کانال کتابخانه تخصصی ریاضی

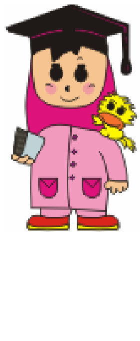
ششم دبستان

(تیزهوشان)

خلاصه درس و نکات

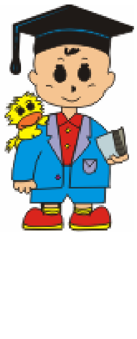
گروه فنی و تولید

گردآوری و تنظیم	لولاو مرادی
امور کامپیوتری و صفحه‌آرا	فاطمه عظیمی



بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی [وقف عام]

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب – بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – تلفن: ۶۴۶۳ - ۰۲۱



خلاصه درس و نکات ریاضی فصل اول: کسر متعارفی (ششم تیزهوشان)

تعریف: اگر دو عدد صحیح مانند a و b که در آن $b \neq ۰$ (b عددی غیرصفر است) داشته باشیم، آن را به صورت $\frac{a}{b}$ می‌نویسیم و به آن یک کسر متعارفی می‌گوییم که در آن a را صورت کسر و b را مخرج کسر می‌نامیم.

نکته:

۱- مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد.

۲- هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به صورت کسر $\frac{a}{۱}$ نمایش داد.

۳- کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۵}$ را به‌ترتیب نصف، ثلث، ربع و خمس می‌نامیم.

۴- کسری که صورت آن صفر باشد، برابر صفر است.

مثال:

$$\frac{۰}{۱۲}=۰ \quad , \quad \frac{۰}{۵\times۱۲}=۰ \quad , \quad \frac{۰}{\frac{۷}{۸}+۴}=۰$$

انواع کسر:

کسرهای کوچک‌تر از واحد: کسرهایی که صورتشان از مخرجشان کوچک‌تر است.

مثال:

$$\frac{۵}{۹}<۱ \quad , \quad \frac{۱}{۷}<۱$$

کسرهای برابر واحد: کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها برابر باشد.

مثال:

$$\frac{۱۲}{۱۲}=۱ \quad , \quad \frac{۶}{۶}=۱ \quad , \quad \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰}=۱$$

کسرهای بزرگ‌تر از واحد: کسرهایی که صورتشان از مخرجشان بزرگ‌تر است.

مثال:

$$\frac{۸}{۷}>۱ \quad , \quad \frac{۳۰۱۵}{۳۰۱۱}>۱$$

نکته: از بین کسرهای گفته شده، تنها کسری را می‌توان به عدد مخلوط تبدیل کرد که بزرگ‌تر از واحد باشد.

مثال:

$$\frac{۷}{۵}=۱\frac{۲}{۵} \quad , \quad \frac{۳۵}{۲۲}=۱\frac{۱۳}{۲۲}$$

روش تبدیل کسر متعارفی بزرگ‌تر از واحد به عدد مخلوط:

مثال: $\frac{۲۲}{۷}$

روش اول:
$$\frac{۲۲}{۷}=\frac{۲۱+۱}{۷}=\frac{۲۱}{۷}+\frac{۱}{۷}=۳+\frac{۱}{۷}=۳\frac{۱}{۷}$$

روش دوم:
$$\begin{array}{r|l} ۲۲ & ۷ \\ \hline -۲۱ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow \frac{۲۲}{۷}=۳\frac{۱}{۷}$$

* از روش اول می‌توان فهمید که هر عدد مخلوط را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع یک عدد صحیح و یک کسر نوشت.

روش تبدیل عدد مخلوط به کسر متعارفی:

مثال:

$$۸\frac{۲}{۵}=\frac{(۸\times۵)+۲}{۵}=\frac{۴۲}{۵}$$

تست: کدام تساوی درست است؟

۱) $۳\frac{۳}{۵}=\frac{۳۳}{۵}$ ۲) $۰\frac{۷}{۱۵}=۰$ ۳) $۲\frac{۰}{۷}=۰$ ۴) $۱\frac{۹۹}{۱۰۰}=\frac{۱۹۹}{۱۰۰}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»:

درستی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینه‌ی «۱» : $۳\frac{۳}{۵}=\frac{(۳\times۵)+۳}{۵}=\frac{۱۸}{۵}$

گزینه‌ی «۲» : $۰\frac{۷}{۱۵}=\frac{(۰\times۱۵)+۷}{۱۵}=\frac{۷}{۱۵}$

گزینه‌ی «۳» : $۲\frac{۰}{۷}=\frac{(۲\times۷)+۰}{۷}=\frac{۱۴}{۷}=۲$

مقایسه‌ی کسرها:

۱) کسرهایی با مخرج‌های برابر: از دو کسر که دارای مخرج‌های مساوی باشند، کسری بزرگ‌تر است که صورت آن بزرگ‌تر باشد.

مثال:

$$\frac{۳}{۷}>\frac{۴}{۷}\quad,\quad\frac{۲}{۵}>\frac{۳}{۵}$$

۲) کسرهایی با صورت‌های برابر: از دوکسر که دارای صورت‌های مساوی باشند، کسری بزرگ‌تر است که مخرج آن کوچک‌تر باشد.

مثال:

$$\frac{۹}{۲}<\frac{۹}{۴}\quad,\quad\frac{۷}{۵}>\frac{۷}{۳}$$

۳) **کسرهایی با صورت و مخرج برابر:** تمامی کسرهایی که صورتشان با مخرجشان برابر است باهم مساوی‌اند.

$$۱=\frac{۵}{۵}=\frac{۲۵}{۲۵}=\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰}=...$$

۴) **کسرهایی با صورت و مخرج نابرابر:** اگر دو کسر نه مخرجشان باهم و نه صورتشان باهم مساوی باشد، ابتدا آن‌ها را هم‌مخرج کرده و سپس مانند حالت اول آن‌ها را باهم مقایسه می‌کنیم.

مثال:

$$\frac{۲}{۵}\ \square\ \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۶}{۱۵}\ ,\ \frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۱۵}\Rightarrow\frac{۶}{۱۵}\boxed{>}\frac{۵}{۱۵}\Rightarrow\frac{۲}{۵}\boxed{>}\frac{۱}{۳}$$

نکته‌ی ۱: برای پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک می‌توانید کسرهای مساوی با یک کسر را بنویسید. در کسرهای مساوی کوچک‌ترین مخرجی که به مخرج کسرهای دیگر بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین مخرج مشترک نام دارد.

نکته‌ی ۲: هم‌چنین برای پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک می‌توانیم از روش تعیین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک استفاده کنیم:

مثال:

دو کسر $\frac{۵}{۱۸}$ و $\frac{۱}{۲۴}$ را مقایسه کنید.

ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

مقسوم‌علیه‌های ۲۴ $=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$

مقسوم‌علیه‌های ۱۸ $=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$ $\Rightarrow$ مقسوم‌علیه‌های مشترک $=\{۱,۲,۳,۶\}$ $\Rightarrow$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک = ۶

$۲۴=۶\times۴$ و $۱۸=۶\times۳$ $\Rightarrow$ مخرج مشترک $=۶\times۴\times۳=۷۲$

$$\frac{۱}{۲۴}\ \square\ \frac{۵}{۱۸}\Rightarrow\frac{۳}{۷۲}\boxed{<}\frac{۲۰}{۷۲}$$

نکته‌ی ۳: روش کلی مقایسه‌ی کسرها: روش «طرفین – وسطین» یک روش کلی برای مقایسه‌ی دو کسر است.

پیدا کردن یک کسر بین دو کسر:

۱) اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر باشند، آن‌گاه کسر $\frac{a+c}{b+d}$ بین آن دو قرار دارد.

مثال:

$$\frac{۱}{۸}<\frac{۲}{۱۰}<\frac{۱}{۲}$$

۲) میانگین گرفتن:

مثال:

$$\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۲}=\frac{\frac{۵}{۶}}{۲}=\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۱}{۳}$$

۳) هم‌مخرج کردن:

$$\frac{۱}{۲}<?<\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۲}{۶}<?<\frac{۳}{۶}\Rightarrow\frac{۴}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}$$

*** معکوس یک کسر:** برای نوشتن معکوس یک کسر (مخالف صفر) جای صورت و مخرج کسر را باهم عوض می‌کنیم.

معکوس عددی مانند a را با $\frac{۱}{a}$ نشان می‌دهیم.

نکته: حاصل‌ضرب هر عدد در معکوس آن برابر یک می‌شود.

$$a\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۱}{a}\Rightarrow a\times\frac{۱}{a}=۱$$

جمع و تفریق کسرها:

۱- جمع و تفریق کسرها با مخرج‌های مساوی:

مثال:

$$\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۳-۱+۵}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

۲- جمع و تفریق کسرها با مخرج‌های نابرابر: ابتدا کسرها را هم‌مخرج کرده، سپس یکی از مخرج‌ها را نوشته، صورت‌ها را باهم جمع یا تفریق می‌کنیم.

