراین $x_1 = c_2e^{-t}$ و وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $x_1 \rightarrow 0$. چنین نموداری را در شکل ۲.۵.۷ (ب) متناظر با مسیری که در شکل ۲.۵.۷ (الف) به مبدأ میل می‌کند نشان داده‌ایم. اما اغلب $c_1 \neq 0$ ، بنابراین وجود جمله‌نمایی با نمای مثبت باعث می‌شود که x_1 با افزایش t به‌طور نمایی رشد کند. چند نمودار از این نوع را در شکل ۲.۵.۷ (ب) متناظر با مسیرهایی که همسایگی مبدأ را در شکل ۲.۵.۷ (الف) ترک می‌کنند، رسم کرده‌ایم. درک رابطه بین قسمت‌های (الف) و (ب) شکل ۲.۵.۷ و شکل‌های مشابهی که بعداً خواهیم دید بسیار مهم است، چون ممکن است بخواهیم جوابها را یا در صفحه x_1x_2 و یا به‌عنوان تابعی از متغیر مستقل t نشان بدهیم.

دستگاه

$$\dot{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x \quad (14)$$

را در نظر بگیرید. یک میدان جهت برای این دستگاه رسم کنید، سپس جواب عمومی آن را بیابید و نمودار چند مسیر را در صفحه فاز رسم کنید.

از میدان جهت دستگاه (۱۴) در شکل ۳.۵.۷ واضح است که همه جوابها به مبدأ میل می‌کنند. برای یافتن جوابها فرض می‌کنیم $x = \xi e^{rt}$ ؛ در این صورت به دستگاه جبری

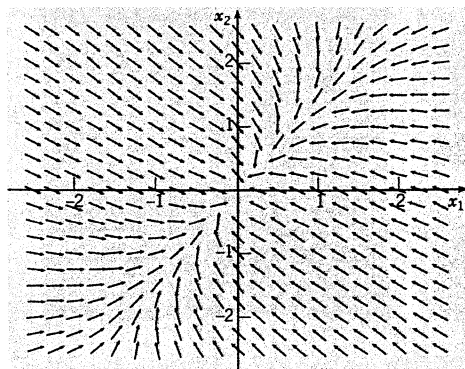
$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

می‌رسیم. مقدارهای ویژه در معادله

$$\begin{aligned} (-3-r)(-2-r) - 2 &= r^2 + 5r + 4 \\ &= (r+1)(r+4) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

صدق می‌کنند؛ بنابراین $r_1 = -1$ و $r_2 = -4$. به‌ازای $r = -1$ معادله (۱۵) به

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$



شکل ۳.۵.۷ میدان جهت برای دستگاه (۱۴).

تبدیل می‌شود؛ بنابراین $\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1$ و بردار ویژه $\xi^{(1)}$ متناظر مقدار ویژه $\lambda_1 = -1$ را می‌توان به صورت

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (۱۸)$$

انتخاب کرد. به همین ترتیب، متناظر مقدار ویژه $\lambda_2 = -4$ به $\xi_1 = -\sqrt{2}\xi_2$ می‌رسیم، بنابراین بردار ویژه عبارت است از

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (۱۹)$$

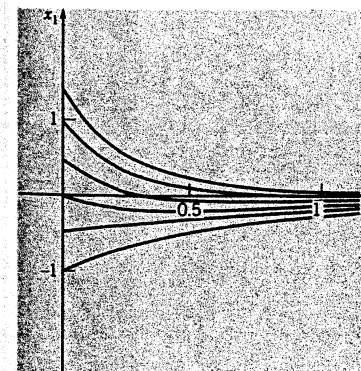
پس

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad (۲۰)$$

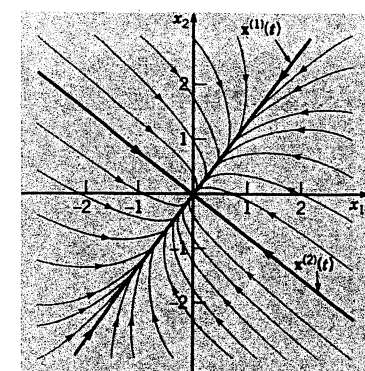
مجموعه‌ای اساسی از جوابهای دستگاه (۱۴) تشکیل می‌دهند و جواب عمومی عبارت است از

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \quad (۲۱)$$

نمودارهای جواب (۲۱) را بازاری چند مقدار c_1 و c_2 در شکل ۴.۵.۷ (الف) نشان داده‌ایم. جواب $x^{(1)}(t)$ در امتداد خط $x_2 = \sqrt{2}x_1$ به مبدأ میل می‌کند، در حالی که جواب $x^{(2)}(t)$ در امتداد خط $x_1 = -\sqrt{2}x_2$ به مبدأ میل می‌کند. جهت‌های این خطها به ترتیب با بردارهای ویژه $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ تعیین می‌شوند. در حالت کلی هر جواب ترکیبی از این دو جواب اساسی است. وقتی $t \rightarrow \infty$ ، جواب $x^{(1)}(t)$ در مقایسه با $x^{(2)}(t)$ قابل چشم‌پوشی است؛ پس اگر $c_1 \neq 0$ ، جواب (۲۱) مماس بر خط $x_2 = \sqrt{2}x_1$ به مبدأ میل می‌کند. الگوی ارائه‌شده در شکل ۴.۵.۷ (الف) نوعاً برای همه دستگاههای مرتبه دوم $x' = Ax$ که در آن مقدارهای ویژه حقیقی و متمایز و هم‌علامت هستند تغییر نمی‌کند. برای چنین دستگاهی به مبدأ گره می‌گوییم. اگر مقدارهای ویژه به جای منفی بودن، مثبت باشند، مسیرها مشابه‌اند اما به طرف بیرون می‌روند. اگر مقدارهای ویژه منفی باشند، گره‌ها مجانبی‌یابدار هستند و اگر مقدارهای ویژه مثبت باشند، ناپایدارند.



(ب)



(الف)

شکل ۴.۵.۷ (الف) مسیرهای دستگاه (۱۴)؛ مبدأ گره است. (ب) نمودار x_1 برحسب t برای دستگاه (۱۴).

اگرچه شکل ۴.۵.۷ (الف) با رایانه تولید شده است، می‌توان بر اساس اطلاعاتی درباره مقدارها و بردارهای ویژه به سرعت با دست نموداری از مسیرها رسم کرد که به‌طور کیفی درست است.

چند نمودار نوعی از x_1 برحسب t را در شکل ۴.۵.۷ (ب) نشان داده‌ایم. توجه کنید که هر یک از نمودارها متناظر مسیری که در شکل ۴.۵.۷ (الف) به مبدأ میل می‌کند، با افزایش t به محور t ها مجانب می‌شوند. رفتار x_2 به‌عنوان تابعی از t هم مشابه است.

در دو مثال قبلی، دو حالت اصلی دستگاههای 2×2 ای را دیدیم که مقدارهای ویژه آنها حقیقی و متمایز هستند. مقدارهای ویژه علامت مخالف داشتند (مثال ۱) یا هم‌علامت بودند (مثال ۲). حالت دیگر این است که یک مقدار ویژه صفر باشد، اما در این حالت $\det A = 0$ که فرض ابتدای این بخش را نقض می‌کند. با این حال، مسئله‌های ۷ و ۸ را ببینید.

اکنون به دستگاه کلی (۱) برمی‌گردیم و مانند مثالها عمل می‌کنیم. برای یافتن جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) باید مقدارها و بردارهای ویژه A را از معادله جبری (۴) به دست بیاوریم. مقدارهای ویژه $r_1, \dots, r_n$ (که لزوماً همگی متمایز نیستند) ریشه‌های معادله جبری

$$\det(A - rI) = 0 \quad (۲۲)$$

هستند. ماهیت مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه متناظر آنها، ماهیت جواب عمومی دستگاه (۱) را مشخص می‌کند. سه حالت برای مقدارهای ویژه A وجود دارد:

۱. همه مقدارهای ویژه حقیقی و متمایز هستند.

۲. بعضی از مقدارهای ویژه به‌صورت جفتهای مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند.

۳. بعضی از مقدارهای ویژه تکراری هستند.

اگر مانند دو مثال قبلی همه مقدارهای ویژه حقیقی و متمایز باشند، متناظر هر مقدار ویژه مانند r یک بردار ویژه حقیقی مانند $\xi^{(i)}$ داریم و n بردار ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ مستقل خطی هستند. جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) عبارت‌اند از

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (۲۳)$$

برای اینکه نشان بدهیم که این جوابها مجموعه‌ای اساسی تشکیل می‌دهند، رانسکین آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (۲۴)$$

ابتدا توجه کنید که تابع نمایی هرگز صفر نمی‌شود. سپس چون بردارهای ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ مستقل خطی هستند، در ترمینان جمله آخر معادله (۲۴) ناصفر است. در نتیجه رانسکین $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t)$ هرگز صفر نیست؛ بنابراین $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. پس جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (25)$$

اگر A حقیقی و متقارن باشد (حالت خاص ماتریس‌های هرمیتی)، از بخش ۳.۷ یادآوری می‌کنیم که همه مقادیر ویژه $r_1, \dots, r_n$ باید حقیقی باشند. علاوه بر این، اگر بعضی از مقادیر ویژه تکراری باشند، همواره مجموعه‌ای کامل از n بردار ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ موجودند که مستقل خطی (در حقیقت متعامد) هستند. بنابراین جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) داده‌شده با معادله (۲۳) باز هم مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و جواب عمومی باز هم با معادله (۲۵) داده می‌شود. در مثال بعدی این حالت را نشان داده‌ایم.

جواب عمومی دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (26)$$

را به دست بیاورید.

توجه کنید که ماتریس ضرایب، حقیقی و متقارن است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس را در مثال ۵ بخش ۳.۷ پیدا کردیم:

$$r_1 = 2, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$r_2 = -1, \quad r_3 = -1; \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad (28)$$

پس

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (29)$$

مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله (۲۶) به دست می‌دهند و جواب عمومی عبارت است از

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (30)$$

در این مثال این نکته را نشان داده‌ایم که اگرچه تکرار جبری یک مقدار ویژه $(r = -1)$ برابر ۲ است، باز هم می‌توانیم دو بردار مستقل خطی $\xi^{(2)}$ و $\xi^{(3)}$ را بیابیم و در نتیجه می‌توانیم جواب عمومی (30) را بسازیم. رفتار جواب (30) به طور بحرانی به شرایط اولیه بستگی دارد. به ازای t های بزرگ، اولین جمله طرف راست معادله (30)

جمله غالب است، بنابراین اگر $c_1 \neq 0$ وقتی $t \rightarrow \infty$ همه مؤلفه‌های x بی‌کران می‌شوند. از طرف دیگر به ازای نقاط اولیه معینی c_1 صفر خواهد بود. در این حالت جوابها فقط شامل ناهای منفی از جملات نمایی هستند و وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $x \rightarrow 0$. نقاط اولیه‌ای که باعث صفر شدن c_1 می‌شوند دقیقاً همانهایی هستند که در صفحه ایجاد شده با بردارهای ویژه $\xi^{(2)}$ و $\xi^{(3)}$ وابسته به مقادیر ویژه منفی قرار دارند. پس جوابهایی که در این صفحه شروع می‌شوند، وقتی $t \rightarrow \infty$ به مبدأ میل می‌کنند، در حالی که جوابهای دیگر بی‌کران می‌شوند.

اگر بعضی از مقادیر ویژه به صورت جفتهای مختلط مزدوج ظاهر شوند، باز هم n جواب مستقل خطی به صورت (23) موجودند به شرط اینکه همه مقادیر ویژه متمایز باشند. البته جوابهای به دست آمده از مقادیر ویژه مختلط، مختلط مقدارند؛ اما مانند بخش ۳.۳ می‌توان مجموعه کاملی از جوابها با تابعهای حقیقی مقدار به دست آورد. این مطلب را در بخش ۶.۷ بررسی می‌کنیم.

اگر مقادیر ویژه تکراری باشند، ممکن است مشکلات جدی‌تری پیش بیایند. در این حالت تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر مقدار ویژه ممکن است کمتر از تکرار جبری آن باشد. در چنین حالتی تعداد جوابهای مستقل خطی به صورت ξe^{rt} کمتر از n خواهد بود. برای ساختن مجموعه‌ای اساسی از جوابها لازم است که جوابهای دیگری را به صورت دیگری در نظر بگیریم. وضع تقریباً مشابه معادلات خطی مرتبه m با ضرایب ثابت است که در آن، ریشه تکراری معادله مشخصه به جوابهایی به صورت $e^{rt}, te^{rt}, t^2 e^{rt}, \dots$ منجر می‌شود. حالت مقادیر ویژه تکراری را در بخش ۸.۷ بررسی می‌کنیم.

در نهایت اگر A مختلط باشد، مقادیر ویژه و مختلط لزوماً به صورت مزدوج ظاهر نمی‌شوند و معمولاً بردارهای ویژه مختلط مقدار هستند، حتی اگر مقادیر ویژه متناظرشان حقیقی باشند. جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) به شرط متفاوت بودن مقادیر ویژه باز هم به شکل (23) هستند، اما در حالت کلی همه جوابها مختلط مقدارند.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶،

(الف) جواب عمومی دستگاه معادلات داده‌شده را بیابید و رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

(ب) یک میدان جهت و نمودار چند مسیر دستگاه را رسم کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x. \quad ۲. \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x. \quad ۱.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x. \quad ۴. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x. \quad ۳.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x. \quad ۶. \quad x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x. \quad ۵.$$

در هر یک از مسئله‌های ۷ و ۸،

(الف) جواب عمومی دستگاه داده‌شده را به دست بیاورید.

(ب) یک میدان جهت و نمودار چند مسیر را رسم کنید. در این مسئله‌ها، ماتریس ضرایب یک مقدار ویژه صفر دارد؛ در نتیجه الگوی مسیر با مثالهای کتاب متفاوت است.

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_2 = 2; \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_1 = -1. ۲۴$$

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_2 = -2; \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_1 = 1. ۲۵$$

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_2 = -2; \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_1 = -1. ۲۶$$

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, r_2 = 2; \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_1 = 1. ۲۷$$

۲۸. دستگاه 2×2 $x' = Ax$ را در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم $r_1 \neq r_2$ و اگر $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ مستقل خطی باشند، جواب عمومی عبارت است از $x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$. در این مسئله استقلال خطی $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ را با فرض وابستگی خطی آنها و رسیدن به تناقض ثابت می‌کنیم.

الف) توجه کنید که $\xi^{(1)}$ در معادله ماتریسی $(A - r_1 I) \xi^{(1)} = 0$ صدق می‌کند؛ به همین ترتیب توجه کنید که $(A - r_2 I) \xi^{(2)} = 0$.

ب) ثابت کنید $\xi^{(1)} = (r_1 - r_2) \xi^{(2)}$.

ج) فرض کنید $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ وابسته خطی باشند؛ آنگاه $c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} = 0$ که لااقل یکی از c_1 یا c_2 ناصفر است. فرض کنید $c_1 \neq 0$ و ثابت کنید $(A - r_2 I)(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = 0$. همچنین ثابت کنید $\xi^{(1)} = (A - r_2 I)(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2) \xi^{(1)}$ ؛ پس $c_1 = 0$ که تناقض است. بنابراین $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ مستقل خطی هستند.

د) اثبات بخش (ج) را برای حالتی که c_1 برابر صفر است اما c_2 صفر نیست اصلاح کنید.

ه) بحث مشابهی را برای حالتی که مرتبه n برابر با ۳ است انجام بدهید؛ توجه کنید که این اثبات را می‌توان برای هر n دلخواه به‌کار گرفت.

۲۹. معادله

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (i)$$

را در نظر بگیرید که در آن a, b و c ثابت هستند و $a \neq 0$. در فصل ۳ نشان دادیم که جواب عمومی به ریشه‌های معادله مشخصه، یعنی

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (ii)$$

بستگی دارد.

الف) معادله (i) را با قرار دادن $x_1 = y$ و $x_2 = y'$ به دستگاهی از معادلات مرتبه اول تبدیل کنید. دستگاه معادلات دیفرانسیل $x' = Ax$ را طوری بیابید که $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ در آن صدق کند.

ب) معادله‌ای را که مقدارهای ویژه ماتریس A در قسمت (الف) را تعیین می‌کند به‌دست بیاورید. توجه کنید که این معادله همان معادله مشخصه (iii) برای معادله (i) است.

