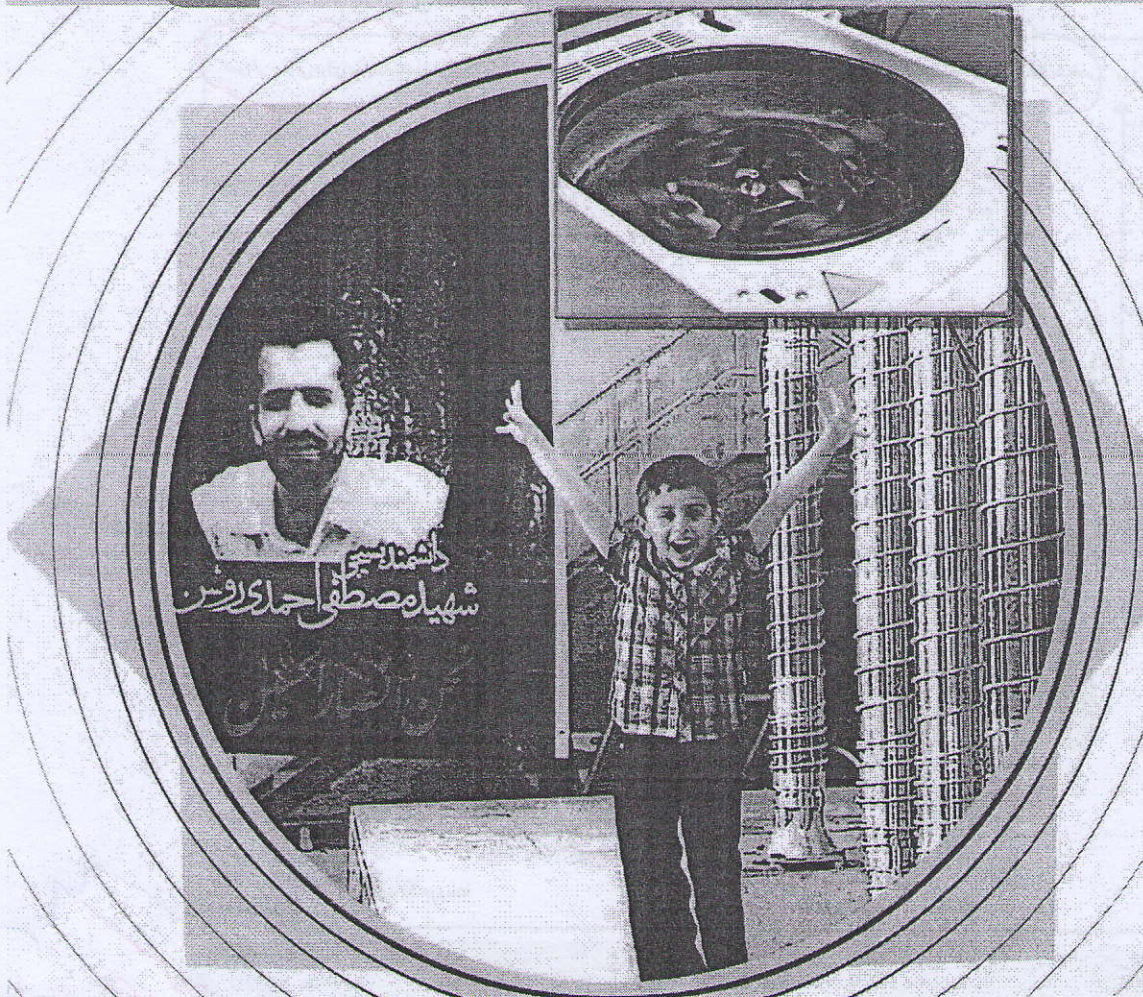


فصل ۸

آمار و احتمال

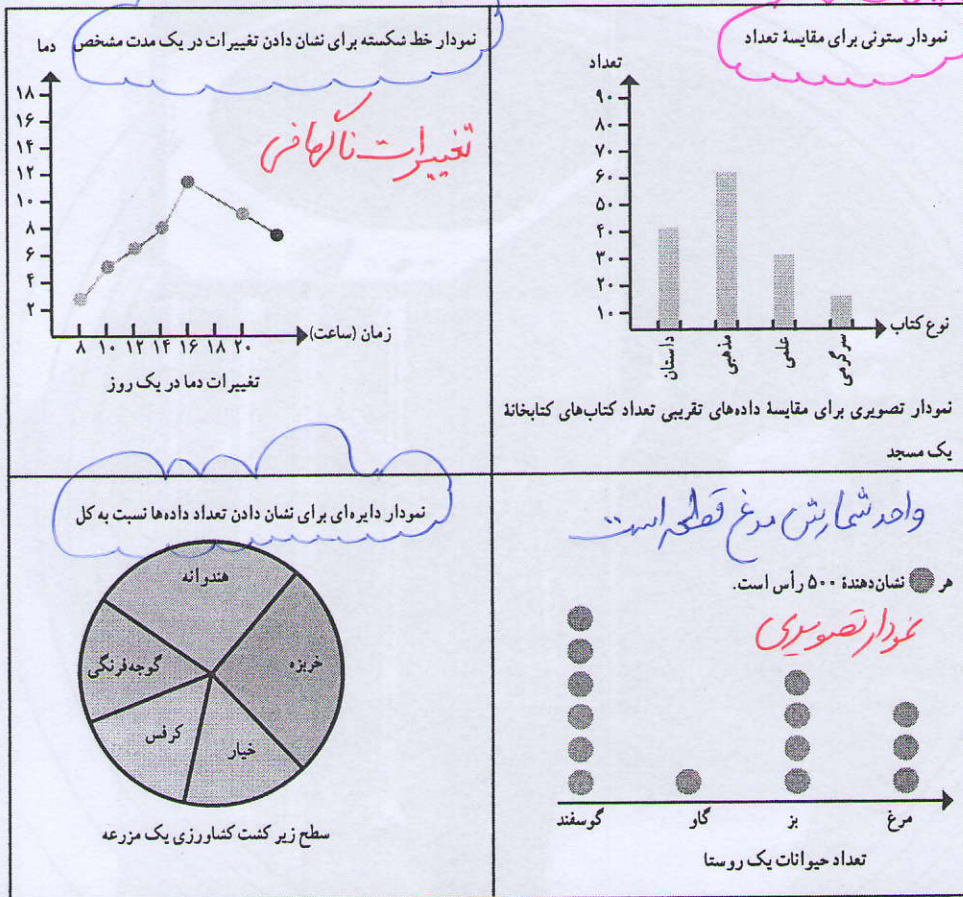


بررسی خواص یک گاز با استفاده از آمار و احتمال، هم کاری ساده است و هم منجر به نتایج قابل قبول و عملی می‌شود. مثلاً با استفاده از آمار و احتمال می‌توان تعداد دفعاتی را برآورد کرد که باید مقداری گاز دارای اورانیوم را غنی کنیم تا به درجه خلوص مورد نیاز برسد.

علم آمار

دسته بندی داده ها

در سال های پیش با علم آمار، که علم جمع آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده ها) است، آشنا شدید. داده ها را با چوب خط، سرشماری و در جدول سازماندهی کردید. سپس، با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر، چهار نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است.