مثال:

$$\frac{۵}{۱۲}+\frac{۷}{۱۸}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱۵}{۳۶}+\frac{۱۴}{۳۶}-\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱۵+۱۴-۶}{۳۶}=\frac{۲۳}{۳۶}$$

جمع و تفریق عددهای مخلوط: برای جمع و تفریق عددهای مخلوط، ابتدا قسمت‌های صحیح را باهم و قسمت‌های کسری را باهم جمع یا از هم کم می‌کنیم. سپس حاصل این دو قسمت را باهم جمع می‌کنیم تا پاسخ عبارت به‌دست آید و در پایان جواب را تا جایی که ممکن است ساده می‌کنیم.

مثال:

$$۳\frac{۱}{۲}+۱\frac{۱}{۴}-۲\frac{۱}{۱۲}=(۳+۱-۲)+(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۲})=۲+\frac{۶}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}-\frac{۱}{۱۲}=۲\frac{۸}{۱۲}=۲\frac{۲}{۳}$$

ضرب و تقسیم کسرها:

۱- برای ضرب چند کسر، صورت‌ها را درهم ضرب کرده، حاصل را در صورت کسر حاصل قرار می‌دهیم و مخرج‌ها را نیز درهم ضرب کرده و آن را در مخرج کسر حاصل قرار می‌دهیم.

مثال:

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲\times۴\times۱}{۳\times۵\times۳}=\frac{۸}{۴۵}$$

نکته: در ضرب کسرها بهتر است در صورت امکان ابتدا کسرها را ساده کنیم، سپس عمل ضرب را انجام دهیم. برای این کار صورت هر کسر با مخرج خودش یا با مخرج کسر دیگر (در صورت داشتن عامل مشترک) ساده می‌شوند.

مثال:

$$\frac{\cancelto{\cancelto{۱}{۳}}{۱۸}}{\cancelto{۵}{۲۵}}\times\frac{\cancelto{۱}{۵}}{\cancelto{۱}{۶}}\times\frac{۲}{\cancelto{۱}{۳}}=\frac{۱\times۱\times۲}{۵\times۱\times۱}=\frac{۲}{۵}$$

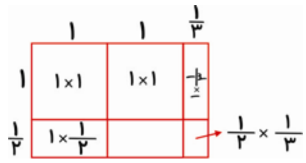
ضرب اعداد مخلوط: ابتدا اعداد مخلوط را به‌صورت کسرهای متعارفی درآورده، سپس مانند ضرب کسرها عمل می‌کنیم.

مثال:

$$۳\frac{۳}{۴}\times۲\frac{۴}{۷}=\frac{۱۵}{\cancelto{۲}{۴}}\times\frac{\cancelto{۹}{۱۸}}{۷}=\frac{۱۵\times۹}{۲\times۷}=\frac{۱۳۵}{۱۴}$$

ضرب دو عدد مخلوط به روش مساحتی:

مثال: پاسخ $۱\frac{۱}{۲}\times۲\frac{۱}{۳}$ را به کمک مساحت پیدا کنید.



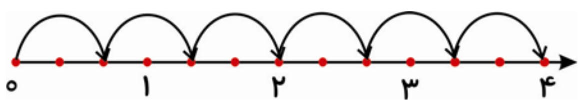
$$۲\frac{۱}{۳}\times۱\frac{۱}{۲}=۱+۱+(۱\times\frac{۱}{۳})+(۱\times\frac{۱}{۲})+(۱\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳})$$

$$=۳+\frac{۳}{۶}=۳+\frac{۱}{۲}=۳\frac{۱}{۲}$$

تقسیم کسرها:

۱- تقسیم عدد صحیح بر کسر (با استفاده از محور):

مثال: به کمک محور حاصل $۴\div\frac{۲}{۳}$ را به‌دست آورید.



توضیح: هر واحد را به ۳ قسمت (عدد مخرج) تقسیم می‌کنیم. سپس تعداد $\frac{۲}{۳}$ ها را در ۴ واحد می‌شماریم.

$$۴\div\frac{۲}{۳}=۶$$

۲- تقسیم کسر بر عدد صحیح (با استفاده از رسم شکل):

مثال:

$\frac{۲}{۳}\div۵$ را به کمک رسم شکل به‌دست آورید.

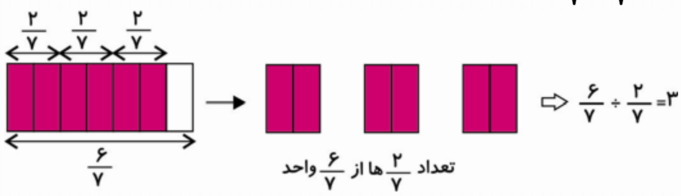
الف) با توجّه به این‌که $\frac{۲}{۳}$ از واحد کوچک‌تر است، ابتدا یک واحد کامل رسم کرده و آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و $\frac{۲}{۳}$ آن را رنگ می‌کنیم.

ب) سپس قسمت رنگ شده را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

حاصل تقسیم (قسمت رنگ شده) با توجّه به شکل برابر $\frac{۲}{۱۵}$ است.

۳- تقسیم کسر بر کسر (با استفاده از رسم شکل)

مثال: به کمک رسم شکل حاصل $\frac{۲}{۷} \div \frac{۶}{۷}$ را به‌دست آورید.



نکته‌ی ۱: در تقسیم دو کسر، پس از هم‌مخرج کردن کسرها، می‌توان با تقسیم صورت کسر اول به‌صورت کسر دوم حاصل عبارت را به‌دست آورد.

مثال:

$$\frac{۴}{۳} \div \frac{۵}{۷} = \frac{۴ \times ۷}{۳ \times ۷} \div \frac{۳ \times ۵}{۳ \times ۷} = \frac{۲۸}{۲۱} \div \frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۲۸}{۱۵}$$

نکته‌ی ۲: برای تقسیم یک کسر بر کسر دیگر، کافی است کسر اول را نوشته در معکوس کسر دوم ضرب کنید.

مثال:

$$\frac{۶}{۳۵} \div \frac{۴}{۷} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{۵}{\cancel{۳۵}}} \times \frac{\overset{۱}{\cancel{۷}}}{\underset{۲}{\cancel{۴}}} = \frac{۳}{۱۰}$$

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل ۲: عددهای اعشاری

عدد اعشاری: عددهای اعشاری نمایشی از عددهای کسری یا عددهای مخلوط‌اند که مخرج‌شان عددهای ۱۰، ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ است.

- عددهای اعشاری را در جدول ارزش مکانی نمایش می‌دهیم.

مثال: ۱۳/۲۷۱

هزارم	صدم	دهم	یکان	دهگان
۱	۷	۲	۳	۱

ممیز

مقایسه‌ی اعداد اعشاری:

۱) اگر دو عدد اعشاری داشته باشیم و بخواهیم آن‌ها را مقایسه کنیم، آن عددی بزرگ‌تر است که قسمت صحیح آن بزرگ‌تر باشد.

مثال: ۳/۰۱ > ۱/۹۹

۲) اگر دو عدد اعشاری داشته باشیم و قسمت صحیح آن‌ها برابر باشد، برای مقایسه به سراغ قسمت اعشاری می‌رویم. در این حالت ابتدا به سراغ عدد دهم دو رقم می‌رویم، رقم دهم هرکدام که بزرگ‌تر بود، آن عدد بزرگ تر است و اگر مساوی بود سراغ رقم صدم آن‌ها می‌رویم و مقایسه می‌کنیم و ...

مثال: ۷۹/۳۹ < ۷۹/۵۳

جمع و تفریق اعداد اعشاری:

در جمع و تفریق اعداد اعشاری حتماً عددهای صحیح زیر هم، ممیزها زیر هم و جزءهای اعشاری نیز با توجه به ارزش مکانی هر رقم زیر هم قرار می‌گیرند و سپس از سمت راست، اعدادی را که زیر هم قرار گرفته‌اند جمع یا تفریق می‌کنیم. علامت ممیز نهایی را زیر ممیزها قرار می‌دهیم.

مثال:

$$\begin{array}{r} ۱/۷۰ \\ +۰/۸ \\ \hline ۲/۵ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۷/۷۷ \\ -۰/۰۷ \\ \hline ۷/۷۰ \end{array}$$

ضرب عدد اعشاری:

۱- ضرب عددهای اعشاری درهم دیگر بدون در نظر گرفتن علامت ممیز:

مثال:

$$\begin{array}{r} ۲/۳۱ \\ \times\ ۱/۲ \\ \hline \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} ۲۳۱ \\ \times\ ۱۲ \\ \hline ۲۷۷۲ \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} ۲/۳۱ \\ \times ۱/۲ \\ \hline ۲/۷۷۲ \end{array}$$

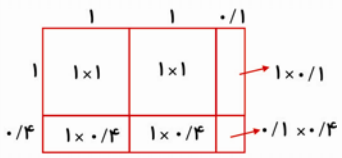
یعنی تعداد رقم‌های اعشار عدد حاصل‌ضرب برابر با مجموع تعداد رقم‌های اعشار هریک از عدد اعـشاری است کـه درهم ضرب کرده‌ایم.

