



MPSO: الگوریتمی جهت یافتن بهینه سراسری در مسائل پیچیده

حمید بیگی

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی کامپیوتر

حسین ثامتی

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی کامپیوتر

هدیه ساجدی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی کامپیوتر
A_sajedi@ce.sharif.edu

اجزاء فراهم شده و در نتیجه ناحیه وسیعتری از فضای راه حل مورد جستجو قرار می‌گیرد. جهت بررسی چگونگی عملکرد روش ارائه شده آزمایشات مختلفی بر روی توابع پایه‌ای که جهت سنجش قدرت روش‌ها در یافتن بهینه سراسری مورد استفاده قرار می‌گیرند، انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که در فرآیند جستجوی راه حل مساله به ویژه در مسائل پیچیده، احتمال رسیدن به بهینه سراسری در مقایسه با الگوریتم PSO پایه افزایش می‌یابد.

مدل مخفی مارکوف^۳ ابزاری برای تحلیل دنباله‌های زمانی است. الگوریتمهای کارایی با معیار بیشترین میزان شباهت (ML)^۴، جهت یافتن پارامترهای مدل مخفی مارکوف وجود دارد که عموماً به تنظیمات اولیه پارامترها حساس بوده و اغلب به بهینه‌ی محلی همگرا می‌شوند. در این تحقیق، با استفاده از الگوریتم MPSO که نشان داده می‌شود قابلیت جستجوی بهینه سراسری را دارا است، پارامترهای مدل مخفی مارکوف جهت بازشناسی گفتار تخمین زده می‌شود. سپس کارایی الگوریتم MPSO در مقایسه با الگوریتم PSO در این کاربرد ارزیابی می‌شود. در بهترین نتیجه‌ی حاصل شده از الگوریتم MPSO، درصد خطای بازشناسی برای هر واحد بازشناسی نسبت به الگوریتمهای مبتنی بر بیشترین میزان شباهت، ۴۸۳٪ کاهش یافته است. این بهبود با استفاده از الگوریتم PSO ۳.۳۶٪ است [1].

در بخش دوم، الگوریتم PSO شرح داده می‌شود و در بخش سوم الگوریتم MPSO ارائه خواهد شد. در بخش چهارم چگونگی پیاده‌سازی الگوریتم MPSO جهت آموزش HMM شرح داده می‌شود. بخش پنجم به بررسی آزمایشات انجام شده و نتایج آنها می‌پردازد و در بخش ششم جمع‌بندی ارائه شده است.

۲- الگوریتم PSO

الگوریتم PSO شامل گروهی از اجزاء است که در یک فضای جستجوی چند بعدی با مقادیر حقیقی از راه‌حلهای ممکن مساله، حرکت می‌کنند. PSO به سادگی قابل پیاده‌سازی است و از دیدگاه محاسباتی کم هزینه است [4]. همچنین PSO برای حل بسیاری از مسائل GO کارا است و در برخی موارد به مشکلاتی که بر دیگر تکنیک‌های محاسبات تکاملی وارد است، دچار نمی‌شود [5]. دشواری تنظیم پارامترهای PSO برای رسیدن به کارایی خوب از معایب این روش است

چکیده: الگوریتم PSO یک روش هوش گروهي برای حل مسائل بهینه سازی سراسری است. در PSO هر کاندید راه حل، موقعیت خود را در فضای جستجو با توجه به تجربیات خود و تجربیات کل گروه راه حل‌های کاندید، تغییر می‌دهد. در این مقاله مدلی از الگوریتم PSO ارائه می‌شود که در آن یک گروه به چندین زیر گروه تقسیم می‌شود و علاوه بر بهترین حالت هر جزء و بهترین حالت کل گروه، بهترین حالت هر زیرگروه نیز در حرکت تک تک اجزاء اثر می‌گذارد. آزمایشات انجام شده برای یافتن بهینه سراسری چندین نمونه تابع با تعداد زیاد بهینه محلی و سراسری، کارایی بهتر این روش را در مقایسه با PSO نشان می‌دهد. همچنین نتایج آزمایشات بکارگیری الگوریتم MPSO در روند آموزش مدل مخفی مارکوف (HMM) یک سیستم بازشناسی گفتار نشان می‌دهد که با استفاده از این روش، خطای بازشناسی نسبت به استفاده از روشهای مبتنی بر بیشترین میزان شباهت، ۴۸۳ درصد کاهش یافته است.