اگر داده های جمع آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می شود. برای اینکه بتوانیم آسان تر و بهتر نتیجه بگیریم، داده ها را متناسب با موضوع آماری دسته بندی و سازماندهی می کنیم.

دسته بندی باید هدفمند باشد، تجربه تحلیل و تفسیر اطلاعات شود

چهار دسته بندی مهم

نکته

< یعنی شامل خود عدد نمی شود

≤ شامل خود عدد می شود

دامنه تغییرات
طول هر دسته = $\frac{\text{تعداد دسته‌ها}}{\text{تعداد تغییرات}}$

داده‌هایی که بزرگ‌تر یا مساوی عدد ۱۳۰ است و کوچک‌تر از ۱۴۵ است $130 \leq x < 145$

$130 \leq x < 145 \Rightarrow \frac{145 - 130}{5} = 3$
فعالیت ۱۵



در زیر، داده‌های جمع‌آوری شده درباره اندازه قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک شهر کوچک بر حسب سانتی متر مشخص شده است. (n=40)

- ۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۲ ۱۷۸ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱
- ۱۵۱ ۱۶۲ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۴۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰
- ۱۶۵ ۱۸۳ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۷۶ ۱۵۹ ۱۷۰ ۲۰۵ ۱۵۸ ۱۷۳ ۱۹۰ ۱۴۳

دامنه تغییرات $D = \text{Max} - \text{Min}$

کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید.
Max ۲۰۵
Min ۱۳۰

دامنه تغییرات

به فاصله بین این دو عدد دامنه تغییرات می گویند. دامنه تغییرات داده‌ها را پیدا کنید.

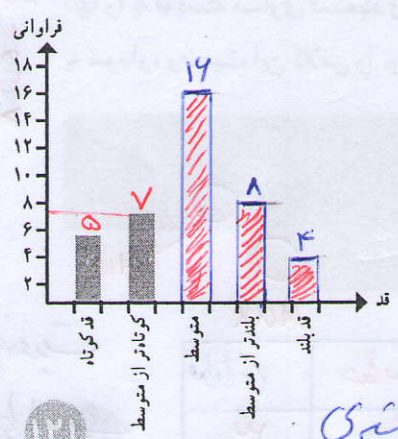
در یک تولیدی شلوار مردانه می خواهیم با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده بالا اندازه‌های مختلف را طراحی کنیم. برای این کار، داده‌ها را دسته‌بندی می کنیم. هر دسته یک معنای مشخصی دارد. برای مثال، افراد مختلف را می توانیم به صورت زیر تقسیم بندی کنیم:

قد بلند، بلندتر از متوسط، متوسط، کوتاه‌تر از متوسط و قد کوتاه

به این ترتیب، داده‌های ما به ۵ دسته تقسیم می شوند. می توانیم فاصله این دسته‌ها را مساوی در نظر بگیریم. به همین دلیل، برای رسیدن به حدود دسته‌ها دامنه تغییرات را بر ۵ تقسیم می کنیم تا طول دسته‌ها به طور تقریبی معلوم شود. به این ترتیب، می توانیم محدوده دسته‌ها را مشخص کنیم و در یک جدول بنویسیم.

در جدول زیر معنای $130 \leq x < 145$ را توضیح دهید. < و ≤ چه تفاوتی دارند؟

با توجه به حدود دسته‌ها، با استفاده از چوب خط تعداد داده‌های هر دسته را، که به آن فراوانی می گویند، تعیین کنید.



حدود دسته‌ها	چوب خط	فراوانی
$130 \leq x < 145$	###	۵
$145 \leq x < 160$	### //	۷
$160 \leq x < 175$	### ### //	۱۶
$175 \leq x < 190$	### //	۸
$190 \leq x \leq 205$	////	۴

آخرین داده باید در دسته‌ی
آخری باشد

جواب (۲): مردم این روستا دارای قد طبیعی و نرمال هستند

جواب (۳): با توجه به اینکه غرض از مقایسه است (نمودار ستونی) متوسط قد مردان این روستا در

دسته وسط (دسته سوم) قرار دارد

دسته سوم

با توجه به فعالیت صفحه قبل به سؤال های زیر پاسخ دهید.

۱- قد اکثر افراد در چه محدوده ای است؟ $140 \leq x < 175$ $175 \leq x < 190$

۲- با توجه به نمودار ستونی متوجه چه چیزی می شوید؟ بیشترین فراوانی در دسته سوم و کمترین فراوانی در دسته دوم است

بالا →

۳- فکر می کنید میانگین قد مردان این شهر در کدام دسته قرار می گیرد؟ در دسته سوم $140 \leq x < 175$

۴- به نظر شما این آمار و اطلاعات و نمودار چه کاربردهای دیگری دارند؟

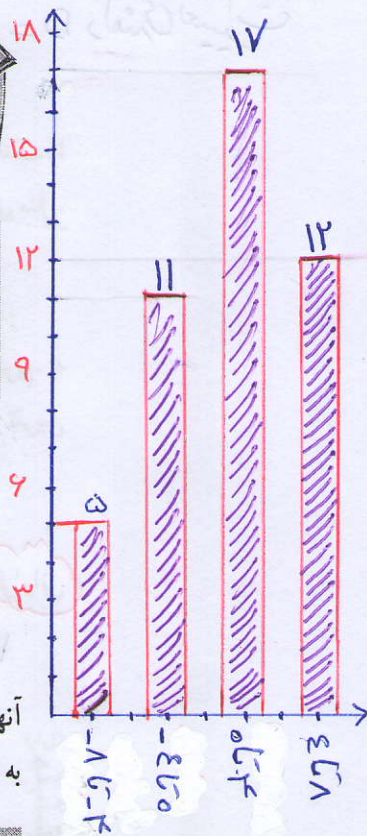
استعدادیابن برای تیم های ورزشی، این شهر می تواند تیم والیبال و بسکتبال قوی

داشته باشد - بهتراست فروشگاه های این شهر لباس های سایز بزرگ تهیه کنند

کاردر کلاس

۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است.

+2	+2	+2	+5	+6	0	-1	-2	0	-3	-7	-2	-1	0	0
-1	-3	-6	-7	-8	+8	+7	+8	+7	+6	+3	+1	+2	+3	+2
+2	+2	-2	-2	-1	0	-5	-3	0	0	+1	+1	+2	+6	+7



دسته اول $-8 \leq x < -4$

دسته دوم $-4 \leq x < 0$

دسته سوم $0 \leq x < 4$

دسته چهارم $4 \leq x \leq 8$

جدول فراوانی داده ها را بر اساس سؤال های زیر مشخص کرده و نموداری ستونی رسم کنید.

