سری ها و انتگرال فوریه

در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک تابع را برحسب یک مجموعه از توابع نوشتیم و آن را بسط نامیده‌ایم که نمونه‌ای از آن بسط تیلور است.

اگر تابع $f(x)$ در همسایگی a پیوسته بوده و تمام مشتقات آن وجود داشته باشد آنگاه دارای بسط سری تیلور به صورت زیر است

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

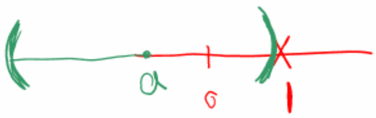
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

مثال:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\cos x = \cos a - \sin a\,(x-a) - \frac{1}{2}\cos a\,(x-a)^2 + \frac{1}{6}\sin a\,(x-a)^3 \mp \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \cdots$$



گرچه می توان برای توابع مثلثاتی بسط تیلور نوشت اما اگر توابع متناوب مثلثاتی نباشند و یا نقاط ناپیوسته داشته باشند استفاده از بسط تیلور امکان پذیر نیست.

تابع متناوب: اگر $f(x)$ برای همه x های حقیقی جز تعدادی نقطه تعریف شده باشد و عدد حقیقی مثبتی وجود داشته باشد که $f(x+T) = f(x)$ باشد تابع $f(x)$ متناوب است. کوچکترین T صادق در رابطه $f(x+T) = f(x)$ را دوره تناوب تابع نامند (T_0).

$$\tan x \longrightarrow T_0 = \pi$$

تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته است اگر تعداد متناهی نقاط $a = x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b$ موجود باشند طوری که f در فاصله‌های (x_i, x_{i+1}) پیوسته و حدهای $f(x_i^+)$ و $f(x_{i+1}^-)$ برای تمام $i = 1, 2, \ldots, n-1$ موجود باشند.

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته باشد در این صورت در این فاصله انتگرال‌پذیر خواهد بود.

اگر f' هم در فاصله $[a,b]$ شرایط بالا را داشته باشد $f(x)$ را تکه‌ای هموار دانند. اگر f'' همین شرایط بالا را داشته باشد آنگاه تابع $f(x)$ را تکه‌ای بسیار هموار نامند.

به دنباله‌ای از توابع $\{\varphi_n(x)\}$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ در بازه $[a,b]$ متعامد گفته می‌شود اگر

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,w(x)\,dx = 0 \qquad m\neq n$$

~~و اگر $m=n$ آنگاه $\left[\int_a^b \varphi_n^2(x)\,w(x)\,dx\right]^{1/2}$ را نرم دنباله متعامد $\{\varphi_n(x)\}$ باشد. اگر حاصل نرم~~

یک شود توابع را متعامد یکه نامند

Orthogonal

اگر مجموعه دنباله‌ای از توابع $\{\varphi_n(x)\}$ یک مجموعه کامل توابع متعامد در بازه $[a,b]$ باشد هر تابعی مانند $g(x)$ را می‌توان برحسب آنها بسط داد.

۱) $$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \neq 0 & m=n \end{cases}$$

۲) منظور از مجموعه کامل این است که هیچ تابعی موجود نباشد که در بازه فوق بر آن توابع عمود بوده ولی جزء آن مجموعه به حساب آورده شده باشد

۳) $$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\varphi_n(x)$$

توابع متعامد یکه (orthonormal)

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که مجموعه توابع $\{\cos nx\}$ و $\{\sin nx\}$ در بازه $[-\pi,\pi]$ متعامد هستند

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\times \sin mx\,dx = 0 \qquad \text{و} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\cos nx\,dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \pi & m=n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \pi & m=n \end{cases}$$

سری فوریه: فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $(-\pi,\pi)$ تعریف شده باشد و $f(x+2\pi)=f(x)$. سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

که در آن a_n و b_n ضرائب سری فوریه نامیده می‌شوند و از رابطه زیر بدست می‌آیند

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \qquad \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\} \qquad \{\sin x, \sin 2x, \dots\}$$

