اسلایدهای آموزشی

مبانی مهندسی برق

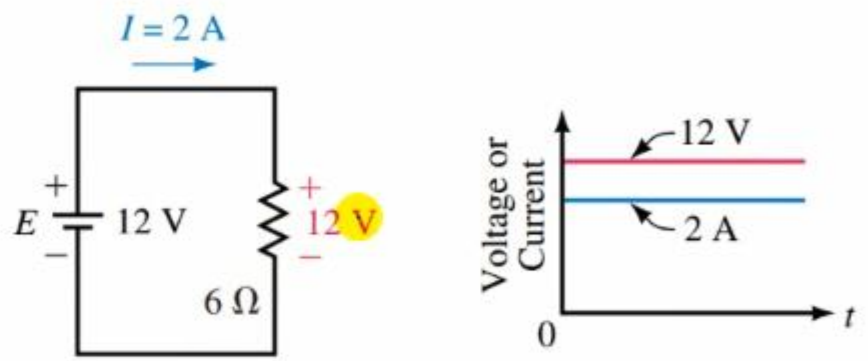
دکتر مهران حاجی آقاپور

استادیار دانشکده مهندسی برق
دانشگاه شهید بهشتی

پاسخ مدارهای الکتریکی
به ورودی سینوسی

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- سیگنال‌های ورودی به مدارهای الکتریکی در عمل اغلب به شکل سینوسی تغییر می‌کنند.
- مدارهای DC

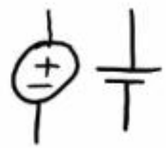


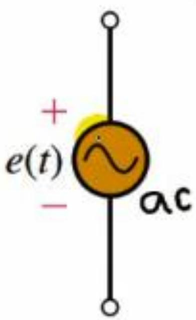
(a)

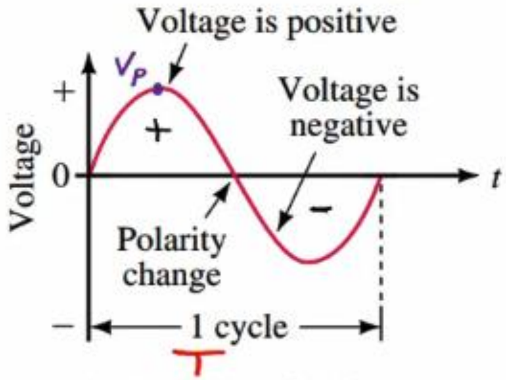
(b) Voltage and current versus time for dc

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

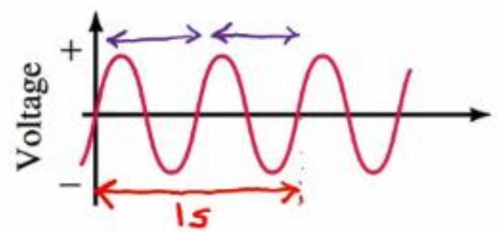
- سیگنال‌های ورودی به مدارهای الکتریکی در عمل اغلب به شکل سینوسی تغییر می‌کنند.
- مدارهای AC $\quad \omega = 2\pi f \ \frac{r}{s} \qquad V = V_p \sin(\omega t)$







(a) Variation of voltage versus time



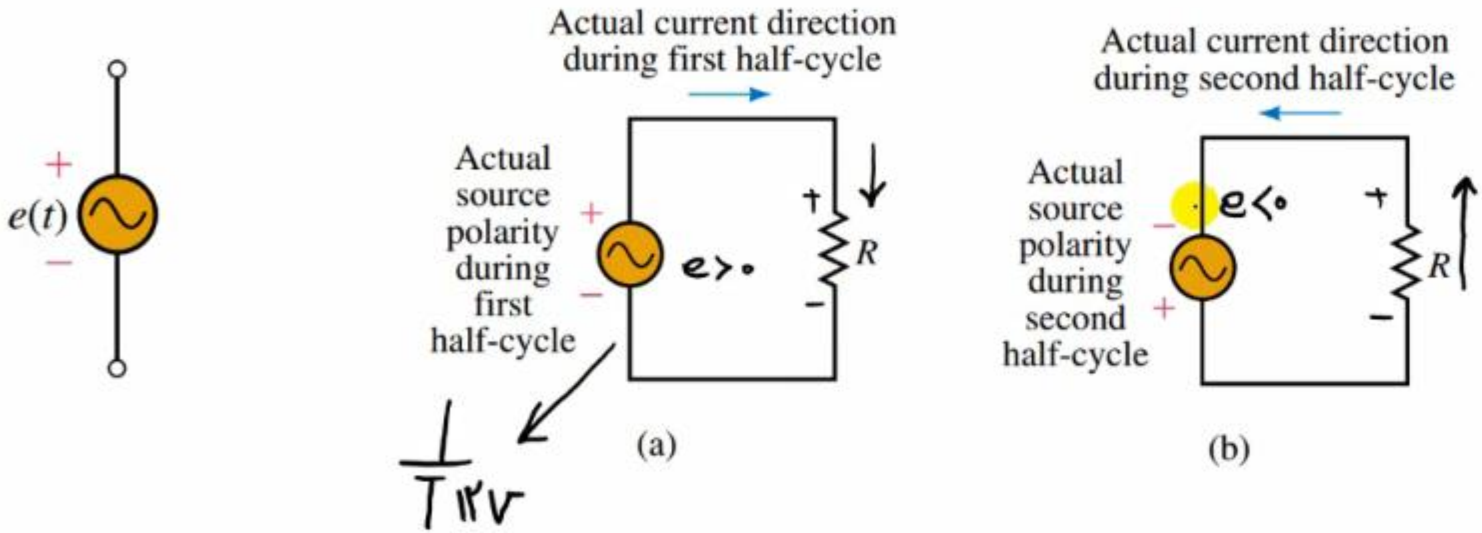
(b) A continuous stream of cycles

$f = \frac{1}{T}$

$f = 2\ Hz \qquad T = 0.5\ s$

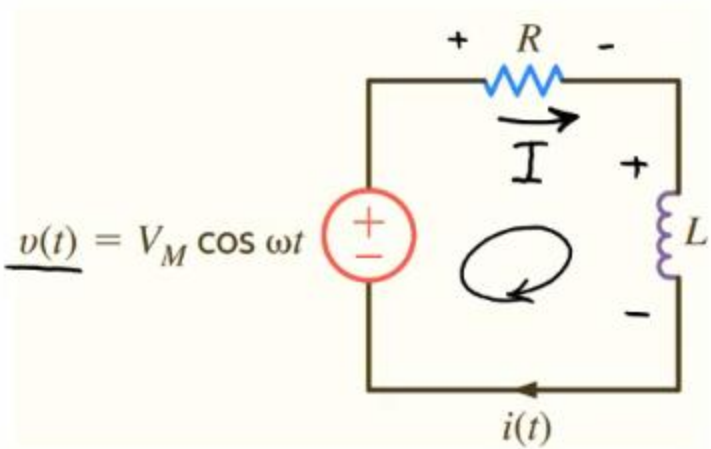
پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- سیگنال‌های ورودی به مدارهای الکتریکی در عمل اغلب به شکل سینوسی تغییر می‌کنند.
- مدارهای AC



پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- مدار RL با ورودی AC



$V_R = R I$

$I(0) \neq 0$

$V_L = L \frac{dI}{dt}$

$v(t) = RI + L \frac{d}{dt} I$ غیرهمگن

$I(t) = I_h(t) + I_p(t)$ ✓

$RI_p + L \frac{d}{dt} I_p = V_m \cos(\omega t)$

$I_h(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$

$\tau = \frac{L}{R}$

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

• مدار RL با ورودی AC

$$I_p = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\cos\varphi \cos\omega t - A\sin\varphi \sin\omega t$$

$$= A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$$

$$R I_p + L \frac{d}{dt} I_p = R\left(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t\right) +$$

$$L\left(A_2 \omega \cos\omega t - A_1 \omega \sin\omega t\right) = V_m \cos\omega t$$

$$\begin{cases} R A_2 - L A_1 \omega = 0 \\ R A_1 + L A_2 \omega = V_m \end{cases} \longrightarrow A_2 = \frac{L\omega A_1}{R} \longrightarrow R A_1 + \frac{L^2 \omega^2}{R} A_1 = V_m$$

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- مدار RL با ورودی AC

$$\left(R^2 + (L\omega)^2\right) A_1 = R V_m$$

$$A_1 = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} V_m \qquad A_2 = \frac{L\omega}{R} A_1 = \frac{L\omega}{R^2 + (L\omega)^2} V_m$$

$$I_p = \frac{R V_m}{R^2 + (L\omega)^2} \cos(\omega t) + \frac{L\omega V_m}{R^2 + (L\omega)^2} \sin(\omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cos\varphi = \dfrac{R V_m}{R^2 + L^2\omega^2} \\[2ex] -A \sin\varphi = \dfrac{L\omega V_m}{R^2 + L^2\omega^2} \end{array} \right. \longrightarrow -\tan\varphi = \frac{L\omega}{R} \rightarrow \varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- مدار RL با ورودی AC

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = \frac{V_m^2}{R^2+L^2\omega^2} = A^2$$

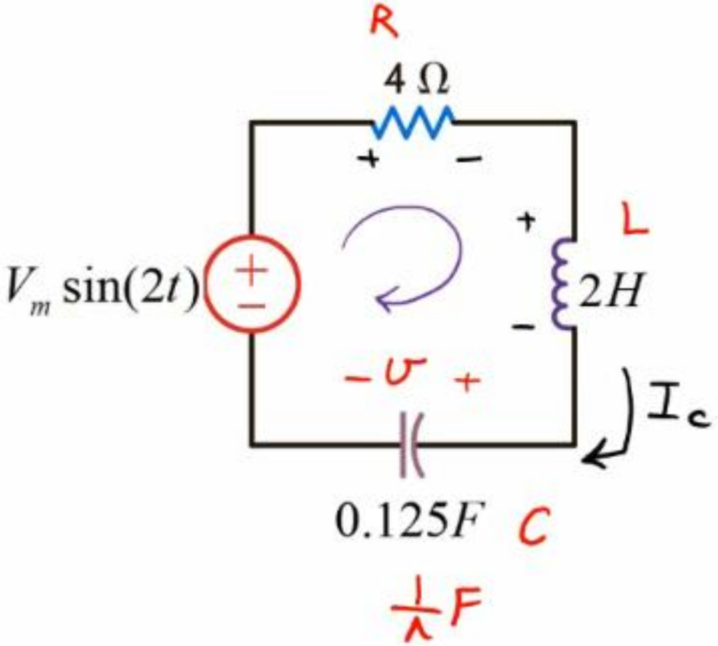
$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$$

$$I_p(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

$$v(t) = V_m\cos(\omega t)$$

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- پاسخ مدار مرتبه دوم با ورودی AC



$$I_c = C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{8}\dot{v}$$

$$v_L = L\frac{d}{dt}I_c = \frac{1}{4}\ddot{v}$$

$$v_R = R I_c = 4\times\frac{1}{8}\dot{v} = \frac{1}{2}\dot{v}$$

$$V_m \sin(2t) = \frac{1}{2}\dot{v} + \frac{1}{4}\ddot{v} + v$$

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

پاسخ مدارهای الکتریکی به ورودی سینوسی

- پاسخ مدار مرتبه دوم با ورودی AC

$$v_p = A\sin(2t+\varphi)$$

$$\underline{V_m}\sin(2t) = \underline{A}\cos(2t+\varphi) + \left(-A\cancel{\sin}(2t+\varphi)\right) + A\cancel{\sin}(2t+\varphi)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