۲- تبدیل عددهای اعشاری به کسر:

مثال: $$۳/۱ \times ۰/۵ = \frac{۳۱}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱۵۵}{۱۰۰} = ۱/۵۵$$

۳- استفاده از رسم شکل:

مثال: پاسخ ضرب $۲/۱ \times ۱/۴$ را به کمک رسم شکل به‌دست آورید.

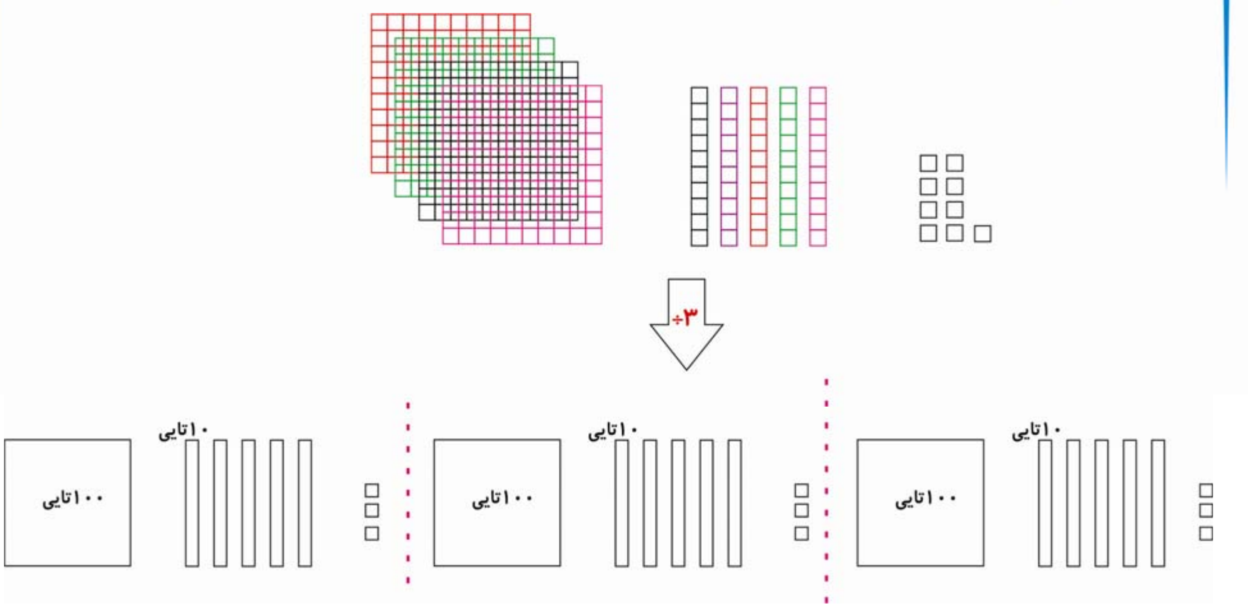


$$۱/۴ \times ۲/۱ = (۱ \times ۱) + (۱ \times ۱) + (۱ \times ۰/۱) + (۰/۱ \times ۰/۴) + (۱ \times ۰/۴) + (۱ \times ۰/۴)$$

$$= ۱ + ۱ + ۰/۱ + ۰/۰۴ + ۰/۴ + ۰/۴ = ۲ + ۰/۹ + ۰/۰۴ = ۲/۹۴$$

تقسیم یک عدد بر عدد طبیعی با رسم شکل:

مثال: تقسیم $۴۵۹ \underline{|\ ۳\ }$ را با رسم شکل نشان دهید. سپس خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی آن را مشخص کنید.



شکل نشان می‌دهد که پس از انجام تقسیم، ۴۵۹ به سه دسته‌ی ۱۵۳ تایی تقسیم می‌شود.

۴۵۹ | ۳

۱۵۳

۰

تقسیم یک عدد اعشاری بر عدد طبیعی:

برای تقسیم یک عدد اعشاری بر عدد طبیعی مانند یک تقسیم معمولی عمل می‌کنیم و زمانی که به ممیز مقسوم رسیدیم برای خارج‌قسمت نیز همان‌جا ممیز می‌گذاریم.

مثال:

۳۵/۹۸ | ۲۱

۱/۷۱

۲۱−

۱۴ ۹

۱۴− ۷

۰۰ ۲۸

− ۲۱

۰/۰۷

نکته‌ی ۱: در تقسیم اعداد اعشاری بر عدد طبیعی، تعداد رقم‌های اعشار مقسوم، خارج‌قسمت و باقی‌مانده برابرند.

نکته‌ی ۲: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه را در عددی غیرصفر ضرب کنیم، خارج‌قسمت تغییری نمی‌کند ولی باقی‌مانده نیز در همان عدد ضرب می‌شود.

تقسیم یک عدد (عدد اعشاری) بر عدد اعشاری:

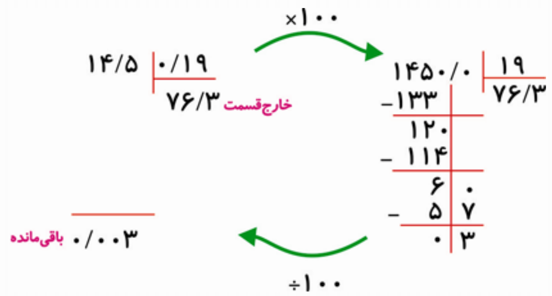
در این حالت ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را در یکی از اعداد ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا ... ضرب می‌کنیم تا ممیز مقسوم‌علیه حذف شود. بنابراین تقسیم جدید به یکی از دو تقسیم زیر تبدیل می‌شود:

۱) تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی

۲) تقسیم عدد طبیعی بر عدد طبیعی

نکته (مهم): برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم اول (اولیه‌ی مورد نظر) باید باقی‌مانده‌ی تقسیم جدید را بر همان عددی که مقسوم و مقسوم‌علیه را در آن ضرب کرده‌ایم، تقسیم کنیم.

مثال: خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم زیر را به‌دست آورید.



تست: در یک موتور الکتریکی دو چرخ با یک تسمه به هم مربوط شده‌اند، اگر محیط چرخ کوچک ۱/۵۴ متر و محیط چرخ بزرگ ۲/۸ متر باشد در صورتی‌که چرخ کوچک در هر دقیقه ۱۰۰ دور بچرخد، چرخ بزرگ در هر ساعت چند دور می‌چرخد؟

«ورودی تیزهوشان ۹۲»

۱) ۵۵   ۲) ۷۵

۳) ۳۳۰۰   ۴) ۴۵۰۰

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

مسافت طی شده توسط چرخ کوچک در یک ساعت، متر $۶۰ \times ۱۰۰ \times ۱/۵۴$

$$\text{تعداد دورهای چرخ بزرگ} = \frac{۶۰\times۱۰۰\times۱/۵۴}{۲/۸} = ۳۳۰۰$$

تست: در یک تقسیم، باقی‌مانده ۰/۰۰۱۴، خارج‌قسمت ۱۲/۹۸ و مقسوم‌علیه ۰/۰۹۵ می‌باشد. در این تقسیم، مقسوم چه عددی است؟

«آزمون کانون – ششم تیزهوشان – ۱۰ آذر ۹۱»

۱) ۱/۲۳۴۵   ۲) ۱/۳۵۰۷

۳) ۲/۱۳۸۱   ۴) ۲/۵۴۱۳

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

باقی‌مانده + (خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه) = مقسوم

۰/۰۰۱۴ + (۱۲/۹۸ × ۰/۰۹۵) = مقسوم

۱/۲۳۴۵ = ۰/۰۰۱۴ + ۱/۲۳۳۱ = مقسوم

?	۰/۰۹۵
	۱۲/۹۸
۰/۰۰۱۴	

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل ۳: اندازه‌گیری طول و زاویه

تعریف: فاصله‌ی بین دو نقطه، طول پاره خطی است که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند.

مهم: کوتاه‌ترین فاصله‌ی هر نقطه تا یک خط، خط عمودی است که از آن نقطه بر خط مورد نظر رسم می‌شود.

نکته‌ی (۱): واحد استاندارد اندازه‌گیری طول، متر است.