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x. ۷ \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x. ۸$$

در هر یک از مسئله‌های ۹ تا ۱۴، جواب عمومی دستگاه موردنظر را بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} x. ۹ \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ -1 & -1-2i \end{pmatrix} x. ۱۰$$

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} x. ۱۱ \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x. ۱۲$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} x. ۱۳ \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x. ۱۴$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۵ تا ۱۸، مسئله مقدار اولیه را حل کنید و رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} x. ۱۶ \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x. ۱۵$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} x. ۱۸ \quad x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x. ۱۷$$

۱۹. دستگاه $x' = Ax$ متناظر معادلات مرتبه دوم اولیه است (بخش ۴.۵). فرض کنید $x = \xi e^t$ که در آن ξ برداری ثابت است و ثابت کنید برای به‌دست آوردن جواب غیربدیهی این معادله دیفرانسیل، ξ و r باید در معادله $(A - rI)\xi = 0$ صدق کنند.

با استفاده از مسئله ۱۹، دستگاه معادلات داده‌شده در هر یک از مسئله‌های ۲۰ تا ۲۳ را حل کنید. فرض کنید $t > 0$.

$$tx' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x. ۲۰ \quad tx' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x. ۲۱$$

$$tx' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x. ۲۲ \quad tx' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x. ۲۳$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۴ تا ۲۷، مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A داده شده‌اند. دستگاه $x' = Ax$ را در نظر بگیرید.

الف) نمای فاز دستگاه را رسم کنید.

ب) مسیری را رسم کنید که از نقطه اولیه $(2, 3)$ می‌گذرد.

ج) برای مسیر قسمت (ب)، نمودار x_1 برحسب t و x_2 برحسب t را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۳۰. دستگاه دو مخزن مسئله ۲۲ بخش ۱.۷ به مسئله مقدار اولیه

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} x \quad x(0) = \begin{pmatrix} -17 \\ -21 \end{pmatrix}$$

می‌انجامد که در آن x_1 و x_2 میزان انحراف سطح نمک Q_1 و Q_2 از نقاط تعادل متناظر است.

(الف) جواب مسئله مقدار اولیه بالا را به دست بیاورید.

(ب) نمودار x_1 برحسب t و x_2 برحسب t را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(ج) کوچکترین زمان T را تعیین کنید که به ازای هر $t \geq T$ ، $|x_1(t)| \leq 0.5$ و $|x_2(t)| \leq 0.5$.

۳۱. دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} x$$

را در نظر بگیرید.

(الف) دستگاه را به ازای $\alpha = 0.5$ حل کنید. مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب کدام‌اند؟ نوع نقطه تعادلی در مبدأ را تعیین کنید.

(ب) دستگاه را به ازای $\alpha = 2$ حل کنید. مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب کدام‌اند؟ نوع نقطه تعادلی در مبدأ را تعیین کنید.

(ج) در بخش‌های (الف) و (ب) جوابهای این دستگاه دو رفتار کاملاً متمایز به نمایش گذاشتند. مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب را برحسب α تعیین کنید و مقداری از α بین 0.5 و 2 را تعیین کنید که انتقال از یک نوع رفتار به نوعی دیگر صورت می‌گیرد.

مدارهای الکتریکی. در مسئله‌های ۳۲ و ۳۳ به مدار الکتریکی‌ای می‌پردازیم که رفتارش با دستگاه معادلات دیفرانسیل مسئله ۲۱ بخش ۱.۷ توصیف می‌شود؛ یعنی

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \quad (i)$$

۳۲. (الف) اگر $\Omega = 10$ ، $R_1 = \frac{5}{3}$ ، $R_2 = \frac{5}{3}$ ، $L = 2$ و $C = \frac{1}{3}$ جواب عمومی معادله (i) را بیابید.

(ب) ثابت کنید صرف‌نظر از مقادیر اولیه $I(0)$ و $V(0)$ ، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $I(t) \rightarrow 0$ و $V(t) \rightarrow 0$.

۳۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل (i) را در نظر بگیرید.

(الف) شرطی روی R_1 ، R_2 و C بیابید که مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب، حقیقی و متمایز باشند.

(ب) اگر شرط قسمت (الف) برآورده شود، ثابت کنید هر دو مقدار ویژه منفی هستند.

(ج) اگر شرط پیداشده در قسمت (الف) برآورده نشود، مقدارهای ویژه مختلط و یا تکراری هستند. آیا در این حالتها هم وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $I(t) \rightarrow 0$ و $V(t) \rightarrow 0$ ؟

راهنمایی: در قسمت (ج) یک روش، تغییر دستگاه (i) به یک معادله مرتبه دوم است. مقدارهای ویژه مختلط و تکراری را در بخش‌های ۶.۷ و ۸.۷ بررسی می‌کنیم.

۶.۷ مقادیر ویژه مختلط

در این بخش مجدداً دستگاه n معادله خطی و همگن با ضرایب ثابت، یعنی

$$x' = Ax \quad (1)$$

را بررسی می‌کنیم، که در آن ماتریس ضرایب A حقیقی مقدار است. اگر بخواهیم جوابهایی به شکل $x = \xi e^{rt}$ پیدا کنیم، از بخش ۵.۷ می‌دانیم که r باید مقدار ویژه ماتریس ضرایب A و ξ باید بردار ویژه نظیر آن باشد. یادآوری می‌کنیم که مقدارهای ویژه $r_1, r_2, \dots, r_n$ از A ریشه‌های معادله

$$\det(A - rI) = 0 \quad (2)$$

هستند و بردارهای ویژه متناظر آنها در معادله

$$(A - rI)\xi = 0 \quad (3)$$

صدق می‌کنند.

اگر A حقیقی باشد، ضرایب چندجمله‌ای (۲) حقیقی هستند و مقدارهای ویژه مختلط باید به صورت جفتی مزدوج مختلط ظاهر شوند؛ یعنی اگر $r_1 = \lambda + i\mu$ مقدار ویژه ماتریس A باشد، که در آن λ و μ حقیقی هستند، آنگاه $r_2 = \lambda - i\mu$ هم مقدار ویژه است. بررسی اثر مقادیر ویژه مختلط را با یک مثال شروع می‌کنیم.

مجموعه‌ای اساسی از جوابهای حقیقی مقدار دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} x \quad (4)$$

را بیابید و آنها را به صورت نمودار نمایش بدهید.

یک میدان جهت برای دستگاه (۴) را در شکل ۱.۶.۷ نشان داده‌ایم. از این نمودار به نظر می‌رسد مسیره‌ها در صفحه فاز به‌طور مارپیچ در جهت عقربه‌های ساعت به مبدأ میل می‌کنند.

برای یافتن مجموعه‌ای اساسی از جوابها، فرض می‌کنیم

$$x = \xi e^{rt} \quad (5)$$

و برای محاسبه مقدارها و بردارهای ویژه ماتریس A دستگاه معادلات جبری خطی

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{7} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

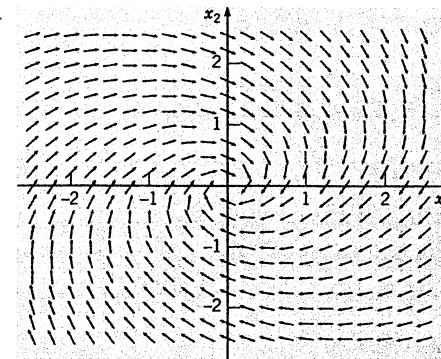
را می‌نویسیم. معادله مشخصه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{7} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{7} - r \end{vmatrix} = r^2 + r + \frac{5}{4} = 0; \quad (7)$$

بنابراین مقدارهای ویژه عبارت‌اند از $r = -\frac{1}{7} + i$ و $r = -\frac{1}{7} - i$. از معادله (۶) با محاسبات ساده نتیجه می‌شود که

مثال

۱



شکل ۷.۶.۷ یک میدان جهت برای دستگاه (۴).

بردارهای ویژه متناظر عبارت‌اند از

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

توجه کنید که بردارهای ویژه $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ مزدوج مختلط‌اند؛ بنابراین بردارهای

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2 + i)t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2 - i)t} \quad (9)$$

مجموعه‌ای اساسی از جوابهای دستگاه (۴) تشکیل می‌دهند.

برای به دست آوردن مجموعه جوابهای حقیقی مقدار، باید قسمت‌های حقیقی و موهومی هر یک از $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ را به همان روش بخش ۳.۳ به دست بیاوریم. در واقع

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2} \sin t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}; \quad (10)$$

بنابراین بردارهای

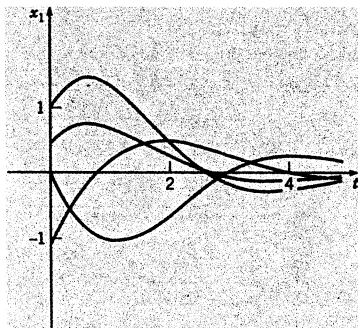
$$u(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (11)$$

مجموعه جوابهای حقیقی مقدار را تشکیل می‌دهند. برای اینکه نشان بدهیم $u(t)$ و $v(t)$ مستقل خطی هستند، رانسکین آنها را محاسبه می‌کنیم:

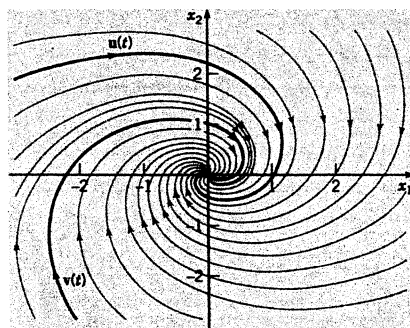
$$W(u, v)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t/2} \cos t & e^{-t/2} \sin t \\ -e^{-t/2} \sin t & e^{-t/2} \cos t \end{vmatrix} \\ = e^{-t} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{-t}.$$

چون رانسکین هرگز صفر نمی‌شود، $u(t)$ و $v(t)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای (حقیقی مقدار) دستگاه (۴) تشکیل می‌دهند.نمودار جوابهای $u(t)$ و $v(t)$ را در شکل ۷.۶.۷ (الف) نشان داده‌ایم. چون

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

نمودارهای $u(t)$ و $v(t)$ به ترتیب از نقطه‌های $(1, 0)$ و $(0, 1)$ می‌گذرند. جوابهای دیگر دستگاه (۴) ترکیب خطی $u(t)$ و $v(t)$ هستند و نمودار بعضی از این جوابها را هم در شکل ۷.۶.۷ (الف) نشان داده‌ایم. هر یک از مسیرها وقتی $t \rightarrow \infty$ در طول مسیری مارپیچ به مبدأ میل می‌کنند. این موضوع به این دلیل است که جوابهای (۱۱) حاصلضرب جمله‌های میرای نمایی با ضرایب سینوس یا کسینوس هستند. چند نمودار نوعی x_1 برحسب t را در شکل ۷.۶.۷ (ب) نشان داده‌ایم؛ هر یک از آنها نوسانی میرا در زمان را نشان می‌دهد.نمودار مسیرهای جواب همه دستگاههای مرتبه دوم $x' = Ax$ که مقادیرهای ویژه‌شان مزدوج مختلط با قسمت حقیقی منفی هستند، نوعاً به صورت شکل ۷.۶.۷ (الف) است. به مبدأ نقطه مارپیج می‌گوییم و مجانبی پایدار است، چون همه مدارها با افزایش زمان به آن میل می‌کنند. مدارهای دستگاهی که قسمت حقیقی مقادیرهای ویژه‌اش مثبت است مشابه شکل ۷.۶.۷ (الف) هستند، اما حرکت در جهت دور شدن از مبدأ است و مدارها بی‌کران می‌شوند در این حالت مبدأ ناپایدار است. اگر قسمت حقیقی مقادیرهای ویژه صفر شود، در این صورت مدارها نه به مبدأ میل می‌کنند و نه بی‌کران می‌شوند؛ بلکه در طول منحنی‌ای بسته حول مبدأ حرکت می‌کنند. مثالی از این رفتار را می‌توانید در شکل‌های ۷.۶.۷ (ب) و ۷.۶.۷ (ب) ببینید. در این حالت به مبدأ مرکز می‌گوییم و پایدار است، اما مجانبی پایدار نیست. در هر سه حالت، بسته به ماتریس ضرایب A ، جهت حرکت ممکن است مانند این مثال در جهت عقربه‌های ساعت و یا در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد.

(ب)



(الف)

شکل ۷.۶.۷ (الف) مدارهای دستگاه (۴): مبدأ نقطه مارپیج است. (ب) نمودار x_1 برحسب t برای دستگاه (۴).

اکنون به معادله عمومی (۱)، یعنی

$$x' = Ax$$

برمی‌گردیم. می‌توانیم مانند همین مثال پیش برویم. فرض کنید که یک جفت مقدار ویژه مختلط $\lambda = \alpha + i\mu$ و $\bar{\lambda} = \alpha - i\mu$ موجود باشند؛ در این صورت بردارهای ویژه متناظرشان، $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ هم مزدوج مختلط یکدیگرند. برای دیدن درستی این ادعا، فرض کنید r_1 و $\xi^{(1)}$ در معادله

$$(A - r_1 I) \xi^{(1)} = 0 \quad (12)$$

۳. مقادیر ویژه مختلط با قسمت حقیقی ناصفر هستند؛ $x = 0$ نقطه مارپیج است.

حالت‌های دیگر اهمیت کمتری دارند و به شکل گذار بین حالت‌های فهرست‌شده در بالا رخ می‌دهند. به عنوان مثال، مقدار ویژه صفر در گذار بین نقطه زینی و گره رخ می‌دهد. مقادیر ویژه مختلط با قسمت حقیقی صفر در گذار بین نقاط مارپیج مجانبی‌یادار و ناپایدار رخ می‌دهند. در نهایت، مقادیر ویژه حقیقی و مساوی در گذار بین نقاط گره و مارپیج رخ می‌دهند.

دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} x \quad (۱۹)$$

شامل پارامتر α است. بستگی کیفی جواب‌ها به α را توصیف کنید؛ به‌ویژه مقادیر بحرانی α را بیابید که به‌ازای آنها، رفتار کیفی مدارها در صفحه فاز به‌طور قابل توجهی تغییر می‌کند.

رفتار مدارها با مقادیر ویژه ماتریس ضرایب کنترل می‌شود. معادله مشخصه عبارت است از

$$r^2 - \alpha r + \gamma = 0; \quad (۲۰)$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارت‌اند از

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}. \quad (۲۱)$$

از معادله (۲۱) نتیجه می‌شود که مقادیر ویژه به‌ازای $-4 < \alpha < 4$ مزدوج مختلط هستند و در غیر این صورت حقیقی هستند. پس دو مقدار بحرانی عبارت‌اند از $\alpha = -4$ و $\alpha = 4$ که در آنها وضع مقادیر ویژه از حقیقی به مختلط تغییر می‌کند و بالعکس. به‌ازای $\alpha < -4$ ، هر دو مقدار ویژه منفی هستند؛ بنابراین همه مسیرها به مبدأ میل می‌کنند که گره است و مجانبی‌یادار است. به‌ازای $\alpha > 4$ هر دو مقدار ویژه مثبت هستند، بنابراین مبدأ باز هم گره است، ولی این بار ناپایدار است؛ همه مسیرها جز $x = 0$ بی‌کران می‌شوند. در ناحیه میانی، $-4 < \alpha < 4$ ، مقادیر ویژه مختلط‌اند و مسیرها مارپیج هستند. به‌ازای $-4 < \alpha < 0$ قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی است و در نتیجه جهت مارپیج‌ها به سمت داخل است و مبدأ مجانبی‌یادار است، در حالی که به‌ازای $0 < \alpha < 4$ قسمت حقیقی مقادیر ویژه مثبت است و مبدأ ناپایدار است. پس $\alpha = 0$ هم مقدار بحرانی است و در آن جهت مارپیج از داخل به خارج تغییر می‌کند. به‌ازای این مقدار α ، مبدأ مرکز است و مسیرها منحنی‌های بسته حول مبدأ متناظر با جواب‌های متناوب نسبت به زمان هستند. مقادیر بحرانی $\alpha = \pm 4$ منجر به مقادیر ویژه حقیقی و مساوی می‌شوند. در این حالت مبدأ باز هم گره است، اما نمای فاز آن با ناهای فاز داده‌شده در بخش ۵.۷ کمی متفاوت است. این حالت را در بخش ۸.۷ بررسی می‌کنیم.