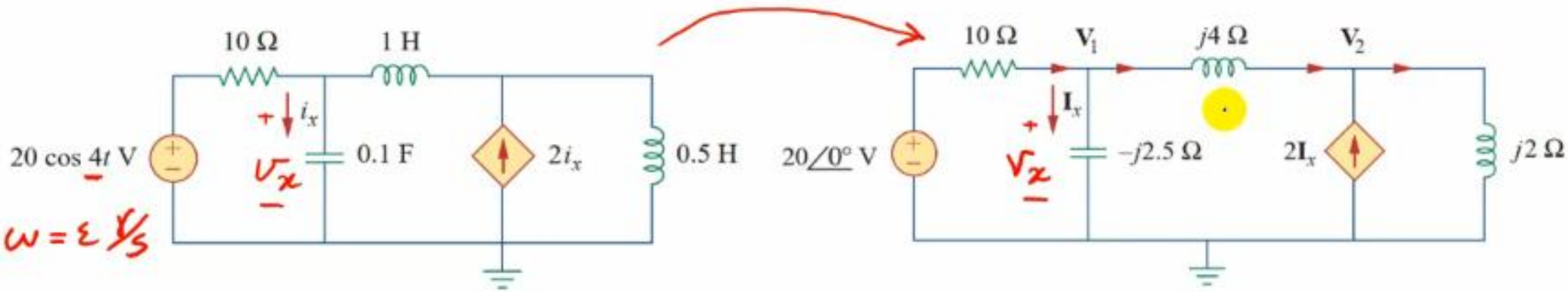
$$\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right) = \sin(2t)$$

$$A = V_m \longrightarrow \quad v_p(t) = V_m\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right) = -V_m\cos(2t)$$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- نمایش فازور یکی از سریع‌ترین راه‌ها برای تحلیل حالت دائمی سینوسی است.
- با استفاده از آنالیز فازور روابط دیفرانسیلی به روابط جبری تبدیل خواهد شد.



$$i_x = C\frac{d}{dt}v_x \longrightarrow I_x = C\omega j V_x \qquad j=\sqrt{-1}$$

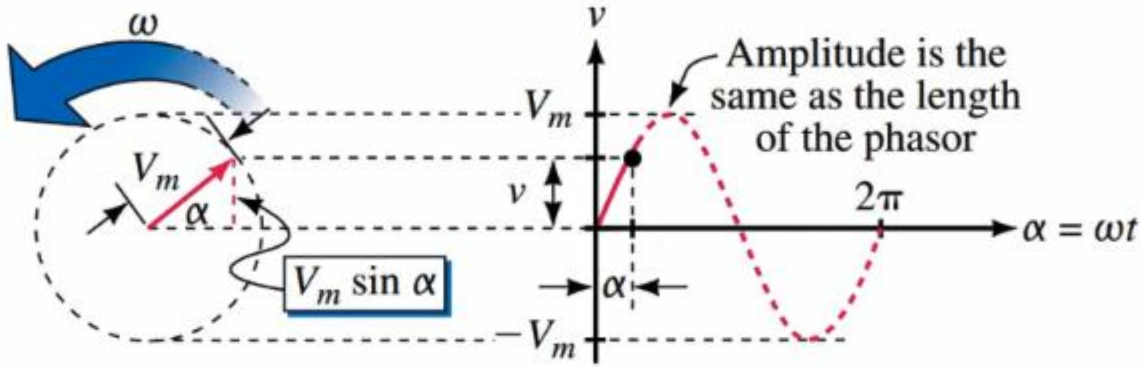
نمایش فازوری سینوسی‌ها

$\omega = 2\pi f$

- نمایش فازور یکی از سریع‌ترین راه‌ها برای تحلیل حالت دائمی سینوسی است.
- با استفاده از آنالیز فازور روابط دیفرانسیلی به روابط جبری تبدیل خواهد شد.

α

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$



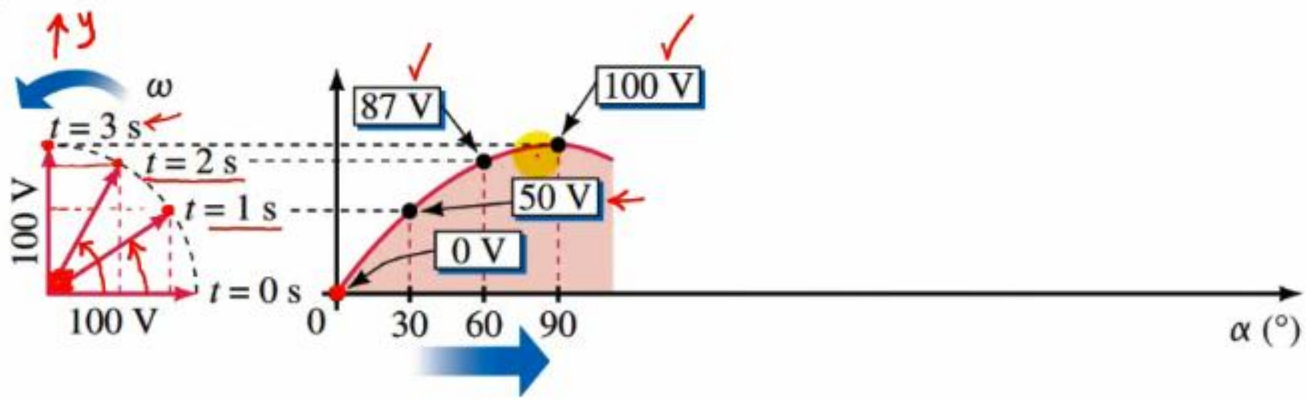
نمایش فازوری سینوسی‌ها

$\begin{cases} \omega = ۳۰ \ ^\circ/s \\ V_m = ۱۰۰ \ V \end{cases}$

- نمایش فازور یکی از سریع‌ترین راه‌ها برای تحلیل حالت دائمی سینوسی است.
- با استفاده از آنالیز فازور روابط دیفرانسیلی به روابط جبری تبدیل خواهد شد.

$\alpha = \omega t$

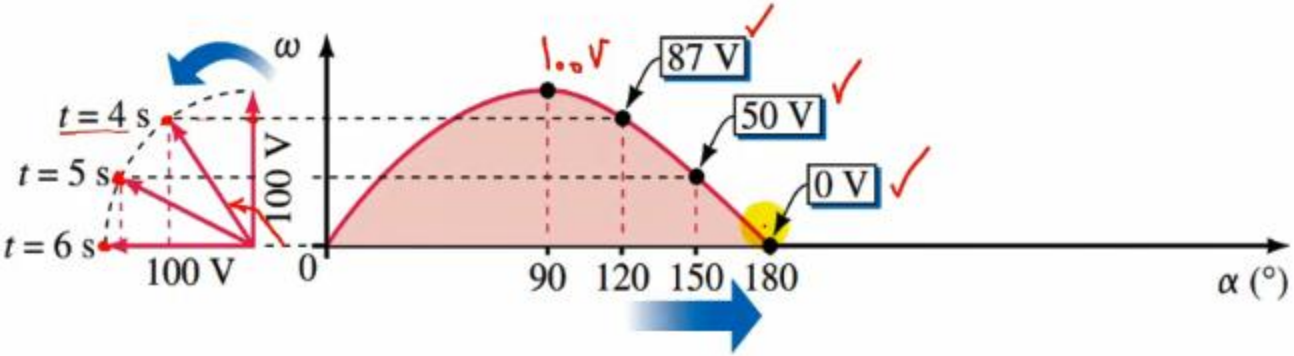
$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$



نمایش فازوری سینوسی‌ها

- نمایش فازور یکی از سریع‌ترین راه‌ها برای تحلیل حالت دائمی سینوسی است.
- با استفاده از آنالیز فازور روابط دیفرانسیلی به روابط جبری تبدیل خواهد شد.

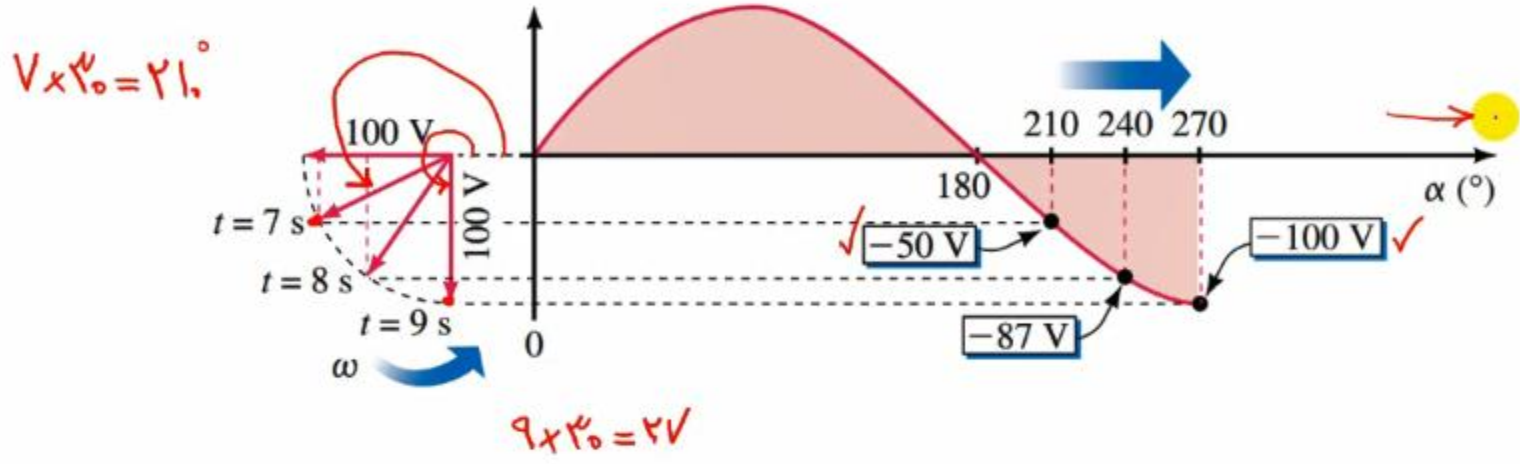
$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$



نمایش فازوری سینوسی‌ها

- نمایش فازور یکی از سریع‌ترین راه‌ها برای تحلیل حالت دائمی سینوسی است.
- با استفاده از آنالیز فازور روابط دیفرانسیلی به روابط جبری تبدیل خواهد شد.