نکته‌ی (۲): تبدیل واحدها را به‌صورت زیر داریم:

۱ متر = ۱۰ دسی‌متر = ۱۰۰ سانتی‌متر = ۱۰۰۰ میلی‌لیتر

۱ کیلومتر = ۱۰۰۰ متر

مثال: ۴۷ میلی‌متر چند سانتی‌متر است؟

پاسخ:

۴۷	۱۰	میلی‌متر
۴/۷	۱	سانتی‌متر

÷۱۰

نکته‌ی (۳): در تبدیل واحدهای بزرگ به واحدهای کوچک‌تر عمل ضرب و در تبدیل واحدهای کوچک به واحدهای بزرگ، عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

تست: عدد ۹۳/۴۱ متر به‌ترتیب چند دسی‌متر و چند کیلومتر است؟

«ورودی استعدادهای درخشان ۹۲»

۱) ۹/۳۴۱ و ۰/۰۹۳۴۱
۲) ۹۳۴/۱ و ۰/۰۹۳۴۱
۳) ۹/۳۴۱ و ۹۳۴۱۰
۴) ۹۳۴/۱ و ۹۳۴۱۰

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

دسی‌متر ۹۳/۴۱ × ۱۰ = ۹۳۴/۱

کیلومتر ۹۳/۴۱ ÷ ۱۰۰۰ = ۰/۰۹۳۴۱

تست: هر دسی‌مترمربع چند مترمربع است؟

«ورودی استعدادهای درخشان ۹۲»

۱) ۱۰۰
۲) ۱
۳) ۰/۰۱
۴) ۰/۱

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

مترمربع ۱ ÷ ۱۰۰ = ۰/۰۱

نکته: اگر n نقطه روی خط راست انتخاب کنیم، آن‌گاه تعداد نیم‌خط‌ها و پاره‌خط‌های به‌وجود آمده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\dfrac{n(n-1)}{2}=$ تعداد پاره‌خط‌ها و $2\times n=$ تعداد نیم‌خط‌ها

مثال: روی یک خط ۷ نقطه انتخاب می‌کنیم، تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها را حساب کنید.

$\dfrac{7\times(7-1)}{2}=\dfrac{7\times 6}{2}=21$ = تعداد پاره‌خط‌ها

$2\times 7=14$ = تعداد نیم‌خط‌ها

نکته: اگر تعداد اضلاع یک چندضلعی را با n نشان دهیم، تعداد قطرها برابر است با:

$\dfrac{n\times(n-3)}{2}$ = تعداد قطرها

مهم: در چند زاویه‌ی مجاور که دارای رأس مشترک هستند، تعداد کل زاویه‌ها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$\dfrac{n(n-1)}{2}$ = تعداد زاویه‌ها و n = تعداد نیم‌خط‌ها

دو زاویه‌ی متمم: به هر دو زاویه که مجموع آن‌ها ۹۰ درجه باشد، دو زاویه‌ی متمم می‌گویند.

دو زاویه‌ی مکمل: به هر دو زاویه که مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه باشد، دو زاویه‌ی مکمل می‌گویند.

مجموع زوایای داخلی n ضلعی: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با: $(n-2)\times 180^\circ$

تست: مجموع زاویه‌های داخلی یک ده‌ضلعی را در تعداد قطرهایش ضرب کرده و سپس بر تعداد اضلاعش تقسیم می‌کنیم، حاصل کدام عدد است؟

«ورودی تیزهوشان ۹۲»

۱) ۷۲۰۰ ۲) ۴۰۵۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۵۰۴۰

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$(n-2)\times 180^\circ=(10-2)\times 180^\circ=1440^\circ$ = مجموع زوایای داخلی

$\dfrac{n\times(n-3)}{2}=\dfrac{10\times(10-3)}{2}=35$ = تعداد قطرها

$\dfrac{1440\times 35}{10}=144\times 35=5040$ = جواب مورد نظر

مثلث: در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی 180° است.

ارتفاع مثلث: پاره‌خطی است که از رأس مثلث به ضلع مقابل آن رأس عمود می‌شود.

میانه‌ی مثلث: پاره‌خطی است که از یک رأس مثلث به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می‌شود.

نیم‌ساز مثلث: پاره خطی که زاویه‌ی مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و به ضلع مقابل آن زاویه وارد می‌شود.

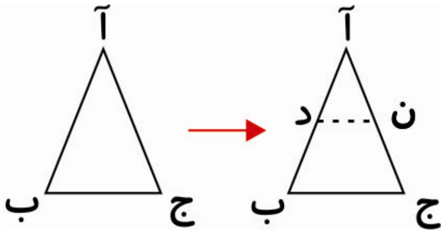
عمود منصف ضلع مثلث: خطی که بر وسط ضلع مثلث عمود می‌شود. هر مثلث سه عمود منصف دارد که در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند.

نکته‌ی (۱): ممکن است نقطه‌ی تقاطع عمود منصف‌های یک مثلث، خارج از آن قرار بگیرد.

نکته‌ی (۲): در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، ارتفاع، نیم‌ساز و عمود منصف برهم منطبق‌اند.

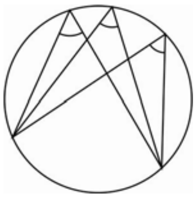
نکته‌ی (۳): در مثلث متساوی‌الساقین، میانه، ارتفاع، نیم‌ساز و عمود منصف نظیر قاعده همگی برهم منطبق‌اند.

مثال مهم: اگر مثلثی مانند شکل زیر داشته باشیم و وسط ضلع آب و آ ج را پیدا کنیم و به‌ترتیب د و ن بنامیم. همواره رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:



$$\text{اندازه‌ی د ن} = \frac{\text{اندازه‌ی ج ب}}{۲}$$

مثال مهم: در شکل زیر، اگر زاویه‌های مشخص شده را اندازه بگیریم، می‌بینیم که اندازه‌ی این زاویه‌ها باهم برابر است. پس می‌توان نتیجه گرفت که در یک دایره، اندازه‌ی زاویه‌های مقابل به یک کمان باهم برابر است.



نکته: هرگاه دو عدد صحیح با مجموع مشخص داشته باشیم، در صورتی حاصل‌ضرب این دو عدد، بیش‌ترین مقدار ممکن خواهد بود که این دو عدد باهم برابر باشند.

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل ۴: عددهای تقریبی

مقدار تقریب: در زندگی روزمره و متناسب با موضوع‌هایی که با آن‌ها سر و کار داریم، به جای مقدارهای واقعی و دقیق، عددهای تقریبی را به کار می‌بریم.

– هر کدام از ابزارهای اندازه‌گیری تا حدّی می‌توانند عددهای دقیق را بیان کنند. برای نمونه دقت خط‌کشی که فقط واحدهای سانتی‌متر را دارد، ۱ سانتی‌متر است. یعنی این که خط‌کش کمتر از ۱ سانتی‌متر را مشخص نمی‌کند.

دو روش برای تقریب زدن وجود دارد:

الف) روش قطع کردن

ب) روش گرد کردن

****

الف) روش قطع کردن

اندازه‌گیری را با تقریب‌های متفاوتی انجام می‌دهیم. برای بیان تقریب مورد نظر عبارت «با تقریب کمتر از ...» استفاده می‌کنیم و به جای، جاهای خالی عددهایی را مانند ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و یا دهم، صدم و هزارم می‌نویسیم.

برای مثال وقتی می‌گوییم با تقریب کمتر از ۱۰ یعنی رقم‌های مرتبه‌ی کمتر از دهگان ارزش زیادی ندارند و نیازی به بیان آن‌ها نیست.

به این ترتیب رقم‌های یکان، دهم، صدم،هزارم و ... را حذف کرده و به جای آن‌ها صفر می‌گذاریم.

* علامت ≃ یعنی تقریباً مساوی

مثال: با روش قطع کردن و با تقریب‌های داده شده، عددهای تقریبی را بنویسید.

(با تقریب کمتر از ۱۰) ۱۳۰ ≃ ۱۳۴/۴

(با تقریب کمتر از ۱۰۰) ۲۰۰ ≃ ۲۳۷

(با تقریب کمتر از ۰/۱) ۸۲۲۴۵/۹ ≃ ۸۲۲۴۵/۹۵۲

(با تقریب کمتر از ۱) ۲۰ ≃ ۲۴/۲۳

(با تقریب کمتر از ۰/۰۱) ۲۴/۲۳ ≃ ۲۴/۲۳

* مقدار تقریبی هر کسر:

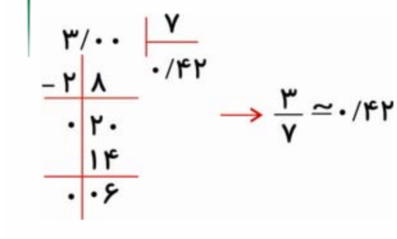
با تقسیم صورت بر مخرج هر کسر می‌توان آن را به صورت یک عدد اعشاری نشان داد.

_ وقتی می‌گوییم تقسیم را تا یک رقم اعشار ادامه دهید، یعنی با تقریب کمتر از ۰/۱ به دست آورید.

_ وقتی می‌گوییم تقسیم را تا دو رقم اعشار ادامه دهید، یعنی با تقریب کمتر از ۰/۰۱ به دست آورید.

❖ **مثال:** مقدار تقریبی کسر $\frac{۳}{۷}$ را با تقریب کمتر از ۰/۰۱ پیدا کنید.

➢ **پاسخ:**



تست: عدد ۳۸/۵۶۰۶۷۹ با تقریب کمتر از .... به روش قطع کردن برابر با ۳۸/۵۶.

