بسم الله الرحمن الرحیم

ای جهان این ناز بر شاهان فروش
کاین گدایان چیز دیگر می خرند
جز ز اهل دل مپرس اسرار عشق
کیمیا از کیمیاگر می خرند

دانشگاه پیام نور

فصل دوم: تنش و کرنش

Tension &

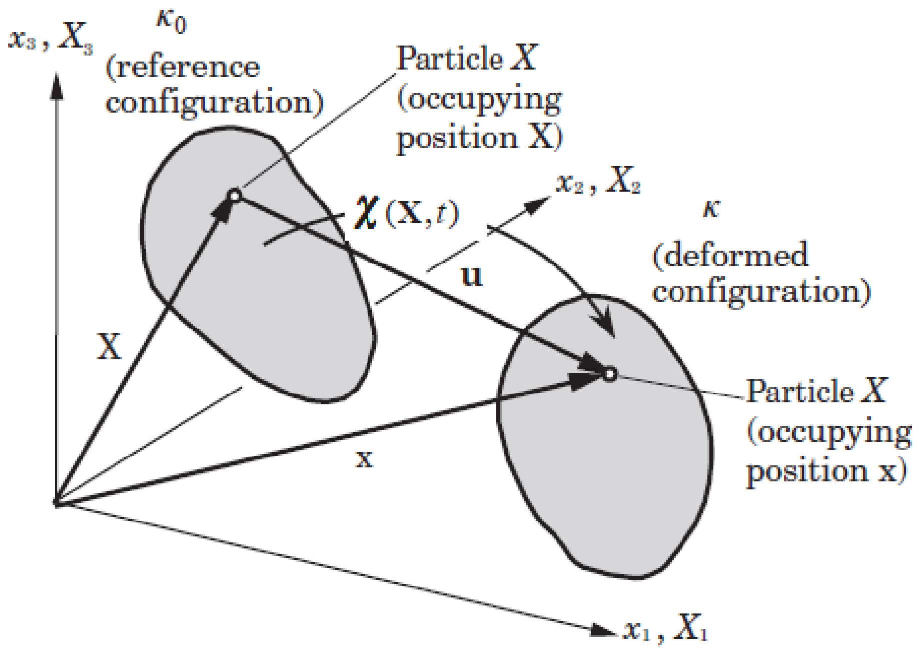
اکبر اقبالی

WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1393

پیکربندی محیط پیوسته

- مختصات (X,Y,Z) برای مختصات مادی (لاگرانژی) بکار می رود و در این مختصات جسم مورد نظر فضای κ_0 را اشغال کرده است.
- پس از اعمال بارهای مختلف، جسم مورد نظر فضای دیگری مانند κ را اشغال خواهد کرد که در این وضعیت، مختصات (x,y,z) برای مختصات فضایی (اویلری) بکار می رود و در این مختصات جسم مورد نظر فضای را اشغال کرده است.



محیط پیوسته
تانسور کرنش
کرنش و تغییر مکان
کرنش محوری
کرنش برشی
تبدیل کرنش
معادلات سازگاری

تحلیل تانسور کرنش

- نیرو دو اثر بر روی اجسام شکل پذیر دارد:

۱) تغییر مکان *Displacement*
۲) تغییر شکل *Deformation*

- تغییر مکان و شکل یک جسم توسط تانسور کرنش بیان می شود
- کرنش نیز مانند تنش دارای دو مولفه محوری (قائم) و مماسی است

- کرنش محوری در دو دیدگاه مطرح می شود:

۱) دیدگاه لاگرانژی
۲) دیدگاه اویلری

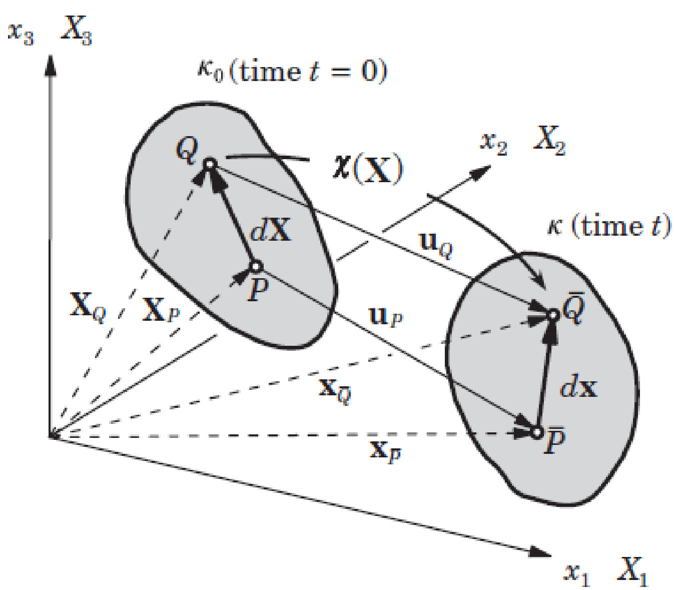
تحلیل تانسور کرنش - تغییر مکان

- میدان تغییر مکان: به تغییر مکان نسبی و تغییر در کشیدگی های هندسی که در اثر سیستم نیرو در یک محیط پیوسته ایجاد می شود می گویند.