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

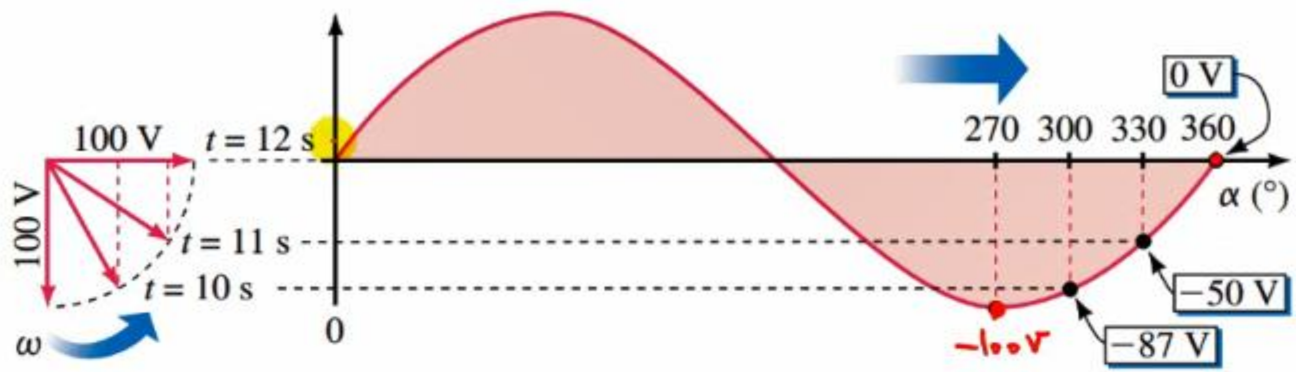


نمایش فازوری سینوسی‌ها

- نمایش فازور یکی از سریع‌ترین راه‌ها برای تحلیل حالت دائمی سینوسی است.
- با استفاده از آنالیز فازور روابط دیفرانسیلی به روابط جبری تبدیل خواهد شد.

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

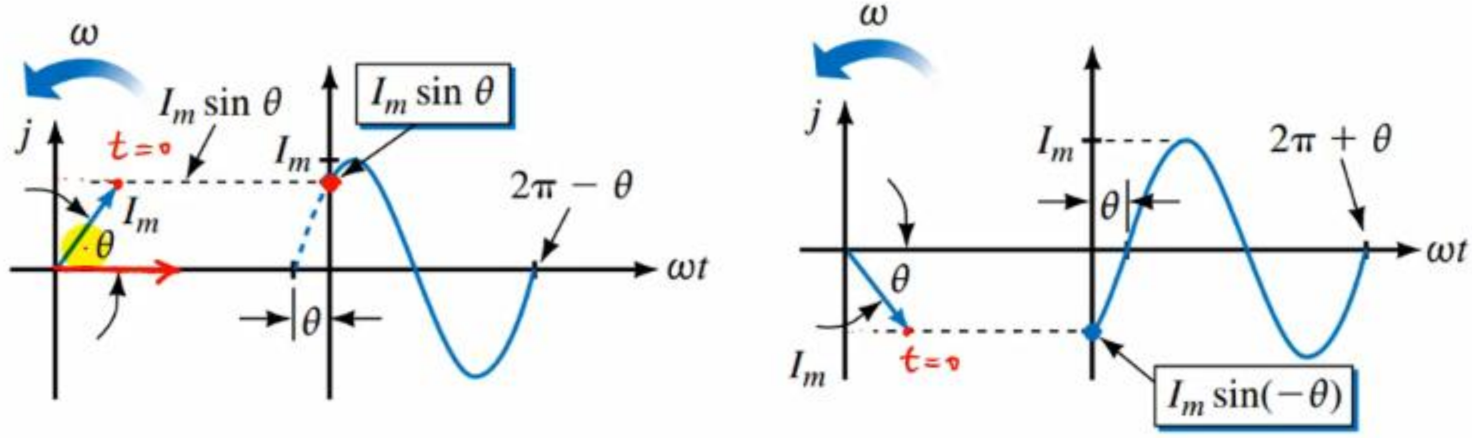
$t = ۰ \longrightarrow ۱۲s$



نمایش فازوری سینوسی‌ها

- سینوسی با فاز اولیه

$$v(t) = V_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

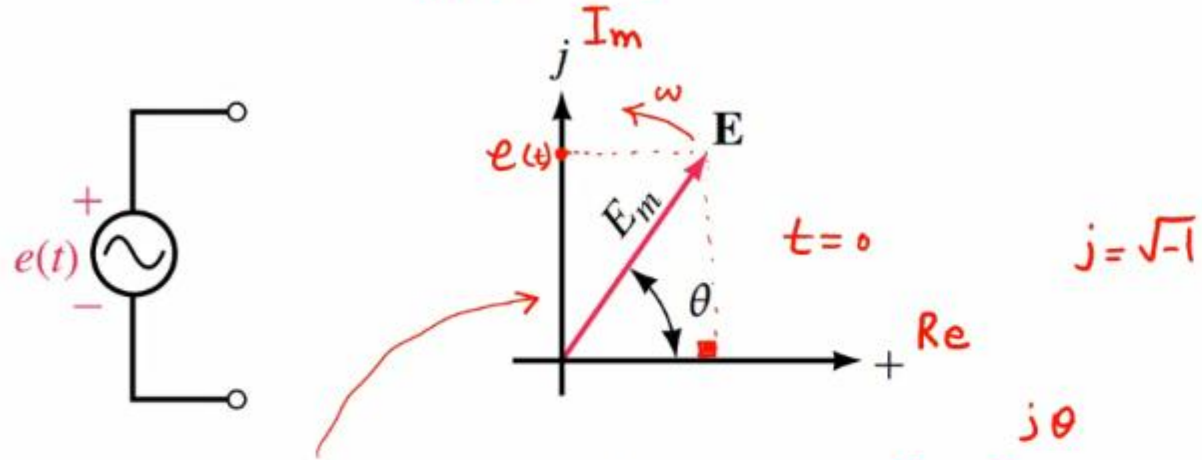


(a) $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$ (b) $i = I_m \sin(\omega t - \theta)$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- در نمایش فازوری یک سینوسی از یک عدد مختلط استفاده می‌شود.
- عدد مختلط فقط بیانگر دامنه و فاز سینوسی است و فرکانس با قرینه معنوی حذف می‌شود.

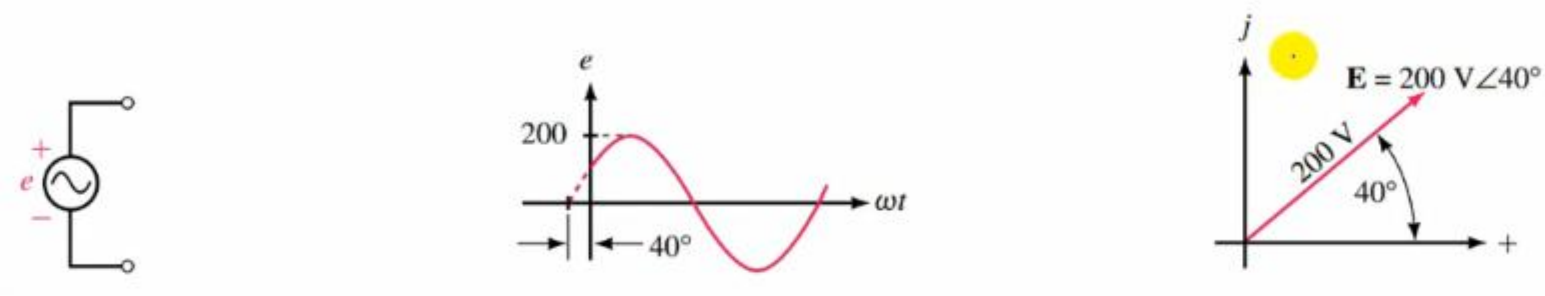
$e(t) = E_m \sin\theta$



(a) $e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$ (b) $\mathbf{E} = E_m\angle\theta = E_m e^{j\theta}$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

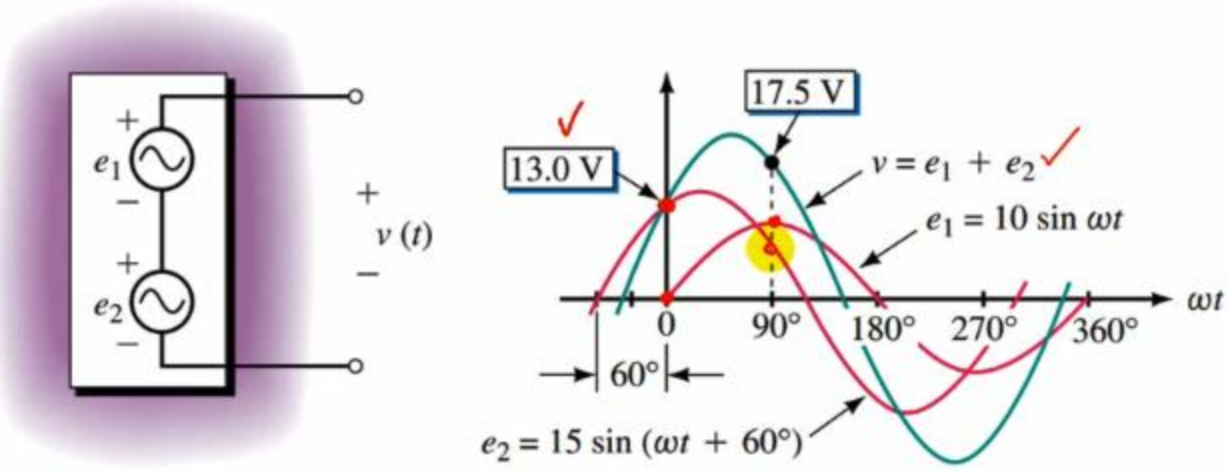
- در نمایش فازوری یک سینوسی از یک عدد مختلط استفاده می‌شود.
- عدد مختلط فقط بیانگر دامنه و فاز سینوسی است و فرکانس با قرینه معنوی حذف می‌شود.



(a) $e = 200 \sin(\omega t + 40°)$ V (b) Waveform (c) Phasor equivalent

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- جمع سینوسی‌ها



(a) $e_1 = 10 \sin \omega t$
$e_2 = 15 \sin(\omega t + 60^\circ)$

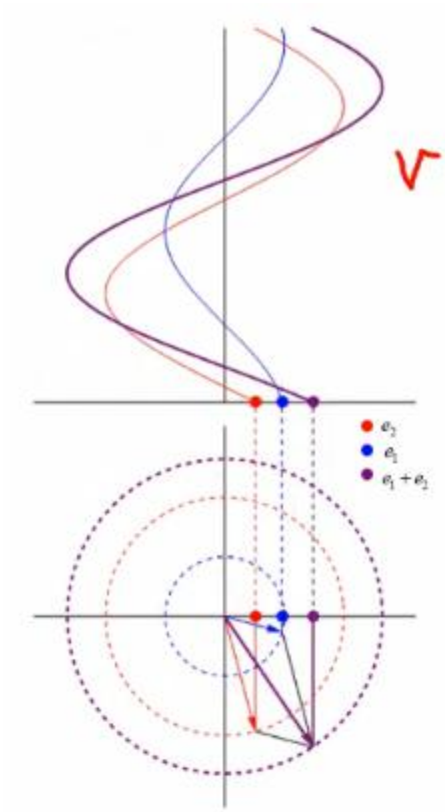
(b) Waveforms

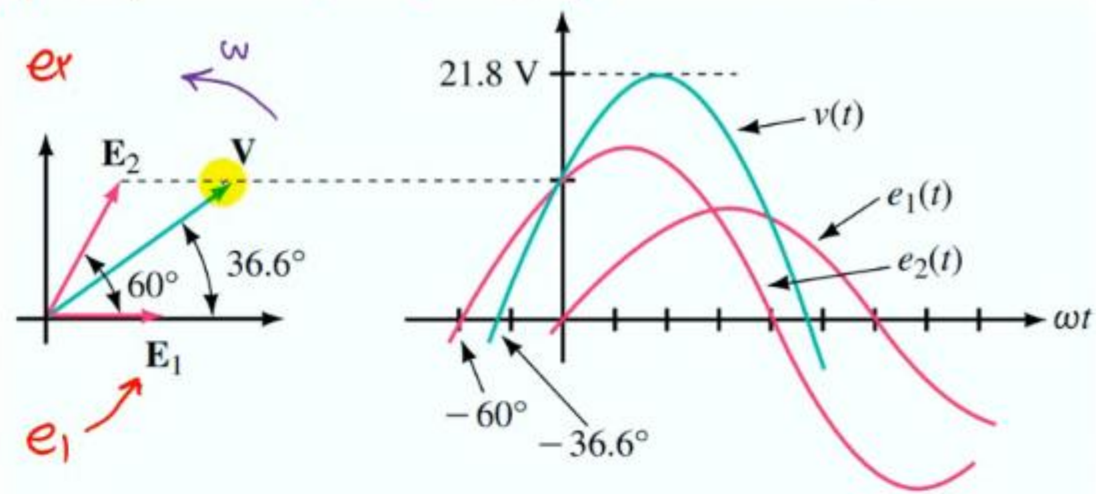
$wt = ۹۰$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- جمع سینوسی‌ها

$V = E_۱ + E_۲ = ۱۰ \measuredangle ۰ + ۱۵ \measuredangle ۶۰ = ۲۱٫۸ \measuredangle ۳۶٫۶^\circ$





نمایش فازوری سینوسی‌ها

- مثال: سه منبع زیر با هم سری شده‌اند. منبع معادل را بیابید.

