1- فرض کنید که الگوریتم Floyd بگونه ای اصلاح شده که علاوه بر تعیین طول کوتاهترین مسیر بین هر دو راس یک گرافِ یک ماتریس بنام Path تولید میکند که اگر Path[i,j]=0 باشد یعنی اینکه کوتاهترین مسیر از راس i به راس j شامل هیچ راس بینی نمیباشد و چنانچه Path [i,j]= K (K is not Zero) باشد بدین معنی است که راس K روی کوتاهترین مسیر از i به j قرار دارد.
الگوریتمی بازگشتی بنام Print-Shortest-Path(Path , i , j) (با روش D&C) بنویسید که رئوس کوتاهترین مسیر از i به j را به توالی و ترتیب درمعنی از راس مبدا i به راس مقصد j چاپ نماید.

2- فقط به یکی از چهار قسمت ذیل به اختیار پاسخ دهید :

الف) بطور دقیق شرح دهید که ماتریس Path در سوال (1) چگونه میتواند با اصلاح الگوریتم Floyd بدست آید.

ب) مسئله‌ء TSP یا Floyd را برای گرافی که ماتریس وزنی آن در ذیل داده شده است حل نمایید.

$$cost = \begin{pmatrix} \infty & 12 & 8 & 9 \\ 15 & \infty & 10 & 11 \\ 7 & 13 & \infty & 20 \\ 4 & 9 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

ج) بالتصاد توضیح دهید که چگونه با اصلاح الگوریتم DP ارائه شده برای مسئله‌ء TSP میتوان آن را از نظر زمانی بهتر کرد (توضیح : شمای درختی مسئله را در نظر گرفته و سعی کنید که از حل برخی زیر مسائل جلوگیری نمایید)

د) الگوریتم Quicksort را به صورت غیر بازگشتی بنویسید.

3- تنها به یکی از دو قسمت (الف) یا (ب) باختیار پاسخ دهید:

الف) در یک گراف N گره یا راس با شماره های 1 تا N وجود دارد. از هر گره i به تعدادی گره هایی که شماره‌ءِ آنها از i بزرگتر است یک یال (edge) وجود دارد. با استفاده از روش Dynamic programming راه حلی برای پیداکردن تعداد مسیر های ممکن از گره 1 به گره N بدست آورید. (آنالیز زمانی راه حل خود را ارائه دهید)

ب) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید که آرایه‌ء A را از اندیس I تا J بطور صعودی مرتب میکند:

```
STOOGE-SORT ( A , I , J ) {
IF ( A[I] > A[J] ) then Exchange ( A[I],A[J] )
IF ( J - I + 1 <= 2 ) then RETURN
K = FLOOR ( ( J - I + 1 ) / 3 ).
STOOGE-SORT ( A , I , J - K );
STOOGE-SORT ( A , I + K , J );
STOOGE-SORT ( A , I , J - K ); }
```

*) با استفاده از recursive call tree عملکرد الگوریتم را روی یک آرایه‌ء 6 عنصری دلخواه نشان دهید.

**) تعداد Exchange های انجام شده بازای اجرا روی یک آرایه‌ء 10 عنصری بدست آورید.

***) آنالیز زمانی الگوریتم را با نماد Θ روی یک آرایه‌ء N عنصری بدست آورید.

4) سوال اختیاری : در صورت پاسخ نمره‌ء آن 1 عمال میشود: (نکته: $131072 = 2^{17}$)

کامپیوتری در واحد زمان مسئله ای باندازه‌ء 16 را که الگوریتم آن از مرتبه‌ء زمانی 2^n است حل میکند اگر سرعت کامپیوتر 131072 برابر گردد این کامپیوتر همان مسئله را با چه اندازه ای در واحد زمان حل میکند ؟

۸۸/۴/۴

طراحی الگوریتم

۱- با استفاده از روش D&C الگوریتمی بنویسید که وجود خاصیت جستجوی دودویی را در یک درخت دودویی تشخیص دهد.

Boolean IS_BST(R)

R: ریشه درخت

آیا درخت داده شده یک BST است یا خیر؟

۲- تنها به یکی از ۴ قسمت زیر پاسخ دهید:

$A_{5\times11} \times B_{11\times3} \times C_{3\times8} \times D_{8\times4}$

الف) سفارش بهینه ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها را برای ضرب مقابل حل نمایید.

ب) مطلوب است LCS(X,Y) برای دو رشته X و Y

X: a b b a b a b b a

Y: b a b b a b

ج) نشان دهید که در الگوریتم Floyd می‌توان اندیس k را از فضای حافظه حذف کرد و پیچیدگی حافظه‌ی الگوریتم از $\Theta(n^3)$ به $\Theta(n^2)$ کاهش می‌یابد.

$$A^k_{ij} = \min\{A^{k-1}_{ij},\ A^{k-1}_{ik} + A^{k-1}_{kj}\}$$

د) برای پیدا کردن طولانی‌ترین زیردنباله صعودی از یک دنباله عددی، بدون استفاده از LCS یک راه حل DP مستقل ارائه کنید.

۳- فرض کنید آرایه A[p..q-1] بطور صعودی مرتب است اما عنصر Aq (احتمالاً) لزوماً A[p..q] مرتب صعودی نیست. الگوریتم onesort به گونه‌ای عمل می‌کند که در پایان Aq در مکان مناسبی قرار گرفته، A[p..q] مرتب صعودی شود. یک آرایه A عضوی (فرض بر اعداد درست) را به عنوان ورودی در نظر گرفته و الگوریتم sort را بطوری بنویسید که آرایه A را مرتب کند.

الف) بازای p=1 و q=8=9 درخت فراخوانهای بازگشتی را برای یک آرایه A عضوی (فرض بر اعداد درست) رسم کنید.

ب) تعداد swapهای انجام شده برای قسمت (الف) را بدست آورید.

ج) پیچیدگی زمانی الگوریتم فوق را بنویسید.

(فقط از الگوریتم onesort استفاده کنید)

```
void onesort(A,p,q)
{
  if(p>=q) return;
  m=⌊(p+q)/2⌋;
  if(A[q]<A[m]) {
    swap(A[m],A[q]);
    onesort(A,p,m);
  }
  onesort(A,m+1,q);
}
```

موفق باشید

(شاداب)