کلمات کلیدی: الگوریتم PSO، مدل مخفی مارکوف، بهینه سازی، بهینه سراسری

۱- مقدمه

الگوریتم PSO^۱ یک روش پردازش تکاملی جهت بهینه‌سازی توابع غیرخطی است که بر مبنای رفتار اجتماعی پرندگان ارائه شده است [2]. PSO از یک سو به حیات مصنوعی^۲ و از سوی دیگر به الگوریتم‌های پردازش تکاملی مرتبط است. سادگی پیاده سازی، مقیاس پذیری در ابعاد و کارایی خوب تجربی از ویژگی‌های مطلوب PSO هستند. PSO شامل اجزائی است که دانش خود را از فضای جستجو مرتباً اصلاح می‌کنند. اجزاء در PSO با بردار موقعیت و سرعتشان متمایز می‌شوند و جستجو با جذب اجزاء بسوی مکانهایی با راه‌حلهای خوب، انجام می‌شود [2]. در نسخه اصلی PSO، هر جزء با دو اجبار حرکت می‌کند، یکی جذب با به بهترین حالتی که جزء تاکنون داشته است و دیگری جذب به بهترین موقعیتی که توسط گروه کسب شده است.

در این مقاله مدلی از الگوریتم PSO ارائه می‌شود که در آن یک گروه به چندین زیر گروه تقسیم می‌شود و علاوه بر بهترین حالت هر جزء و بهترین حالت کل گروه، بهترین حالت هر زیرگروه نیز در حرکت تک تک اجزاء اثر می‌گذارد. به این ترتیب آزادی عمل بیشتری برای

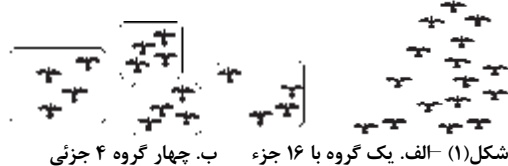
گیری از همگرایی زودرس مسائل بهینه سازی پیچیده است. در [8] الگوریتم PSO تغییر یافته ای ارائه شده است که معیاری برای درجه گوناگونی هر فرد تعریف می کند و جذب یا دفع هر جزء با توجه به میزان گوناگونی صورت می پذیرد. نسخه DPSO نیز برای حفظ گوناگونی در [9] ارائه شده است. این الگوریتم جهشی تصادفی را روی x_{iid} با احتمال کوچک c_1 اعمال می کند. این احتمال نباید چنان بزرگ باشد که باعث بر هم زدن سازماندهی گروه شود. با الهام گرفتن از مراحل چرخه زندگی در طبیعت، یک روش ترکیبی بنام مدل چرخه حیات^۵ در [10] ارائه شده است. این مدل از الگوریتم ژنتیکی، PSO و الگوریتم تپه نوردی^۶ استفاده می کند تا هیوریستیکی ایجاد کند که بصورت عمومی به خوبی جستجو کند. در تحقیقی که در [11] انجام شده است نشان داده می شود که PSO با استراتژی تولید مثل، پتانسیل دستیابی به همگرایی سریعتر و یافتن راه حل بهتر را دارا است.