$n \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\times \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left(\overset{0}{\cancel{\sin n\pi}} - \overset{0}{\cancel{\sin(-n\pi)}}\right) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\times \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos n\pi - \overbrace{\cos(-n\pi)}^{\cos n\pi}\right) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \, dx$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2n \, dx = 0 & n = m \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos(n+m)x}{n+m} - \dfrac{\cos(n-m)x}{n-m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \, dx$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & m \neq n \\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + 1) \, dx = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2nx}{2n} + x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{1}{2}(\pi - (-\pi)) = \pi & m = n \end{cases}$$

$$f(x) = \underbrace{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \cos nx\,dx}^{\,0} + b_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \sin nx\,dx}^{\,0}$$

$$= a_0 (x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

طرفین در $\cos mx$ ضرب و از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx = a_0 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \cos mx\,dx}^{\,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx} + b_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx}^{\,0} \Big]$$

$$= a_m \pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

اثبات

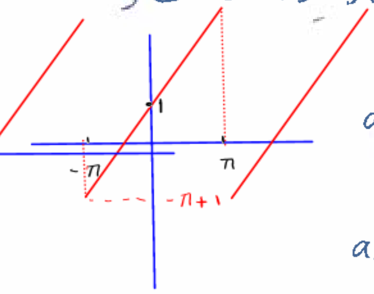
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 \longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\ \sin nx\,dx$$

$$= \pi a_m \qquad \longrightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

مثال: سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π را که در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت $f(x)=1+x$ تعریف شده است را بدست آورید.



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\cos nx\,dx = 0 \qquad n=1,2,\dots$$

$1+x$	+	$\sin nx$
1	−	$-\frac{\cos nx}{n}$
0		$-\frac{\sin nx}{n^2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(1+x)\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \qquad n=1,2,\dots$$

$$1+x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \qquad x\in(-\pi,\pi)$$

با مقایسه طرفین

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$ سری فوریه تابع $f(x)=x$ با دوره تناوب 2π

اگر $x=\frac{\pi}{2}$ اختیار شود داریم

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \mp \dots\right)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \mp \dots = \frac{\pi}{4}$$ نتیجه گرفته می‌شود

رابطه فوق توسط لایب نیتز در سال ۱۶۷۳ از ملاحظات هندسی بدست آمده است

$$f(x) = 1 + x \qquad |x| < \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\cos nx\,dx =$$

روش جزء به جزء $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\frac{d}{d}\downarrow \quad u \xrightarrow{+} dv \quad \downarrow\int$

$du \xrightarrow{-} v$

$1+x$	$+$	$\cos nx$
1	$-$	$\frac{\sin nx}{n}$
0		$-\frac{\cos nx}{n^2}$

$$= \frac{1}{\pi}\left((1+x)\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((1+\pi)\frac{\overset{0}{\cancel{\sin n\pi}}}{n} + \cancel{\frac{\cos n\pi}{n^2}} - (1-\pi)\frac{\overset{0}{\cancel{\sin(-n\pi)}}}{n} - \cancel{\frac{\overset{\cos n\pi}{\cos(-n\pi)}}{n^2}}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\sin nx\,dx =$$

$1+x$	$+$	$\sin nx$
1	$-$	$-\frac{\cos nx}{n}$
0		$-\frac{\sin nx}{n^2}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-(1+x)\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-(1+\pi)\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\overset{0}{\cancel{\sin n\pi}}}{n^2} + (1-\pi)\frac{\overset{\cos n\pi}{\cos(-n\pi)}}{n} - \frac{\overset{0}{\cancel{\sin(-n\pi)}}}{n^2}\right)$$

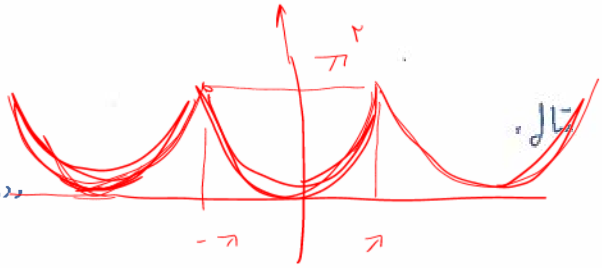
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\Big(-(1+\pi) + (1-\pi)\Big)\right) = -2\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{-2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$n = 1, 2, \ldots$

مثال:

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi$$

در خارج فاصله فوق با دوره تناوب 2π متناوب



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{1}{n^2}2x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \overset{+}{\searrow} & \cos nx \\ 2x & \overset{-}{\searrow} & \frac{\sin nx}{n} \\ 2 & \overset{+}{\searrow} & -\frac{1}{n^2}\cos nx \\ 0 & & -\frac{1}{n^3}\sin nx \end{array}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = 0$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad |x| \leq \pi$$

با استفاده از بسط فوریه فوق نشان دهید

$$(-1)^{2n} = 1 \qquad (-1)^n$$

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

الف) $x = \pi \longrightarrow$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ب) $x = 0$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \longrightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ تعریف شده باشد و در خارج فاصله فوق متناوب باشد آنگاه می‌توان ضرائب سری فوریه را از روابط زیر بدست آورد.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

که α یک مقدار ثابت

اثبات

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cos nx\,dx=\int_{\alpha-\pi}^{-\pi} f(x)\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx+\int_{\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$u=x+2\pi \Rightarrow du=dx$$

$x=\alpha-\pi \longrightarrow u=(\alpha-\pi)+2\pi=\alpha+\pi$

$x=-\pi \longrightarrow u=-\pi+2\pi=\pi$

$f(x)=f(u-2\pi)=f(u)$

$$=\boxed{\int_{\alpha+\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du}+\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}+\int_{\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-L,L]$ تعریف شده باشد و در خارج فاصله فوق متناوب باشد دارای سری فوریه به فرم زیر است

$\cos nx=\cos n(u-2\pi)=\cos nu$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که

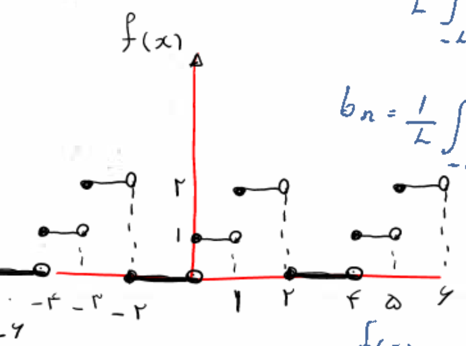
$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

مجموعه توابع $\left\{\cos\frac{n\pi}{L}x\right\}$ و $\left\{\sin\frac{n\pi}{L}x\right\}$ در فاصله $[-L,L]$ متعامد هستند.

مثال:



$$f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<0\\ 1 & 0\leq x\leq 1\\ 2 & 1<x<2\end{cases}$$

$T_0=4=2L \longrightarrow L=2$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{2}x+b_n\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=\frac{1}{2\times 2}\left(\int_{-2}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} 1\,dx+\int_{1}^{2} 2\,dx\right)=\frac{3}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_{1}^{2} 2\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2\times 2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_1^2\right)$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}1 & n=1,5,9\\ -1 & n=3,7,11\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 2x\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + 1 - 2\cos n\pi\right)$$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+1-2\cos n\pi\right)\sin\frac{n\pi}{2}x\right)$$

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-L,L]$ زوج باشد داریم

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

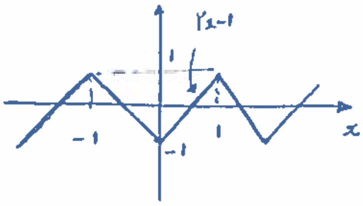
$$b_n = 0$$

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-L,L]$ فرد باشد

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

مثال:



$L=1$ تابع موج مثلثی

$L=1$ $f(x)$ تابع زوج

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x-1)\,dx = x^2 - x\Big|_0^1 = 0$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 (2x-1)\cos n\pi x\,dx =$$

$$\begin{array}{ccc} 2x-1 & & \cos n\pi x \\ & \searrow^{+} & \\ 2 & & \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & -\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} \end{array}$$

$$= 2\left(\frac{(2x-1)}{n\pi}\sin n\pi x + 2\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

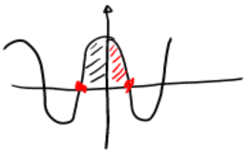
$b_n = 0$ $f(x)$ تابع زوج

توابع زوج وفرد

f_e

$f(-x) = f(x)$ زوج even

$\cos x$

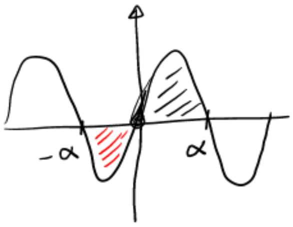


$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_e(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f_e(x)\,dx$$

$f(-x) = -f(x)$ فرد odd

مقدار تابع فرد در مبداء صفر است.