$v_1 = 4\sin(\omega t) \longrightarrow V_۱ = ۴ \angle ۰$

$v_2 = 10\sin(\omega t - 45) \longrightarrow V_۲ = ۱۰ \angle -۴۵$

$v_3 = 20\cos(\omega t + \cancel{45}) \longrightarrow V_۳ = ۲۰ \angle ۱۳۵$

$\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \cos\theta$

$\cos(\theta - \frac{\pi}{۲}) = \sin\theta$

$v_۳ = ۲۰ \cos(\omega t + ۱۳۵ - ۹۰) = ۲۰ \sin(\omega t + ۱۳۵)$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- مثال:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$= 4 + 10\cos 45 - j\,10\sin 45 + 20(\cos 135 + j\sin 135)$$

$$a\angle\theta = a\cos\theta + j\,a\sin\theta$$

$$V = 4 + 5\sqrt{2} - j\,5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + j\,10\sqrt{2}$$

$$= 4 - 5\sqrt{2} + j\,5\sqrt{2} = \sqrt{(4-5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4-5\sqrt{2}}\right)$$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- مثال:

$$\bar{V} = 7.71 \angle 113.5^\circ$$

$$v(t) = v_1 + v_2 + v_3 = 7.71 \sin(\omega t + 113.5)$$

نمایش فازوری سینوسی‌ها

- مثال: سه منبع زیر با هم سری شده‌اند. منبع معادل را بیابید.

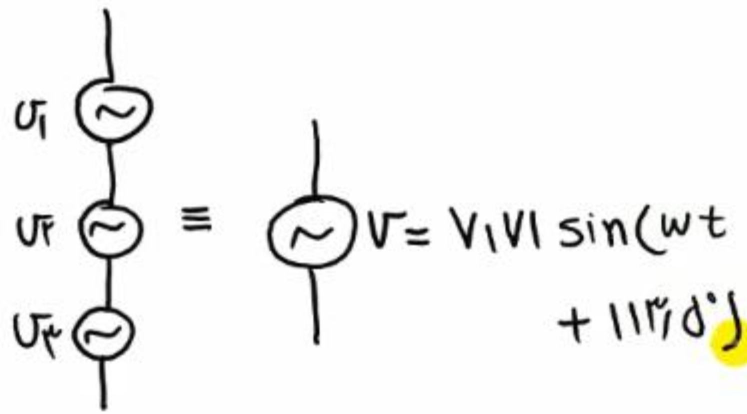
$$v_1 = 4\sin(\omega t) \longrightarrow V_1 = 4\angle 0$$

$$v_2 = 10\sin(\omega t - 45) \longrightarrow V_2 = 10\angle -45$$

$$v_3 = 20\cos(\omega t + \cancel{45}) \longrightarrow V_3 = 20\angle 135$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$$

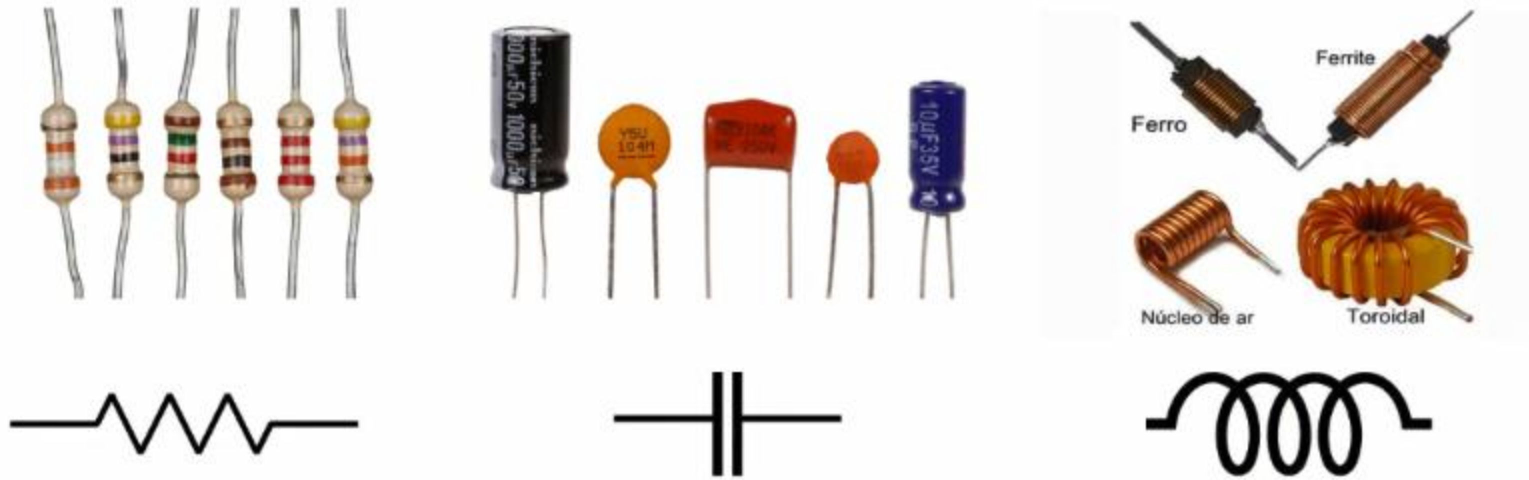


$$\to v_3 = 20\cos(\omega t + 135 - 90) = 20\sin(\omega t + 135)$$

نمایش فازوری
مقاومت، سلف و خازن

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- مقاومت، خازن و سلف مهمترین و پایه‌ای‌ترین المان‌های پسیو در مدارهای الکتریکی هستند.



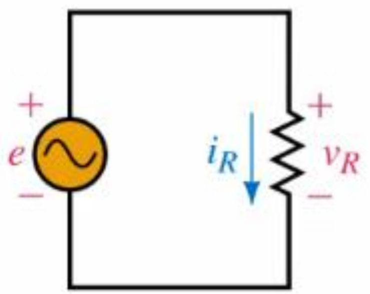
مقاومت در مقابل عبور جریان

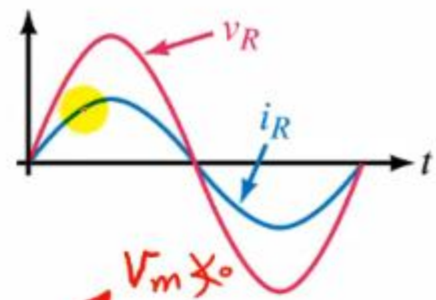
مقاومت در مقابل تغییرات ولتاژ

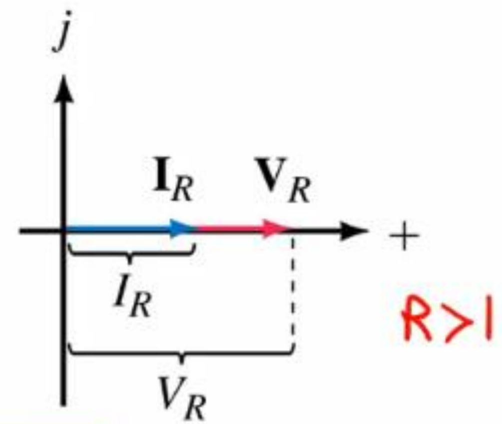
مقاومت در مقابل تغییرات جریان

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- رفتار مقاومت در مدارهای AC





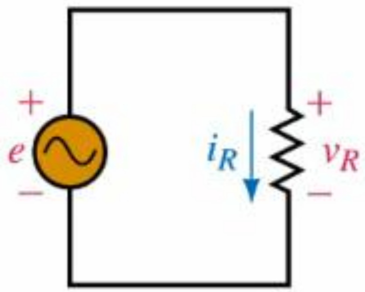


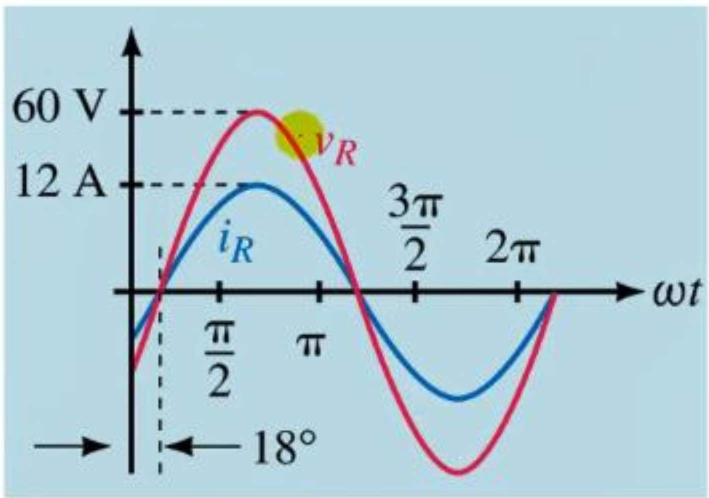
$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_m \sin \omega t}{R} = \frac{V_m}{R}\sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

$$I_m = V_m / R \qquad V_m = I_m R \checkmark$$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- رفتار مقاومت در مدارهای AC