دستگاه فن-وزنه چندگانه. دستگاهی متشکل از دو وزنه و سه فنر مانند شکل ۱.۱.۷ را در نظر بگیرید که در آن معادله‌های حرکت با معادله (۱) بخش ۱.۷ داده شده‌اند. اگر فرض کنیم که نیروی خارجی وجود ندارد، $F_1(t) = F_2(t) = 0$ و معادلات حاصله عبارت‌اند از

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \quad (۲۲)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$

این معادله‌ها را می‌توان به‌عنوان دستگاهی از معادلات مرتبه دوم حل کرد (مسئله ۲۹ را ببینید). اما به تناسب

صدق می‌کنند. با گرفتن مزدوج مختلط این معادله و توجه به این نکته که A و I حقیقی‌مقدارند، نتیجه می‌شود

$$(A - \bar{r}_1 I) \bar{\xi}^{(1)} = 0 \quad (۱۳)$$

که در آن به ترتیب $\bar{r}_1$ و $\bar{\xi}^{(1)}$ مزدوج‌های مختلط r_1 و $\xi^{(1)}$ هستند؛ یعنی $\bar{r}_1 = r_2$ هم مقدار ویژه است و $\bar{\xi}^{(1)} = \xi^{(2)}$ بردار ویژه متناظرش است. بنابراین جواب‌های متناظر اینها، یعنی

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad x^{(2)}(t) = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{r}_1 t} \quad (۱۴)$$

هم مزدوج مختلط یکدیگرند. بنابراین مانند مثال ۱ می‌توانیم دو جواب حقیقی مقدار معادله (۱) متناظر مقادیر ویژه r_1 و r_2 را با انتخاب قسمت‌های حقیقی و موهومی $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ داده‌شده در معادله (۱۴) پیدا کنیم.

فرض کنید $\xi^{(1)} = a + ib$ حقیقی هستند؛ در این صورت

$$x^{(1)}(t) = (a + ib)e^{(\lambda + i\mu)t} = (a + ib)e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t). \quad (۱۵)$$

با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی $x^{(1)}(t)$ نتیجه می‌شود

$$x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(a \cos \mu t - b \sin \mu t) + ie^{\lambda t}(a \sin \mu t + b \cos \mu t). \quad (۱۶)$$

اگر بنویسیم $x^{(1)}(t) = u(t) + iv(t)$ بردارهای

$$u(t) = e^{\lambda t}(a \cos \mu t - b \sin \mu t) \\ v(t) = e^{\lambda t}(a \sin \mu t + b \cos \mu t) \quad (۱۷)$$

جواب‌های حقیقی مقدار معادله (۱) هستند. می‌توان ثابت کرد که u و v مستقل خطی هستند (مسئله ۲۷ را ببینید). به‌عنوان مثال، فرض کنید ماتریس A دو مقدار ویژه مختلط $r_1 = \lambda + i\mu$ و $r_2 = \lambda - i\mu$ داشته باشد، $r_2, \dots, r_n$ حقیقی و متمایز باشند. فرض کنید بردارهای ویژه متناظرشان عبارت باشند از $\xi^{(1)} = a + ib$ ، $\xi^{(2)} = a - ib$ ، $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$. در این صورت جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$x = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t} \quad (۱۸)$$

که در آن $u(t)$ و $v(t)$ با معادله‌های (۱۷) داده شده‌اند. تأکید می‌کنیم که این تحلیل فقط وقتی معتبر است که ماتریس A در معادله (۱) حقیقی باشد؛ چرا که فقط در این صورت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط باید به‌صورت جفت‌های مزدوج ظاهر شوند.

اکنون برای دستگاه‌های 2×2 با ضرایب حقیقی توصیف سه حالت اصلی را که ممکن است رخ دهند کامل کرده‌ایم.

۱. مقادیر ویژه حقیقی و با علامت مخالف هستند؛ $x = 0$ نقطه زینی است.

۲. مقادیر ویژه حقیقی و هم علامت اما نابرابر هستند؛ $x = 0$ گره است.

نگریشان در این فصل، آنها را به دستگاهی از چهار معادله مرتبه اول تبدیل می‌کنیم. فرض کنید $y_1 = x_1$ و $y_2 = x_2$ ، $y_3 = x_3$ و $y_4 = x_4$ در این صورت

$$y'_1 = y_3, \quad y'_2 = y_4 \quad (23)$$

و از معادله‌های (۲۲) می‌توانیم بنویسیم

$$m_1 y'_1 = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2, \quad m_2 y'_2 = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2. \quad (24)$$

در مثال زیر به حالت خاصی از این دستگاه با دو وزنه و سه فنر پرداخته‌ایم.

فرض کنید که در معادله‌های (۲۳) و (۲۴)، $k_1 = 1$ ، $k_2 = 3$ ، $k_3 = 15/4$ که این معادله‌ها تبدیل شوند به

$$y'_1 = y_3, \quad y'_2 = y_4, \quad y'_3 = -2y_1 + \frac{3}{4}y_2, \quad y'_4 = \frac{4}{3}y_1 - 3y_2. \quad (25)$$

حرکتهای ممکن توصیف‌شده با معادله‌های (۲۵) را تحلیل کنید و نمودارهای نشان‌دهنده رفتار نوعی جوابها را رسم کنید. می‌توانیم این دستگاه را به شکل ماتریسی به صورت

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = Ay \quad (26)$$

بنویسیم. به‌خاطر داشته باشید که y_1 و y_2 موقعیتهای دو وزنه نسبت به حالت‌های تعادلیشان و y_3 و y_4 سرعت آنها هستند. طبق معمول فرض می‌کنیم که $y = \xi e^{rt}$ که در آن r باید مقدار ویژه ماتریس A و ξ بردار ویژه متناظر r باشد. هرچند پیدا کردن مقادیر و بردارهای ویژه A با دست کمی خسته‌کننده است، با نرم‌افزار مناسب رایانه‌ای این کار ساده است. معادله مشخصه A عبارت است از

$$r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4); \quad (27)$$

بنابراین مقدارهای ویژه عبارت‌اند از $r_1 = i$ ، $r_2 = -i$ ، $r_3 = 2i$ و $r_4 = -2i$. بردارهای ویژه متناظر عبارت‌اند از

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}.$$

جوابهای مختلط مقدار $\xi^{(1)} e^{it}$ و $\xi^{(2)} e^{-it}$ مزدوج مختلط هستند؛ بنابراین دو جواب حقیقی‌مدار را می‌توان با یافتن قسمت‌های حقیقی و موهومی هر یک از آنها به‌دست آورد. به‌عنوان مثال

$$\xi^{(1)} e^{it} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = u^{(1)}(t) + i v^{(1)}(t). \quad (29)$$

به طریقی مشابه، می‌توانیم بنویسیم

$$\xi^{(2)} e^{-it} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ -4 \cos t \\ -6 \sin t \\ 8 \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ -4 \sin t \\ 6 \cos t \\ -8 \cos t \end{pmatrix} = u^{(2)}(t) + i v^{(2)}(t). \quad (30)$$

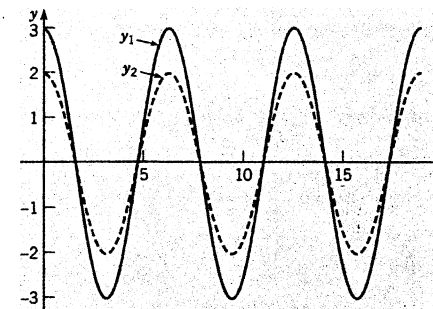
اثبات استقلال خطی $u^{(1)}$ ، $v^{(1)}$ ، $u^{(2)}$ و $v^{(2)}$ را به شما واگذار می‌کنیم و بنابراین آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. پس جواب عمومی معادله (۲۶) عبارت است از

$$y = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (31)$$

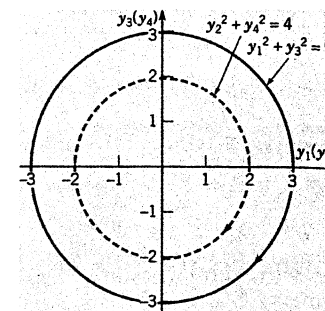
که در آن c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 ثابتهای دلخواه هستند.

فضای فاز این دستگاه چهاربعدی است و هر جوابی که با مجموعه خاصی از مقادیر c_1 ، c_2 ، c_3 ، c_4 در معادله (۳۱) به‌دست بیاید، متناظر مسیری در این فضا است. چون هر جواب داده‌شده با معادله (۳۱) متناوب با دوره تناوب 2π است، هر مسیر منحنی‌ای بسته است. بدون توجه به اینکه هر مسیر در $t = 0$ از کجا شروع می‌شود، در $t = 2\pi$ ، $t = 4\pi$ و نظایر آنها به همان نقطه برمی‌گردد و به‌طور مکرر همان منحنی را در هر بازه زمانی به طول 2π طی می‌کند. سعی نمی‌کنیم که این مسیرهای چهاربعدی را در اینجا نشان بدهیم؛ در عوض، در شکل‌های زیر تصویر مسیرهای معینی را در صفحه $y_1 y_2$ یا $y_3 y_4$ نشان می‌دهیم و به این ترتیب حرکت هر یک از وزنه‌ها را به‌طور جداگانه نشان می‌دهیم.

دو جمله اول طرف راست معادله (۳۱) حرکت‌هایی با بسامد ۱ و دوره تناوب 2π را نشان می‌دهند. توجه کنید که در هر یک از این جمله‌ها، $y_1 = (2/3)y_2$ و $y_3 = (2/3)y_4$. این یعنی دو وزنه همراه یکدیگر به جلو و عقب می‌روند و همواره



(الف)

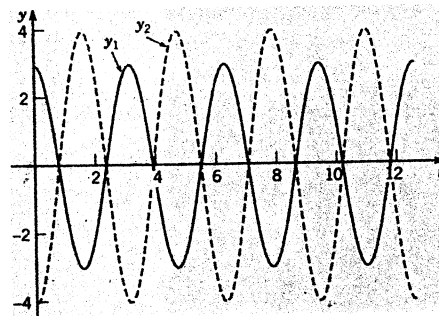


(ب)

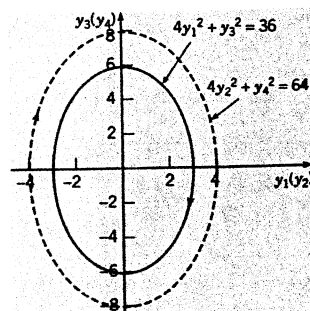
شکل ۳.۶.۷ (الف) نمودار y_1 بر حسب t و y_2 بر حسب t برای جواب $u^{(1)}(t)$. (ب) برهم‌نهی تصویر مسیرها در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_2 y_3$ برای جواب $u^{(1)}(t)$.

در یک جهت حرکت می‌کنند، اما وزنه دوم تنها به اندازه $2/3$ وزنه اول جابه‌جا می‌شود. اگر به جواب $u^{(1)}(t)$ توجه کنیم و نمودار y_1 بر حسب t و y_2 بر حسب t را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، به ترتیب نمودارهای کسینوس با دامنه‌های ۳ و ۲ را که در شکل ۳.۶.۷ (الف) نشان داده شده‌اند به دست می‌آوریم. مسیر وزنه اول در صفحه $y_1 y_2$ بر دایره‌ای به شعاع ۳ که در شکل ۳.۶.۷ (ب) نشان داده شده واقع است که از نقطه $(3, 0)$ شروع می‌شود، در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و یک دور را در زمان 2π کامل می‌کند. مبدأ در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_2 y_3$ مرکز است. از $v^{(1)}$ یا ترکیب خطی از $u^{(1)}$ و $v^{(1)}$ هم نمودارهای مشابهی (با انتقال مناسب در زمان) به دست می‌آید.

جمله‌های باقی‌مانده در طرف راست معادله (۳۱) حرکت‌هایی با بسامد ۲ و دوره تناوب π را نشان می‌دهند. توجه کنید که در این حالت $y_1 = -(4/3)y_2$ و $y_2 = -(4/3)y_3$ این یعنی دو وزنه همواره در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند و وزنه دوم $4/3$ برابر وزنه اول جابه‌جا می‌شود. اگر تنها $u^{(2)}(t)$ را در نظر بگیریم و نمودار y_1 بر حسب t و y_2 بر حسب t را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم شکل ۴.۶.۷ (الف) را به دست می‌آوریم. یک اختلاف فاز π وجود دارد و دامنه y_2 $2/3$ برابر دامنه y_1 است که آنچه را که در مورد حرکت وزنه‌ها گفتیم تأیید می‌کند. شکل ۴.۶.۷ (ب) برهم‌نهی مسیرها برای این دو وزنه را در صفحات فازشان نمایش می‌دهد. هر دوی نمودارها بیضی هستند، بیضی داخلی متناظر وزنه اول و بیضی خارجی



(الف)

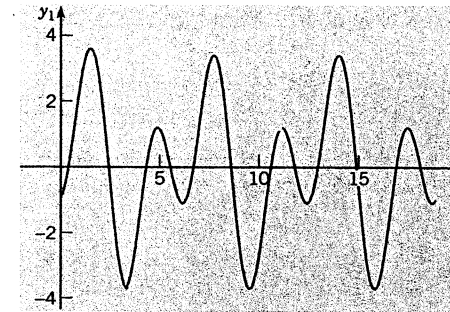


(ب)

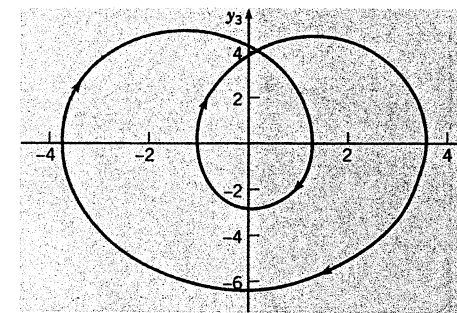
شکل ۴.۶.۷ (الف) نمودار y_1 بر حسب t و y_2 بر حسب t برای جواب $u^{(2)}(t)$. (ب) برهم‌نهی تصویر مسیرها در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_2 y_3$ برای جواب $u^{(2)}(t)$.

متناظر وزنه دوم است. مسیر بر بیضی داخلی از نقطه $(3, 0)$ شروع می‌شود و مسیر بر بیضی خارجی در $(-4, 0)$ شروع می‌شود. هر دو در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنند و در زمان π یک دور کامل می‌زنند. مبدأ در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_2 y_3$ مرکز است. باز هم برای $v^{(2)}$ یا ترکیب خطی $u^{(2)}$ و $v^{(2)}$ نمودارهای مشابهی به دست می‌آید. انواعی از حرکت که آنها را در دو بند قبل توصیف کردیم، وضع‌های اساسی ارتعاش دستگاه دو وزنه‌اند. هر کدام از آنها از شرایط اولیه کاملاً خاصی نتیجه می‌شوند. به عنوان مثال برای به دست آوردن وضع اساسی با بسامد ۱، باید هر دو ثابت c_1 و c_2 در معادله (۳۱) صفر باشند. این فقط با شرایط اولیه $2y_1(0) = 2y_2(0) = 2y_3(0) = 0$ رخ می‌دهد. به همین ترتیب وضع بسامد ۲ تنها وقتی به دست می‌آید که هر دوی ثابت‌های c_1 و c_2 در معادله (۳۱) صفر باشند، یعنی وقتی که شرایط اولیه به گونه‌ای باشد که $3y_1(0) = -4y_2(0)$ و $3y_2(0) = -4y_3(0)$.

با شرایط اولیه کلی‌تر، جواب ترکیبی از دو وضع اساسی است. نمودار y_1 بر حسب t برای حالت نوعی را در شکل ۵.۶.۷ (الف) و تصویر مسیر نظیر آن در صفحه $y_1 y_2$ را در شکل ۵.۶.۷ (ب) نشان داده‌ایم. توجه کنید که این شکل آخری ممکن است کمی گمراه‌کننده باشد، چون نشان می‌دهد که تصویر مسیر خودش را قطع می‌کند. این برای مسیر واقعی در فضای چهاربعدی نمی‌تواند درست باشد، چرا که قضیه عمومی یکتایی را نقض می‌کند: ممکن نیست دو جواب متفاوت با نقطه شروع یکسان موجود باشند.



(الف)



(ب)

شکل ۵.۶.۷ جوابی از دستگاه (۲۲) که در شرط اولیه $y(0) = (-1, 4, 1, 1)$ صدق می‌کند. (الف) نمودار y_1 برحسب t . (ب) تصویر مسیر در صفحه $y_1 y_2$. همان‌طور که در متن بیان شد، مدار واقعی در فضای چهاربعدی خودش را قطع نمی‌کند.

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶،

(الف) جواب عمومی دستگاه داده‌شده را برحسب توابع حقیقی مقدار بنویسید.

(ب) یک میدان جهت و نمودار چند مسیر را رسم کنید و رفتار جوابها را وقتی $t \rightarrow \infty$ را تشریح کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x \quad ۲$$

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} x \quad ۴$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x \quad ۶$$

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۱$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۳$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۵$$

در هر یک از مسئله‌های ۷ و ۸، جواب عمومی دستگاه داده‌شده را برحسب تابعهای حقیقی مقدار بیان کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad ۸ \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x \quad ۷$$

در هر یک از مسئله‌های ۹ و ۱۰، جواب مسئله مقدار اولیه را بیابید. رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

$$x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۱۰ \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x \quad ۹$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ و ۱۲،

(الف) مقدارهای ویژه دستگاه داده‌شده را بیابید.

(ب) نقطه شروعی (جز مبدأ) انتخاب کنید و نمودار مسیر را در صفحه $x_1 x_2$ رسم کنید.

(ج) برای مسیر قسمت (ب) نمودارهای x_1 برحسب t و x_2 برحسب t را رسم کنید.

(د) نمودار مسیر قسمت (ب) را در فضای سه‌بعدی $x_1 x_2 t$ رسم کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۱۲ \quad x' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} x \quad ۱۱$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۲۰، ماتریس ضرایب شامل پارامتر α است. در هر یک از این مسئله‌ها،

(الف) مقدارهای ویژه را برحسب α تعیین کنید.

(ب) مقدار یا مقادیر بحرانی α را که در آن ماهیت کیفی صفحه فاز برای دستگاه تغییر می‌کند بیابید.

(ج) نمای فاز را برای مقداری از α که کمی کوچک‌تر و همچنین کمی بزرگ‌تر از هر یک از مقادیر بحرانی α باشد رسم کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} x \quad ۱۴ \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} x \quad ۱۳$$

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \alpha & \frac{5}{4} \end{pmatrix} x \quad ۱۶ \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} x \quad ۱۵$$

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -6 & -4 \end{pmatrix} x \quad ۱۸ \quad x' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x \quad ۱۷$$

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x \quad ۲۰ \quad x' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۱۹$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ و ۲۲، دستگاه معادله‌های داده‌شده را با روش مسئله ۱۹ بخش ۵.۷ حل کنید. فرض کنید که $t > 0$.

$$tx' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x \quad ۲۲ \quad tx' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۲۱$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۳ و ۲۴،

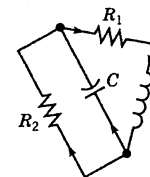
(الف) مقدارهای ویژه دستگاه داده شده را بیابید.

(ب) نقطه اولیه‌ای (جز مبدأ) انتخاب کنید و مسیر وابسته به آن را در صفحه x_1x_2 رسم کنید. همچنین مسیرها را در صفحه‌های x_1x_3 و x_2x_3 رسم کنید.

(ج) مدار متناظر نقطه اولیه قسمت (ب) را در فضای $x_1x_2x_3$ رسم کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

۲۵. مدار الکتریکی‌ای را که در شکل ۶.۶.۷ نشان داده شده است در نظر بگیرید. فرض کنید $R_1 = R_2 = 4\Omega$ ، $L = 8H$ و $C = 1/2F$.



شکل ۶.۶.۷ مسیر مسئله ۲۵.

(الف) ثابت کنید این مدار با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (i)$$

مدل می‌شود که در آن I جریان گذرا از القاگر و V افت ولتاژ در گذر از خازن است.

راهنمایی: مسئله ۱۹ بخش ۱.۷ را ببینید.

(ب) جواب عمومی معادله (i) را برحسب تابعهای حقیقی مقدار بیابید.

(ج) اگر $I(0) = 2A$ و $V(0) = 3V$ ، تابعهای $I(t)$ و $V(t)$ را پیدا کنید.

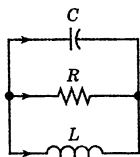
(د) مقدارهای حدی $I(t)$ ، $V(t)$ را وقتی $t \rightarrow \infty$ معین کنید. آیا این مقدارهای حدی به شرایط اولیه وابسته‌اند؟

۲۶. مدار الکتریکی‌ای که در شکل ۷.۶.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (i)$$

مدل می‌شود که در آن I جریان گذرا از القاگر و V افت ولتاژ در گذر از خازن است. این معادله‌های دیفرانسیل در مسئله ۱۹ بخش ۱.۷ به دست آمدند.

(الف) ثابت کنید که اگر $L > 4R^2C$ ، مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب، حقیقی و متمایز هستند، و اگر $L < 4R^2C$ مزدوج مختلط هستند.



شکل ۷.۶.۷ مسیر مسئله ۲۶.

(ب) فرض کنید $C = 1/2F$ ، $R = 1\Omega$ ، $L = 1H$. جواب عمومی دستگاه (i) را در این حالت پیدا کنید.

(ج) $I(t)$ و $V(t)$ را بیابید اگر $I(0) = 2A$ ، $V(0) = 1V$.

(د) برای مدار قسمت (ب) مقادیر حدی $I(t)$ و $V(t)$ را وقتی $t \rightarrow \infty$ معین کنید. آیا این مقادیر حدی به شرایط اولیه بستگی دارند؟

۲۷. در این مسئله نحوه اثبات استقلال خطی $u(t)$ و $v(t)$ داده شده با معادله‌های (۱۷) را نشان می‌دهیم. فرض کنید

$\tau_1 = \lambda + i\mu$ و $\bar{\tau}_1 = \lambda - i\mu$ یک جفت مقدار ویژه مزدوج ماتریس ضرایب در معادله (۱) باشند؛ فرض کنید $\xi^{(1)} = a + ib$ و $\bar{\xi}^{(1)} = a - ib$ هم بردارهای ویژه نظیرشان باشند. یادآوری می‌کنیم که در بخش ۳.۷ گفتیم که اگر $\bar{\tau}_1 \neq \tau_1$ آنگاه $\xi^{(1)}$ و $\bar{\xi}^{(1)}$ مستقل خطی هستند.

(الف) ابتدا نشان می‌دهیم که a و b مستقل خطی هستند. معادله $c_1a + c_2b = 0$ را در نظر بگیرید. a و b را برحسب $\xi^{(1)}$ و $\bar{\xi}^{(1)}$ بنویسید و سپس ثابت کنید که $(c_1 + ic_2)\xi^{(1)} + (c_1 - ic_2)\bar{\xi}^{(1)} = 0$.

(ب) ثابت کنید که $c_1 - ic_2 = 0$ و $c_1 + ic_2 = 0$ و بنابراین $c_1 = c_2 = 0$. در نتیجه a و b مستقل خطی هستند.

(ج) برای اثبات استقلال خطی $u(t)$ و $v(t)$ ، معادله $c_1u(t_0) + c_2v(t_0) = 0$ را در نظر بگیرید که در آن t_0 نقطه‌ای دلخواه است. این معادله را برحسب a و b بازنویسی کنید و سپس مانند قسمت (ب) ادامه بدهید تا ثابت کنید که $c_1 = 0$ و $c_2 = 0$. بنابراین $u(t)$ و $v(t)$ در نقطه دلخواه t_0 مستقل خطی هستند و در نتیجه در هر نقطه و در هر بازه مستقل خطی هستند.

۲۸. وزنه‌ای به جرم m روی فتری با ثابت k در معادله دیفرانسیل

$$mu'' + ku = 0$$

صدق می‌کند که در آن $u(t)$ جابه‌جایی جرم از موقعیت تعادلش در زمان t است (بخش ۷.۳ را ببینید).

(الف) فرض کنید $u = x_1$ و $u' = x_2$ ، ثابت کنید دستگاه حاصله عبارت است از

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(ب) مقدارهای ویژه ماتریس دستگاه قسمت (الف) را بیابید.

(ج) چند مسیر دستگاه را رسم کنید. یکی از مسیرها را انتخاب کنید و نمودارهای متناظر x_1 برحسب t و x_2 برحسب t را رسم کنید. هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(د) رابطه بین مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب و بسامد طبیعی دستگاه فنر-وزنه چیست؟

۲۹. دستگاه دو وزنه، سه فنر مثال ۳ متن را در نظر بگیرید. به جای تبدیل مسئله به دستگاهی از چهار معادله مرتبه اول، در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مستقیماً با استفاده از معادله‌های (۲۲) آن را حل کرد.

الف) ثابت کنید معادله‌های (۲۲) را می‌توان به صورت

$$x'' = \begin{pmatrix} -2 & 2/2 \\ 2/3 & -2 \end{pmatrix} x = Ax \quad (i)$$

نوشت.

ب) فرض کنید $x = \xi e^{rt}$ و ثابت کنید

$$(A - r^2 I)\xi = 0.$$

توجه کنید که r^2 (به جای r) مقدار ویژه A متناظر بردار ویژه ξ است.

ج) مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه A را بیابید.

د) عبارتهایی برای x_1 و x_2 بنویسید. باید چهار ثابت در این عبارتها موجود باشند.

ه) با مشتق‌گیری از نتایج بخش (د)، عبارتهایی برای x'_1 و x'_2 بنویسید. نتیجه قسمت‌های (د) و (ه) باید مطابق معادله (۳۱) در متن باشد.

۳۰. یک دستگاه دو وزنه-سه فنر را در نظر بگیرید که معادله‌های حرکت آنها معادله‌های (۲۲) در متن هستند. فرض کنید $k_1 = 1, m_1 = 1, m_2 = 2/3, k_2 = 3, k_3 = 4/3$.

الف) مانند متن، دستگاه را به چهار معادله مرتبه اول به صورت $y' = Ay$ تبدیل کنید. ماتریس A را تعیین کنید.

ب) مقدارها و بردارهای ویژه A را بیابید.

ج) جواب عمومی دستگاه را بنویسید.

د) وضعهای اساسی ارتعاش را تشریح کنید. برای هر یک از وضعهای اساسی، نمودار y_1 برحسب t و y_2 برحسب t را رسم کنید. همچنین مسیرها را در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_1 y_3$ رسم کنید.

ه) شرایط اولیه $y(0) = (2, 1, 0, 0)^T$ را در نظر بگیرید. ثابتهای دلخواه در جواب عمومی بخش (ج) را محاسبه کنید. دوره تناوب حرکت در این حالت چیست؟ نمودارهای y_1 برحسب t و y_2 برحسب t را رسم کنید. همچنین مسیرهای متناظر را در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_1 y_3$ رسم کنید. مطمئن شوید که نحوه پیوسته شدن یک دوره تناوب کامل را درک کرده‌اید.

و) مقادیر اولیه دیگری را به دلخواه در نظر بگیرید و نمودارهایی شبیه آنچه که در بخش (ه) خواسته شدند رسم کنید.

۳۱. دستگاه دو وزنه، سه فنر را که معادله‌های حرکت آنها معادله‌های (۲۲) در متن است در نظر بگیرید. فرض کنید $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ و $m_1 = m_2 = 1$.

الف) مانند متن، دستگاه را به دستگاهی از چهار معادله مرتبه اول به شکل $y' = Ay$ تبدیل کنید. ماتریس ضرایب A را تعیین کنید.

ب) مقدارها و بردارهای ویژه A را بیابید.

ج) جواب عمومی دستگاه را بنویسید.

د) وضعهای اساسی ارتعاش را تشریح کنید. برای هر وضع اساسی، نمودارهای y_1 برحسب t و y_2 برحسب t را رسم کنید. همچنین مسیرها را در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_1 y_3$ رسم کنید.

ه) شرایط اولیه $y(0) = (-1, 3, 0, 0)^T$ را در نظر بگیرید. ثابتهای دلخواه در جواب عمومی بخش (ج) را محاسبه کنید. نمودار y_1 برحسب t و y_2 برحسب t را رسم کنید. آیا فکر می‌کنید جواب متناوب است؟ همچنین مسیرها را در صفحه‌های $y_1 y_2$ و $y_1 y_3$ رسم کنید.

و) شرایط اولیه‌ای دلخواه در نظر بگیرید و نمودارهایی مشابه آنها که در قسمت (ه) خواسته شدند رسم کنید.

۷.۷. ماتریس‌های اساسی

ساختار جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را می‌توان با معرفی ایده ماتریس اساسی روشن‌تر کرد. فرض کنید $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله

$$x' = P(t)x \quad (1)$$

در بازه $\alpha < t < \beta$ تشکیل بدهند. در این صورت، به ماتریس

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

که ستونهایش بردارهای $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ هستند، ماتریس اساسی‌ای برای دستگاه (۱) می‌گوییم. توجه کنید که هر ماتریس اساسی نامنفرد است، چون ستونهایش بردارهای مستقل خطی هستند.

ماتریس اساسی دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x \quad (3)$$

را بیابید.

در مثال ۱ بخش ۵.۷ بردارهای

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

را به عنوان جوابهای مستقل خطی معادله (۳) به دست آوردیم. پس یک ماتریس اساسی دستگاه (۳) عبارت است از

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

مثال ۱

جواب مسئله مقدار اولیه را می‌توان برحسب ماتریس اساسی به صورت فشرده نوشت. جواب عمومی معادله

(۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t); \quad (5)$$

یا برحسب $\Psi(t)$

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} \quad (6)$$

که در آن $\mathbf{c}$ برداری ثابت با مؤلفه‌های اختیاری $c_1, \dots, c_n$ است. برای مسئله مقدار اولیه متشکل از معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^* \quad (7)$$

که در آن t_0 نقطه‌ای مفروض در $\alpha < t < \beta$ و $\mathbf{x}^*$ بردار اولیه‌ای مفروض است، تنها لازم است در معادله (۶) بردار $\mathbf{c}$ را طوری انتخاب کنیم که در شرط اولیه (۷) صدق کند. پس $\mathbf{c}$ باید در معادله

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^* \quad (8)$$

صدق کند. بنابراین چون $\Psi(t_0)$ نامفرد است، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^* \quad (9)$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^* \quad (10)$$

جواب مسئله مقدار اولیه (۱) و (۷) است. با این حال، تأکید می‌کنیم که برای حل مسئله مقدار اولیه، باید به جای محاسبه $\Psi^{-1}(t_0)$ و استفاده از معادله اول، معادله (۸) را به شیوه معمول با ساده‌سازی سطری حل کرد و سپس $\mathbf{c}$ را در معادله (۶) قرار داد.

از آنجا که هر ستون ماتریس اساسی Ψ جواب معادله (۱) است، نتیجه می‌شود که Ψ در معادلات دیفرانسیل ماتریسی

$$\Psi' = \mathbf{P}(t)\Psi \quad (11)$$

صدق می‌کند. صحت این رابطه به سادگی با مقایسه ستونهای متناظر در دو طرف معادله (۱۱) تأیید می‌شود.

گاهی راحت‌تر است که از ماتریس اساسی خاصی استفاده کنیم که آن را با $\Phi(t)$ نشان می‌دهیم. $\Phi(t)$ ماتریسی است که ستونهایش بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ هستند که در قضیه ۴.۴.۷ داده شدند. این بردارها علاوه بر اینکه در معادله دیفرانسیل (۱) صدق می‌کنند، باید در شرایط اولیه

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)} \quad (12)$$

هم صدق کنند که در آن $\mathbf{e}^{(j)}$ بردار یکته تعریف شده در قضیه ۴.۴.۷ است که فقط یک ۱ در مکان زام دارد و

بقیه درایه‌هایش صفرند. پس $\Phi(t)$ این خاصیت را دارد که

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (13)$$

از نماد Φ همواره برای نمایش ماتریس اساسی‌ای که در شرایط اولیه (۱۳) صدق می‌کند استفاده می‌کنیم و Ψ را وقتی به کار می‌بریم که ماتریس اساسی دلخواه موردنظر است. جواب مسئله مقدار اولیه (۱) و (۷) برحسب $\Phi(t)$ در ظاهر ساده‌تر است، چون $\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$ و در نتیجه از معادله (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^*. \quad (14)$$

هرچند معمولاً ماتریس اساسی $\Phi(t)$ از $\Psi(t)$ پیچیده‌تر است، به‌ویژه وقتی یک معادله تحت شرایط اولیه متعدد به‌طور مکرر حل می‌شود بسیار مفید است. این وضع متناظر دستگاهی فیزیکی است که ممکن است از حالت‌های اولیه مختلف شروع شود. اگر ماتریس اساسی $\Phi(t)$ ، تعیین شود آنگاه به‌ازای هر مجموعه از شرایط اولیه، با ضرب ماتریسی‌ای مانند معادله (۱۴) جواب به‌سادگی پیدا می‌شود. بنابراین ماتریس $\Phi(t)$ نمایشگر تبدیل شرایط اولیه $\mathbf{x}^*$ به جواب $\mathbf{x}(t)$ در زمان دلخواه t است. با مقایسه معادله‌های (۱۰) و (۱۴) واضح است که $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$.

برای دستگاه (۳) در مثال ۱، یعنی

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

ماتریس اساسی Φ را طوری بیابید که $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$.

ستونهای Φ جوابهای معادله (۳) هستند که در شرایط اولیه

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

صدق می‌کنند. چون جواب عمومی معادله (۳) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

می‌توانیم با انتخاب $c_1 = c_2 = 1/2$ جوابی را بیابیم که در مجموعه اول این شرایط اولیه صدق می‌کند. به همین ترتیب، با انتخاب $c_1 = 1/4$ و $c_2 = -1/4$ می‌توانیم جوابی را بیابیم که در مجموعه دوم شرایط اولیه صدق می‌کند؛ پس

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

مثال
۲

پس $\exp(\mathbf{A}t)$ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t) \quad (25)$$

صدق می‌کند. علاوه بر این، وقتی $t = 0$ ، $\exp(\mathbf{A}t)$ در شرط اولیه

$$\exp(\mathbf{A}t) \Big|_{t=0} = \mathbf{I} \quad (26)$$

صدق می‌کند. ماتریس اساسی Φ در همان مسئله مقدار اولیه‌ای صدق می‌کند که $\exp(\mathbf{A}t)$ در آن صدق می‌کند، یعنی

$$\Phi' = \mathbf{A}\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{I}. \quad (27)$$

در نتیجه، از قسمت یکتایی قضیه ۲.۱.۷ (تعمیم داده شده به معادلات دیفرانسیل ماتریسی) نتیجه می‌گیریم که $\exp(\mathbf{A}t)$ و ماتریس اساسی $\Phi(t)$ یکی هستند. پس می‌توانیم جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) را به صورت

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{x}^0 \quad (28)$$

بنویسیم که متناظر جواب (۱۸) برای مسئله مقدار اولیه (۱۷) است.

برای توجیه بهتر استفاده از نماد $\exp(\mathbf{A}t)$ برای سری (۲۲)، باید نشان بدهیم که این تابع ماتریسی خواص تابع نمایی را دارد. روشی برای انجام این کار در مسئله ۱۵ طرح شده است.

ماتریس‌های قطری شدنی. دلیل اصلی دشواریهای دستگاه خطی (جبری یا دیفرانسیل) این است که معادله‌ها معمولاً جفت شده هستند؛ به عبارت دیگر بعضی از و یا همه معادله‌ها شامل بیش از یک متغیر مجهول — و نوعاً همه متغیرهای مجهول — هستند. در نتیجه معادله‌ها را باید همزمان حل کرد. در مقابل، اگر هر معادله تنها شامل یک متغیر باشد، هر معادله را می‌توان مستقل از دیگران حل کرد که کاری ساده‌تر است. از این مشاهده چنین برمی‌آید که یک روش حل دستگاه معادلات تبدیل آن به صورت معادل دستگاه جفت نشده است که در آن هر معادله تنها شامل یک متغیر مستقل است. این کار متناظر با تبدیل ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ به ماتریسی قطری است.

بردارهای ویژه برای دستیابی به این تبدیل مفیدند. فرض کنید که ماتریس $n \times n$ مانند $\mathbf{A}$ مجموعه‌ای کامل از n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که اگر مقدارهای ویژه $\mathbf{A}$ متمایز باشند و یا ماتریس $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد، این وضع برقرار است. فرض کنید $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ بردارهای ویژه $\mathbf{A}$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقدارهای ویژه متناظر آنها باشند. ماتریس $\mathbf{T}$ را تشکیل بدهید که ستونهای $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ هستند؛ یعنی

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

چون ستونهای $\mathbf{T}$ بردارهای مستقل خطی هستند، $\det \mathbf{T} \neq 0$ ؛ بنابراین $\mathbf{T}$ غیرمفرد است و $\mathbf{T}^{-1}$ موجود است.

توجه کنید که درایه‌های $\Phi(t)$ از درایه‌های ماتریس اساسی $\Psi(t)$ در معادله (۴) بسیار پیچیده‌ترند؛ اما اکنون به سادگی می‌توان جواب متناظر هر مجموعه از شرایط اولیه را به دست آورد.

ماتریس $\exp(\mathbf{A}t)$. یادآوری می‌کنیم که جواب مسئله مقدار اولیه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (17)$$

که در آن $\mathbf{A}$ ثابت است، عبارت است از

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \exp(\mathbf{A}t). \quad (18)$$

اکنون مسئله مقدار اولیه متناظر را برای دستگاه $n \times n$ در نظر بگیرید؛ یعنی

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریسی ثابت است. با استفاده از نتایج این بخش برای معادله (۱۹)، می‌توانیم این جواب را به صورت

$$\mathbf{x} = \Phi(t) \mathbf{x}^0 \quad (20)$$

بنویسیم که در آن $\Phi(0) = \mathbf{I}$. با مقایسه مسئله‌های (۱۷) و (۱۹) و جواب آنها به نظر می‌رسد که ماتریس $\Phi(t)$ ممکن است ویژگی نمایی داشته باشد. در اینجا این امکان را بیشتر بررسی می‌کنیم.

تابع نمایی اسکالر $\exp(at)$ را می‌توان با سری توانی

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} \quad (21)$$

نمایش داد که به ازای هر t همگراست. اکنون اگر به جای اسکالر a ، ماتریس ثابت $n \times n$ مانند $\mathbf{A}$ را قرار بدهیم و سری وابسته به آن را در نظر بگیریم، به

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots \quad (22)$$

می‌رسیم. هر جمله در سری (۲۲) ماتریسی $n \times n$ است. می‌توان نشان داد که هر یک از مؤلفه‌های این جمع ماتریسی وقتی $n \rightarrow \infty$ به ازای هر t همگرا می‌شود. پس حاصلجمع سری (۲۲) ماتریسی جدید است که آن را با $\exp(\mathbf{A}t)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} \quad (23)$$

که متناظر بسط (۲۱) برای تابع اسکالر $\exp(at)$ است.

با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری (۲۳) نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt} [\exp(\mathbf{A}t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} \right] = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t); \quad (24)$$

با محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود که ستونهای ماتریس AT دقیقاً بردارهای $A\xi^{(1)}, \dots, A\xi^{(n)}$ هستند. چون $A\xi^{(k)} = \lambda_k \xi^{(k)}$ می‌توانیم بنویسیم

$$AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 \xi_1^{(1)} & \dots & \lambda_n \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \xi_n^{(1)} & \dots & \lambda_n \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} = TD \quad (30)$$

که در آن

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

ماتریسی قطری است که درایه‌های قطری آن مقادیر ویژه A هستند. از معادله (۳۰) نتیجه می‌شود که

$$T^{-1}AT = D; \quad (32)$$

پس اگر مقادیر و بردارهای ویژه A معلوم باشند، A را می‌توان با روند معادله (۳۲) به ماتریسی قطری تبدیل کرد. این روند به تبدیل تشابه معروف است و معادله (۳۲) با گفتن اینکه A مشابه ماتریس قطری D است خلاصه می‌شود. به عبارت دیگر، می‌گوییم که A قطری شدنی است. توجه کنید که تبدیل تشابه به مقادیر ویژه A را تغییر نمی‌دهد و بردارهای ویژه را به بردارهای $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ تبدیل می‌کند.

اگر A هرمیتی باشد، تعیین T^{-1} بسیار ساده است. می‌دانیم که بردارهای ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ از A دوه‌دو بر هم عمودند، بنابراین آنها را طوری انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر i ، $(\xi^{(i)}, \xi^{(i)}) = 1$. بنابراین به‌سادگی می‌توانیم نشان بدهیم که $T^{-1} = T^*$ ؛ به عبارت دیگر، معکوس T همان الحاقی آن (یعنی ترانژاده مزدوج مختلط آن) است.

بالاخره، توجه کنید که اگر A کمتر از n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد، ماتریس T ای موجود نیست که $T^{-1}AT = D$. در این حالت ماتریس T مشابه ماتریسی قطری نیست و A قطری شدنی نیست.

ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

را در نظر بگیرید. ماتریس تبدیل تشابه T را بیابید و ثابت کنید A را می‌توان قطری کرد. در مثال ۱ بخش ۵.۷، مقادیر و بردارهای ویژه A را یافتیم که عبارت بودند از

$$\tau_1 = 3, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = -1, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad (34)$$

پس ماتریس تبدیل T و معکوس آن عبارت‌اند از

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

در نتیجه می‌توانید تحقیق کنید که

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D. \quad (36)$$

اکنون مجدداً به دستگاه

$$x' = Ax \quad (37)$$

برمی‌گردیم. در بخش‌های ۵.۷ و ۶.۷ چگونگی حل چنین دستگاهی را با شروع از فرض $x = \xi e^{\tau t}$ تشریح کردیم. اکنون همین کار را از منظری دیگر، مبتنی بر قطری کردن ماتریس ضرایب A انجام می‌دهیم.

طبق آنچه که در بالا گفتیم، می‌توان A را قطری کرد اگر A مجموعه‌ای کامل از n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد. فرض کنید $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ بردارهای ویژه A متناظر مقادیر ویژه $\tau_1, \dots, \tau_n$ باشند و ماتریس تبدیل T را، که ستونهای آن $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ هستند، تشکیل بدهید. در این صورت با تعریف متغیر وابسته جدید y با رابطه

$$x = Ty, \quad (38)$$

از معادله (۳۷) نتیجه می‌شود

$$Ty' = ATy. \quad (39)$$

با ضرب در T^{-1} ، نتیجه می‌شود

$$y' = (T^{-1}AT)y; \quad (40)$$

یا با استفاده از معادله (۳۲)،

$$y' = Dy. \quad (41)$$

یادآوری می‌کنیم که D ماتریسی قطری با مقادیر ویژه A ، یعنی $\tau_1, \dots, \tau_n$ روی قطر است. یک ماتریس اساسی برای دستگاه (۴۱)، ماتریس قطری

$$Q(t) = \exp(Dt) = \begin{pmatrix} e^{\tau_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\tau_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\tau_n t} \end{pmatrix} \quad (42)$$

است (مسئله ۱۶ را ببینید). به این ترتیب با تبدیل (۳۸) می‌توانیم با استفاده از Q یک ماتریس اساسی Ψ برای دستگاه (۳۷) پیدا کنیم:

$$\Psi = TQ; \quad (43)$$

یعنی

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (۴۴)$$

معادله (۴۴) با نتیجه به دست آمده در بخش ۵.۷ یکی است. این روند قطری سازی هیچ مزیت محاسباتی ای بر روش بخش ۵.۷ ندارد، چون در هر حالت لازم است که مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل را پیدا کنیم.

مجدداً دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$x' = Ax \quad (۴۵)$$

را در نظر بگیرید که در آن A با معادله (۲۳) داده شده است. با استفاده از تبدیل $x = Ty$ که در آن T با معادله (۲۵) داده می شود، می توانید دستگاه (۴۵) را به دستگاه قطری

$$y' = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y = Dy \quad (۴۶)$$

تبدیل کنید. یک ماتریس اساسی برای دستگاه (۴۶) به دست بیاورید و سپس آن را تبدیل کنید تا ماتریسی اساسی برای دستگاه اولیه (۴۵) به دست بیاورید.

با ضرب مکرر D در خودش نتیجه می شود

$$D^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^r = \begin{pmatrix} 2^r & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (۴۷)$$

بنابراین از معادله (۲۳) نتیجه می شود که $\exp(Dt)$ ماتریسی قطری با درایه های e^{rt} و e^{-t} روی قطر است؛ یعنی

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{rt} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (۴۸)$$

بالاخره، ماتریس اساسی $\Psi(t)$ مورد نظر با ضرب T در $\exp(Dt)$ به دست می آید:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{rt} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{rt} & e^{-t} \\ 2e^{rt} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (۴۹)$$

توجه کنید که این ماتریس اساسی همان است که در مثال ۱ به دست آورده بودیم.

مسئله ها

در هر یک از مسئله های ۱ تا ۱۰،

(الف) ماتریسی اساسی برای دستگاه معادلات داده شده بیابید.

(ب) ماتریس اساسی $\Phi(t)$ را طوری بیابید که در شرط $\Phi(0) = I$ صدق کند.

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \quad ۱.$$

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x \quad ۲.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x \quad ۳.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x \quad ۴.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x \quad ۵.$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۶.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x \quad ۷.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x \quad ۸.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} x \quad ۹.$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad ۱۰.$$

۱۱. مسئله مقدار اولیه

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

را با استفاده از ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در مسئله ۳ پیدا کردید حل کنید.

۱۲. مسئله مقدار اولیه

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

را با استفاده از ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در مسئله ۶ پیدا کردید حل کنید.۱۳. ثابت کنید $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$ که در آن $\Phi(t)$ و $\Psi(t)$ همانها هستند که در این بخش تعریف شدند.۱۴. ماتریس اساسی $\Phi(t)$ برای دستگاه (۳) در مثال ۲ پیدا شد. با ضرب $\Phi(t)$ و $\Phi(s)$ ثابت کنید که

$$\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$$

۱۵. فرض کنید $\Phi(t)$ نمایشگر ماتریس اساسی ای باشد که در $\Phi(0) = I$ و $\Phi' = A\Phi$ صدق می کند. در متن این ماتریس را با $\exp(At)$ نشان دادیم. در این مسئله ثابت می کنیم که Φ خواص اصلی جبری تابع نمایی را دارد.(الف) ثابت کنید $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$ ؛ یعنی $\exp(At)\exp(As) = \exp[A(t+s)]$.(ب) راهنمایی: ثابت کنید که اگر s ثابت نگه داشته شود و t متغیر باشد، هر دوی $\Phi(t+s)$ و $\Phi(t)\Phi(s)$ در مسئله مقدار اولیه $Z(0) = \Phi(0) = I$ و $Z' = AZ$ صدق می کنند.(ج) ثابت کنید $\Phi(t)\Phi(-t) = I$ ؛ یعنی $\exp(At)\exp[A(-t)] = I$. سپس ثابت کنید $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.(د) ثابت کنید $\Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

۱۶. ثابت کنید اگر A ماتریسی قطری با درایه‌های روی قطر $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد آنگاه $\exp(At)$ نیز ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطرش $\exp(a_1 t), \exp(a_2 t), \dots, \exp(a_n t)$ هستند.

۱۷. نویسنده‌ای را در نظر بگیرید که در مسئله مقدار اولیه

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (i)$$

صدق می‌کند.

الف) قرار دهید $x_1 = u$ و $x_2 = u'$ و معادله (i) را به

$$x' = Ax, \quad x(0) = x^* \quad (ii)$$

تبدیل کنید.

ب) با استفاده از سری (۲۳) ثابت کنید که

$$\exp At = I \cos \omega t + A \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (iii)$$

ج) جواب مسئله مقدار اولیه (ii) را به دست بیاورید.

۱۸. روش تقریبهای متوالی (بخش ۸.۲ را ببینید) را در مورد دستگاه معادلات هم می‌توان به کار برد. به عنوان مثال، مسئله مقدار اولیه

$$x' = Ax, \quad x(0) = x^* \quad (i)$$

را در نظر بگیرید که در آن A ماتریسی ثابت و x^* برداری از قبل تعیین شده است.

الف) فرض کنید جوابی مانند $x = \phi(t)$ موجود است، ثابت کنید که این جواب در معادله انتگرالی

$$\phi(t) = x^* + \int_0^t A \phi(s) ds \quad (ii)$$

صدق می‌کند.