$\sin x$



f_o

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_o(x)\,dx = 0$$

odd × odd = even

even × even = even

odd × even = odd

odd + odd = odd

even + even = even

هر تابع دلخواه را می توانید به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد بنویسید

$$\boxed{f(x) = f_e(x) + f_o(x)}$$

$$f(-x) = f_e(-x) + f_o(-x)$$

$$\boxed{= f_e(x) - f_o(x)}$$

$$f(x) + f(-x) = 2 f_e(x) \longrightarrow f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi x$$

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2} = \frac{-8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

$$= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} \quad n=2K-1 \quad = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos(2K-1)\pi x}{(2K-1)^2}$$

با انتخاب $x=0$

$$-1 = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\longrightarrow \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

قضیه دیرکله: اگر $f(x)$ تابع متناوب محدود (مطلقاً در یک دوره تناوب انتگرال‌پذیر باشند) و در هر دوره تناوب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم آن محدود و همچنین تعداد نقاط انفصال آن در یک دوره تناوب محدود باشند در این صورت بسط سری فوریه وجود دارد و در تمام نقاط پیوسته تابع با آن برابر بوده و در نقاط انفصال برابر متوسط حد چپ و راست آن می‌باشند.

بسط های نیم دامنه‌ای:

سری های فوریه مورد بحث تاکنون در بازه $(-L,L)$ در نظر گرفته شده‌اند. اگر بخواهیم سری فوریه تابع $f(x)$ را برای نیم دامنه $(0,L)$ بنویسیم. برای این منظور ابتدا $f(x)$ را به دامنه $(-L,L)$ گسترش داده و سری فوریه مربوط به این دامنه را بدست می‌آوریم

حالت اول

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

در این صورت $F(x)$ زوج در بازه $(0,L)$ با $f(x)$ برابر است لذا برای بسط سری فوریه $F(x)$ داریم

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

چون $F(x)$ با تابع $f(x)$ در بازه $(0,L)$ یکی است لذا می‌توان $f(x)$ را در بازه $(0,L)$ به صورت زیر نشان داد

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

این سری را سری فوریه کسینوسی یا بسط نیم دامنه زوج نامند.

بسط نیم دامنه فرد - بسط سری فوریه سینوسی

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ -f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

$F(x)$ تابعی فرد - در این صورت

$$a_0=a_n=0 \quad , \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

لذا خواهیم داشت

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

مثال: مطلوبست بسط سری فوریه سینوسی تابع متناوب $f(x)$ که در فاصله $(0,1)$ بصورت $f(x)=x^2$ تعریف شده است.

x^2	$\sin n\pi x$
$2x$	$-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}$
2	$-\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}$
0	$\frac{\cos n\pi x}{n^3\pi^3}$

$$a_0=a_n=0$$

$$b_n=2\int_0^1 x^2\sin n\pi x\,dx=2\left(-x^2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}+2x\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}+\frac{2\cos n\pi x}{n^3\pi^3}\right)\Big|_0^1$$

$$=2\left(-\frac{(-1)^n}{n\pi}+\frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3}-\frac{2}{n^3\pi^3}\right)=\frac{2}{n^3\pi^3}\left((-1)^{n+1}n^2\pi^2+2(-1)^n-2\right)$$

$$x^2=\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[(-1)^{n+1}n^2\pi^2+2(-1)^n-2\right]\sin n\pi x$$

مثال: سری فوریه کسینوسی تابع متناوب $f(x)$ که در فاصله $(0,\pi)$ بصورت $f(x)=x+|x|$ تعریف شده است را بیابید

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+|x|)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+|x|)\cos nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\begin{cases} -\frac{8}{\pi n^2} & \text{n های فرد} \\ 0 & \text{n زوج} \end{cases}$$

$$x+|x|=\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$=\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad 0<x<\pi$$