● دامنه تغییرات چقدر است؟ $8 - (-8) = 16$ **دامنه تغییرات**

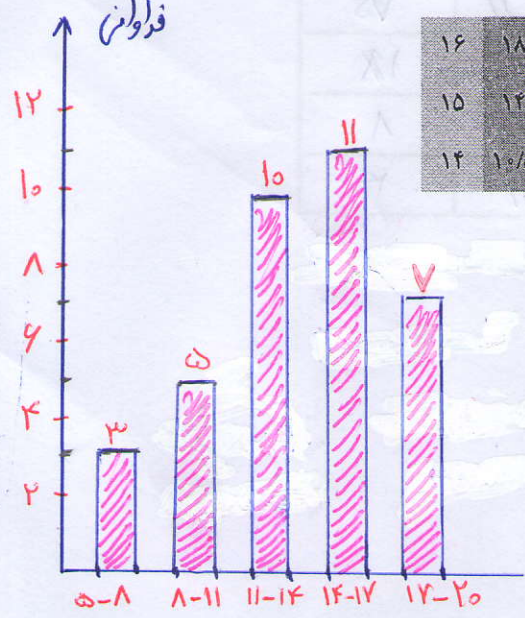
● داده ها را به چهار دسته تقسیم می کنیم؛ طول هر دسته چقدر است؟ $16 \div 4 = 4$ **طول هر دسته**

۲- نمره های ریاضی دانش آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات،

آنها را به ۵ دسته مساوی دسته بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار ستونی را رسم کنید و با توجه

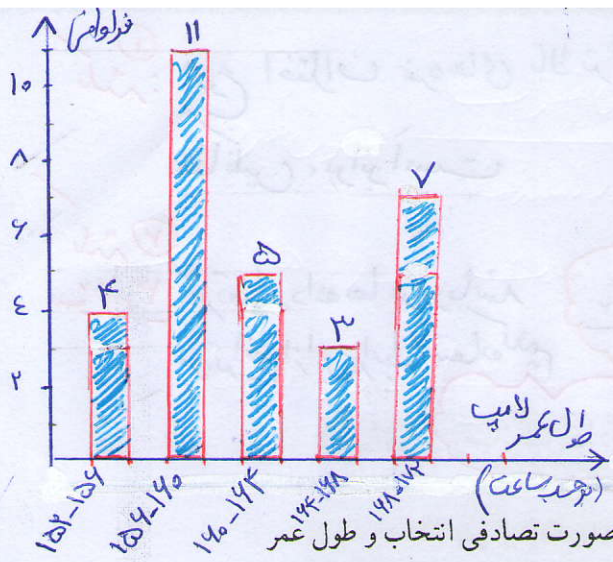
به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید. $\frac{15}{5} = 3$ **طول هر دسته** $\Rightarrow 20 - 5 = 15$ **دامنه تغییرات**

16	18	15	10/5	12/5	12	12	13/5	12	11	13	9	8
15	12	19	18/5	17	15/5	16/5	11	8/5	7	5	13	15
14	10/5	11/5	15	18	17	12	6	12/5	20			



مجموعه نمرات	حداستان	فراوانی
$5 \leq x < 8$	///	3
$8 \leq x < 11$	////	5
$11 \leq x < 14$	////	10
$14 \leq x < 17$	//// /	11
$17 \leq x \leq 20$	//// //	7

با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ فقره نمرات کم تر از ۱۴ گرفته اند



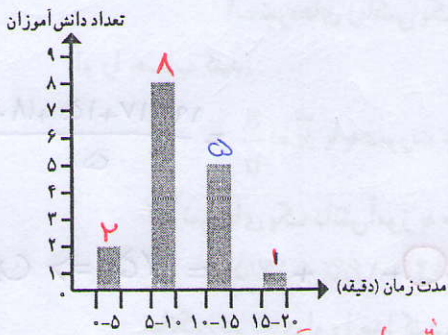
طول هر دسته	خط نشان	فراوانی
$152 \leq x < 156$	////	4
$156 \leq x < 160$	#### /	11
$160 \leq x < 164$	###	5
$164 \leq x < 168$	///	3
$168 \leq x \leq 172$	#### //	7



۱- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه گیری شده است. داده ها را به ۵ دسته تقسیم کنید و جدول

دامنه تغییرات = $172 - 152 = 20$
 طول هر دسته = $20 \div 5 = 4$

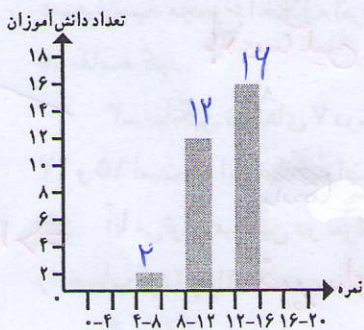
Max														
156	159	165	163	161	157	152	157	168	172	163	158	157	161	171
163	168	167	159	152	158	157	169	170	153	169	158	165	156	
Min														



۲- از دانش آموزان یک کلاس درباره مدت زمانی که طول می کشد تا آنها از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته بندی این داده ها نمودار ستونی مقابل رسم شده است. چند دانش آموز فاصله خانه تا مدرسه را در بیشتر از ۱۰ دقیقه طی می کنند؟ این کلاس چند دانش آموز دارد؟

نفر $5 + 1 = 6$: بیش از ۱۰ دقیقه

نفر $2 + 8 + 5 + 1 = 16$: تعداد کل دانش آموزان



۳- در اینجا نمودار نمره های دانش آموزان یک کلاس را می بینید.

۱- این کلاس چند دانش آموز دارد؟ ۳۰ نفر

۲- آیا این دسته بندی مناسب است؟ چرا؟

۳- آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟

باز پاسخ است →

اجازه دهیم دانش آموزان نظر دهند. بیست و نه نفر به خواسته ها می تواند مناسب و یا غیر مناسب باشند

۱۳۳

این کلاس دانش آموزان خیلی قوی ندارد، دانش آموزان خیلی ضعیف هم کم می باشد

۲) بله، زیرا تمام حالت ها را برای این کلاس در نظر گرفته ام - خیر، زیرا برخی از دسته ها خالی است

۳) بله، زیرا این کلاس دانش آموزان خیلی ضعیف ندارد (کم است) - خیر، زیرا دانش آموز قوی ندارد

نکته ۱: مجموع اختلاف نمره‌های بالاتر از میانگین با میانگین و نمرات پایین‌تر از میانگین با

میانگین، برابر است

$$S_1 = X_1 \cdot n, S_2 = \bar{X}_2 \cdot n, \bar{X} = \frac{S_1 + S_2}{2n}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\bar{X}_1 \cdot n + \bar{X}_2 \cdot n}{2n}$$

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}$$

اگر تعداد داده‌ها برابر باشد می‌توانیم از این رابطه استفاده کنیم

میانگین داده‌ها

پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند و به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید، می‌توان از میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج حاصل از داده‌ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. شما در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنا شده‌اید. میانگین تعدادی داده عددی، از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می‌آید.