ب) با تقریب اولیه $x^{(*)}(t) = x^*$ شروع کنید. این عبارت برای $\phi(s)$ را در طرف راست معادله (ii) جایگزین کنید و تقریب جدید $\phi^{(1)}(t)$ را به دست بیاورید. ثابت کنید که

$$\phi^{(1)}(t) = (I + At)x^*. \quad (iii)$$

ج) این روند را تکرار کنید و دنباله تقریبهای $\phi^{(*)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(n)}, \dots$ را به دست بیاورید. با استعرا ثابت کنید که

$$\phi^{(n)}(t) = \left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} \right) x^*. \quad (iv)$$

د) فرض کنید $n \rightarrow \infty$. ثابت کنید جواب مسئله مقدار اولیه (i) عبارت است از

$$\phi(t) = \exp(At)x^* \quad (v)$$

۸.۷ مقادیر ویژه تکراری

بحث درباره دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت، یعنی

$$x' = Ax \quad (1)$$

را با بحثی درباره حالتی که A مقادیر ویژه تکراری دارد به پایان می‌بریم. یادآوری می‌کنیم که در بخش ۳.۷ گفتیم که مقدار ویژه تکراری با تکرر جبری $k \geq 2$ ممکن است تکرر هندسی کمتر از k داشته باشد. به عبارت دیگر، ممکن است کمتر از k بردار ویژه مستقل خطی متناظر این مقدار ویژه موجود باشد. در مثال زیر این وضع را می‌توان دید.

مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

را به دست بیاورید.

مقدار ویژه r و بردار ویژه ξ در معادله $(A - rI)\xi = 0$ ، یا

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه ریشه‌های معادله

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = 0 \quad (4)$$

هستند؛ پس دو مقدار ویژه عبارت‌اند از $r_1 = 2$ و $r_2 = 2$. پس مقدار ویژه ۲ تکرر جبری‌ای برابر ۲ دارد. برای تعیین بردارهای ویژه باید به معادله (۳) برگردیم و به جای r مقدار ۲ را قرار بدهیم؛ نتیجه می‌شود

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

بنابراین تنها یک شرط $\xi_1 + \xi_2 = 0$ را به دست می‌آوریم که ξ_2 را برحسب ξ_1 تعیین می‌کند، یا برعکس. پس بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $r = 2$ عبارت است از

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

یا مضربی ناصفر از این بردار. توجه کنید که تنها یک بردار مستقل خطی متناظر مقدار ویژه دوگانه موجود است.

به دستگاه (۱) برمی‌گردیم. فرض کنید $r = \rho$ ریشه‌ای با تکرر k از معادله دترمینانی

$$\det(A - rI) = 0 \quad (7)$$

مثالی
۱

باشد. در این صورت p مقدار ویژه‌ای با تکرر k از ماتریس A است. در این حالت دو امکان وجود دارد: یا k بردار ویژه مستقل خطی متناظر مقدار ویژه p موجودند و یا اینکه کمتر از k بردار ویژه از این نوع موجود است.

در حالت اول فرض کنید $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$ آن k بردار ویژه مستقل خطی متناظر مقدار ویژه p با تکرر k باشند. در این صورت $x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{pt}, \dots, x^{(k)}(t) = \xi^{(k)} e^{pt}$ هم k جواب مستقل خطی معادله (۱) هستند. پس در این حالت تکراری بودن مقدار ویژه $p = r$ اشکالی ایجاد نمی‌کند؛ هنوز مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله (۱) به صورت ξe^{rt} موجود است. اگر ماتریس A هرمیتی باشد، این حالت همواره اتفاق می‌افتد.

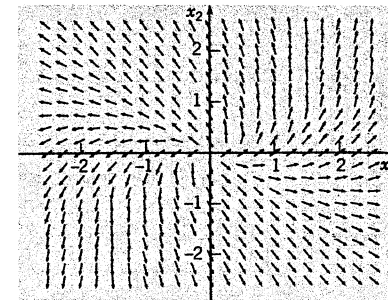
اما اگر ماتریس ضرایب هرمیتی نباشد، ممکن است کمتر از k بردار ویژه مستقل متناظر مقدار ویژه p با تکرر k وجود داشته باشد و اگر چنین شد، کمتر از k جواب معادله (۱) به صورت ξe^{pt} وجود خواهند داشت که متناظر این مقدار ویژه‌اند. بنابراین برای ساختن جواب عمومی دستگاه (۱) لازم است جوابهایی به شکلی متفاوت به دست بیاوریم. به قیاس آنچه پیش‌تر در مورد معادله‌های خطی مرتبه n دیدیم، طبیعی است که در پی جوابی به صورت حاصلضرب چندجمله‌ای و تابع نمایی باشیم. ابتدا مثالی می‌زنیم.

مجموعه‌ای اساسی از جوابهای

$$x' = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \quad (A)$$

به دست بیاورید و نمای فاز دستگاه را رسم کنید.

یک میدان جهت دستگاه (A) را در شکل ۱.۸.۷ نشان داده‌ایم. از این شکل چنین به نظر می‌آید که همه جوابهای ناصفر از مبدأ دور می‌شوند.



شکل ۱.۸.۷ یک میدان جهت برای دستگاه (A).

برای حل دستگاه، توجه کنید که ماتریس ضرایب A همان ماتریس مثال ۱ است؛ پس می‌دانیم که $r = 2$ مقدار ویژه دوگانه است و تنها یک بردار ویژه متناظر دارد که آن را می‌توانیم $\xi^T = (1, -1)$ انتخاب کنیم. پس یک جواب دستگاه (A) عبارت است از

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}; \quad (9)$$

اما جواب دیگری به صورت $x = \xi e^{rt}$ موجود نیست.

بر اساس روندی که برای حل معادله‌های خطی مرتبه دوم در بخش ۴.۳ دیدیم، ممکن است طبیعی باشد که سعی کنیم جواب دوم دستگاه (A) را به صورت

$$x = \xi t e^{2t} \quad (10)$$

بیاوریم که در آن ξ برداری ثابت است که باید تعیین شود. با قرار دادن x در معادله (A) نتیجه می‌شود

$$2\xi t e^{2t} + \xi e^{2t} - A\xi t e^{2t} = 0. \quad (11)$$

برای اینکه معادله (۱۱) به‌ارزای همه مقدارهای t برقرار باشد، لازم است ضرایب‌های $t e^{2t}$ و e^{2t} هر دو برابر صفر باشند. با استفاده از جملات e^{2t} نتیجه می‌شود

$$\xi = 0; \quad (12)$$

بنابراین هیچ جواب ناصفری به شکل (۱۰) برای معادله (A) وجود ندارد.

چون معادله (۱۱) شامل هر دو جمله $t e^{2t}$ و e^{2t} است. به نظر می‌آید که جواب دوم باید علاوه بر $\xi t e^{2t}$ عبارتی به صورت ηe^{2t} داشته باشد؛ به عبارت دیگر باید فرض کنیم

$$x = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t} \quad (13)$$

که در آن ξ و η بردارهایی ثابت هستند. با قرار دادن این عبارت در معادله (A) نتیجه می‌شود

$$2\xi t e^{2t} + (\xi + 2\eta) e^{2t} = A(\xi t e^{2t} + \eta e^{2t}). \quad (14)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $t e^{2t}$ و e^{2t} در دو طرف معادله (۱۴)، نتیجه می‌شود که باید

$$(A - 2I)\xi = 0 \quad (15)$$

و

$$(A - 2I)\eta = \xi. \quad (16)$$

معادله (۱۵) وقتی برقرار است که ξ بردار ویژه ماتریس A متناظر مقدار ویژه $r = 2$ باشد؛ یعنی $\xi^T = (1, -1)$. چون $\det(A - 2I)$ صفر است، ممکن است انتظار داشته باشیم که معادله (۱۶) حل نشود. اما این لزوماً صحیح نیست، چون به‌ارزای بعضی از بردارهای ξ می‌توان معادله (۱۶) را حل کرد. در واقع، ماتریس افزوده معادله (۱۶) عبارت است از

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

سطر دوم این ماتریس مضربی از سطر اول است. بنابراین این دستگاه قابل حل است و می‌توانیم بنویسیم

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1.$$

بنابراین اگر $\eta_1 = k$ که در آن k اختیاری است آنگاه $\eta_2 = -k - 1$. اگر بنویسیم

$$\eta = \begin{pmatrix} k \\ -1 - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

با قرار دادن ξ و η در معادله (۱۳) نتیجه می‌شود

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (18)$$

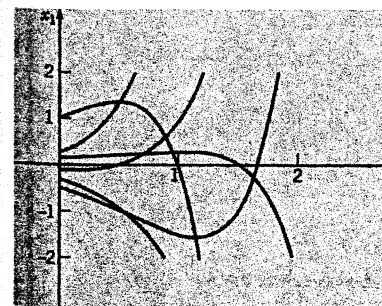
آخرین جمله معادله (۱۸) صرفاً مضربی از جواب $x^{(1)}(t)$ است و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد، اما دو جمله اول جواب جدیدی تشکیل می‌دهند:

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (19)$$

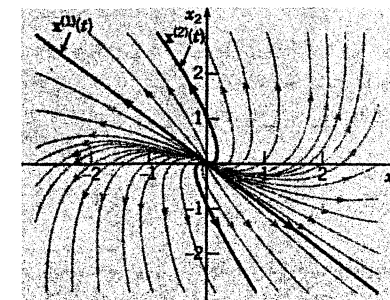
با محاسبه‌ای ساده می‌توان دید که $-e^{2t} = W[x^{(1)}, x^{(2)}](t)$ و بنابراین $x^{(2)}$ و $x^{(1)}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای دستگاه (۸) تشکیل می‌دهند. جواب عمومی عبارت است از

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]. \quad (20)$$

تحلیل نمودار جواب (۲۰) از مثالهای قبل کمی مشکل‌تر است. از اینکه هر جمله در معادله (۲۰) شامل عامل نمایی e^{2t} است نتیجه می‌شود که وقتی $x, t \rightarrow \infty$ بی‌کران می‌شود و وقتی $t \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0$. می‌توان نشان داد که وقتی $t \rightarrow -\infty$ همه جوابها مماس بر خط $x_2 = -x_1$ (که با بردار ویژه معین می‌شود) به مبدأ میل می‌کنند. به‌طور مشابه، وقتی $t \rightarrow \infty$ همه جوابها به خطی با شیب -1 منجانب می‌شوند. مسیرهای دستگاه (۸) را در شکل ۲.۸.۷ (الف) و چند نمودار نوعی x_1 برحسب t را در شکل ۲.۸.۷ (ب) نشان داده‌ایم. الگوری مسیرهای دستگاه مرتبه دوم $x' = Ax$ با مقدارهای ویژه یکسان اما تنها با یک بردار ویژه مستقل خطی، نوعاً به همین شکل است. در این حالت به مبدأ گره ناسره می‌گوییم. اگر مقدارهای ویژه منفی باشند، مسیر مشابه خواهد بود اما جهت آن به سمت داخل است. گره ناسره، بسته به اینکه مقدارهای ویژه منفی یا مثبت باشند، منجانبی‌یادار و یا ناپایدار است.



(ب)



(الف)

شکل ۲.۸.۷ (الف) مسیرهای دستگاه (۸)؛ مبدأ گرهی ناسره است. (ب) نمودار x_1 برحسب t برای دستگاه (۸).

یکی از تفاوت‌های دستگاه دو معادله مرتبه اول و یک معادله مرتبه دوم از مثال قبل معلوم است. یادآوری می‌کنیم که در جواب دوم معادله خطی مرتبه دومی که معادله مشخصه‌اش ریشه تکراری λ_1 دارد، نیازی به جمله $ce^{\lambda_1 t}$

نداریم؛ چون این جمله مضربی از جواب اول است. اما در مورد دستگاه دو معادله مرتبه اول، جمله $\eta e^{\lambda_1 t}$ در معادله (۱۳) با $\lambda_1 = 2$ ، مضربی از جواب اول e^{2t} نیست، بنابراین جمله ηe^{2t} باید حفظ شود.

حالت کلی‌ای که در آن یک مقدار ویژه مضاعف و تنها یک بردار ویژه متناظر آن موجود است، نوعاً مانند مثال ۲ است: مجدداً دستگاه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\rho = r$ مقدار ویژه مضاعف A است، اما تنها یک بردار ویژه ξ متناظر آن موجود است. در این صورت یک جواب [مشابه به معادله (۹)] عبارت است از

$$x^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t} \quad (21)$$

که در آن ξ در

$$(A - \rho I)\xi = 0 \quad (22)$$

صدق می‌کند. با ادامه کار مانند مثال ۲، جواب دوم را [مشابه با معادله (۱۹)] به‌صورت

$$x^{(2)}(t) = \xi te^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \quad (23)$$

به‌دست می‌آوریم که در آن ξ در معادله (۲۲) صدق می‌کند و η از

$$(A - \rho I)\eta = \xi \quad (24)$$

تعیین می‌شود. می‌توان نشان داد که حتی اگر $\det(A - \rho I) = 0$ ، همواره می‌توان معادله (۲۴) را برای η حل کرد. به بردار η بردار ویژه تعمیم‌یافته متناظر مقدار ویژه ρ می‌گوییم.

ماتریس‌های اساسی. همان‌طور که در بخش ۷.۷ توضیح داده شد، ماتریس‌های اساسی با قرار دادن جوابهای مستقل خطی در ستونها تشکیل می‌شوند. پس به‌عنوان مثال یک ماتریس اساسی برای دستگاه (۸) را می‌توان با استفاده از جوابهای $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ در معادلات (۹) و (۱۹) تشکیل داد:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix}. \quad (25)$$

ماتریس Φ را، که $\Phi(0) = I$ صدق می‌کند، به‌سادگی می‌توان از رابطه $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$ یافت. برای معادله (۸) می‌توانیم بنویسیم

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (26)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

ماتریس آخری همان ماتریس $\exp(At)$ است.

فرمهای زردان. همانگونه که در بخش ۷.۷ دیدیم، ماتریس $n \times n$ می مانند A را تنها زمانی می توان قطری کرد که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد. اگر بردارهای ویژه (به خاطر مقادیر ویژه تکراری) کمتر باشند، A را همواره می توان به ماتریسی تقریباً قطری تبدیل کرد که به آن فرم ژردان A می گوئیم و روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه A قرار دارند؛ در موقعیتهای معینی روی قطر واقع در بالای قطر اصلی یک قرار دارد و بقیه درایه ها صفرند.

مجدداً ماتریس A را در نظر بگیرید که با معادله (۲) داده شده است. ماتریس تبدیل T را با بردار ویژه ξ از معادله (۶) در ستون اول آن و بردار ویژه تعمیم یافته η از معادله (۱۷) با $k = 0$ در ستون دوم تشکیل بدهید. در این صورت T و معکوس آن با

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

داده می شوند. می توانید ثابت کنید که

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J. \quad (29)$$

ماتریس J در معادله (۲۹)، فرم ژردان A است. همه فرمهای ژردان نوعاً چنین اند که ۱ در بالای قطر اصلی در ستونی قرار دارد که متناظر بردار ویژه ای است که وجود ندارد (و در T با بردار ویژه تعمیم یافته جایگزین شده است). اگر مجدداً با معادله (۱)، یعنی

$$x' = Ax$$

شروع کنیم، تبدیل $x = Ty$ که در آن T با معادله (۲۸) داده شده است، دستگاه را به

$$y' = Jy \quad (30)$$

تبدیل می کند که در آن J در معادله (۲۹) داده شده است. در صورت اسکالر، دستگاه (۳۰) عبارت است از

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_2. \quad (31)$$

این معادلات را به سادگی می توان به ترتیب معکوس حل کرد؛ به این ترتیب نتیجه می شود

$$y_2 = c_2 e^{2t}, \quad y_1 = c_1 t e^{2t} + c_2 e^{2t}. \quad (32)$$

پس دو جواب مستقل خطی دستگاه (۳۰) عبارت اند از

$$y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad y^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (33)$$

۱. کامی ژردان (۱۸۳۸-۱۹۲۱م)، استاد اکول پلی تکنیک و کولژ دو فرانس دستاوردهای مهمی در آنالیز، توپولوژی و به ویژه جبر داشت. فرم ژردان ماتریس را در کتاب تأثیرگذارش *Traité des substitutions et des équations algébriques* که در ۱۸۷۰ میلادی منتشر شد معرفی کرد.

و ماتریس اساسی متناظر عبارت است از

$$\hat{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

چون $\hat{\Psi}(0) = I$ ، می توانیم ماتریس معادله (۳۴) را همان $\exp(Jt)$ بدانیم. با محاسبه توانهای J و قرار دادن آن در سری نمایی (مسئله های ۱۹ تا ۲۱ را ببینید) هم می توانستیم همین نتیجه را بگیریم. برای به دست آوردن ماتریسی اساسی برای دستگاه اولیه، حاصلضرب

$$\Psi(t) = T \exp(Jt) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} \end{pmatrix} \quad (35)$$

را تشکیل می دهیم که همان ماتریس اساسی معادله (۲۵) است.

فرم ژردان ماتریس های $n \times n$ را با جزئیات بیشتر در اینجا بررسی نمی کنیم. به ازای n های بزرگ ممکن است مقدارهای ویژه ای با تکرر بالا و شاید با تکرر هندسی بسیار کمتر موجود باشد. بررسی کامل فرم ژردان ماتریس $n \times n$ ، نیازمند پیش زمینه ای از جبر خطی است که از آنچه که برای بیشتر خوانندگان این کتاب فرض کرده ایم قوی تر است.^۱ در مسئله های ۱۷ تا ۲۱ از شما خواسته ایم که فرم ژردان دستگاهی از سه معادله را بررسی کنید.

مسئله ها

در هر یک از مسئله های ۱ تا ۴،

(الف) یک میدان جهت رسم کنید و چند مسیر را رسم کنید.

(ب) رفتار جوابها را وقتی $t \rightarrow \infty$ توصیف کنید.

(ج) جواب عمومی دستگاه معادلات را به دست بیاورید.

$$\begin{aligned} x' &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x & x' &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \\ x' &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x & x' &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

در هر یک از مسئله های ۵ و ۶، جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را به دست بیاورید.

$$\begin{aligned} x' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x & x' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

در هر یک از مسئله های ۷ تا ۱۰،

(الف) جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

۱. به عنوان مثال، کتابهای فهرست شده در مراجع این فصل را ببینید.

الف) ثابت کنید که مقادیرهای ویژه حقیقی و برابر هستند اگر $L = C^T R C$.

(ب) فرض کنید که $R = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 4H$. به علاوه، فرض کنید که $I(0) = 1A$ و $V(0) = 2V$. $I(t)$ و $V(t)$ را بیابید.

مقدارهای ویژه با تکرار ۳. اگر ماتریس A مقدار ویژه‌ای با تکرار جبری ۳ داشته باشد، ممکن است یک، دو یا سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر این مقدار ویژه موجود باشد. بسته به تعداد بردارهای ویژه متناظر مقدار ویژه سه‌گانه، جواب عمومی دستگاه $Ax = x'$ متفاوت است. همان‌طور که در متن دیدیم، اگر سه بردار ویژه موجود باشند هیچ مشکلی وجود نخواهد داشت، چون در این صورت سه جواب مستقل خطی به شکل $x = e^{\lambda t}x$ موجودند. در دو مسئله بعدی به ترتیب روند تعیین جواب را برای مقدار ویژه سه‌گانه‌ای با یک یا دو بردار ویژه نشان داده‌ایم.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (i)$$
$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ج) برای یافتن جواب دوم، فرض کنید $x = \xi t e^{\tau t} + \eta e^{\tau t}$. ثابت کنید که ξ و η در معادله‌های

$$(A - \gamma I)\xi = 0, \quad (A - \gamma I)\eta = \xi$$

د) برای یافتن جواب سوم، فرض کنید که $x = \xi(t^r/2)e^{rt} + \eta te^{rt} + \zeta e^{rt}$. ثابت کنید که ξ و η و ζ در معادله‌های

$$(A - \gamma I)\xi = 0, \quad (A - \gamma I)\eta = \xi, \quad (A - \gamma I)\zeta = \eta$$

صدق می‌کنند. معادله‌های اول و دوم همان معادله‌های بخش (ج) هستند، بنابراین معادله سوم را برای ζ حل کنید و از مضارب $\epsilon^{(1)}$ که ظاهر می‌شوند صرف‌نظر کنید. سپس جواب $t(x^{(r)})$ برای دستگاه (i) را بنویسید.

(ه) ماتریس اساسی $\Psi(t)$ دستگاه (i) را بنویسید.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{0}{7} & \frac{7}{7} \\ -\frac{7}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .7 \\ \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .8 \\ \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{7} \\ -\frac{7}{7} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .9 \\ \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .10 \end{aligned}$$

(ب) مسیر متناظر را در فضای $x_1 x_2 x_3$ و نمودار x_1 بر حسب t را رسم کنید.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} x \quad \text{11}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} -\frac{0}{4} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{0}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{0}{4} \end{pmatrix} x$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ و ۱۴، دستگاه معادلات داده‌شده را با روش مسئله ۱۹ بخش ۵.۷ حل کنید. فرض کنید $t > 0$.

$$tx' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x \cdot 14 \qquad tx' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \cdot 13$$

۱۵. ثابت کنید که همه جوابهای دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

وقتی $t \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کنند اگر و تنها اگر $a + d < 0$ و $ad - bc > 0$. این نتیجه را با نتیجه مربوط به مسئله ۳۸ در بخش ۴.۳ مقایسه کنید.

۱۶. محددات مدار الکتریکی مسئله ۲۶ بخش ۶.۷ را در نظر بگیرید. این مدار با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

مدل می شود.

(و) ماتریس T را با بردار ویژه $\xi^{(1)}$ در ستون اول و بردارهای ویژه تعمیم یافته η و ζ در ستونهای دوم و سوم تشکیل بدهید. سپس ماتریس T^{-1} را به دست بیاورید و حاصلضرب $J = T^{-1}AT$ را تشکیل بدهید. ماتریس J فرم زردان A است.

۱۸. دستگاه

$$x' = Ax = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} x \quad (i)$$

را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید $r = 1$ مقدار ویژه سمگانه A است و تنها دو بردار ویژه مستقل خطی موجودند که آنها را می توانیم به صورت

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (ii)$$

انتخاب کنیم. دو جواب مستقل خطی $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ برای معادله (i) را به دست بیاورید.

(ب) برای یافتن جواب سوم، فرض کنید $x = \xi te^t + \eta e^t$; سپس ثابت کنید که ξ و η باید در معادله های

$$(A - I)\xi = 0 \quad (iii)$$

$$(A - I)\eta = \xi \quad (iv)$$

صدق کنند.

(ج) ثابت کنید که $\xi = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}$ که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند، عمومی ترین جواب معادله

(iii) است. ثابت کنید که برای اینکه معادله (iv) را حل کنیم، لازم است که $c_1 = c_2$.

(د) ساده تر است که $c_1 = c_2 = 2$ انتخاب کنیم. برای این انتخاب، ثابت کنید که

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (v)$$

که در آن از مضربهایی از $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ که در η ظاهر شدند صرف نظر کردیم. از نتایج داده شده در معادله های (v)، جواب مستقل خطی سوم $x^{(3)}(t)$ برای معادله (i) را به دست بیاورید.

(ه) ماتریس اساسی $\Psi(t)$ را برای دستگاه (i) بنویسید.

(و) ماتریس T را با بردار ویژه $\xi^{(1)}$ در ستون اول و با بردار ویژه ξ و بردار ویژه تعمیم یافته η از معادله های (v) در دو ستون دیگر تشکیل بدهید. T^{-1} را بیابید و حاصلضرب $J = T^{-1}AT$ را تشکیل بدهید. ماتریس J فرم زردان A است.

۱۹. فرض کنید $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ، که در آن λ عددی حقیقی دلخواهی است.

(الف) J^2, J^3 و J^4 را بیابید.

(ب) با استقرا ثابت کنید که $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

(ج) $\exp(Jt)$ را معین کنید.

(د) با استفاده از $\exp(Jt)$ ، مسئله مقدار اولیه $x' = Jx$ و $x(0) = x^*$ را حل کنید.

۲۰. فرض کنید

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

که در آن λ عددی حقیقی دلخواهی است.

(الف) J^2, J^3 و J^4 را بیابید.

(ب) با استقرا ثابت کنید که

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

(ج) $\exp(Jt)$ را معین کنید.

(د) توجه کنید که اگر فرض کنید $\lambda = 1$ ، ماتریس این مسئله همان ماتریس J مسئله ۱۸ (و) است. با استفاده

از ماتریس T از مسئله ۱۸ (و)، حاصلضرب $T \exp(Jt)$ به ازای $\lambda = 1$ را تشکیل بدهید. آیا ماتریس

حاصله، همان ماتریس اساسی $\Psi(t)$ در مسئله ۱۸ (ه) است؟ اگر نیست، علت اختلاف را توضیح بدهید.

۲۱. فرض کنید

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

که در آن λ عددی حقیقی دلخواهی است.

(الف) J^2, J^3 و J^4 را بیابید.

(ب) با استقرا ثابت کنید که

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & [n(n-1)/2]\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

(ج) $\exp(Jt)$ را معین کنید.

(د) توجه کنید که اگر فرض کنید $\lambda = 2$ ، ماتریس J این مسئله همان ماتریس J مسئله ۱۷ (و) است. با استفاده

از ماتریس T در مسئله ۱۷ (و)، حاصلضرب $T \exp(Jt)$ را به ازای $\lambda = 2$ تشکیل بدهید. توجه کنید که

ماتریس حاصله همان ماتریس اساسی $\Psi(t)$ در مسئله ۱۷ (ه) است.

۹.۷ دستگاههای خطی غیرهمگن

در این بخش به دستگاه غیرهمگن

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (۱)$$

می‌پردازیم که در آن ماتریس n سطر و n ستونی $\mathbf{P}(t)$ و بردار n سطر $\mathbf{g}(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته هستند. با بحثی مشابه بخش ۵.۳ (مسئله ۱۶ این بخش را هم ببینید) جواب عمومی معادله (۱) را می‌توان به صورت

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (۲)$$

بیان کرد که در آن $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ جواب عمومی دستگاه همگن $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ است و $\mathbf{v}(t)$ یک جواب خاص دستگاه غیرهمگن (۱) است. به‌طور مختصر چند روش تعیین $\mathbf{v}(t)$ را بیان می‌کنیم.

قطری‌سازی. با دستگاهی به صورت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (۳)$$

شروع می‌کنیم که در آن $\mathbf{A}$ ماتریسی ثابت و قطری شدنی $n \times n$ است. با قطری کردن ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ ، مانند بخش ۷.۷، می‌توانیم معادله (۳) را به دستگاهی تبدیل کنیم که به سادگی قابل حل است.

فرض کنید $\mathbf{T}$ ماتریسی باشد که ستونهایش بردارهای ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ از ماتریس $\mathbf{A}$ هستند و متغیر وابسته جدید $\mathbf{y}$ را با

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} \quad (۴)$$

تعریف کنید. در این صورت با قرار دادن $\mathbf{x}$ در معادله (۳) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t).$$

با ضرب طرفین در $\mathbf{T}^{-1}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \quad (۵)$$

که در آن $\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$ و $\mathbf{D}$ ماتریس قطری‌ای است که درایه‌های روی قطرش مقدارهای ویژه $r_1, \dots, r_n$ ماتریس $\mathbf{A}$ هستند و به همان ترتیب مرتب شده‌اند که بردارهای ویژه متناظرشان، $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ ، در ستونهای $\mathbf{T}$ قرار گرفته‌اند. معادله (۵) دستگاهی از n معادله جفت‌نشده برای $y_1(t), \dots, y_n(t)$ است؛ در نتیجه این معادله‌ها را می‌توان جداگانه حل کرد. به صورت اسکالر، معادله (۵) به شکل

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \quad j = 1, \dots, n \quad (۶)$$

است که در آن $h_j(t)$ ترکیب مشخصی از تابعهای $g_1(t), \dots, g_n(t)$ است. معادله (۶) معادله خطی مرتبه اول است و با روشهای بخش ۱.۲ قابل حل است. در واقع

$$y_j(t) = e^{r_j t} \int_t^t e^{-r_j s} h_j(s) ds + c_j e^{r_j t}, \quad j = 1, \dots, n \quad (۷)$$

که در آن c_j ها ثابتهای دلخواه هستند. بالاخره، جواب $\mathbf{x}$ معادله (۳) از معادله (۴) به دست می‌آید. وقتی جمله دوم طرف راست معادله (۷) را در ماتریس تبدیل $\mathbf{T}$ ضرب کنیم، جواب عمومی معادله همگن $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ به دست می‌آید، و جمله اول طرف راست معادله (۷) جواب خاص دستگاه غیرهمگن (۳) است.

جواب عمومی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (۸)$$

را به دست بیاورید.

با روندی مشابه بخش ۵.۷ مقدارهای ویژه ماتریس ضرایب را پیدا می‌کنیم که عبارت‌اند از $r_1 = -3$ و $r_2 = -1$ و بردارهای ویژه متناظرشان عبارت‌اند از

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (۹)$$

پس جواب عمومی دستگاه همگن عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (۱۰)$$

قبل از نوشتن ماتریس $\mathbf{T}$ از بردارهای ویژه، به‌خاطر می‌آوریم که درنهایت باید $\mathbf{T}^{-1}$ را به دست بیاوریم. ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ حقیقی و متقارن است، بنابراین می‌توانیم از نتیجه بیان شده در انتهای بخش ۳.۷ استفاده کنیم: $\mathbf{T}^{-1}$ به‌سادگی الحاقی با $\mathbf{T}$ (چون $\mathbf{T}$ حقیقی است) ترانزاده ماتریس $\mathbf{T}$ است به شرط اینکه بردارهای ویژه $\mathbf{A}$ به‌گونه‌ای به‌هم‌بند شوند که $(\xi, \xi) = 1$. پس: با به‌هم‌بند کردن $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (۱۱)$$

با قرار دادن $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ و قرار دادن $\mathbf{x}$ در معادله (۸)، دستگاه معادلات را برای متغیر وابسته جدید $\mathbf{y}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}; \quad (۱۲)$$

پس

$$\begin{aligned} y_1' + 3y_1 &= \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t, \\ y_2' + y_2 &= \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t. \end{aligned} \quad (۱۳)$$

هر یک از معادله‌های (۱۳) معادله خطی مرتبه اول هستند و بنابراین می‌توان آنها را با روشهای بخش ۱.۲ حل کرد. با انجام این کار نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{t}{-3} \right) - \frac{1}{9} \right] + c_1 e^{-3t}, \\ y_2 &= \sqrt{2} t e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}} (t - 1) + c_2 e^{-t}. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

مثال

۱

می‌نویسیم و فرض می‌کنیم

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d} \quad (۱۸)$$

که در آن $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ بردارهایی هستند که باید تعیین شوند. توجه کنید که $r = -1$ مقدار ویژه ماتریس ضرایب است و بنابراین باید هر دو جمله $\mathbf{a}te^{-t}$ و $\mathbf{b}e^{-t}$ را در جواب قرار بدهیم. با قرار دادن معادله (۱۸) در معادله (۱۶) و مرتب کردن جمله‌ها، به معادله‌های جبری

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{a} &= -\mathbf{a} \\ \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\mathbf{c} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\mathbf{d} &= \mathbf{c} \end{aligned} \quad (۱۹)$$

برای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ می‌رسیم.

از عبارت اول معادله (۱۹) نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}$ بردار ویژه متناظر مقدار ویژه -1 است؛ پس $\mathbf{a}^T = (\alpha, \alpha)$ که در آن α ثابتی ناصفر و دلخواه است. بنابراین، درمی‌یابیم که عبارت دوم معادله (۱۹) را فقط وقتی می‌توان حل کرد که $\alpha = 1$ و در این حالت، به‌ارزی هر ثابت k ،

$$\mathbf{b} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (۲۰)$$

ساده‌ترین انتخاب $k = 0$ است که از آن نتیجه می‌شود $\mathbf{b}^T = (0, -1)$. سپس معادله‌های سوم و چهارم (۱۹) به‌ترتیب منجر به $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ و $\mathbf{d}^T = (-4/3, -5/3)$ می‌شوند. درنهایت از معادله (۱۸) جواب خاص را پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (۲۱)$$

جواب خاص (۲۱)، به‌خاطر تفاوت در جمله e^{-t} با جوابی که در معادله (۱۵) مثال (۱) به‌دست آمد، یکسان نیست. اما اگر در معادله (۲۰) فرض کنیم $k = 1/2$ آنگاه $\mathbf{b}^T = (1/2, -1/2)$ و دو جواب خاص مطابقت خواهند داشت.

تغییر پارامترها. اکنون به مسئله کلی‌تر که در آن ماتریس ضرایب ثابت نیست و یا قطری شدن نیست برمی‌گردیم. فرض کنید

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (۲۲)$$

که در آن $\mathbf{P}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته هستند. فرض کنید ماتریس اساسی $\Psi(t)$ دستگاه همگن متناظر، یعنی

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (۲۳)$$

پیدا شده باشد. با استفاده از روش تغییر پارامترها، جواب خاص و بنابراین جواب عمومی دستگاه غیرهمگن (۲۲) را می‌سازیم.