$R = 5\ \Omega$

$i_R = 12 \sin(\omega t - 18)\ \text{A}$

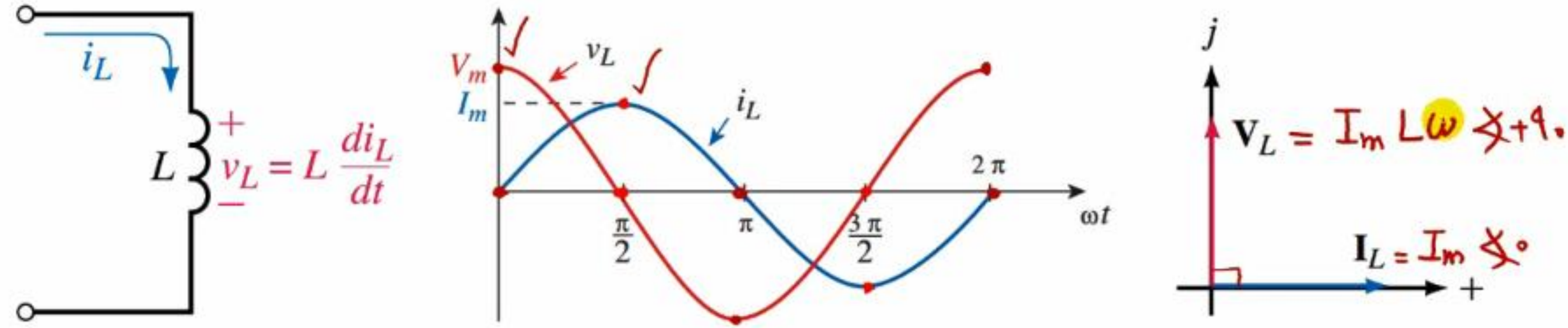
$= ۱۲ \angle -۱۸^\circ$

$v_R = R i_R \longrightarrow V_R = ۶۰ \angle -۱۸^\circ$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

$\varphi = L i_L$

- رفتار سلف در مدارهای AC



$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t = V_m \cos \omega t$$

$$\rightarrow v_L = V_m \sin(\omega t + 90°) \qquad V_m = \omega L I_m$$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- رفتار سلف در مدارهای AC
- راکتانس و امپدانس سلف:

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} \quad (\Omega)$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_L}$$

$$V_m = \omega L I_m$$

$$V_m = I_m X_L$$

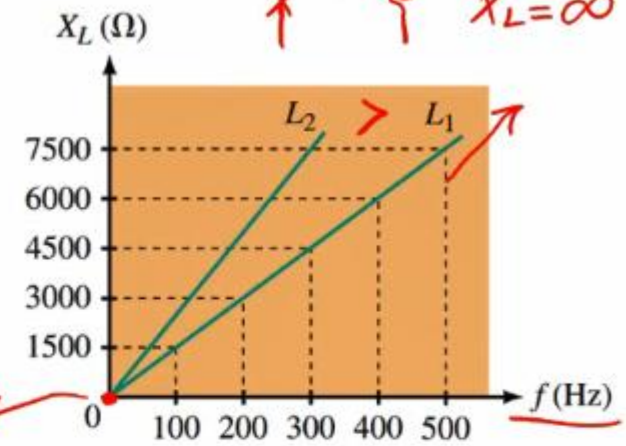
$$X_L = \underline{\omega L} \quad (\Omega)$$

R

$\omega = 2\pi f$

$f = \infty$

$X_L = \infty$



$f = 0$

$X_L = 0$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- مثال: ولتاژ دو سر یک سلف ۰.۲ هانری به‌صورت زیر تعریف می‌شود. جریان آن را تعیین کنید.

$$v_L = \underline{100} \sin(\underbrace{400}_{\omega} t + 70°)\ \text{V}$$

$\omega = ٤٠٠\ r/s$

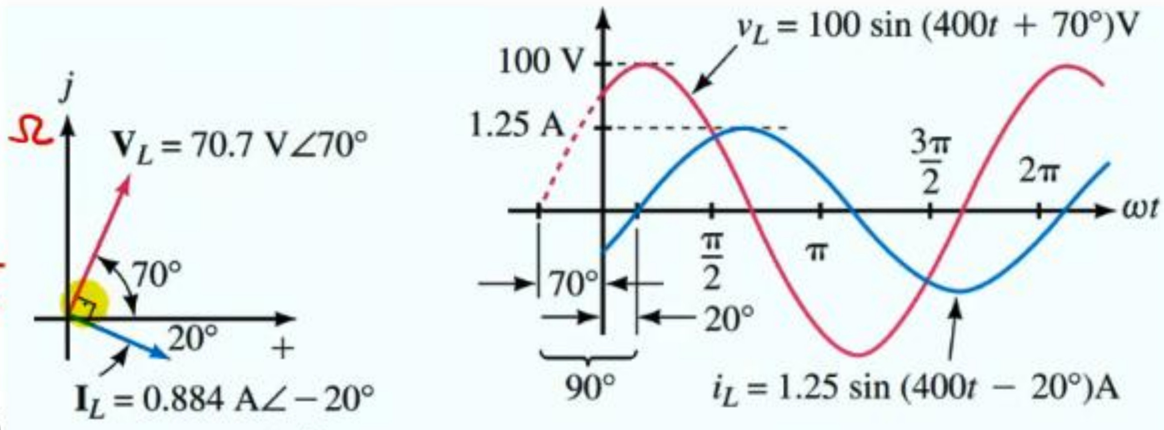
$X_L = L\omega = ٠٫٢ \times ٤٠٠ = ٨٠\ \Omega$

$V_m = ١٠٠V \rightarrow I_m = \frac{١٠٠}{٨٠}$

$I_m = ١٫٢٥\ A$

$i_L(t) = ١٫٢٥ \sin(٤٠٠t - ٢٠)$

$= ١٫٢٥ \angle -٢٠$

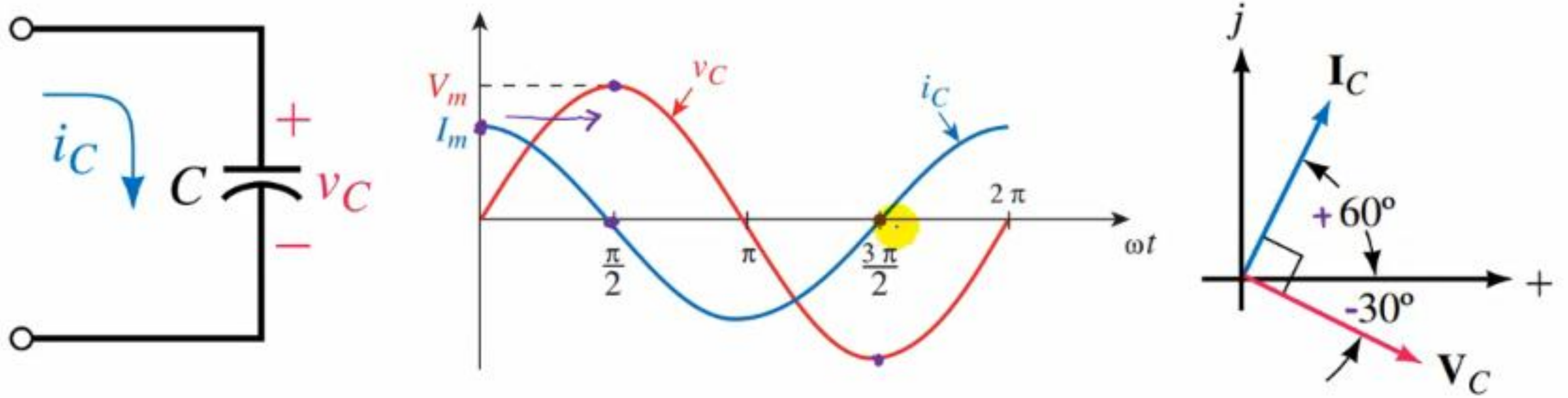


(a) $\frac{١٫٢٥}{\sqrt{٢}} = ٠٫٨٨٤$ (b)

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- رفتار خازن در مدارهای AC

$q = C v_c$



$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d}{dt}(\underline{V_m \sin \omega t}) = \underline{\omega C V_m} \cos \omega t = I_m \cos \omega t$$

$\sin(\omega t + 90)$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

$L \rightarrow X_L$
$C \rightarrow X_C$

- رفتار خازن در مدارهای AC
- راکتانس و امپدانس خازن:

$$X_C = \frac{V_m}{I_m} \quad (\Omega)$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_C}$$

$$I_m = \omega C V_m$$

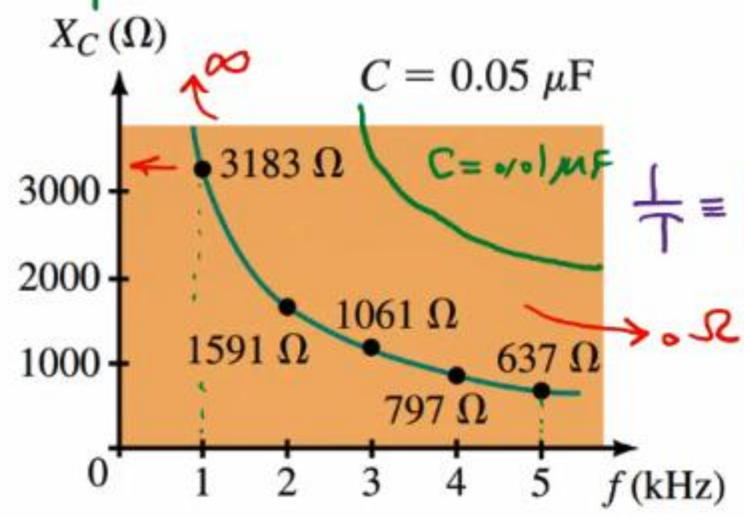
$$V_m = I_m X_C$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (\Omega)$$

$\omega = 2\pi f$

$X_C \propto \frac{1}{C}$

$X_C \propto \frac{1}{f}$



نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- مثال: جریان عبوری از یک خازن ۰.۱ میکروفاراد به‌صورت زیر تعریف می‌شود. ولتاژ آن را تعیین کنید.

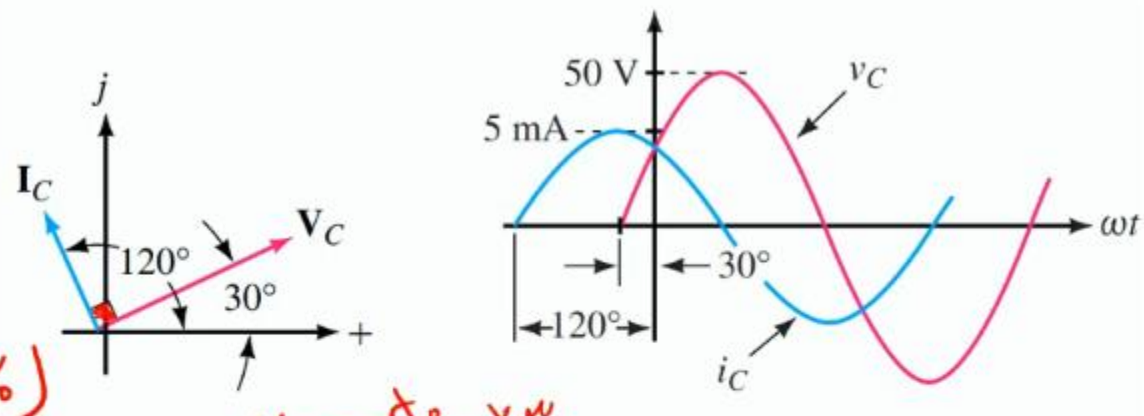
$$i_C = 5\sin(1000t + 120°)\ \text{mA}$$

$$X_C = \frac{1}{10^{-7} \times 10^{3}} = 10^{4}\ \Omega$$

$$V_C = X_C I_C$$

$$= 10^{4} \times 5 \times 10^{-3} = 50\ \text{V}$$

$$v_C(t) = 50\sin(1000t + 30)$$



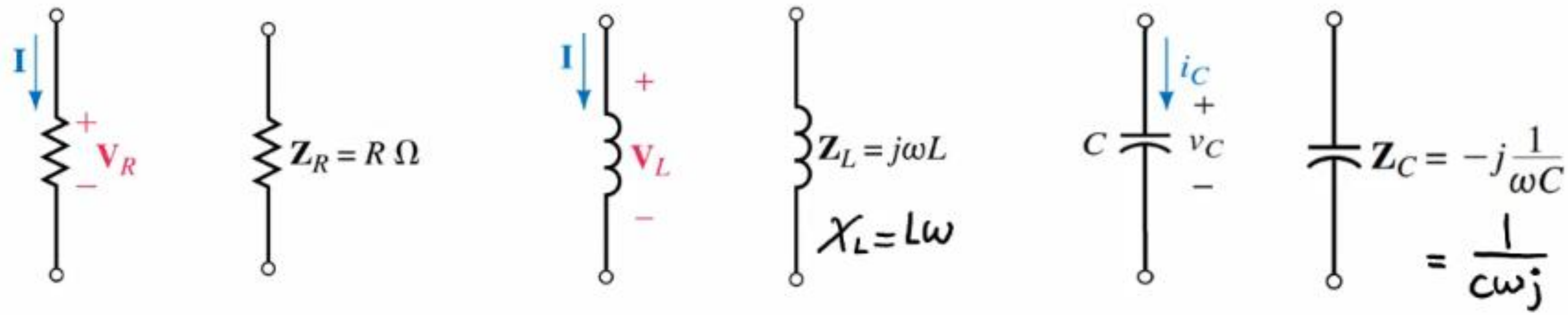
(a)

$$V_C = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 30$$

(b)