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۰۱ ۴) موارد ۲ و ۳

➢ **پاسخ:** گزینه‌ی «۴»

۳۸/۵۶۰۶۷۹ ≃ ۳۸/۵ (با تقریب کمتر از ۰/۱)

۳۸/۵۶۰۶۷۹ ≃ ۳۸/۵۶ (با تقریب کمتر از ۰/۰۱)

۳۸/۵۶۰۶۷۹ ≃ ۳۸/۵۶۰ (با تقریب کمتر از ۰/۰۰۱)

ب) روش گرد کردن

برای این که در استفاده از عددهای تقریبی خطای تقریبی کمتری داشته باشیم، از روش گرد کردن استفاده می‌کنیم. در این روش با توجّه به تقریب مورد نظر، عدد تقریبی‌ای را انتخاب می‌کنیم که به مقدار واقعی نزدیک‌تر باشد.

برای مثال مقدار عدد تقریبی ۳۷۱ به روش گردکردن و با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر ۴۰۰ می‌شود، چون عدد ۴۰۰ بهتر از ۳۰۰ به مقدار واقعی نزدیک‌تر است.

* در روش گرد کردن باید به مرتبه‌ی بعد از تقریب مورد نظر توجّه کنیم.

مهم: در این حالت هم مانند روش قطع کردن رقم‌های با ارزش مکانی کمتر از تقریب داده شده صفر خواهد شد با این تفاوت که اگر در سمت چپ به راست اولین رقمی که به جای صفر قرار داده‌ایم ۵ و بیش‌تر از ۵ باشد به رقم قبلی‌اش (رقم سمت چپی‌اش) یکی اضافه می‌کنیم.

مثال: به روش گرد کردن و با تقریب کمتر از ۱۰، مقدار تقریبی عدد زیر را به دست آورید:

۲۸۶/۳۱ ≃ ۲۹۰

تست: عدد ۷۸۶/۵۲ را یک بار با تقریب کمتر از ۰/۱ و یک بار با تقریب کمتر از ۱۰ گرد می‌کنیم. اختلاف دو عدد چند است؟ «ورودی تیزهوشان ۹۲»

۱) ۱۶/۵۲ ۲) ۶/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۵/۳

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

۷۸۶/۵۲ ≃ ۷۸۶/۵ (با تقریب کمتر از ۰/۱)

۷۸۶/۵۲ ≃ ۷۹۰ (با تقریب کمتر از ۱۰)

۷۹۰ − ۷۸۶/۵ ≃ ۳/۵

نمایش تقریبی عددها روی محور:

❖ **مثال:** با استفاده از محور اعداد نشان دهید عدد ۲۴۳ با تقریب کمتر از ۱۰۰ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

پاسخ: ابتدا واحدهای محور را با توجّه به تقریب خواسته شده به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، سپس عدد تقریبی را طوری انتخاب می‌کنیم که به مقدار واقعی نزدیک‌تر باشد، یعنی مقدار خطا (اختلاف با عدد واقعی) در آن کمتر باشد.

۲۴۳ ≃ ۲۰۰

❖ **مثال:** اعداد تقریبی $\frac{۵}{۹}$ و $\frac{۲}{۱۱}$ را روی محور نشان دهید.

محاسبه‌های تقریبی:

❖ **مثال:** حاصل تقریبی عبارت زیر را با تقریب کمتر از ۱ از دو روش محاسبه کنید.

۱۴/۳۷ + ۷/۴۶ + ۶/۴۸ =

روش اول: ابتدا عددها را گرد کنید، سپس حاصل جمع را به دست آورید.

روش دوم: ابتدا حاصل جمع را پیدا کنید، سپس پاسخ را گرد کنید.

روش اول:

۱۴/۳۷ → ۱۰ , ۷/۴۶ → ۸ , ۶/۴۸ → ۷

۱۰ + ۸ + ۷ = ۲۵ : حاصل عبارت

روش دوم:

۱۴/۳۷ + ۷/۴۶ + ۶/۴۸ = ۲۸/۳۱ → ۲۹

• **مهم:** در انجام محاسبه‌های تقریبی باید مراقب بود که مقدار خطاهای استفاده از عددهای تقریبی روی هم جمع نشود و فاصله‌ی عدد حاصل از مقدار واقعی‌اش زیاد نشود.

ترتیب انجام عملیات:

۱) درون پرانتز ۲) ضرب و تقسیم ۳) جمع و تفریق

❖ **مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱/۱ - ۰/۲ \times (۰/۴۳ + ۰/۰۷) = ۱/۱ - ۰/۲ \times ۰/۵ = ۱/۱ - ۰/۱ = ۱$$

$$۴ \div ۲/۱ + ۱/۲ \times ۳ = ۴ \div ۲/۱ + ۳/۶ = ۱/۹ + ۳/۶ = ۵/۵$$

$$۲\frac{۱}{۲}+۱\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۵}=۲\frac{۱}{۲}+\frac{۱۶}{۱۵}=۲\frac{۱}{۲}+۱\frac{۱}{۱۵}=۳\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱۵}=۳\frac{۱۷}{۳۰}$$

$$۱+(۱+(۱+(۰/۷-۰/۲)))=۱+(۱+(۱+۰/۵))=۱+(۱+۱/۵)=۱+(۲/۵)=۳/۵$$

تست: پاسخ کدام عبارت صحیح است؟

«ورودی تیزهوشان ۹۲»

۱) $۴\div۰/۰۲+۰/۲\times۳\frac{۱}{۲}=۲۰/۰۷$

۲) $۵\times۲\frac{۲}{۵}+۶\times۳\frac{۱}{۵}\times۰/۱=۳\frac{۱۲}{۱۰۰}$

۳) $۵\div۰/۰۲+۵\div۰/۰۰۲=۲۷۵۰$

۴) $\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱}\times\frac{۲}{۵}+۳\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=۱/۲$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

گزینه‌ی «۱»: $۴ \div ۰/۰۲ + ۰/۲ \times ۳\frac{۱}{۲} = ۲۰۰ + ۰/۷ = ۲۰۰/۷$

گزینه‌ی «۲»: $۵ \times ۲\frac{۲}{۵} + ۶ \times ۳\frac{۱}{۵} \times ۰/۱ = ۱۲ + ۱۹/۲ \times ۰/۱ = ۱۲ + ۱/۹۲ = ۱۳/۹۲ = ۱۳\frac{۹۲}{۱۰۰}$

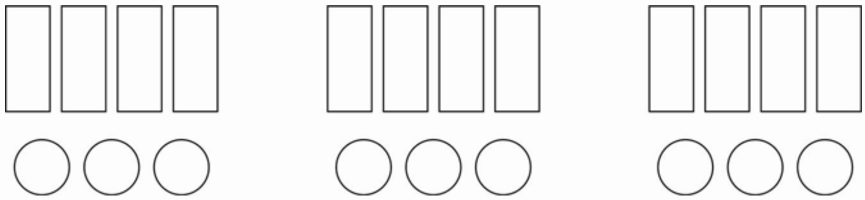
گزینه‌ی «۳»: $۵ \div ۰/۰۲ + ۵ \div ۰/۰۰۲ = ۲۵۰ + ۲۵۰۰ = ۲۷۵۰$

گزینه‌ی «۴»: $\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۲}{۵} + ۳ \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۵} + ۱ = ۰/۴ + ۱ = ۱/۴$

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل ۵: نسبت، تناسب و درصد

نسبت و جدول تناسب:

مثال: در شکل زیر، در مقابل هر ۴ مستطیل، ۳ دایره قرار دارد.



در این‌جا، نسبت مستطیل‌ها به دایره‌ها مثل ۴ به ۳ است. هم‌چنین، می‌توان گفت که نسبت دایره‌ها به مستطیل‌ها، مثل ۳ به ۴ است.

این نسبت را به شکل‌های مختلف زیر می‌توان بیان کرد.

نسبت مستطیل‌ها به دایره‌ها ۴ به ۳ یا ۴ و ۳ یا ۳: ۴ یا $\frac{۴}{۳}$ است. این نسبت را به‌صورت زیر در جدول نسبت قرار می‌دهیم.

۴	مستطیل‌ها
۳	دایره‌ها

- گاهی نسبت‌ها به‌طور واضح بیان نمی‌شوند و تشخیص نسبت‌ها به محاسبه نیاز دارد.
- در صفحه‌ی ۸۲ کتاب درسی نسبت سه جز یک مجموعه را می‌بینیم.

*بنابراین اگر در بین سه کمیت، داده‌های مسئله شامل دو نسبت بین یک کمیت مشترک با دو کمیت دیگر باشد و مسئله از ما نسبت بین کل کمیت مشترک با عددی یکسان بیان شده باشد.

الف) در هر دو نسبت داده شده، کمیت مشترک با عددی یکسان بیان شده باشد.

مثال: نسبت پول حمید به مجید ۳ به ۴ و نسبت پول مجید به سعید ۴ به ۵ است. نسبت پول این سه نفر را پیدا کنید.