$$u = x - X$$

$$\begin{cases} u(X,t) = x(X,t) - X \\ u(x,t) = x - X(x,t) \end{cases}$$

- توصیف لاگرانژی تغییر مکان
- توصیف اویلری تغییر مکان



- فاصله بین نقاط P و Q در دو دستگاه برابر است با:

$$\begin{cases} (dS)^2 = dX \cdot dX \\ (ds)^2 = dx \cdot dx \end{cases}$$

تحلیل تانسور کرنش - تغییر شکل

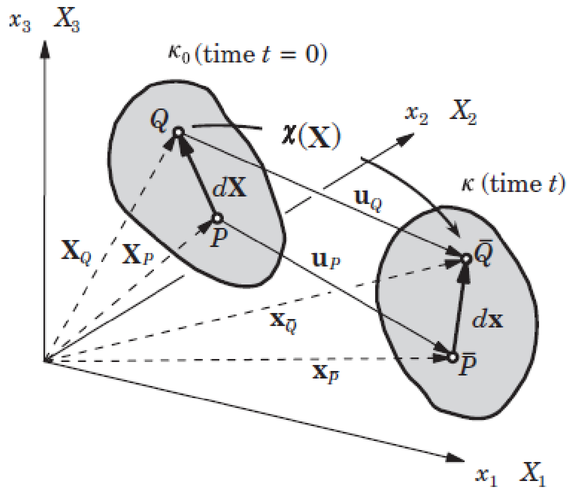
- تانسور گرادیان تغییر شکل F عبارتست از گرادیان تغییر شکل κ ، نسبت به پیکربندی κ_0 .
- تغییر شکل می تواند هم حجم، همگن و یا ناهمگن باشد.

$$dx = F.dX = dX.F^{T} \quad \rightarrow \quad \mathrm{F}_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

$$dX = F^{-1}.dx = dx.F^{-T} \quad \rightarrow \quad \mathrm{F}_{Ji}^{-1} = \frac{\partial X_J}{\partial x_i}$$

$$[F] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}, \qquad [F]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

کرنش محوری



$$\begin{cases} \left|PQ\right| = dX \\ \left|\bar{P}\bar{Q}\right| = \sqrt{\left(dX + du_1\right)^2 + \left(du_2\right)^2 + \left(du_3\right)^2} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \lim_{dX \to 0} \frac{\left(ds\right)^2 - \left(dS\right)^2}{2\left(dS\right)^2}$$

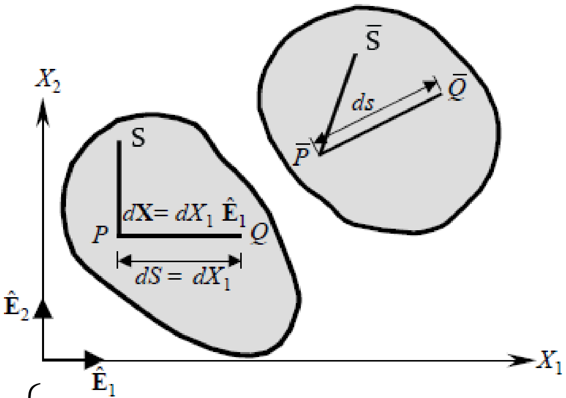
$$= \lim_{dX \to 0} \frac{\left(dX + du_1\right)^2 + \left(du_2\right)^2 + \left(du_3\right)^2 - \left(dX\right)^2}{2\left(dX\right)^2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right\} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2\right\} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2\right\} = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{cases}$$

محیط پیوسته
تانسور کرنش
کرنش و تغییر مکان
کرنش محوری
کرنش برشی
تبدیل کرنش
معادلات سازگاری

کرنش زاویه ای یا برشی

- کرنش برشی عبارتست از تغییر شکل زاویه ای جسم
- تغییر شکل یک جسم با مولفه های تانسور کرنش بیان می شود
- کرنش نیز مانند تنش دارای دو مولفه محوری (قائم) و مماسی است



$$\begin{cases} P:(X_1, X_2, X_3) \\ Q:(X_1 + dX_1, X_2, X_3) \\ S:(X_1, X_2 + dX_2, X_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{P}:(X_1 + u_1,\quad X_2 + u_2,\quad X_3 + u_3) \\ \bar{Q}:\left(X_1 + dX_1 + u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}dX_1,\ X_2 + u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}dX_1,\ X_3 + u_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}dX_1\right) \\ \bar{S}:\left(X_1 + u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}dX_2,\ X_2 + dX_2 + u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2}dX_2,\ X_3 + u_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}dX_2\right) \end{cases}$$