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- در مدارهای AC به جای مقاومت، خازن و سلف از امپدانس آنها استفاده کنید.



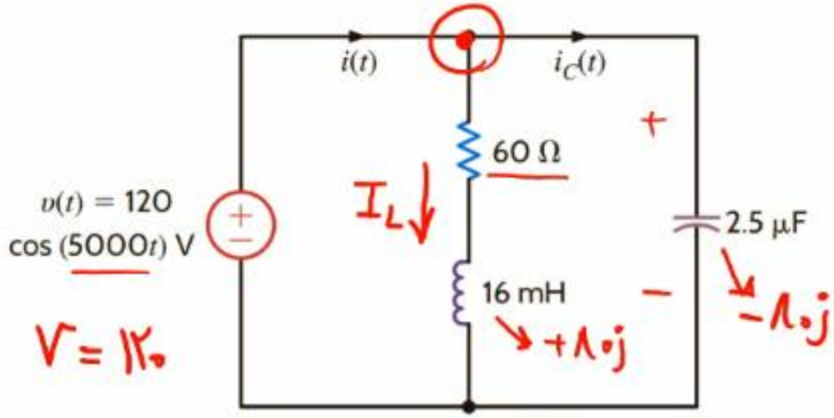
$j = \sqrt{-1} = 1 \angle +90$ $-j = 1 \angle -90$

$X_c = \frac{1}{c\omega}$ $= -jX_c$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

$$I = I_L + I_c$$

- مثال: جریان منبع ورودی را محاسبه کنید.



$$Z_L = L\omega j = 16\times10^{-3}\times5\times10^{3}\,j = 80j$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega j} = \frac{1}{2.5\times10^{-6}\times5\times10^{3}\,j} = -80j$$

$$V = 120$$

$$I_c = \frac{120}{-80j} = +1.5j$$

$$I_L = \frac{120}{60+80j} = \frac{12}{6+8j} = \frac{12}{10\angle 53^\circ}$$

$$= 1.2\angle -53^\circ$$

نمایش فازوری مقاومت، سلف و خازن

- مثال:

$$I = 1.5j + 1.2\angle -53^\circ$$

$$= 1.5j + 1.2\cos(53) - j\,1.2\sin(53)$$

$$= 1.2\cos(53) + j\left(1.5 - 1.2\sin(53)\right)$$

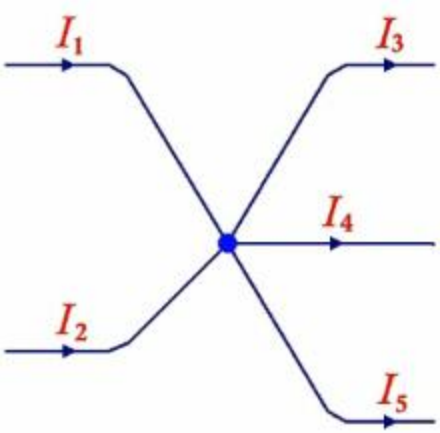
$$= 0.72 + j\,0.54 = \sqrt{0.72^2 + 0.54^2}\ \angle\ \tan^{-1}\left(\frac{0.54}{0.72}\right)$$

$$= 0.9\angle 36.9^\circ \longrightarrow i(t) = 0.9\cos(500t + 36.9^\circ)$$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- الگوریتمی عمومی برای تحلیل مدارهای الکتریکی بر اساس ولتاژ گره‌ها و قانون KCL
- قانون KCL: جمع جبری جریان‌های واردشونده به یک گره برابر با صفر است.



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

$$I_1^P \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2^P \sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$= I_3^P \sin(\omega t + \varphi_3) + I_4^P \sin(\omega t + \varphi_4)$$
$$+ I_5^P \sin(\omega t + \varphi_5)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{j\theta})$$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

$$I_1^P \,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right) + I_2^P \,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t+\varphi_2)}\right)$$

$$= I_3^P \,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t+\varphi_3)}\right) + I_4^P \,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t+\varphi_4)}\right)$$

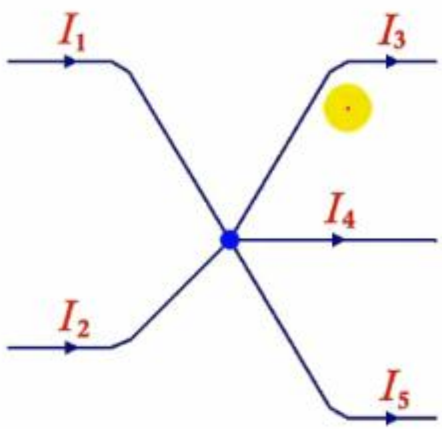
$$+ I_5^P \,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t+\varphi_5)}\right)$$

$$\cancel{\mathrm{Im}}\left(I_1^P e^{j\varphi_1} + I_2^P e^{j\varphi_2}\right) = \cancel{\mathrm{Im}}\left(I_3^P e^{j\varphi_3} + I_4^P e^{j\varphi_4} + I_5^P e^{j\varphi_5}\right)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- الگوریتمی عمومی برای تحلیل مدارهای الکتریکی بر اساس ولتاژ گره‌ها و قانون KCL
- قانون KCL: جمع جبری (فازور) جریان‌های واردشونده به یک گره برابر با صفر است.



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

$$I_1^P \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2^P \sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$= I_3^P \sin(\omega t + \varphi_3) + I_4^P \sin(\omega t + \varphi_4)$$
$$+ I_5^P \sin(\omega t + \varphi_5)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{j\theta})$$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- الگوریتمی عمومی برای تحلیل مدارهای الکتریکی بر اساس ولتاژ گره‌ها و قانون KCL

- الگوریتم آنالیز گره:

$\frac{1}{C\omega j}$ $\quad L\omega j$

❖ انتقال مدار به حوزه فرکانس (فازور)

❖ تعیین تمام گره‌های مدار (یکی از گره‌ها به دلخواه به عنوان مرجع به زمین متصل شود)

❖ اسم‌گذاری ولتاژ تمام گره‌ها $\quad V_1$ و V_2 و ... و V_n

❖ قانون KCL برای تمام گره‌ها نوشته شود.

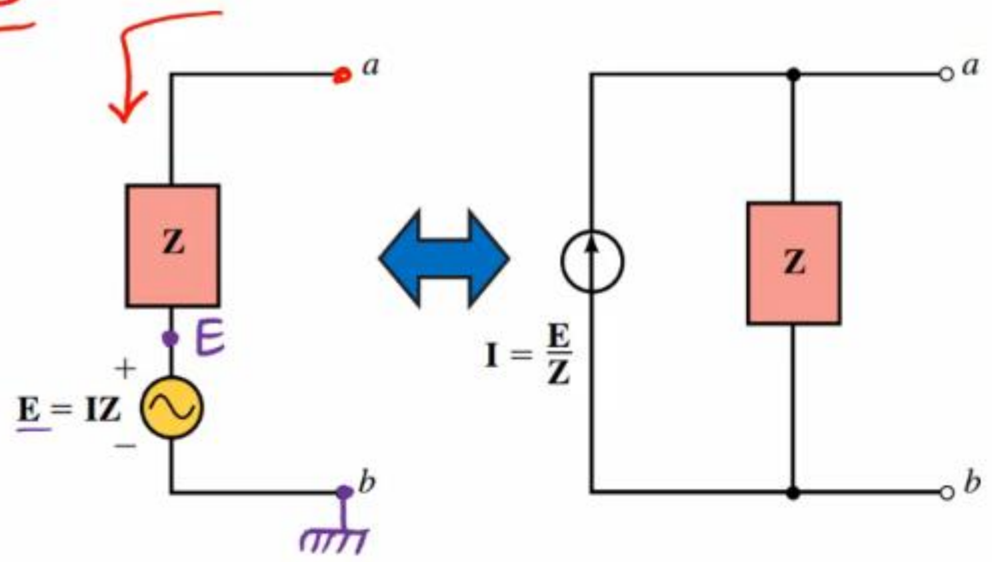
❖ با حل معادلات ولتاژ گره‌ها تعیین خواهد شد و سپس آنها را به حوزه زمان منتقل کنید.

sin: $\quad V_1 = V_p \angle \varphi \longrightarrow v_1(t) = V_p \sin(\omega t + \varphi)$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- نکته مهم: در آنالیز گره تمام منابع باید بصورت جریان باشند.