۳	حمید
۴	مجید
۵	سعید

$$\Rightarrow \frac{\boxed{۴}}{۵} = \frac{\text{سعید}}{\text{مجید}} \quad , \quad \frac{۳}{\boxed{۴}} = \frac{\text{حمید}}{\text{مجید}}$$

ب) در هر دو نسبت داده شده، کمیت مشترک با عددهای متفاوتی بیان شده باشد. در این حالت دو نسبت را طوری تغییر می‌دهیم که عددهای کمیت مشترک یکی شود.

مثال:

در محاسبه‌ی دستمزد سه کارگر نسبت سهم علی به محسن ۴ به ۳ و نسبت سهم علی به احمد ۶ به ۷ است. نسبت سهم هریک را از کلّ دستمزد به‌دست آورید.

علی	۱۲
محسن	۹
احمد	۱۴

$\Rightarrow$

$$\frac{\text{علی}}{\text{محسن}} = \frac{۴}{۳} = \frac{۴\times۳}{۳\times۳} = \frac{۱۲}{۹}$$

$$\frac{\text{علی}}{\text{احمد}} = \frac{۶}{۷} = \frac{۶\times۲}{۷\times۲} = \frac{۱۲}{۱۴}$$

* مقایسه‌ی نسبت‌ها به مقایسه‌ی کسرها تبدیل می‌شود. در نوشتن کسر به واحد عددها توجه شود.

مقدارهای تناسب

– هرگاه دو مقدار طوری تغییر کنند که نسبت(حاصل تقسیم)آن‌ها مقدار ثابتی باشد (یعنی کسرهای نسبت‌ها باهم مساوی باشند)، به آن دو مقدار، مقدارهای متناسب می‌گویند و جدول این نسبت‌ها را جدول تناسب می‌گویند.

مثال: نسبت پول نوید به سعید $\frac{۲}{۵}$ به $\frac{۳}{۸}$ است. اگر سعید ۴۵۰۰ تومان داشته باشد، نوید چند تومان پول دارد؟

$$\frac{\text{نوید}}{\text{سعید}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۳}{۸}} = \frac{۱۶}{۱۵} \Rightarrow$$

نوید	۱۶	?
سعید	۱۵	۴۵۰۰

$$\Rightarrow ? = \frac{۱۶\times۴۵۰۰}{۱۵} = ۴۸۰۰ \quad \text{تومان}$$

مثال: هر متر ۱۰ دسی‌متر است؛ ۵۷ دسی‌متر چند متر است؟

متر	۱	?
دسی‌متر	۱۰	۵۷

$$\Rightarrow ? = \frac{۵۷\times۱}{۱۰} = ۵/۷ \quad \text{متر}$$

* حلّ مسأله: بسیاری از مسئله‌های پیچیده را می‌توان به مسئله‌های ساده و مرحله‌ای تبدیل کرد.

وقتی مسئله‌های ساده و مرحله‌ای حل می‌شوند، مسئله‌ی اصلی و پیچیده نیز به جواب خواهد رسید. کافی است زیر مسئله‌ها را تشخیص دهیم.

مثال: صاحب یک کارگاه جوراب‌بافی روز گذشته ۱۸/۳۵ کیلوگرم و امروز ۱۷/۶۵ کیلوگرم نخ خریده است. اگر برای هر جفت جوراب ۱۲۰ گرم نخ مصرف شود، با این مقدار نخ چند جفت جوراب می‌توان بافت؟

پاسخ: مسئله‌ی اصلی را به تعدادی زیرمسئله تبدیل می‌کنیم:

الف) ابتدا مقدار نخ خریداری شده در این دو روز را حساب می‌کنیم:

$۱۸/۳۵ + ۱۷/۶۵ = ۳۶/۰۰$ کیلوگرم

ب) بعد مقدار نخ کیلوگرم را به گرم تبدیل می‌کنیم:

$۳۶ \times ۱۰۰۰ = ۳۶۰۰۰$ گرم

ج) با این مقدار نخ چند جفت جوراب می‌توان خرید؟

$۳۶۰۰۰ \div ۱۲۰ = ۳۰۰$

تست: حاصل عبارت زیر چقدر کم دارد تا ۲ واحد کامل شود؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

$$۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+۱}}}=$$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+۱}}}=۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}}=۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}}=$$

$$۱+\frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}}=۱+\frac{۱}{\frac{۵}{۳}}=۱+\frac{۳}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

جواب مورد نظر : $۲-\frac{۸}{۵}=\frac{۱۰}{۵}-\frac{۸}{۵}=\frac{۲}{۵}$

تسهیم به نسبت

– تسهیم به نسبت یعنی پرداخت پول هرکس به نسبت سهم آن فرد از کل (مجموع) سهم‌ها.

مثال: یک کارگر، یک استادکار و یک سرکارگر به نسبت ۲، ۵ و ۷ مزد می‌گیرند. اگر در مجموع ۱۴۰۰۰۰۰ تومان دستمزد گرفته باشند، سهم هرکدام را تعیین کنید.

حل: مجموع نسبت‌ها با خود نسبت‌ها متناسب است، پس می‌توانیم ردیفی به نام مجموع به جدول تناسب اضافه کنیم.

سهم کارگر	۲	۲۰۰۰۰۰
سهم استادکار	۵	۵۰۰۰۰۰
سهم سرکارگر	۷	۷۰۰۰۰۰
مجموع سهم‌ها	۱۴	۱۴۰۰۰۰۰

$\times ۱۰۰۰۰۰$

تست: زاویه‌های مثلثی با اعداد ۳، ۷، ۱۰ متناسب‌اند، در این مثلث .... «ورودی تیزهوشان ۹۲»

۱) یک زاویه‌ی باز وجود دارد.
۲) اضلاع با اعداد ۳، ۷ و ۱۰ متناسب‌اند.
۳) یک زاویه‌ی قائمه وجود دارد.
۴) هر سه زاویه تند هستند.

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

اگر زاویه‌ها را با شماره‌ی (۱)، (۲) و (۳) نشان دهیم، داریم:

* می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است:

۲۷	۳	(۱)
۶۳	۷	(۲)
۹۰	۱۰	(۳)
۱۸۰	۲۰	مجموع

$\times$۹

درصد و ریاضیات مالی

- یکی از مباحث جدید که در ریاضیات وارد شده بحث ریاضیات مالی و درصد است که به‌طور جدی به آن پرداخت شده است.
- * ۱۰ درصد تخفیف یعنی از هر ۱۰۰ تا ۱۰ تا گرفته نمی‌شود (یعنی ۹۰ تا گرفته می‌شود.)
- مثال: ۵٪ از شیر چربی است. این موضوع را می‌توان به‌صورت‌های مختلف بیان کرد.
- در هر ۱۰۰ گرم شیر ۵ گرم چربی است.
- در هر ۱۰۰ کیلوگرم شیر ۵ کیلوگرم چربی است.
- در هر ۱۰۰ لیتر شیر ۵ لیتر آن چربی است.

* مالیات از منابع مهم درآمد دولت‌هاست. یکی از مالیات‌هایی که در هنگام خرید و فروش محاسبه می‌شود، مالیات بر ارزش افزوده است. هر فروشنده هنگام فروش کالا و یا ارائه‌ی خدمات، مالیات مربوط را محاسبه و به قیمت آن کالا اضافه و از مشتری دریافت می‌کند.

مثال: اگر قیمت کالایی ۴۰۰۰ تومان باشد و قرار باشد این کالا با ۵ درصد مالیات بر ارزش افزوده فروخته شود، قیمت نهایی کالا چند تومان خواهد شد؟

پاسخ:

?	۵
۴۰۰۰	۱۰۰

مالیات بر ارزش افزوده، تومان $\Rightarrow ? = \frac{۵\times۴۰۰۰}{۱۰۰} = ۲۰۰$

قیمت نهایی = ۴۰۰۰ + ۲۰۰ = ۴۲۰۰ تومان

* در صورتی که کسری بزرگ‌تر از واحد باشد، درصد آن بیش‌تر از ۱۰۰ می‌شود.

مثال: اگر قیمت یک کالا به دلیل تورم از ۵۰۰۰۰ تومان به ۱۲۵۰۰۰ تومان برسد، در واقع می‌توان گفت که ۷۵۰۰۰ تومان به آن اضافه شده است. کسر $\frac{۷۵۰۰۰}{۷۵۰۰۰}$ را به درصد تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۷۵۰۰۰}{۵۰۰۰۰}=\frac{\square}{۱۰۰}\Rightarrow\square=\frac{۱۰۰\times۷۵۰۰۰}{۵۰۰۰۰}=۱۵۰٪$$

*** نکته:** با توجه به مثال بالا، هر کسر یا عدد اعشاری را می توان به‌صورت درصد نمایش داد.

درصدهای متوالی: در بعضی از مسائل ما با تخفیف‌های متوالی یا کاهش‌ها و افزایش‌های متوالی روبه‌رو می‌شویم. برای حل این‌گونه مسائل بایستی درصدهای پرداختی هر مرحله را درهم ضرب کنیم تا درصد پرداخت نهایی به‌دست بیاید. در آخر با توجه به درصد پرداخت نهایی متوجه خواهیم شد که چند درصد کاهش یا افزایش نهایی خواهیم داشت.