برای تحلیل و تفسیر داده‌ها می‌توان از راندنی

تغییرات و میانگین در کنار هم استفاده کنیم



۱- نمره‌های ریاضی یک دانش‌آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های

او را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

$$\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{19+17+15+18+17}{5} = \frac{146}{5} = 14.2$$

۲- نمره‌های یک دانش‌آموز به صورت زیر است:

$$16 + 15/5 + 16 + 15 + 17 + 19 + 18/5 + 14 + 16/5 + 17/5 = 145 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{145}{10} = 14.5$$

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار

می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد مساوی است؟ ۴ نمره بالاتر و ۵ نمره پایین‌تر خیر

اختلاف نمره‌های بالای میانگین را با میانگین حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید. به همین ترتیب، مجموع اختلاف نمره‌های پایین‌تر از میانگین با میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با هم مقایسه کنید. بالای میانگین ۶ = ۱ + ۲ + ۲ + ۱ = ۶، پایین میانگین ۷ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۷

۳- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش‌آموز ۱۶/۵ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او، که

۱۷ و ۱۵ است، به این میانگین اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید؟ $115/5 + 17 + 15 = 147/5$ مجموع نمرات ۷ درس

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرد (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶ و ۱۶/۵ را حساب کرد؟ چرا؟ خیر، برای اینکه مساوی نیست $147/5 \neq 142/5$

۴- میانگین نمره‌های زیر را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله هر عدد تا میانگین چقدر است؟

۲	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۲
۱۱	۱۲	۱۲	۱۳	۱۳	۱۳	۱۴	۱۵

$$\bar{x} = \frac{117}{9} = 13$$

بین اعداد و میانگین تقارن وجود دارد

نکته: اگر داده‌ها را مرتب کنیم (در صورتی که تعداد داده‌ها فرد باشد) و مجموع اختلاف اعداد سمت چپ با اعداد سمت راست برابر باشد، آن داده

وسط برابر میانگین خواهد بود

فرد باشد و مجموع اختلاف اعداد سمت چپ با اعداد سمت راست برابر باشد، آن داده

سوال ۱ \Rightarrow مجموع اختلاف رده‌های سمت راست با وسط = $(17-15) + (17-15) + (17-15) + (20-15) = 10$
 مجموع اختلاف رده‌های سمت چپ با داره وسط = $(15-14) + (15-13) + (15-12) + (15-11) = 10$

پس داده وسطی با میانگین برابر است
 $a \leq x < b \Rightarrow$ مرکز دسته = $\frac{a+b}{2}$

نکته سوال ۲

کار در کلاس ۵، ۲، ۱۷، ۱۷، ۱۴، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۱ و ۱۱
 با توجه به رابطه‌ای که پیدا کرده‌اید، میانگین عددهای زیر را به دست آورید.

۱۶ ۱۳ ۱۷ ۲۰ ۱۲ ۱۵ ۱۱ ۱۴ ۱۷

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین داده‌ها را با تقریب بسیار خوب به دست آورد.

$$\bar{x} = \frac{135}{9} = 15$$



۱- به کمک ماشین حساب، میانگین قد ۴۰ نفر را که در درس قبل مطرح شده

$$\bar{x} = \frac{4479}{40} \approx 111,975$$

است، پیدا کنید.

۲- برای به دست آوردن مرکز دسته‌ای مانند دسته $130 \leq x < 145$ ، ابتدا مجموع عددهای

کلاس درس $\frac{130 + 145}{2} = 137,5$

۱۳۰ و ۱۴۵ را به دست می‌آوریم و سپس، حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

۳- اکنون تمام داده‌ها را در این قسمت می‌بینید. مرکز هر دسته را به جای داده‌های آن دسته

قرار دهید. برای مثال، چون عدد ۱۹۲ در دسته $190 \leq x < 205$ قرار دارد؛ به جای آن عدد ۱۹۷/۵ را، که مرکز این دسته است، قرار دهید.

۱۸۱	۱۴۷	۱۸۴	۱۶۷	۱۷۵	۱۵۰	۱۹۲	۱۱۷/۵	۱۷۸	۱۷۴	۱۵۳	۱۸۵	۱۴۲/۵	۱۴۲/۵	۱۴۲/۵	۱۶۴
۱۳۰	۱۷۰	۱۶۸	۱۹۳	۱۹۷/۵	۱۷۱	۱۳۷	۱۶۵	۱۳۸	۱۶۳	۱۴۲	۱۷۳	۱۶۷	۱۶۲	۱۵۱	
۱۴۳	۱۹۰	۱۷۳	۱۶۰	۱۹۷/۵	۱۵۸	۱۷۰	۲۰۵	۱۵۹	۱۷۶	۱۷۹	۱۵۷	۱۸۳	۱۶۵		

۴- چرا در عددهای تغییر یافته ۴ تا ۱۹۷/۵ وجود دارد؟ چون مقدار داده‌های این دسته ۴ تا بود

۵- با توجه به عددهای بالا، میانگین ۴۰ عدد جدید را پیدا کنید.
 $4485 \div 40 = 112,125$

چگونه برای پیدا کردن مجموع داده‌ها از ضرب استفاده می‌کنید؟ این ضرب‌ها چه رابطه‌ای با

فراوانی‌های جدول دارند؟ چون تمام داده‌های هر دسته به میانگین آن دسته (مرکز هر دسته) تبدیل می‌شود

۶- میانگین به دست آمده را با میانگین واقعی، که با ماشین حساب پیدا کردید، مقایسه کنید. مقدار خطای این روش چقدر است؟

$$112,125 - 111,975 = 0,15$$

۱۲۵

نکته: هر چه قدر طول دسته‌ها کمتر باشد خطای کمتر است

با مقایسه میانگین واقعی و این میانگین به این نتیجه می‌رسیم که اختلاف بسیار ناچیز است و با این روش می‌توانیم تقریب خوبی از میانگین واقعی داده‌ها را به دست آوریم

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته‌ها	فراوانی	حدود دسته‌ها
$5 \times (-6) = -30$	$\frac{-1 + (-9)}{2} = -6$	5	$-1 \leq x < -4$
-22	-2	11	$-4 \leq x < 0$
+34	+2	17	$0 \leq x < 4$
+72	+4	12	$4 \leq x \leq 1$
54		جمع	

$$\text{میانگین واقعی} = \frac{+30}{5} = +0,78$$

$$\text{میانگین تقریبی} = \frac{+54}{45} = +1,2$$

جواب سوال 1

کاردر کلاس



با توجه به فعالیت صفحه قبل، با کامل کردن جدول زیر میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته‌ها
$4 \times 137,5 = 548,5$	137,5	5	$130 \leq x < 145$
$7 \times 152,5 = 1067,5$	152,5	7	$145 \leq x < 160$
$14 \times 147,5 = 2065$	147,5	14	$160 \leq x < 175$
$1 \times 182,5 = 182,5$	182,5	1	$175 \leq x < 190$
$4 \times 197,5 = 790$	197,5	4	$190 \leq x < 205$
4485		جمع	

$$\text{میانگین} = \frac{4485}{30} = 149,5$$

میانگین واقعی	میانگین تقریبی	میانگین واقعی	میانگین تقریبی
$130 \leq x < 145$	4	137,5	$4 \times 137,5 = 548,5$
$145 \leq x < 160$	11	152,5	$7 \times 152,5 = 1067,5$
$160 \leq x < 175$	5	147,5	$14 \times 147,5 = 2065$
$175 \leq x < 190$	3	182,5	$1 \times 182,5 = 182,5$
$190 \leq x < 205$	7	197,5	$4 \times 197,5 = 790$
جمع	30	170	4485

تمرین

1- میانگین دمای هوا مربوط به کاردر کلاس صفحه 122 و میانگین ساعت‌های عمر

لامپ مربوط به تمرین 1 صفحه 123 را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید. **بالا**

2- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

مرکز × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	خط نشان
12	2	6	### /
24	4	4	////
10	10	8	### ///
238	14	17	### ### ### //
142	18	9	### ////
514		44	جمع

$$\text{میانگین} = \frac{514}{44} \approx 11,727$$

$$\begin{aligned} \text{میانگین واقعی} &= \frac{514}{44} = 11,727 \\ \text{میانگین تقریبی} &= \frac{4485}{30} \approx 149,5 \end{aligned}$$

نکته: زاده‌هایی که فاصله زیادی تا میانگین دارند تأثیر زیادی روی میانگین دارند
 برای مثال ۳۵ فاصله زیادی تا ۱۷۲۵ دارد و اگر آن را حذف کنیم میانگین
 به صورت محسوس اضافه می‌شود

۳- میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۰ نفره ۱۷/۲۵ شده است. یکی از دانش‌آموزان در این امتحان نمره ۳/۵ گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای ۱۵ گرفته‌اند.

الف) اگر این دانش‌آموز را از کلاس کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می‌شود؟ از این سؤال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\text{مجموع نمرات کلاس} = ۱۷۲۵ \times ۳۰$$

$$\text{مجموع نمرات} = ۲۹ \text{ نفر} = ۵۱۴$$

$$\text{نتیجه: نمرات بالای ۱۵ و پایین تأثیر زیادی روی میانگین دارند} = ۱۷۲۵ - ۲۹ = ۵۱۴$$

ب) حالا فرض کنید همه دانش‌آموزان کلاس نمره کمتر از ۱۴ گرفته‌اند؛ به جز یک نفر که ۲۰ گرفته است، معدل این کلاس ۳۰ نفره ۱۰/۲۵ شده است. اگر دانش‌آموزی را که نمره ۲۰ گرفته است کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می‌شود؟

$$\text{معدل جدید برای ۲۹ نفر} \approx ۹,۹۱ = \frac{۳۰ \times ۱۰,۲۵ - ۲۰}{۲۹}$$

خواندنی

ایده اولیه احتمال، مبتنی بر بازی‌های شانسی است. این گونه بازی‌ها از زمان‌های بسیار قدیم رایج بوده‌اند، زیرا در حفاری‌های باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده شده‌اند؛ از جمله مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهایی از ۱ تا ۶ نقش شده است.

در روزگار کنونی در مواردی که به راحتی نتوان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می‌شود. برای مثال، در شروع بازی فوتبال از پرتاب سکه استفاده می‌کنند یا برای قبول یا رد یک موضوع، از قرعه کمک می‌گیرند. همچنین بانک‌ها برای اختصاص دادن جایزه به مشتریان دارای حساب قرض‌الحسنه، از قرعه‌کشی استفاده می‌کنند.

احتمال زوج بودن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۲، ۴، ۶ : اعداد زوج

احتمال فرد آمدن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۱، ۳، ۵ : اعداد فرد

احتمال اول آمدن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۲، ۳، ۵ : اعداد اول

احتمال غیر اول آمدن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۱، ۴، ۶ : غیر اول

احتمال یا اندازه گیری شانس ابتدا در جدول آمار و احتمال هفتم تدریس شود



فعالیت اعداد اول: ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۷

است
پیش تر

۱- ده کارت هم اندازه و هم شکل داریم و روی آنها عددهای ۱۱ تا ۲۰ را نوشته ایم.

کارت ها را به پشت روی میز قرار می دهیم و به طور تصادفی، یکی از آنها را برمی داریم.

احتمال اینکه روی این کارت عددی اول باشد بیشتر است یا احتمال اینکه عددی مرکب باشد؟
چرا؟ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $>$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ احتمال اول بودن $>$ احتمال مرکب بودن



وقتی یک سکه را می اندازیم، قبل از آنکه به زمین برسد

نمی دانیم چه پیش می آید؛ یعنی روی سکه می آید یا پشت آن!

اما می دانیم که دو حالت ممکن است پیش آید: روی سکه یا

پشت سکه! از آنجا که این دو حالت مشابه اند، پس امکان اینکه

روی سکه یا پشت آن بیاید، برابر است و چون در یک حالت

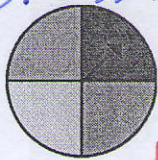
از این دو حالت ممکن، روی سکه می آید، پس احتمال اینکه

روی آن بیاید $\frac{1}{2}$ است. به همین ترتیب، احتمال اینکه پشت

سکه هم بیاید، $\frac{1}{2}$ است. (۴) احتمال هر یک از رنگ های آبی، قرمز، زرد و سبز

احتمال رو آمدن $= \frac{1}{2}$

احتمال پشت آمدن $= \frac{1}{2}$



۲- در هر یک از موارد زیر، حالت های هم شانس را بنویسید.

(الف) عقربه چرخنده را می چرخانیم.

(ب) تاسی را می اندازیم. هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هر کدام $\frac{1}{6}$

۳- معلم از دانش آموزان پرسید: «یک مهره را به طور تصادفی از کیسه ای که در آن سه مهره

سبز و یک مهره سفید است، بیرون می آوریم. چند حالت هم شانس می تواند رخ دهد؟»

احتمال اینکه مهره سبز خارج شود بیشتر تر از رنگ سفید است

بلافاصله شایان پاسخ داد: «دو حالت: سبز، سفید»

سپس علی برای آنکه بتواند پاسخ سؤال را بدهد،

مهره های سبز را شماره گذاری کرد و پاسخ داد:

«چهار حالت: سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سفید»

به نظر شما پاسخ کدام یک درست است؟ چرا؟

جواب علی درست است، حالت سبز و سفید هم شانس نیست

ولی اگر مهره ها را شماره گذاری کنیم احتمال اینکه هر کدام خارج شود

برابر است $\frac{1}{4}$ احتمال هر کدام

احتمال زرد $= \frac{3}{4}$

احتمال زرد سفید $= \frac{1}{4}$



(ب) احتمال زوج آمدن و فرد آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است
احتمال اول آمدن و غیر اول آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است

- ۴- در آزمایش مربوط به فعالیت ۱ با توجه به اینکه ۱۰ کارت داریم پس بیرون آمدن هر یک از عددهای روی کارت‌ها هم شانس هستند حالا به سؤال‌ها پاسخ دهید:
- (الف) در چند تا از آنها عدد روی کارت، اول است؟ $\frac{4}{10}$
- (ب) در چند تا از آنها عدد روی کارت، مرکب است؟ $\frac{6}{10}$
- (ج) احتمال هر یک از اتفاق‌ها (پیشامد)های زیر را پیدا کنید:
- $\frac{4}{10}$ = احتمال آنکه عدد روی کارت، اول باشد. $\frac{6}{10}$ = احتمال آنکه عدد روی کارت، مرکب باشد.

برای اینکه احتمال رخ دادن یک پیشامد را بیابیم، تعداد حالت‌های منجر به آن اتفاق را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

کارد در کلاس



- ۱- پنج توپ کوچک با شماره‌های ۱ تا ۵ را داخل یک جعبه ریخته‌ایم. احمد یکی از آنها را به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کند. قرار است اگر عدد توپ زوج بود، جایزه بگیرد. احتمال اینکه احمد جایزه بگیرد چقدر است؟ $\frac{2}{5}$ = احتمال زوج بودن
- ۲- حمید می‌داند دوستش در خرداد به دنیا آمده است اما نمی‌داند چه روزی! احتمال اینکه دوست حمید در روز ۱۵ خرداد به دنیا آمده باشد، چقدر است (خرداد ۳۱ روز دارد)؟ $\frac{1}{31}$

- ۳- برای هر یک از موارد زیر یک مثال بنویسید.
- (الف) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن صفر باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی بزرگتر از ۶ بیاید $\frac{0}{6}$**
- (ب) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی مرکب بیاید $\frac{2}{6}$**
- (ج) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن $\frac{1}{4}$ باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی زوج بیاید $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$**
- (د) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن بیشتر از $\frac{1}{4}$ باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی بزرگتر از دو بیاید $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$**
- (ه) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن یک باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی کوچک‌تر از ۷ بیاید**

عبارت زیر را بخوانید؛ درستی یا نادرستی آن را مشخص کنید و دلیل این تشخیص را

در چند جمله بنویسید.

«احتمال رخ دادن یک پیشامد برابر با صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است.» **درست**

به هیچ وجه رخ ندهد برابر صفر است
اگر حتماً رخ دهد برابر یک است
و بقیه حالت‌ها هم عددی بین صفر و یک است

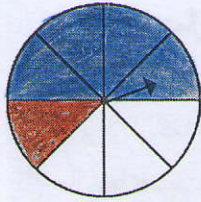
$$1 = \text{احتمال رخ ندادن آن اتفاق} + \text{احتمال رخ دادن یک اتفاق}$$

کننده سوال ۱



۱- الف) عقربه چرخنده زیر را می چرخانیم. احتمال هریک از حالت های زیر را پیدا کنید و در جدول بنویسید.

نایستد	بایستد	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	عقربه روی نارنجی
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	عقربه روی آبی
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	عقربه روی سفید



هم سانس

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$$

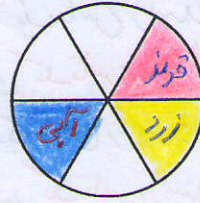
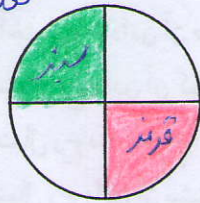
$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید. چرا حاصل جمع ها با هم برابرند؟ چون کل حالت های موجود را در بر می گیرد.
ج) احتمال رخ دادن یک پیشامد $\frac{3}{8}$ است. احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{احتمال رخ ندادن آن}$$

۲- الف) هر یک از چرخنده های زیر را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقربه روی رنگ سفید برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

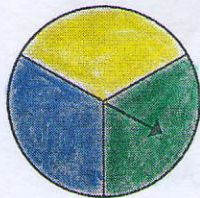
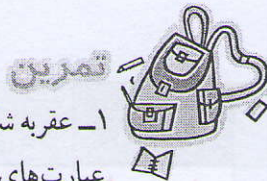
$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد قسمت های سفید}}{\text{تعداد کل قسمت ها}}$$



ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟
 $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

۳- از یک کیسه حاوی ۵ مهره، مهره ای را به طور تصادفی بیرون می آوریم. احتمال سبز بودن مهره، $\frac{3}{10}$ است.

$$\frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{15}{50} \Rightarrow \text{۱۵ مهره سبز داریم}$$



۱- عقربه شکل چرخنده روبه رو را ۳۰۰ بار می چرخانیم. عبارتهای درست را با ✓ و عبارتهای نادرست را با × مشخص کنید.

الف) عقربه ۱۰۰ بار روی زرد می ایستد. **× نادرست**

ب) انتظار داریم عقربه تقریباً ۱۰۰ بار روی آبی بایستد. **✓ درست**

ج) انتظار داریم تعداد دفعاتی که عقربه روی هر یک از این سه رنگ می ایستد، دقیقاً برابر باشد. **× نادرست**

۲- تاسی را می اندازیم؛ احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) مضرب ۵ بیاید. $\frac{1}{6}$

ب) شمارنده ۶ بیاید. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ج) ۷ یا بیشتر بیاید. **صفر**

۱, ۲, ۳, ۴

۳- سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به طور تصادفی از گردونه خارج می کنیم. احتمال هر یک از حالت‌های زیر را به دست آورید:

الف) فرد بودن عدد روی مهره $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

ب) مضرب ۵ بودن عدد روی مهره $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰

ج) اول بودن عدد روی مهره $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹

۴- احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را با توجه به چرخنده زیر به دست آورید.



الف) عقربه چرخنده روی سبز بایستد. $\frac{3}{8}$

ب) عقربه چرخنده روی آبی بایستد. $\frac{3}{8}$

ج) عقربه چرخنده روی قرمز بایستد. $\frac{2}{8}$

۵- در یک کیسه تعدادی مهره رنگی وجود دارد. می خواهیم مهره‌ای را به طور تصادفی از آن بیرون بیاوریم. می دانیم احتمال سبز بودن مهره $\frac{3}{8}$ است.

الف) احتمال سبز نبودن مهره را حساب کنید. $\frac{5}{8}$ **خبر سبز ۵ - ۳ = ۵**

ب) آیا می توانید تعداد مهره‌های درون پاکت را پیدا کنید؟ چرا؟ **خبر تعداد ۸ است (KEN)**

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم رو آمده است. فکر می کنید اگر بار پنجم آن را

ببندازیم، چه می آید؟ چرا؟ **رو یا پشت چون اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم**

احتمال رو آمدن و پشت آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است

$$S = \{ (پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر), (پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر) \}$$

بررسی حالت های ممکن

		هر دو، رو	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
در ۸۰ آزمایش	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

فعالیت $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده اند. آنها دو سکه را هم زمان می اندازند. اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می گیرد.

فکر می کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن ها با هم مساوی است؟ **خیر**
۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید.

نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب خط در جدول ثبت کنید.
نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم گروهی تان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان را بررسی کنید.

آیا نتیجه آزمایش ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می کند؟ **بله**

۳- در جدول زیر، حالت های ممکن در پرتاب دو سکه نشان داده شده است. با توجه به این جدول، احتمال امتیاز گرفتن هر کدام از بازیکن ها را محاسبه کنید.

سکه دوم سکه اول		
	رو-رو	رو-پشت
	پشت-رو	پشت-پشت

احتمال اینکه یک سکه رو بیاید و یک سکه پشت. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
احتمال اینکه هر دو سکه رو بیایند. $\frac{1}{4}$
احتمال اینکه هر دو سکه پشت بیایند. $\frac{1}{4}$

حالا دوباره به سؤال فعالیت ۱ پاسخ دهید و برای پاسختان دلیل بیاورید. **چون احتمال یک سکه رو و یکی پشت**

کار در کلاس بیاید بیشتر است و منصفانه نیست

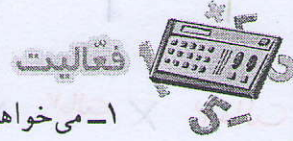
محمد می خواست یک شاخه گل رز برای مادرش و یک شاخه هم برای پدرش بخرد. در گل فروشی تعداد زیادی گل رز به رنگ های سفید، قرمز و صورتی بود.

گل مادر گل پدر	سفید	قرمز	صورتی
	سفید	س-س	س-ق
	قرمز	س-ق	ق-ق
	صورتی	س-ص	ق-ص

او دو شاخه گل را به طور تصادفی و به ترتیب برای مادر و پدرش برداشت.

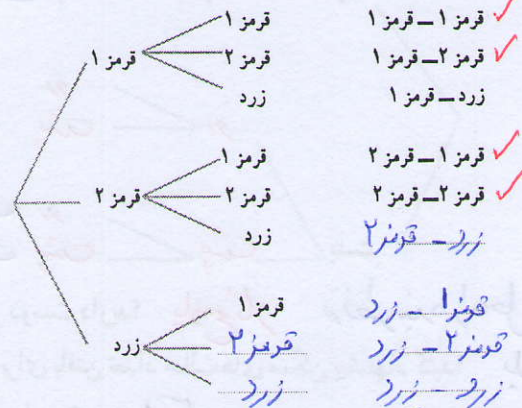
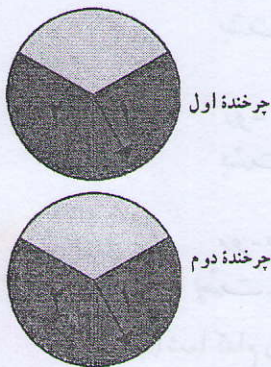
الف) همه حالت های ممکن را به کمک جدول پیدا کنید.
ب) در چند تا از این حالت ها دست کم یکی از گل ها سفید است؟

ه حالت



۱- می خواهیم عقربه های دو چرخنده زیر را بچرخانیم و رنگی را که عقربه ها روی آن می ایستند، یادداشت کنیم.

الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.



کل حالت های ممکن $3 \times 3 = 9$

$\frac{4}{9}$

ب) احتمال اینکه هر دو عقربه روی رنگ قرمز بایستند، چقدر است؟
 ۲- سه سکه را هم زمان انداختیم. پارسا و عرفان هر کدام با یک روش، همه حالت های ممکن را نوشته و تعداد حالت ها را یافته اند.
 الف) راه حل هر دو را کامل کنید.

راه حل عرفان

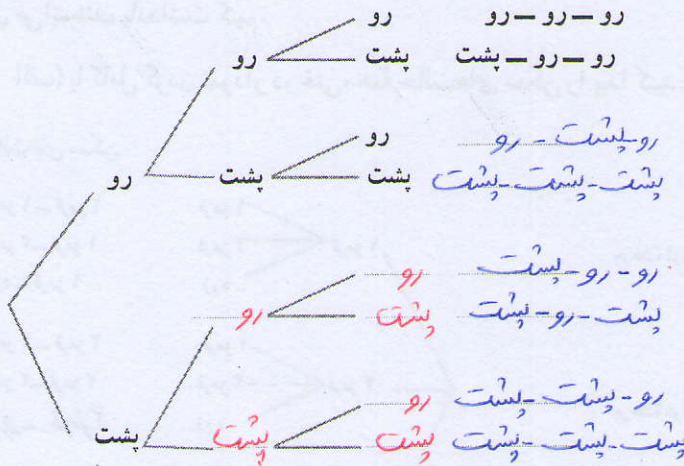
	سکه دوم			
سکه اول				
		رو - رو	رو - پشت	رو - پشت پشت - پشت
		پشت - رو	پشت - پشت	پشت - پشت پشت - پشت

۱۳۳

سکه سوم	سکه دوم	سکه اول
پشت	رو	پشت
پشت	رو	پشت
پشت	پشت	رو
پشت	پشت	پشت

راه حل پارسا

حالت های ممکن = ۸
 سکه سوم × سکه دوم × سکه اول = ۲ حالت × ۲ حالت × ۲ حالت



ب) شما کدام راه حل را بیشتر دوست دارید؟ **پارسا** یا **سرخ باز** به نظر بنده راه حل پارسا بهتر است

بالا

ج) آیا می توانید روش دیگری برای یافتن تعداد حالت های ممکن پیشنهاد کنید؟ بله

$2 \times 2 \times 2 = 8$

د) تعداد حالت های ممکن چند تا است؟ ۸

ه) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیاید، چقدر است؟ $\frac{1}{8}$

و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیاید، چقدر است؟ $\frac{3}{8}$

تمرین



۱- در یک کارخانه دو چرخه سازی دو مدل دو چرخه تولید می شود: دو چرخه جاده

و دو چرخه کوهستان. در این کارخانه هر نوع دو چرخه در سه رنگ (زرد، قرمز و آبی)

و دو اندازه (۲۴ و ۲۶) تولید می شود.

نوع دو چرخه

رنگ

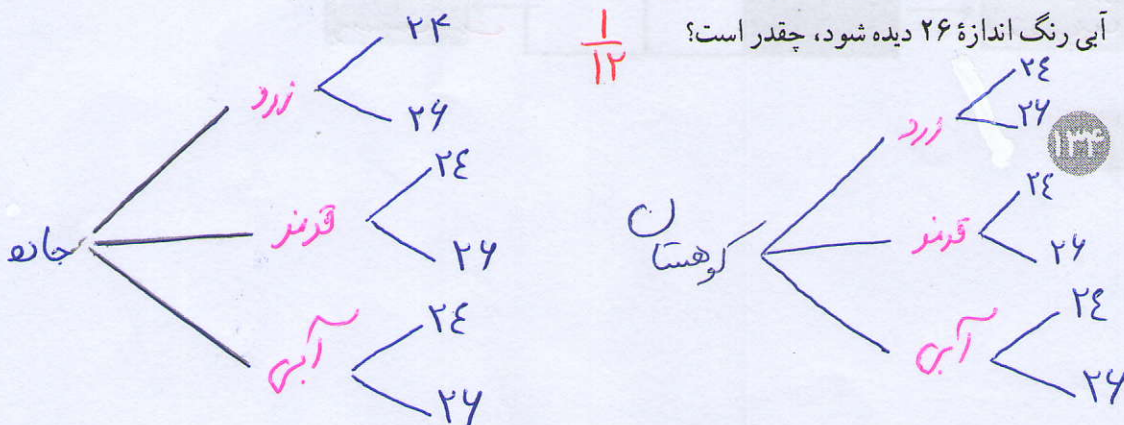
اندازه

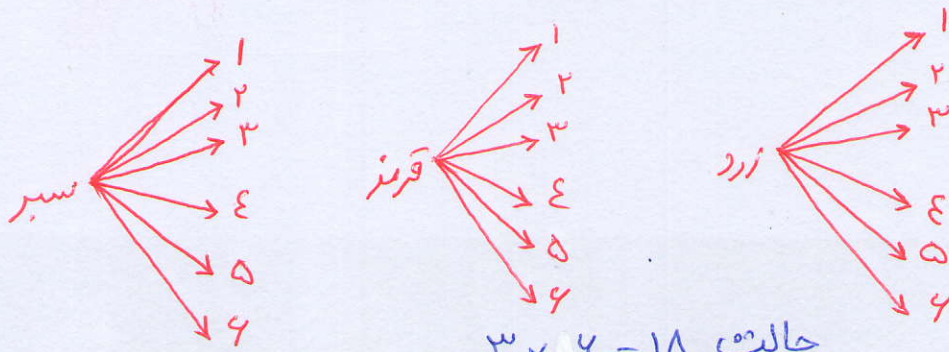
الف) چند نوع دو چرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟ $2 \times 3 \times 2 = 12$