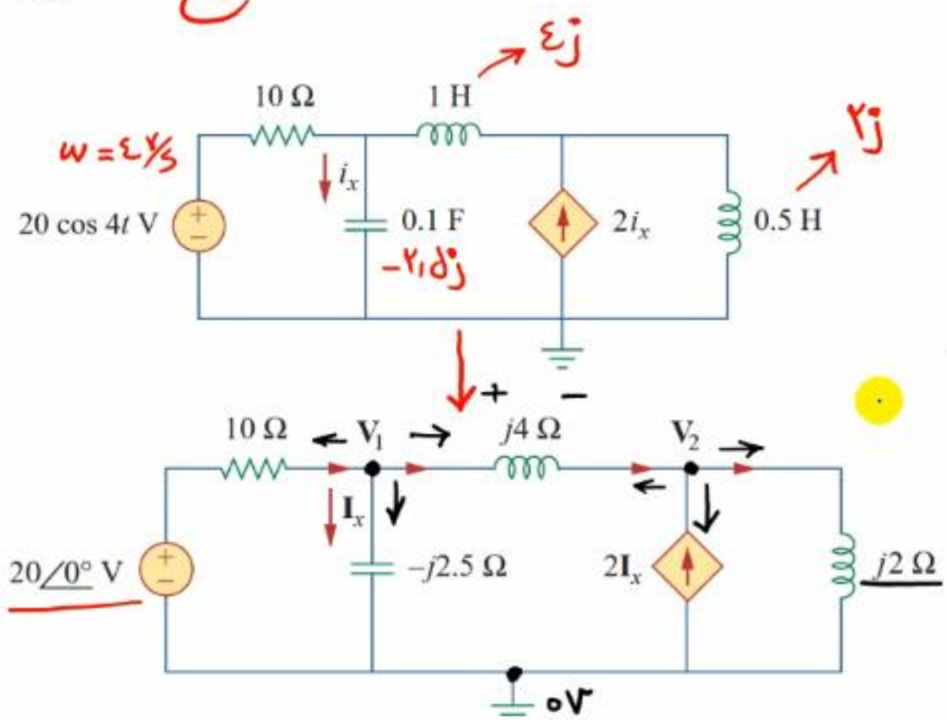
$I = \frac{V_a - E}{Z}$



آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

Cos مرجع

- مثال: جریان i_x را محاسبه کنید.



$$
\begin{cases}
\dfrac{V_1 - 20}{10} + \dfrac{V_1}{-2.5j} + \dfrac{V_1 - V_2}{4j} = 0 \\[2ex]
\dfrac{V_2 - V_1}{4j} - 2 I_x + \dfrac{V_2}{2j} = 0
\end{cases}
$$

$$I_x = \frac{V_1}{-2.5j} = 0.4j \; V_1$$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

• مثال:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} ۰٫۱+۰٫۱۵j & ۰٫۲۵j \\ -۰٫۵۵j & -۰٫۷۵j \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \underset{B}{\begin{bmatrix} +۲ \\ ۰ \end{bmatrix}}$$

$$V_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۰٫۲۵j \\ ۰ & -۰٫۷۵j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۰٫۱+۰٫۱۵j & ۰٫۲۵j \\ -۰٫۵۵j & -۰٫۷۵j \end{vmatrix}} = \frac{-۱٫۵j}{(۰٫۱+۰٫۱۵j)(-۰٫۷۵j) - ۰٫۲۵j(-۰٫۵۵j)}$$

$$= \frac{۳۰۰}{۱۵-۵j} = ۱۸٫۹۷ \measuredangle ۱۸٫۴۳^\circ$$

آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

• مثال:

$$I_x = ۰٫۴ \angle ۹۰ \times ۱۸٫۹۷ \angle ۱۸٫۴۳^\circ$$

$$= ۷٫۵۹ \angle ۱۰۸٫۴۳^\circ$$

$$i_x(t) = ۷٫۵۹ \cos(۴t + ۱۰۸٫۴۳^\circ)$$

حل مثال از
آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

حل مثال از آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

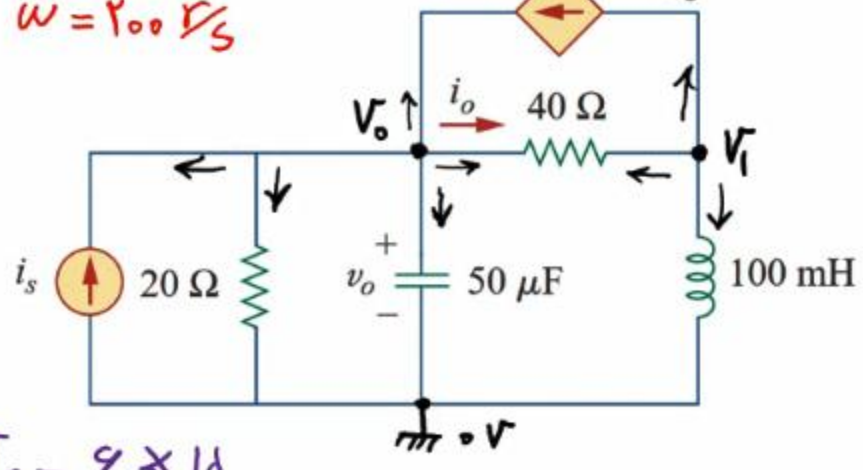
- الگوریتمی عمومی برای تحلیل مدارهای الکتریکی بر اساس ولتاژ گره‌ها و قانون KCL
- الگوریتم آنالیز گره:
  - ❖ انتقال مدار به حوزه فرکانس (فازور)
  - ❖ تعیین تمام گره‌های مدار (یکی از گره‌ها به دلخواه به عنوان مرجع به زمین متصل شود)
  - ❖ اسم‌گذاری ولتاژ تمام گره‌ها
  - ❖ قانون KCL برای تمام گره‌ها نوشته شود.
  - ❖ با حل معادلات ولتاژ گره‌ها تعیین خواهد شد و سپس آنها را به حوزه زمان منتقل کنید.

حل مثال از آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- مثال اول: ولتاژ خروجی را محاسبه کنید.

$i_s = 6\cos(200t + 15°)\ \text{A}$

$\omega = ۲۰۰\ r/s$



$I_s = ۶ \angle ۱۵$

$$Z_L = L\omega j = ۰/۱ \times ۲۰۰ j = ۲۰ j$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega j} = \frac{1}{۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۲۰۰ j} = -۱۰۰ j$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_۱}{۲۰j} + \dfrac{V_۱ - V_۰}{۴۰} + ۰/۱\, V_۰ = ۰ \\[2ex] -۰/۱\, V_۰ + \dfrac{V_۰ - V_۱}{۴۰} + \dfrac{V_۰}{-۱۰۰j} + \dfrac{V_۰}{۲۰} = ۶ \angle ۱۵° \end{cases}$$

حل مثال از آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- مثال اول:

$$\begin{bmatrix} 0.075 & 0.025-0.05j \\ -0.025+0.01j & -0.025 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 6\angle 15 \end{bmatrix}$$

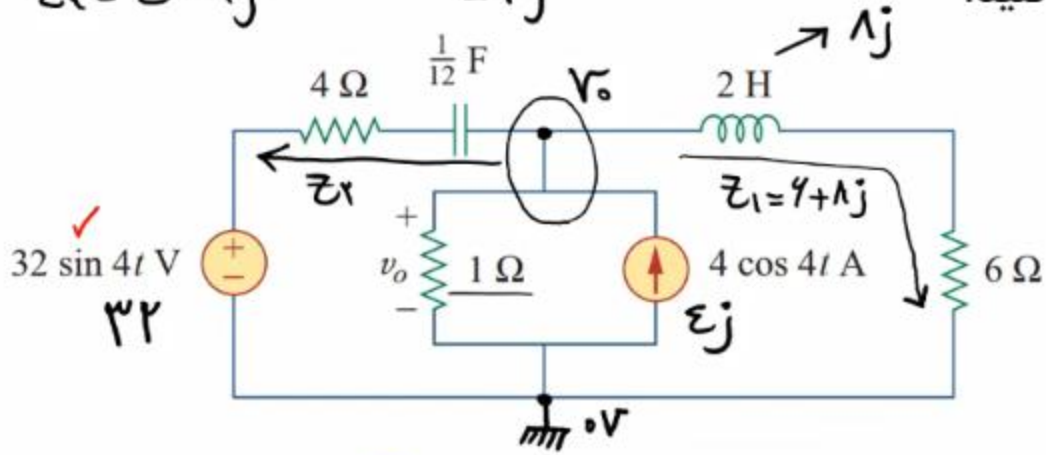
$$V_0=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0.025-0.05j \\ 6\angle 15 & -0.025 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.075 & 0.025-0.05j \\ -0.025+0.01j & -0.025 \end{vmatrix}}=2.45-j\,145.5=145.52\angle -89.03^\circ$$

$$v_0(t)=145.52\cos(200t-89.03^\circ)$$

حل مثال از آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- مثال دوم: ولتاژ خروجی را محاسبه کنید.

$Z_{۲} = ٤ - ۳j$ $\quad -۳j$



$$٤ \cos ٤t = ٤ \sin(٤t + ٩٠)$$

$$= ٤ \angle ٩٠ = ٤j$$

$$\frac{V_{0} - ۳۲}{٤ - ۳j} + V_{0} + \frac{V_{0}}{٦ + ٨j} = ٤j$$

حل مثال از آنالیز گره در حالت دائمی سینوسی

- مثال دوم:

$$\left(\frac{۱}{۴-۳j}+۱+\frac{۱}{۶+۸j}\right)V_۰ = ۴j+\frac{۳۲}{۴-۳j}$$

$$(۱٫۲۲+۰٫۰۴j)\,V_۰ = ۵٫۱۲+۷٫۸۴j$$

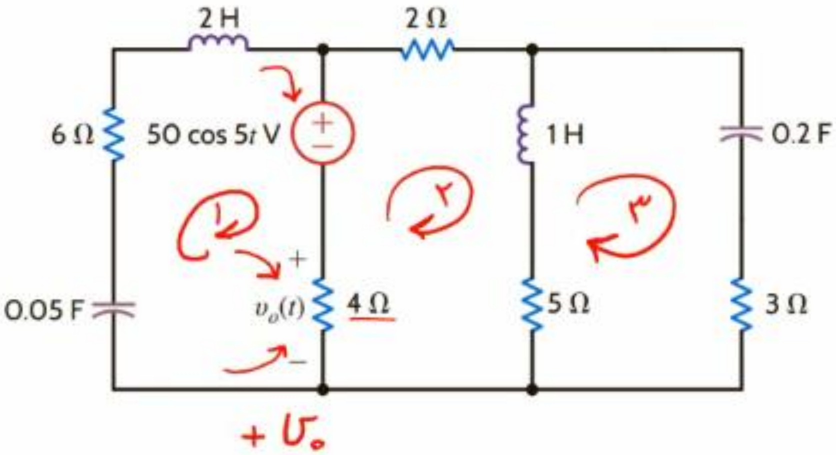
$$V_۰ = \frac{۵٫۱۲+۷٫۸۴j}{۱٫۲۲+۰٫۰۴j} = ۴٫۴+۶٫۲۸j = ۷٫۶۷\angle ۵۵^\circ$$

$$v_۰(t) = ۷٫۶۷\sin(۴t+۵۵)$$

آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

- قانون KVL: جمع جبری ولتاژهای المان‌ها در هر مسیر بسته برابر با صفر است.



$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

$$v_i = A_i \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = 0$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$$

آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

فازور

- قانون KVL: جمع جبری ولتاژهای المان‌ها در هر مسیر بسته برابر با صفر است.

$$\sum A_i \sin(\omega t+\varphi_i) = \sum A_i \,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t+\varphi_i)}\right) = 0$$

$$\mathrm{Im}\left(e^{j\omega t}\sum A_i e^{j\varphi_i}\right) = 0$$

$$\cancel{e^{j\omega t}}\sum A_i e^{j\varphi_i} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \underbrace{A_i e^{j\varphi_i}}_{V_i} = 0$$

$$v_i = A_i \sin(\omega t+\varphi_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} V_i = 0$$

آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

• الگوریتم تحلیل مش:

❖ انتقال مدار به حوزه فرکانس یا فازور

$R \quad \frac{1}{C\omega j} \quad L\omega j$

❖ تعیین تمام مش‌های مدار (مش حلقه‌ای است که داخل آن حلقه‌ی دیگری نباشد)

❖ اسم‌گذاری جریان تمام مش‌ها I_1 و I_2 و ... I_m

❖ جریان شاخه‌های مشترک بین مش‌ها با قانون KCL تعیین شود.