مثال: فروشنده‌ای کالایی را یک بار با ۱۰ درصد تخفیف برای فروش قرار داد و سپس با ۲۰ درصد تخفیف دیگر آن را فروخت. او در مجموع چند درصد روی کالایش تخفیف داده است؟

درصد پرداختی اول $۱۰۰٪ - ۱۰٪ = ۹۰٪$

درصد پرداختی دوم $۱۰۰٪ - ۲۰٪ = ۸۰٪$

درصد پرداخت نهایی $\frac{۹۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۷۲}{۱۰۰}=۷۲٪$

تخفیف نهایی $۱۰۰٪ - ۷۲٪ = ۲۸٪$

مثال: فروشنده‌ای کالایی را با ۱۰ درصد تخفیف و ۱۰ درصد مالیات می‌فروشد. آیا او ضرر می‌کند یا سود؟

درصد پرداختی بعد از تخفیف $۱۰۰ - ۱۰٪ = ۹۰٪$

درصد پرداختی بعد از مالیات $۱۰۰٪ + ۱۰٪ = ۱۱۰٪$

درصد پرداخت نهایی $\frac{۹۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۱۰}{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰}=۹۹٪$

تخفیف نهایی $۱۰۰٪-۹۹٪=۱٪$

او کالایش را با ۱ درصد ضرر یا ۱ درصد کاهش یا یک درصد تخفیف می‌فروشد.

تست: یک ماشین حساب را که قیمت آن ۳۴۲۰ تومان است با ۱۵٪ تخفیف خریدیم و بعد از خرید ۱۰٪ مبلغ خرید را برای آن مالیات پرداختیم در کل ماشین حساب را به چه قیمتی خریداری کرده‌ایم؟

«استعدادهای درخشان ۹۲»

۱) ۲۹۰/۷ ۲) ۲۹۰۷ ۳) ۳۱۹/۷ ۴) ۵۱۳۰۰

درصد پرداختی بعد از تخفیف $۱۰۰٪ - ۱۵٪ = ۸۵٪$

درصد پرداختی بعد از مالیات $۱۰۰٪ + ۱۰٪ = ۱۱۰٪$

درصد پرداخت نهایی $\frac{۸۵}{۱۰۰}\times\frac{۱۱۰}{۱۰۰}=\frac{۹۳۵}{۱۰۰}=۹۳/۵٪$

$$\frac{۹۳/۵}{۱۰۰}=\frac{\square}{۳۴۲۰}\Rightarrow\square=\frac{۹۳/۵\times۳۴۲۰}{۱۰۰}=۳۱۹۷/۷$$

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل ۷: اندازه‌گیری سطح و حجم

مقایسه و اندازه‌گیری سطح:

- برای این‌که هر سطح اندازه‌ی معینی داشته باشد و برای همه شناخته شده باشد، واحد استاندارد را به‌کار می‌بریم.
- واحد استاندارد اندازه‌گیری سطح، مترمربع است.
- برای دقیق‌تر شدن اندازه‌گیری‌ها از واحدهای کوچک‌تر مانند دسی‌مترمربع، سانتی‌مترمربع و میلی‌مترمربع استفاده می‌کنیم.
- در تبدیل واحدهای سطح و حجم هم می‌توان به روش تبدیل واحدهای طول پیش رفت، سپس علامت عملیات را مشخص می‌کنیم (بزرگ به کوچک: ضرب و کوچک به بزرگ: تقسیم). سپس عدد تبدیل را روبه‌روی آن می‌نویسیم.
- واحدهای اندازه‌گیری سطح: میلی‌مترمربع، سانتی‌مترمربع، دسی‌مترمربع، مترمربع، هکتار و کیلومترمربع است.

۱ مترمربع = ۱ متر × ۱ متر = ۱۰ دسی‌متر × ۱۰ دسی‌متر = ۱۰۰ دسی‌مترمربع

۱ مترمربع = ۱ متر × ۱ متر = ۱۰۰ سانتی‌متر × ۱۰۰ سانتی‌متر = ۱۰۰۰۰ سانتی‌مترمربع

۱ دسی‌متر × ۱ دسی‌متر = ۱۰ سانتی‌متر × ۱۰ سانتی‌متر = ۱۰۰ سانتی‌مترمربع

- برای تبدیل واحدها می‌توان از جدول تناسب استفاده کرد.

مثال: ۱۵۰ دسی‌مترمربع، چند مترمربع است؟

؟	۱	مترمربع
۱۵۰	۱۰۰	دسی‌مترمربع

$\Rightarrow ? = \frac{150 \times 1}{100} = 1/5$ = ۱/۵ مترمربع

مساحت شکل‌های هندسی

- هر جسم هندسی دارای سطح‌های مختلف است. برای مثال یک مکعب مستطیل ۶ سطح (وجه) دارد که ۲ به ۲ باهم برابرند.
- برای اندازه‌گیری سطح اجسام هندسی می بایست مساحت همه‌ی سطوح (وجه‌های) اجسام را حساب کنیم.
- فرمول مساحت شکل‌ها به‌ترتیب زیر است:

مساحت مربع = یک ضلع × یک ضلع

مساحت مستطیل = طول × عرض

۲ ÷ (ارتفاع × قاعده) = مساحت مثلث

ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی‌الاضلاع

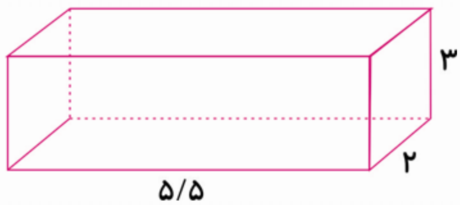
۲ ÷ [ارتفاع × (قاعده‌ی بزرگ + قاعده‌ی کوچک)] = مساحت ذوزنقه

۲ ÷ (قطر بزرگ × قطر کوچک) = مساحت لوزی

۳/۱۴ × شعاع × شعاع = مساحت دایره

مثال: مساحت همه‌ی سطح‌های جسم زیر را پیدا کنید. (اندازه‌های داده شده بر حسب سانتی‌متر است.)

پاسخ:



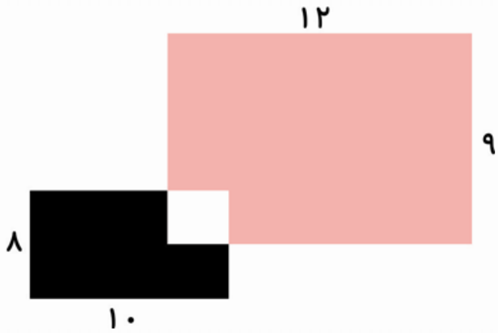
سانتی‌مترمربع ۳۳ = (۳ × ۵/۵) × ۲ = مساحت دو سطح روبه‌رو

سانتی‌مترمربع ۱۲ = (۲ × ۳) × ۲ = مساحت دو سطح کناری

سانتی‌مترمربع ۲۲ = (۲ × ۵/۵) × ۲ = مساحت دو سطح بالا و پایین

* برای محاسبه‌ی مساحت شکل‌های هندسی ابتدا باید طول ضلع‌ها و دیگر اجزای مورد نیاز مانند ارتفاع را اندازه بگیریم. در این اندازه‌گیری از عدد تقریبی استفاده می‌کنیم.

مثال: اگر مساحت قسمت سیاه ۴۷ سانتی‌متر باشد، مساحت قسمت صورتی چقدر است؟



۴۷ = مساحت قسمت سیاه و سانتی‌مترمربع ۸۰ = ۱۰ × ۸ = مساحت مستطیل سیاه

سانتی‌مترمربع ۳۳ = ۴۷ − ۸۰ = مساحت قسمت سفید ⇐

سانتی‌مترمربع ۱۰۸ = ۹ × ۱۲ = مساحت مستطیل صورتی

سانتی‌مترمربع ۷۵ = ۳۳ − ۱۰۸ = مساحت قسمت صورتی ⇐

* برای محاسبه‌ی مساحت جانبی استوانه که در واقع یک مستطیل است باید ارتفاع استوانه را ضرب در محیط دایره بکنید.

* برای محاسبه‌ی مجموع مساحت‌های مکعب یا مکعب‌مستطیل باید مجموع مساحت هر ۶ بعد را به‌دست آورید.

* در محاسبه‌ی مساحت شکل‌هایی که به شما داده شده است، ابتدا شکل را به اشکالی که می‌شناسید تقسیم کنید، سپس مساحت هر قسمت را محاسبه کنید و در آخر همه‌ی مساحت‌ها را باهم جمع کنید.

* **حلّ مسأله:** برای حلّ بعضی از مسأله‌ها می‌توانید همه‌ی حالت‌های ممکن را در نظر بگیرید، سپس با توجّه به شرایط و موضوعی که در مسأله طرح شده است، حالت‌های نامطلوب یا ناممکن را حذف کنید تا پاسخ مسأله پیدا شود.