ب) در نشریه تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دو چرخه ها آمده است. علی

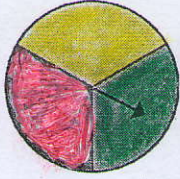
یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می کند. احتمال اینکه در این صفحه دو چرخه کوهستان

آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چقدر است؟ $\frac{1}{12}$



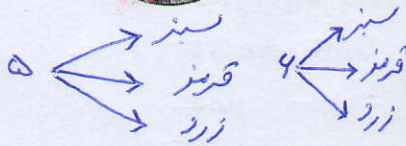
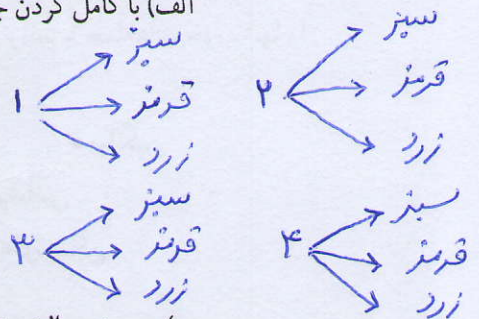


حالت $3 \times 2 = 18$



۲- عقربه چرخنده مقابل را می چرخانیم و تاسی را می اندازیم.
الف) با کامل کردن جدول، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.

تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
چرخنده						
سبز						
قرمز						
زرد						



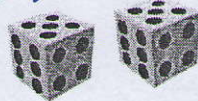
ب) در چند حالت عقربه روی قرمز ایستاده است و تاس عددی زوج را نشان می دهد؟ سه حالت

(قرمز، ۲)، (قرمز، ۴) و (قرمز، ۶)

۳- قفلی داریم که رمز آن عددی یک رقمی است. (این رقم می تواند ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد.)

الف) احتمال اینکه با یک حدس بتوانیم رمز قفل را پیدا کنیم، چقدر است؟ $\frac{1}{10}$

ب) اگر یک رقم دیگر به رمز اضافه کنیم، این احتمال چه تغییری می کند؟
کم تر می شود
نکته: رمز دورقی شود



۴- دو تاس را می اندازیم:

نکته: در قسمت دوم حالت

حالت $4 \times 4 = 36$

پاسخ

الف) با رسم جدول مناسب، همه ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه یکی از تاس ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟ $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟ $\frac{1}{36}$

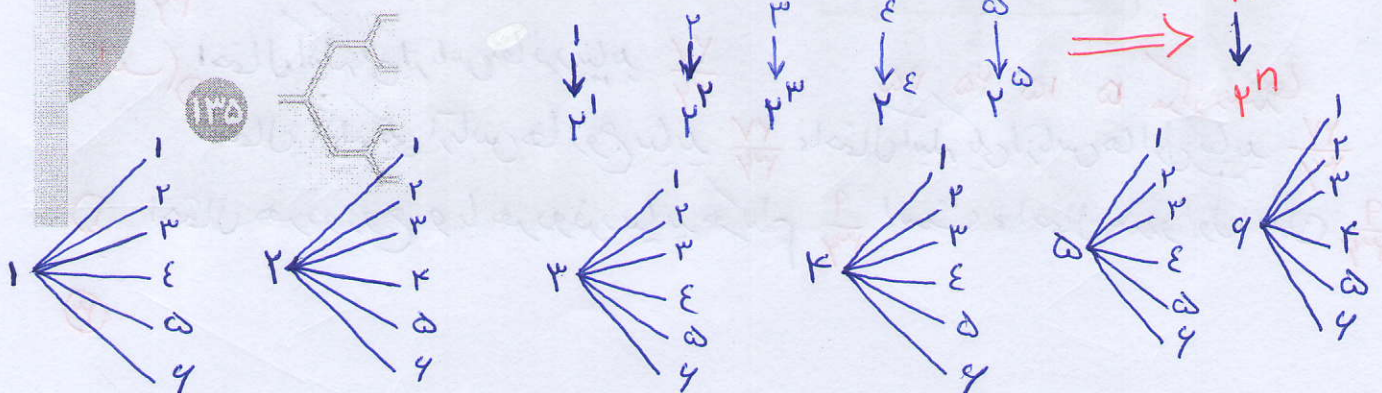
د) پاسخ قسمت های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوتشان را بنویسید.

در قسمت ب دو حالت و در قسمت ج یک حالت ممکن است اتفاق بیفتد

۵- دو سکه را می اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟ $\frac{3}{4}$

۶- لوله های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دوشاخه می شوند.

پس از طی کردن ۵ قسمت چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان دار نشان دهید. $2^5 = 32$



مرور فصل ۸

مناهییم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- دسته‌بندی داده‌ها
- مرکز دسته
- فراوانی
- میانگین
- آمار
- احتمال
- نمودار درختی
- حالت‌های هم‌شانس
- جدول حالت‌های ممکن

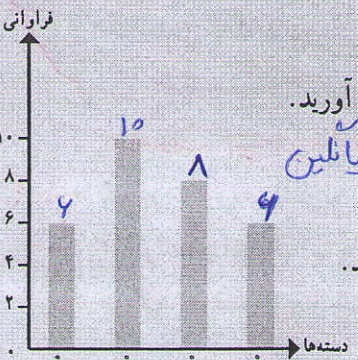
در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- دسته‌بندی داده‌های زیاد و پراکنده
- محاسبه میانگین داده‌های دسته‌بندی شده
- پیدا کردن احتمال یک پیشامد
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک جدول
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک نمودار درختی

کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادهایی چون بارندگی، سیل و بارش برف را پیش‌بینی کنیم.

تسرین‌های ترکیبی



۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده‌ها را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۳۰ + ۱۵۰ + ۲۰۰ + ۲۱۰}{۳۰} = \frac{۵۹۰}{۳۰} \approx ۱۹.۶$$

۲- دو تاس را می‌اندازیم. الف) تعداد حالت‌های هم‌شانس ممکن را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه هر دو تاس ۱ بیاید، چقدر است؟ $\rightarrow \frac{۱}{۳۶}$

۳۶ حالت هم‌شانس \Rightarrow

الف) احتمال اینکه یکی از تاس‌ها فرد بیاید $\frac{۲۷}{۳۶}$ ، احتمال اینکه یکی از تاس‌ها اول بیاید $\frac{۲۷}{۳۶}$

ب) احتمال هر دو زوج و یا هر دو فرد بیاید هر کدام $\frac{۹}{۳۶}$ است، احتمال هر دو اول آمدن $\frac{۹}{۳۶}$