

حد و پیوستگی

حالت ابهام نمایی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

حاصل حد زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e}{x^2}$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: در حد نمایی، بهترین راه حل در نظر گرفتن عبارت دارای توان به عنوان یک تابع مانند y است. سپس از دو طرف معادله لگاریتم گرفته شود:

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

در این حالت می توان حالت ابهام حد فوق را هم بدست آورد. سری تیلور برای تابع $\ln|1+u|$ وقتی $u \rightarrow 0$ باشد، به صورت زیر است:

$$\ln|1+u| \sim u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots$$

با جایگذاری $u = x^2$ و ساده کردن مقدار $\ln y$ عبارت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \ln y &= \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots \end{aligned}$$

حد عبارت فوق وقتی $x \rightarrow 0$ برابر با 1 است.

$$\ln y = 1, \quad \Rightarrow \quad y = e$$

تاکنون متوجه شدیم حد داده شده دارای حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است!

برای حل این نوع حد، یکی از راهها استفاده از هوپیتال است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e}{x^2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{2x}$$

اکنون باید مقدار y' تعیین شود. این موضوع در قسمت قبل مشخص شده است.

$$\ln y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots, \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -x + \frac{4}{3}x^3 - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y' = \lim_{x \rightarrow 0} y(-x + \frac{4}{3}x^3 - \dots) = 0$$

همچنان حالت ابهام وجود دارد. پس باید دوباره هوییتال استفاده شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e}{x^2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{2x} \\ \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''}{2}$$

باید مقدار y'' تعیین شود.

$$\frac{y'}{y} = -x + \frac{4}{3}x^3 - \dots, \Rightarrow \frac{y''y - y'^2}{y^2} = -1 + 4x^2 - \dots$$

با توجه به مقدار حدی $y = e$ و $y' = 0$ مقدار مشتق دوم در رابطه فوق وقتی $x \rightarrow 0$ به صورت زیر است:

$$y'' = -e$$

در نهایت مقدار حد بدست می آید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''}{2} = -\frac{e}{2}$$

۳ مسائل مشابه

مقدار حد زیر کدام است؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{2} \right)^n$$

(ارشد مکانیزاسیون ۱۴۰۰)

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) ۱۲

(۳) ۶

پاسخ: عبارت نمایی، تابع y در نظر گرفته می شود. سپس لگاریتم دو طرف محاسبه می گردد: 

$$\ln y = n \ln \left(\frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{2} \right) = \frac{\ln(3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}) - \ln 2}{\frac{1}{n}}$$

حد عبارت فوق وقتی $n \rightarrow +\infty$ برابر با حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌گردد که با هوییتال رفع ابهام می‌شود.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}) - \ln 2}{\frac{1}{n}} &\stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}(\ln 3)3^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n^2}(\ln 4)4^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln 3)3^{\frac{1}{n}} + (\ln 4)4^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\ln 3 + \ln 4}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 12 \\ &= \ln \sqrt{12} \end{aligned}$$

حاصل حد فوق در واقع مقدار $\ln y$ بوده است.

$$\ln y = \ln \sqrt{12}, \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{12}$$

گزینه ۲ صحیح است.

پاداش‌های بزرگ از طریق انتفاع‌های
کوچک و هوشمندانه پدید می‌آیند.
دارن هاردی



 AvaEducation16.blog.ir

   @AvaEducation16

 AvaEducation16@gmail.com

 @AvaEducation16

  0935 210 4321