درنهایت جواب را برحسب متغیرهای اولیه می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-2t} + [(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2}]e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-2t} + [(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}]e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در آن $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ و $k_2 = c_2/\sqrt{2}$. دو جمله اول طرف راست معادله ۱۵ جواب عمومی دستگاه همگن متناظر معادله (۸) هستند و بقیه جمله‌ها، جواب خاص دستگاه غیرهمگن هستند.

اگر ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ در معادله (۳) به دلیل مقدارهای ویژه تکراری و کمبود بردارهای ویژه قطری‌شدنی نباشد، باز هم می‌توان با استفاده از تبدیل ماتریسی مناسب $\mathbf{T}$ که از بردارهای ویژه و بردارهای ویژه تعمیم‌یافته تشکیل شده آن را به فرم زردان $\mathbf{J}$ تبدیل کرد. در این حالت، معادله‌های دیفرانسیل $y_1, \dots, y_n$ جفت‌نشده نیستند، چون بعضی از سطرها $\mathbf{J}$ دو درایه ناصفر دارند؛ یکی مقدار ویژه که روی قطر است و دیگری یک 1 که سمت راست آن است. با این حال، می‌توان معادله‌های $y_1, \dots, y_n$ را و با شروع از y_n به‌ترتیب حل کرد. در این صورت جواب دستگاه (۳) از رابطه $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ به‌دست می‌آید.

ضرایب نامعین. روش دیگر یافتن جواب خاص دستگاه غیرهمگن (۱)، روش ضرایب نامعین است. برای استفاده از این روش، فرض می‌کنیم که جواب به شکل خاصی است و بعضی از ضرایبها و یا همه ضرایبها آن نامعین هستند و سپس این ضرایبها را طوری تعیین می‌کنیم که در معادله دیفرانسیل صدق کنند. از لحاظ عملی این روش را فقط زمانی می‌توان به‌کارگرفت که ماتریس ضرایب $\mathbf{P}$ ماتریس ثابت و مؤلفه‌های $\mathbf{g}$ تابعهای چندجمله‌ای، نمایی یا سینوسی با جمع و حاصلضرب اینها باشند. در این حالتها شکل صحیح جواب را می‌توان با روشی ساده و نظام‌مند پیش‌بینی کرد. روند انتخاب شکل جواب اساساً مانند روند ارائه‌شده در بخش ۵.۳ برای معادله‌های خطی مرتبه دوم است. تفاوت عمده در این است که جمله غیرهمگن به‌صورت $\mathbf{u}e^{\lambda t}$ نمایش داده می‌شود که در آن λ ریشه‌ای ساده از معادله مشخصه است. در این موقعیت به‌جای فرض کردن شکل جواب صورت $\mathbf{a}te^{\lambda t}$ لازم است از $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$ استفاده کنیم که در آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با قرار دادن جواب در معادله دیفرانسیل تعیین می‌شوند.

با استفاده از روش ضرایب نامعین، جواب خاص دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (۱۶)$$

را به‌دست بیاورید.

این همان دستگاه مثال ۱ است. با استفاده از روش ضرایب نامعین، $\mathbf{g}(t)$ را به شکل

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t \quad (۱۷)$$

به ازای $t = t_0$ ، انتگرال معادله (۳۱) صفر است، بنابراین شرط اولیه (۳۰) نیز برآورده می شود اگر

$$c = \Psi^{-1}(t_0)x^*; \quad (32)$$

بنابراین

$$x = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x^* + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)g(s)ds \quad (33)$$

جواب مسئله مقدار اولیه موردنظر است. مجدداً، با اینکه استفاده از Ψ^{-1} برای نوشتن جوابهای (۲۹) و (۳۳) مفید است، معمولاً در حالت های خاص بهتر است معادله ها را با ساده سازی سطری به جای محاسبه Ψ^{-1} و قرار دادن نتیجه در معادله های (۲۹) و (۳۳) حل کرد.

اگر از ماتریس اساسی $\Phi(t)$ با شرط $\Phi(t_0) = I$ استفاده کنیم جواب (۳۳) به شکلی ساده تری درمی آید. در این حالت

$$x = \Phi(t)x^* + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds. \quad (34)$$

اگر ماتریس $P(t)$ ثابت باشد، معادله (۳۴) را می توان ساده تر کرد (مسئله ۱۷ را ببینید).

با روش تغییر پارامتر، جواب عمومی دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$= Ax + g(t)$$

را به دست بیاورید. این همان دستگاه معادلات مثالهای ۱ و ۲ است. جواب عمومی دستگاه همگن متناظر در معادله (۱۰) داده شده است؛ پس

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (36)$$

یک ماتریس اساسی است. پس جواب x معادله (۳۵) با $x = \Psi(t)u(t)$ داده می شود که در آن $u(t)$ در معادله $\Psi(t)u'(t) = g(t)$ صدق می کند، یا

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \quad (37)$$

با حل معادله (۳۷) با ساده سازی سطری نتیجه می شود

$$u_1' = e^{2t} - \frac{3}{2}te^{2t},$$

$$u_2' = 1 + \frac{3}{2}te^t;$$

مثال
۳

چون جواب عمومی دستگاه همگن (۲۳)، $\Psi(t)c$ است، طبیعی است که مانند بخش ۶.۳ بخواهیم با تعویض بردار c با تابع برداری $u(t)$ جوابی برای دستگاه غیرهمگن (۲۲) بیابیم، پس فرض می کنیم

$$x = \Psi(t)u(t) \quad (24)$$

که در آن $u(t)$ برداری است که باید آن را پیدا کنیم. با مشتق گیری از x معادله (۲۴) و شرط برآورده شدن معادله (۲۲) نتیجه می شود

$$\Psi'(t)u(t) + \Psi(t)u'(t) = P(t)\Psi(t)u(t) + g(t). \quad (25)$$

چون $\Psi(t)$ ماتریس اساسی است، $\Psi'(t) = P(t)\Psi(t)$ ؛ بنابراین معادله (۲۵) به معادله

$$\Psi(t)u'(t) = g(t) \quad (26)$$

تبدیل می شود. به خاطر بیاورید که $\Psi(t)$ روی هر بازه که P پیوسته است نامنفرد است؛ پس $\Psi^{-1}(t)$ موجود است و بنابراین

$$u'(t) = \Psi^{-1}(t)g(t); \quad (27)$$

پس می توانیم هر بردار از خانواده بردارهایی را که در معادله (۲۷) صدق می کنند برای $u(t)$ انتخاب کنیم؛ این بردارها با تقریب یک بردار ثابت تعیین می شوند، بنابراین $u(t)$ را با

$$u(t) = \int \Psi^{-1}(t)g(t)dt + c \quad (28)$$

نشان می دهیم که در آن بردار ثابت c دلخواه است. اگر بتوان انتگرال در معادله (۲۸) را محاسبه کرد، جواب عمومی دستگاه (۲۲) با قرار دادن $u(t)$ از معادله (۲۸) در معادله (۲۴) به دست می آید. به هر حال، حتی اگر انتگرال ها را نتوان محاسبه کرد، باز هم می توانیم جواب عمومی معادله (۲۲) را به صورت

$$x = \Psi(t)c + \Psi(t) \int_{t_1}^t \Psi^{-1}(s)g(s)ds \quad (29)$$

بنویسیم که در آن t_1 نقطه دلخواهی در بازه (α, β) است. توجه کنید که جمله اول طرف راست معادله (۲۹) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر (۲۳) است و جمله دوم یک جواب خاص معادله (۲۲) است.

اکنون مسئله مقدار اولیه شامل معادله دیفرانسیل (۲۲) و شرط اولیه

$$x(t_0) = x^* \quad (30)$$

را در نظر می گیریم. جواب این مسئله را می توانیم راحت تر بیان کنیم اگر t_0 را به عنوان کران پایین انتگرال (۲۹) انتخاب کنیم. در این صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$x = \Psi(t)c + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)g(s)ds. \quad (31)$$

پس

$$u_1(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}te^{2t} + \frac{1}{6}e^{2t} + c_1,$$

$$u_2(t) = t + \frac{2}{3}te^t - \frac{2}{3}e^t + c_2,$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

تبدیل‌های لاپلاس. در فصل ۶ از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات خطی از مرتبه دلخواه استفاده کردیم. با روشی بسیار مشابه می‌توانیم دستگاه معادلات دیفرانسیل را حل کنیم. چون تبدیل انتگرال است، تبدیل بردار را باید مؤلفه به مؤلفه تعریف کرد. پس $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ برداری است که مؤلفه‌های آن تبدیل‌های مؤلفه‌های مربوطه $\mathbf{x}(t)$ است و به همین ترتیب برای $\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\}$. $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ را با $\mathbf{X}(s)$ نشان می‌دهیم. بنابراین با تعمیم قضیه ۱.۲.۶ به بردارها نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0). \quad (39)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس، دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (40)$$

را حل کنید. این همان دستگاه مثالهای ۱ تا ۳ است.

از هر یک از جمله‌های معادله (۴۰) تبدیل لاپلاس می‌گیریم؛ نتیجه می‌شود

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}(s) \quad (41)$$

که در آن $\mathbf{G}(s)$ تبدیل $\mathbf{g}(t)$ است. $\mathbf{G}(s)$ عبارت است از

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 2/(s+1) \\ 3/s^2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

بقیه محاسبات را با فرض اینکه $\mathbf{x}(t)$ در شرط اولیه $\mathbf{x}(0) = 0$ صدق می‌کند ساده می‌کنیم. به این ترتیب معادله (۴۱) تبدیل می‌شود به

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s) \quad (43)$$

که در آن، طبق معمول، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی است. در نتیجه $\mathbf{X}(s)$ با

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{G}(s) \quad (44)$$

داده می‌شود. به ماتریس $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ، ماتریس انتقال می‌گوییم، چون از ضرب آن در تبدیل بردار ورودی $\mathbf{g}(t)$ ، تبدیل

بردار خروجی $\mathbf{x}(t)$ به دست می‌آید. در این مثال می‌توانیم بنویسیم

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

و با محاسبه‌ای مستقیم نتیجه می‌شود

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}; \quad (46)$$

بنابراین با قرار دادن معادله‌های (۴۲) و (۴۶) در معادله (۴۴) و انجام عملیات لازم نتیجه می‌شود

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s'(s+1)(s+3)} \\ \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)} + \frac{3(s+2)}{s'(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

در نهایت باید $\mathbf{x}(t)$ را از تبدیل $\mathbf{X}(s)$ به دست بیاوریم. این کار را می‌توانیم با تجزیه به کسرهای جزئی در معادله (۴۷) و استفاده از جدول ۱.۲.۶ یا استفاده از نرم‌افزارهای مناسب رایانه‌ای انجام بدهیم. در هر صورت، پس از ساده کردن، نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

معادله (۴۸) جواب خاص معادله (۴۰) را که در شرط اولیه $\mathbf{x}(0) = 0$ صدق می‌کند معین می‌کند؛ در نتیجه کمی با جواب خاص به دست آمده در سه مثال قبل متفاوت است. برای به دست آوردن جواب عمومی معادله (۴۰) باید به عبارت معادله (۴۸)، جواب عمومی (۱۰) دستگاه همگن متناظر معادله (۴۰) را اضافه کنیم.

هر یک از روشهای حل معادلات غیرهمگن مزایا و معایبی دارند. روش ضرایب نامعین به هیچ انتگرال‌گیری‌ای نیاز ندارد، اما دامنه استفاده از آن محدود است و ممکن است فقط شامل جواب مجموعه‌هایی از معادلات جبری باشد. روش قطری‌سازی نیاز به محاسبه معکوس ماتریس تبدیل و جوابهای دستگاههای جفت‌نشده معادلات خطی مرتبه اول و سپس ضرب در یک ماتریس دارد. مزیت اصلی آن این است که وقتی ماتریس ضرایب هرمیتی باشد، معکوس ماتریس تبدیل را بدون محاسبه می‌توان نوشت و این برای دستگاههای بزرگ مهم است. در روش تبدیل لاپلاس باید معکوس ماتریسی را محاسبه کنیم که ماتریس تبدیل به دست بیاید، سپس یک ضرب انجام بدهیم و بالاخره تبدیل معکوس هر جمله نتیجه را حساب کنیم. این روش به‌ویژه برای مسئله‌هایی که تابع نیروی ناپیوسته یا ضربانی دارند مفید است. روش تغییر پارامتر کلی‌ترین روش است اما شامل جواب مجموعه‌ای از معادلات خطی با ضرایب متغیر و به دنبال آن انتگرال‌گیری و ضرب ماتریسی است و بنابراین ممکن است از منظر محاسباتی پیچیده‌ترین روش باشد. برای بسیاری از دستگاههای کوچک با ضرایب ثابت، مانند مثالهای این بخش، ممکن است هیچ‌کدام از این روشها مزیت چندانی بر دیگران نداشته باشند.



در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۲، جواب عمومی دستگاه معادلات داده‌شده را پیدا کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

(الف) ماتریس اساسی $\Psi(t)$ برای دستگاه همگن متناظر معادله (i) را معین کنید. مسئله ۲۵ بخش ۶.۷ را ببینید.
(ب) اگر $I(t) = e^{-t/2}$ ، جوابی برای دستگاه (i) تعیین کنید که در شرایط اولیه $x(0) = 0$ صدق کند.

در هر یک از مسئله‌های ۱۴ و ۱۵، ثابت کنید بردار داده‌شده جواب عمومی دستگاه همگن متناظر است و سپس دستگاه غیرهمگن را حل کنید. فرض کنید $t > 0$.

$$14. \quad x^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}, \quad tx' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$15. \quad x^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2, \quad tx' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

۱۶. فرض کنید $x = \phi(t)$ جواب عمومی $x' = P(t)x + g(t)$ باشد و فرض کنید $x = v(t)$ جواب خاصی از همان دستگاه باشد. با در نظر گرفتن تفاوت $\phi(t) - v(t)$ ، ثابت کنید $\phi(t) = u(t) + v(t)$ ، که در آن $u(t)$ جواب عمومی دستگاه همگن $x' = P(t)x$ است.

۱۷. مسئله مقدار اولیه

$$x' = Ax + g(t), \quad x(0) = x^*$$

را در نظر بگیرید.

(الف) با مراجعه به مسئله ۱۵ (ج) در بخش ۷.۷ ثابت کنید

$$x = \Phi(t)x^* + \int_0^t \Phi(t-s)g(s)ds.$$

(ب) ثابت کنید

$$x = \exp(At)x^* + \int_0^t \exp[A(t-s)]g(s)ds.$$

این نتایج را با نتایج مسئله ۲۷ در بخش ۶.۳ مقایسه کنید.

مراجع

اطلاعات بیشتر درباره ماتریس‌ها و جبر خطی در هر کتاب مقدماتی در این باره یافت می‌شود. کتابهای زیر به‌عنوان نمونه عرضه شده‌اند.

Anton, H. and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (New York: Wiley, 2000).

Johnson, L. W., Riess, R. D., and Arnold, J. T., *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.) (Reading, MA: Addison-Wesley, 2001).

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2003).

$$3. \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$4. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

$$5. \quad t > 0, x' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad t > 0, x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^{-2} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$$

$$7. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$8. \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$9. \quad x' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$10. \quad x' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

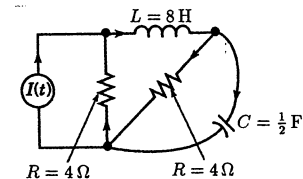
$$11. \quad 0 < t < \pi, x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$12. \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi, x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}$$

۱۳. مدار الکتریکی نشان داده‌شده در شکل ۱.۹.۷ با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} I(t)$$

مدل می‌شود که در آن x_1 جریان گذرا از القاگر، x_2 افت ولتاژ در خازن و $I(t)$ جریانی است که به‌وسیله منبع خارجی تأمین می‌شود.



شکل ۱.۹.۷ مدار در مسئله ۱۳.

- Leon, S. J., *Linear Algebra with Applications* (6th ed.) (New York: Macmillan, 2002).
- Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.) (New York: Academic Press, 1998).
- در کتاب زیر معادلات دیفرانسیل مقدماتی با تأکید ویژه بر دستگاههای معادلات مرتبه اول بررسی شده‌اند.
- Brannan, J. R. and Boyce, W. E., *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications* (New York: Wiley, 2007).