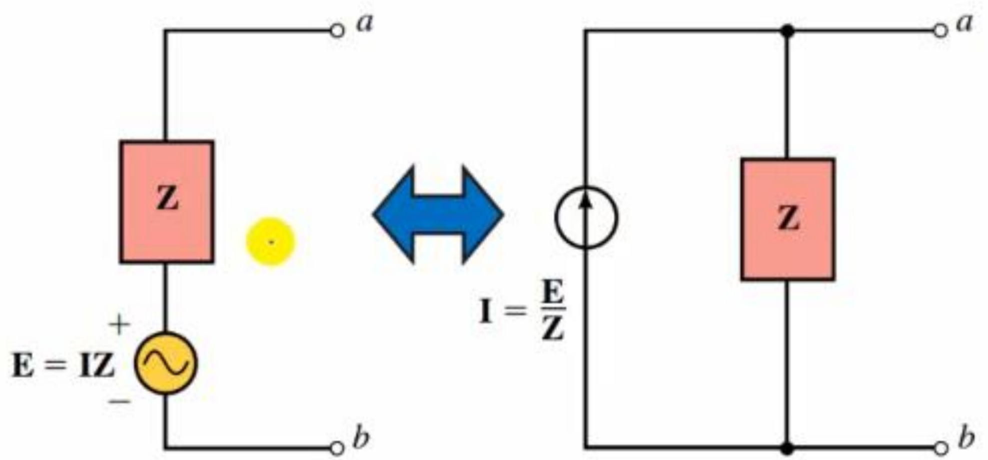
❖ قانون KVL برای تمام مش‌ها نوشته شود.

❖ با حل معادلات جریان مش‌ها تعیین خواهد شد و سپس به حوزه زمان منتقل کنید.

$$I_1 = a\angle\theta \longrightarrow i_1(t) = a\sin(\omega t+\theta)$$

آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

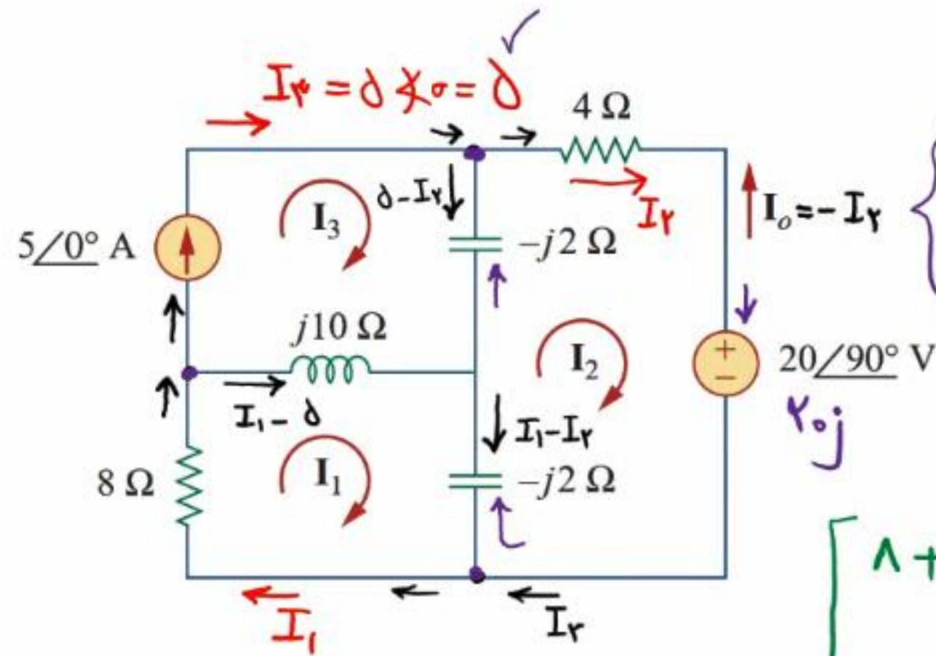
• نکته مهم: در آنالیز مش تمام منابع باید بصورت ولتاژ باشند.



آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

I_o

- مثال: جریان خروجی را محاسبه کنید.



$$\begin{cases} j10(I_1 - 5) - j2(I_1 - I_2) + 8 I_1 = 0 \\ 4 I_2 + 20j - j2(I_2 - I_1) - j2(I_2 - 5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 8+8j & +2j \\ +2j & 4-4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +50j \\ -30j \end{bmatrix}$$

آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

• مثال:

$$I_{۲} = \frac{\begin{vmatrix} ۸+۸j & ۵۰j \\ ۲j & -۳۰j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۸+۸j & ۲j \\ ۲j & ۴-۴j \end{vmatrix}} = \frac{-۳۰j\,(۸+۸j) - ۱۰۰\,j^{۲}}{۳۲\underbrace{(۱+j)(۱-j)}_{+۲} - ۴j^{۲}} = \frac{۳۴۰ - ۲۴۰j}{۶۸}$$

$$I_{۲} = \frac{۴۱۶٫۱۷ \measuredangle -۳۵٫۲}{۶۸} = ۶٫۱۲ \measuredangle -۳۵٫۲^{\circ}$$

$$I_{0} = -I_{۲} = ۶٫۱۲ \measuredangle ۱۴۴٫۸^{\circ} \longrightarrow i_{0}(t) = ۶٫۱۲ \sin(\omega t + ۱۴۴٫۸)$$

حل مثال از
آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

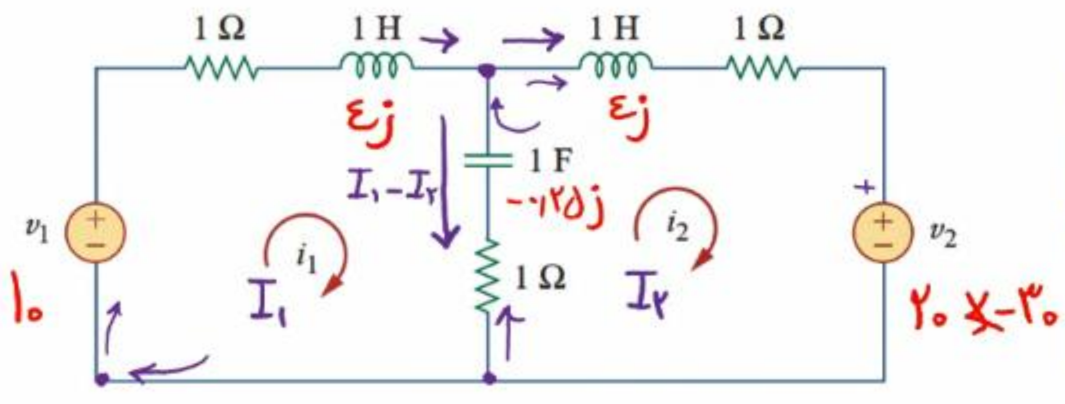
- قانون KVL: جمع جبری ولتاژهای المان‌ها در هر مسیر بسته برابر با صفر است.
  - ❖ انتقال مدار به حوزه فرکانس یا فازور
  - ❖ تعیین تمام مش‌های مدار (مش حلقه‌ای است که داخل آن حلقه‌ی دیگری نباشد)
  - ❖ اسم‌گذاری جریان تمام مش‌ها
  - ❖ جریان شاخه‌های مشترک بین مش‌ها با قانون KCL تعیین شود.
  - ❖ قانون KVL برای تمام مش‌ها نوشته شود.
  - ❖ با حل معادلات جریان مش‌ها تعیین خواهد شد و سپس به حوزه زمان منتقل کنید.

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

- مثال اول: جریان مش‌ها را محاسبه کنید.

$$v_1 = 10 \cos 4t \text{ V}$$
$$v_2 = 20 \cos(4t - 30°) \text{ V}$$

$L\omega j \qquad \frac{1}{C\omega j}$



$$\begin{cases} -10 + (1+4j)I_1 + (1-0.25j) \times (I_1 - I_2) = 0 \\ (1+4j)I_2 + 20\angle{-30} + (1-0.25j)(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

- مثال اول:

$$\begin{bmatrix} 2+3.75j & -1+0.25j \\ -1+0.25j & 2+3.75j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +10 \\ 20\angle 150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(2+3.75j)^2-(-1+0.25j)^2} \begin{bmatrix} 2+3.75j & 1-0.25j \\ 1-0.25j & 2+3.75j \end{bmatrix}$$

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

- مثال اول:

$$I_1 = 2.07 - 1.8j = 2.74 \angle -41.1^\circ$$

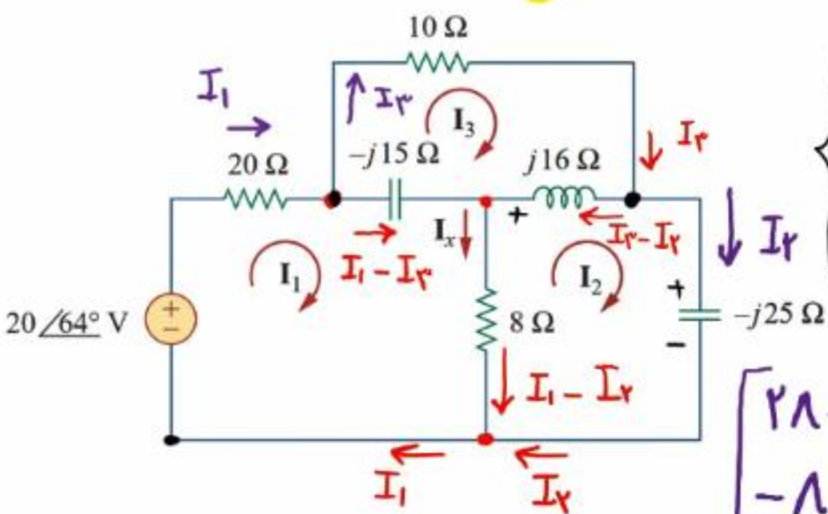
$$I_2 = -0.14 + 4.11j = 4.13 \angle 92^\circ$$

$$i_1(t) = 2.74 \cos(4t - 41.1)$$

$$i_2(t) = 4.13 \cos(4t + 92^\circ) \simeq -4.13 \sin(4t)$$

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

- مثال دوم: جریان مش‌ها را محاسبه کنید.



$$
\begin{cases}
-20\angle 64 + 20 I_1 - j15(I_1 - I_3) + 8(I_1 - I_2) = 0 \\
-j25 I_2 + 8(I_2 - I_1) + j16(I_2 - I_3) = 0 \\
10 I_3 + j16(I_3 - I_2) - j15(I_3 - I_1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 28-15j & -8 & 15j \\ -8 & 8-9j & -16j \\ 15j & -16j & 10+j \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{I}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 20\angle 64 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}
$$

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

• مثال دوم:

$$AI = B \longrightarrow I = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -0.21 + 0.6j \\ -0.32 + 0.47j \\ 0.12 - 0.21j \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0.64 \angle 109.6 \\ 0.57 \angle 124.4 \\ 0.24 \angle -60.4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} i_1(t) &= 0.64 \cos(\omega t + 109.6) \\ i_2(t) &= 0.57 \cos(\omega t + 124.4) \\ i_3(t) &= 0.24 \cos(\omega t - 60.4) \end{aligned}$$

حل مثال از آنالیز مش در حالت دائمی سینوسی

- مثال دوم:

$$I_x = I_1 - I_2 = 0.111 + 0.125j$$

$$= 0.17 \angle 48.5^\circ$$

$$i_x(t) = 0.17 \cos(\omega t + 48.5)$$