مقایسه و اندازه‌گیری حجم

- برای مقایسه‌ی حجم‌ها به واحد اندازه‌گیری نیاز داریم. هر حجمی را می‌توان به عنوان واحد اندازه‌گیری به‌کار برد.
- بعضی از واحدهای استاندارد حجم مترمکعب، دسی‌مترمکعب و سانتی‌مترمکعب است.
- سانتی‌مترمکعب = سی‌سی ، دسی‌مترمکعب = لیتر

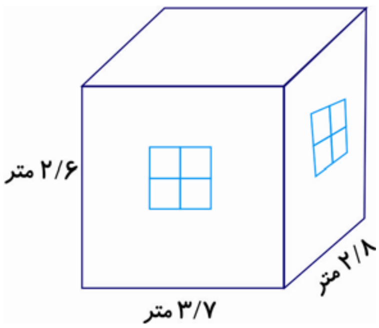
۱ مترمکعب = ۱ متر × ۱ متر × ۱ متر = ۱۰۰ سانتی‌متر × ۱۰۰ سانتی‌متر × ۱۰۰ سانتی‌متر = ۱۰۰۰۰۰۰ سانتی‌مترمکعب

مثال: ۳۵۰ دسی‌مترمکعب چند مترمکعب است؟

مترمکعب	۱	?
دسی‌مترمکعب	۱۰۰۰	۳۵۰

$\Rightarrow ? = \frac{۳۵۰ \times ۱}{۱۰۰۰} = ۰/۳۵$ مترمکعب

مثال: گنجایش اتاق چند مترمکعب است؟ اگر $\frac{۱}{۵}$ هوای اتاق اکسیژن باشد، چند مترمکعب اکسیژن در هواست؟



گنجایش اتاق = (۲/۶ متر) × (۳/۷ متر) × (۲/۸ متر) = ۲۶/۹۳۶ مترمکعب

گنجایش اکسیژن در هوای اتاق، $\frac{۱}{۵} \times ۲۶/۹۳۶ = ۵/۳۸۷۲$ مترمکعب

حجم شکل‌های هندسی

- فرمول حجم اشکال هندسی به این صورت است:

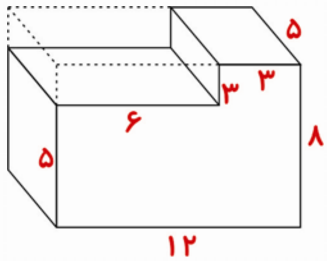
حجم مکعب = بُعد × بُعد × بُعد

حجم مکعب مستطیل = طول × عرض × ارتفاع

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

– اگر دو حجم داخل یکدیگر به شما داده شده بود و از شما خواسته شده بود حجم فضای بین دو شکل را به‌دست آورید، ابتدا حجم شکل بزرگ را حساب کنید و سپس حجم شکل کوچک تر را از آن کم کنید.

مثال: چه کسری از مکعب‌مستطیل بزرگ برداشته شده است؟



سانتی‌مترمکعب ۴۸۰ = ۵ × ۱۲ × ۸ = حجم کل مکعب

سانتی‌مترمکعب ۹۰ = ۵ × ۳ × ۶ = حجم مکعب برداشته شده

کسر مورد نظر = $\frac{۹۰}{۴۸۰} = \frac{۱۶}{۳}$

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل ۸: مختصات و عددهای صحیح

محورهای مختصات:

– صفحه‌ی مختصات از دو محور افقی و عمودی تشکیل شده است. به دو عددی که با آن مکان نقطه را در صفحه تعیین می‌کنیم، مؤلفه‌های افقی و عمودی می‌گوییم و مختصات نقطه را به‌صورت [ ] نشان می‌دهید. در قسمت بالا مؤلفه‌ی افقی و پایین آن مؤلفه‌ی عمودی را می‌نویسیم.

*** نکته:** نقاطی که طول آن‌ها صفر باشد روی محور عرض‌ها و نقاطی که عرض آن‌ها صفر باشد روی محور طول‌ها قرار دارند.

نکته: به مؤلفه‌ی افقی در مختصات نقطه طول نقطه و به مؤلفه‌ی عمودی آن، عرض نقطه می‌گویند.

تقارن و مختصات:

۱– برای به‌دست آوردن قرینه‌ی نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول‌ها باید مقدار عرض نقطه را قرینه کنیم.

۲– برای به‌دست آوردن قرینه‌ی نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض‌ها باید مقدار طول نقطه را قرینه کنیم.

۳– برای به‌دست آوردن قرینه‌ی نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدأ مختصات باید مقدار طول و عرض نقطه را قرینه کنیم.

مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را نسبت به محور طول‌ها، نسبت به محور عرض‌ها و نسبت به مبدأ مختصات بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} \begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{مختصات}]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} \begin{bmatrix} -۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

*** نکته:** قرینه‌ی مرکزی را می‌توان با دوران دادن شکل حول مرکز تقارن نیز پیدا کرد.

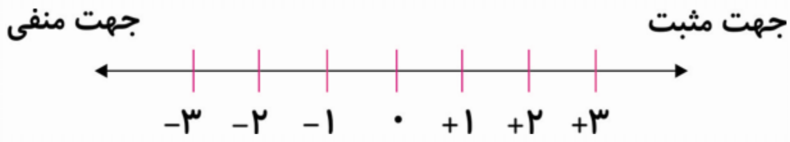
عددهای صحیح

– در ریاضیات برای ساده و مختصر کردن بیان عددهای علامت‌دار از علامت‌های + و – استفاده می‌کنیم. برای تعیین علامت عددها نیاز داریم که محلّ مبدأ و واحد اندازه‌گیری و هم‌چنین جهت‌های مثبت و منفی را قرارداد کنیم و بر اساس آن، عددها را علامت‌دار کنیم.

– مهم: عددهای ... و ۳+ و ۲+ و ۱+ و ۰ و ۱- و ۲- و ۳- و ... را عددهای صحیح می‌نامیم.

– هریک از عددهای ... و ۳+ و ۲+ و ۱+ را عددهای صحیح مثبت و هریک از عددهای ۱- و ۲- و ۳- و ... را عددهای صحیح منفی می‌نامیم.

– عدد صفر نه مثبت است و نه منفی.



– هرچه به سمت مثبت پیش می‌رویم، عددها بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین می‌توان نوشت: ‎-۱ < +۱

مهم:

– هر عدد صحیح مثبت از هر عدد صحیح منفی بزرگ‌تر است.

– همه‌ی عددهای صحیح مثبت از صفر بزرگ‌ترند.

– همه‌ی عددهای صحیح منفی از صفر کوچک‌تر هستند.

قرینه‌ی عدد روی محور:

قرینه‌ی هر عدد روی محور اعداد صحیح را معمولاً نسبت به مبدأ (صفر) مشخص می‌کنند، ولی امکان دارد قرینه‌ی عدد نسبت به نقطه‌ی دیگری به‌جز صفر نیز خواسته شود.

مهم: قرینه را در ریاضی با نماد « - » نشان می‌دهند.

مثال:

۵- = قرینه‌ی ۵

۳+ = قرینه‌ی ۳-

نکته: قرینه‌ی یک عدد مثبت نسبت به «صفر» عددی منفی و قرینه‌ی یک عدد منفی نسبت به صفر عددی مثبت است.

جمع اعداد صحیح:

– برای جمع دو عدد غیر هم‌علامت که یکی مثبت و دیگری منفی است، ابتدا بدون در نظر گرفتن علامت، دو عدد را از هم کم می‌کنیم. سپس برای تعیین علامت به‌دست آمده دو حالت داریم:

۱- اگر عدد بزرگ‌تر (بدون در نظر گرفتن علامت‌ها) مثبت باشد علامت حاصل جمع نیز مثبت است.

۲- اگر عدد بزرگ‌تر (بدون در نظر گرفتن علامت‌ها) منفی باشد، علامت حاصل جمع نیز منفی است.

مثال:

$(+12) + (-4) = +8$

$(-18) + (+10) = -8$

نکته: در واقع جمع دو عدد صحیح با علامت‌های مختلف را با استفاده از قرینه‌یابی می‌توان در داخل پرانتز به یک تفریق ساده تبدیل کرد.

تست: کدام رابطه صحیح نیست؟

«ورودی تیزهوشان ۹۲»

۱) قرینه ی ۷+ < قرینه‌ی ۶+

۲) $(+۹) + (-۳) < (+۹) + (+۴)$

۳) $(+۹۳) - (+۱۳) < (+۲۱) + (-۳ - ۴ - ۵)$

۴) قرینه‌ی نقطه‌ی $\frac{۰}{۱۹}$ نسبت به مبدأ = $\frac{(+۲)+(-۲)}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

درستی گزینه‌ی «۳» به‌صورت زیر است:

$(+۹۳) - (+۱۳) = +۸۰$ و $(+۲۱) + (-۳ - ۴ - ۵) = +۹ \Rightarrow +۸۰ > +۹$