کرنش زاویه ای یا برشی

$$
\begin{cases}
\bar{P}\bar{Q} : \left(dX_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1, \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} dX_1, \quad \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} dX_1 \right) \\
\bar{P}\bar{S} : \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2, \quad dX_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} dX_2, \quad \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} dX_2 \right)
\end{cases}
$$

$$
\varepsilon = \lim_{dX \to 0} \frac{\bar{P}\bar{Q} . \bar{P}\bar{S}}{2\left|PQ\right| . \left|PS\right|}
$$

$$
\bar{P}\bar{Q} . \bar{P}\bar{S} = \left\{ \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \right\} dX_1 . dX_2
$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left\{ \left(1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \right\} \\
\varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}\left\{ \left(1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \right\} \\
\varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}\left\{ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) + \left(1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\left(1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \right\}
\end{cases}
$$

تحلیل تانسور کرنش

- برای کرنش های بسیار کوچک، هیچ تفاوتی بین مختصات مادی و مختصات فضایی وجود ندارد و لذا تانسور اصلی کرنش و تانسور اویلری خطی با هم برابرند.

$$\varepsilon = \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right], \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \varepsilon_{21} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

کرنش های اصلی

- برای محاسبه کرنش های اصلی می توان از همان محاسبه روش تنش های اصلی استفاده نمود:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{xx}-\varepsilon) & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & (\varepsilon_{yy}-\varepsilon) & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & (\varepsilon_{zz}-\varepsilon) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon\right| = 0$$

- از محاسبه دترمینان فوق، یک معادله درجه سه با خصوصیات زیر حاصل می گردد:

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} \\ I_2 = (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}) - (\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}+\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}+\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}) \\ I_3 = \left|\varepsilon_{ij}\right| \end{cases}$$

کرنش های اصلی

- راستای هر تنش اصلی بدست آمده از حل معادلات زیر محاسبه می شود:

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon_{xx}-\varepsilon_1) & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & (\varepsilon_{yy}-\varepsilon_1) & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & (\varepsilon_{zz}-\varepsilon_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \left(n_{x1}\vec{i} + n_{y1}\vec{j} + n_{z1}\vec{k} \right)$$

- دایره موهر در محاسبه ارتباط میان کرنش ها نیزصادق است

Transformation of Strain تبدیل کرنش

- با توجه به ماتریس کسینوس های هادی، اگر ε' کرنش در مختصات (X,Y,Z) و ε کرنش در مختصات (x,y,z) باشد، رابطه میان آنها عبارتست از:

$$\varepsilon' = R.\varepsilon.R^T$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{XX} & \varepsilon'_{YX} & \varepsilon'_{ZX} \\ \varepsilon'_{XY} & \varepsilon'_{YY} & \varepsilon'_{ZY} \\ \varepsilon'_{XZ} & \varepsilon'_{YZ} & \varepsilon'_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_{Xx} & n_{Xy} & n_{Xz} \\ n_{Yx} & n_{Yy} & n_{Yz} \\ n_{Zx} & n_{Zy} & n_{Zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{Xx} & n_{Yx} & n_{Zx} \\ n_{Xy} & n_{Yy} & n_{Yz} \\ n_{Xz} & n_{Yz} & n_{Zz} \end{pmatrix}$$

کرنش های کوچک در مختصات استوانه ای و کره ای

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\ \varepsilon_{\theta z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_{zr} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial r} + \dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{r.\sin\theta}.\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{u_\theta}{r}\cot\theta + \dfrac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\ \varepsilon_{\theta\varphi} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{r.\sin\theta}.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi\cot\theta\right)\right\} \\ \varepsilon_{\varphi r} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r.\sin\theta}.\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \dfrac{u_\varphi}{r}\right) \end{cases}$$

معادلات سازگاری

- محاسبه تانسور کرنش به کمک بردار جابجایی به سادگی میسر است.
- عکس این مسئله (محاسبه جابجایی ها از طریق تانسور کرنش) با مشکلاتی همراه است.
- تعداد معادلات (شش معادله کرنش) بیشتر از مجهولات (سه مجهول جابجایی) است و لذا جواب های متفاوتی در معادلات صدق می کنند.
- معادلات سازگاری برای یافتن جواب های اصلی و منحصر به فرد مسئله بکار می روند.
- مبنای معادلات سازگاری اینست که کرنش ها از هم مستقل نیستند.
- سه معادله سازگاری از ارتباط بین کرنش ها در سه صفحه بدست خواهند آمد.
- در صفحه عمود بر راستای X_i، بردار جابجایی u_i ثابت فرض خواهد شد و با ارتباط کرنش ها در این صفحه، معادله مورد نظر بدست خواهد آمد.

معادلات سازگاری

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_2^2}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1\partial X_2^2}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2\varepsilon_{2}}{\partial X_1^2}=\frac{\partial u_2}{\partial X_2\partial X_1^2}$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial X_1\partial X_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1\partial X_2^2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_2\partial X_1^2}\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_2^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial X_1\partial X_2}\\[2ex]\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_3^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_1^2}=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial X_1\partial X_3}\\[2ex]\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_3^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_2^2}=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial X_2\partial X_3}\end{cases}$$

انسان صبور

پیروزی را از دست نمی دهد

هر چند زمان آن طولانی شود

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام