توجه: سری با علامت + و - یک در میان

سری‌های متناوب: یک سری که علامات آن به تناوب + و - باشند را متناوب می‌نویسیم.

یعنی اگر برای هر n ، $a_n \geq 0$ بوده و داشته باشیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad \text{یا} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

آزمون سری‌های متناوب. هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله اکیداً نزولی از اعداد مثبت باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

آنگاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ همگرا است.

- مثال: $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ یک سری متناوب نیست.
- مثال: آزمون فوق برای سری متناوب $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$ کاربرد ندارد زیرا $\{a_n\}$ در آن مثبت با حد بی‌نهایت صفر است، همچنین نزولی است اما اکیداً نزولی نیست.

(اثبات همگرایی آن با مجموع جزئی به عهده شما)

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

$\left\{\frac{1}{n!}\right\} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ و اکیداً نزولی و مثبت ⇐ طبق آزمون سری متناوب همگرا (مطلق) ■

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ و اکیداً نزولی و مثبت ⇐ طبق آزمون سری متناوب همگرا (مشروط) ■

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

$\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\right\} \to \lim_{n\to\infty} = 0$ و اکیداً نزولی و مثبت ⇐ طبق آزمون سری متناوب همگرا است. ■

Scanned by CamScanner

همگرایی مطلق و مشروط : (ارتباط بین سری‌ها با جملات "بدون علامت" علامت "برابر و علامت‌های متناوب)

* سری $\sum a_n$ را یک سری مطلقاً "همگرا" گوییم هرگاه $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

* سری $\sum a_n$ را همگرای مشروط نامند هرگاه همگرا باشد ولی مطلقاً "همگرا" نباشد.

قضیه (همگرایی مطلق، همگرایی را ایجاب می‌کند) : $\sum |a_n|$ همگرا $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ همگرا .

نکته مهم : همگرایی، همگرایی مطلق را نتیجه نمی‌دهد.

حالت‌های متفاوت :

	$\sum \lvert a_n \rvert$	$\sum a_n$	
(همگرای مطلق و قضیه)	همگرا $\Rightarrow$	همگرا	(مثال الف)
—	~~همگرا~~	~~واگرا~~ $\rightarrow$ غیرممکن (قضیه)	
(همگرای مشروط)	واگرا	همگرا	(مثال ب)
—	واگرا	واگرا	(مثال ج)

مثال الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ همگرای مطلق است زیرا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| = \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \ \& \ |r| = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$$ سری هندسی و همگرا $\Leftarrow$ همگرای مطلق

$\Leftarrow$ توجه کنید که خود سری $\sum \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ، سری هندسی با $|r| = \frac{2}{3} < 1$ و همگراست.

مثال ب) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مشروط است زیرا :

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n} \Rightarrow$ توافقی $\Rightarrow$ واگرا

$\sum \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$ طبق صفحه قبل سری تناوب $\Rightarrow$ همگرا

$\Rightarrow$ همگرای مشروط.

مثال ج) $\sum (-n)$ و $\sum |-n| = \sum n$ هر دو واگرایند زیرا :

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \pm n = \pm\infty \neq 0 \Rightarrow$ واگرا $\Leftarrow$ ندارند شرط لازم همگرایی را نمی‌باشند

Scanned by CamScanner

مثال: همگرایی مطلق یا مشروط و یا واگرایی توابع زیر را بررسی نمائید.

* $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \sum \frac{1}{n!}$ همگراست (برعهده شما) $\Rightarrow$ همگرای مطلق

* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$

✓ $\sum \left|(-1)^n \frac{1}{n^p}\right| = \sum \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{همگرا} & p>1 \\ \text{واگرا} & p \leq 1 \end{cases}$ طبق p-سری

✓ $\sum (-1)^n \frac{1}{n^p} \Rightarrow$ سری متناوب $\Rightarrow \begin{cases} \text{مثبت \& الزاماً نزولی}: \left\{\frac{1}{n^p}\right\} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ همگرا

پس: سری فوق برای $p>1$ همگرای مطلق و $\longrightarrow$ (هر دو همگرا)

برای $0<p<1$ همگرای مشروط است. $\longleftarrow$ (قدر مطلق واگرا و اصلی آن همگرا)

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \Rightarrow$ طبق آزمون انتگرال (شرایط برعهده شما)

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx \xrightarrow[du=\frac{dx}{x}]{u=\ln x} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} \Rightarrow$ با $p=2$ انتگرال نوع اول p $\Rightarrow$ همگرا

پس سری مثبت شده همگرا پس کل سری سؤال همگرای مطلق است.

Scanned by CamScanner

-و+

آزمون نسبت (دالامبر): فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد بطوری که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{(L می‌تواند ∞ نیز باشد)}$$

در این صورت:

الف) سری به طور مطلق همگراست هرگاه $0 \le L < 1$

ب) " واگراست هرگاه $1 < L \le \infty$

*) آزمون برای $L=1$ پاسخ نمی‌دهد.

$$* \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = 0$$

به طور مطلق همگراست.

$$* \sum (-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)^n\cancel{(n+1)}}$$

$$= \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{همگرای مطلق}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}}$$

تمرین * $\sum \frac{n^n}{n!} \to$ واگرا

$$* \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}\underbrace{((n+1)\cancel{n!})^2}_{(n+1)^2}} = 4 \Rightarrow \text{واگرا}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2} = 4 > 1$$

واگرا

۶

Scanned by CamScanner

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی نمائید.

* $\sum \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3\times 6\times 9\times\cdots\times 3n}$

از آزمون نسبت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{\cancel{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}(2n+1)}{\cancel{3\times 6\times 9\times\cdots\times 3n}\times 3(n+1)}}{\dfrac{\cancel{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}}{\cancel{3\times 6\times 9\times\cdots\times 3n}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+3} = \dfrac{2}{3} < 1$

سری به طور مطلق همگراست.

* $\sum \dfrac{n!}{n^n}\left(\dfrac{19}{7}\right)^n$

از آزمون نسبت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\left(\dfrac{19}{7}\right)^{n+1}}{\dfrac{n!}{n^n}\left(\dfrac{19}{7}\right)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19}{7}\,\dfrac{n^n\,\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n\cancel{+1}}}$

$= \dfrac{19}{7}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{19}{7}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}$

$= \dfrac{19}{7}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \dfrac{19}{7}e^{-1} = \dfrac{19}{7e} \approx \dfrac{19}{19{,}026} < 1 \Rightarrow$ به طور مطلق همگرا.

یادآوری: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$

$a=1$
$b=-1$

$\begin{array}{r} 2{,}718 \\ \times\ 7 \\ \hline 19{,}026 \end{array}$ تا $\begin{array}{r} 2{,}71 \\ \times\ 7 \\ \hline 18{,}97 \end{array}$

Scanned by CamScanner

۷۸/۱۹۷

نکته:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

&

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

آزمون ریشه (کشی): فرض کنیم $\sum a_n$ چنان باشد بطوری که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

(ℓ می‌تواند ∞ نیز باشد)

در این صورت:

الف) سری به طور مطلق همگراست هرگاه $0 \le \ell < 1$

ب) سری واگراست هرگاه $1 < \ell \le \infty$

* آزمون برای $\ell = 1$ به نتیجه نمی‌رسد.

مثال:

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \Rightarrow$ همگرای مطلق

* $\sum \frac{n}{3^n} \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$ همگرا

* $\sum \frac{2^n}{n^2} \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = 2 > 1 \to$ واگرا

$\to$ طبق نسبت $= 2 > 1 \to$ واگرا

$\to$ حد جمله عمومی با قانون هوپیتال: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \overset{H}{=} \lim \frac{2^n \ln 2}{2n} \overset{H}{=} \dots = \infty \neq 0 \Rightarrow$ واگرا

تمرین * $\sum \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \to$ همگرا

Scanned by CamScanner

مثال* همگرایی یا واگرایی سری‌های $\sum \frac{1}{n}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ را بررسی نمائید.

الف) آزمون نسبت $\sum \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1$ بدون پاسخ

آزمون ریشه $\sum \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ بدون پاسخ

درحالیکه می‌دانیم سری توافقی $\sum \frac{1}{n}$ واگراست.

ب) آزمون ریشه $\sum \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$ بدون پاسخ

آزمون نسبت $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ بدون پاسخ

درحالیکه می‌دانیم $\sum \frac{1}{n^2}$ یک p-سری با $p=2>1$ وهمگراست.

لذا نمی‌توان هنگام داشتن پاسخ «یک» نتیجه‌ای درخصوص همگرایی یا واگرایی سری گرفت.