۳- الگوریتم MPSO

تغییر الگوریتم PSO چنانکه سه نوع بهترین موقعیت در فضای چند گروهی در نظر گرفته شود، می تواند سرعت رسیدن به همگرایی را افزایش بخشیده و همچنین از همگرایی زودرس جلوگیری نماید. به علاوه به دلیل اینکه یک گروه با تعداد اجزاء زیاد به تعدادی گروه کوچکتر با تعداد اجزاء کمتر تبدیل می شود و جستجو در هر یک از گروهها با وجود وابستگی به gbest بطور مستقل انجام می شود لذا فضای جستجو با اکتشاف بیشتری مورد جستجو قرار می گیرد و امکان یافتن راهلهای بهتر افزایش می یابد. در هر تکرار الگوریتم، حرکت هر فرد با توجه به بهترین موقعیتی که خود آن فرد تاکنون داشته است (pbest)، بهترین موقعیت اجزاء گروهی که فرد عضو آن است و بهترین موقعیتی که تاکنون توسط کل اجزاء گروهها به وجود آمده است و در واقع بهترین gbest در کل جمعیت می باشد (mbest) انجام می پذیرد. رابطه بردار سرعت اجزاء در MPSO بصورت رابطه (۳) تعریف می شود.

$$v_{t+1} = w_t \cdot v_t + c_1 \cdot \text{rand}()(\text{pbest} - \text{present}_t) + c_2 \cdot \text{rand}()(\text{gbest} - \text{present}_t) + c_3 \cdot \text{rand}()(\text{mbest} - \text{present}_t) \quad (3)$$

شکل (۱الف) یک گروه PSO با ۱۶ جزء را نشان می دهد. حالت قابل مقایسه در MPSO با چهار گروه چهار جزئی در شکل (۱ب) نمایش داده می شود.



و در صورت عدم انتخاب مناسب پارامترها، PSO به سوی بهینه محلی متمایل شده و دچار همگرایی زودرس می شود [4].

در PSO، هر جواب، یک پرنده در فضای جستجو است که آن را «فرد یا جزء» (particle) می نامند. به عبارت دیگر، یک جزء نقطه ای در فضای جستجوی چند بعدی است که در آن فضا به جستجوی موقعیت بهینه پرداخته می شود. در ابتدا PSO توسط یک گروه از اجزاء که به طور تصادفی تولید شده اند مقداردهی می شود و جستجو برای پیدا کردن جواب بهینه آغاز می گردد. در هر تکرار از الگوریتم، هر جزء موقعیت بعدی خود در فضای جستجو را با توجه به دو مقدار تغییر می دهد؛ یکی بهترین موقعیتی است که خود تاکنون داشته است (pbest) و دیگری بهترین موقعیتی که تاکنون توسط کل اجزاء گروه به وجود آمده است و در واقع بهترین pbest در گروه است (gbest). با توجه به مقادیر pbest و gbest، هر جزء از روابط (۱) و (۲) برای تعیین موقعیت بعدی خود استفاده می کند:

$$v_{t+1} = w_t \cdot v_t + c_1 \cdot \text{rand}()(\text{pbest} - \text{present}_t) + c_2 \cdot \text{rand}()(\text{gbest} - \text{present}_t) \quad (1)$$

$$\text{present}_{t+1} = \text{present}_t + v_{t+1} \quad (2)$$

در رابطه (۱) c_1 و c_2 پارامترهای یادگیری هستند. $\text{rand}()$ تابعی برای تولید اعداد تصادفی در محدوده [0,1] است. present_t موقعیت فعلی و v_t سرعت حرکت جزء می باشد. w_t یک پارامتر کنترلی است که تأثیر سرعت فعلی (v_t) را بر سرعت بعدی کنترل می کند و حالت تعادلی بین توانایی الگوریتم در جستجو به صورت محلی و سراسری ایجاد می نماید [6].

۲-۱- مروری بر نسخه های گسترش یافته PSO

مدل ساده PSO در مسائل دشوار، کارا عمل نموده است. انواع مختلفی از الگوریتم PSO مورد آزمایش قرار گرفته است و با روشهای موجود در کاربردهای متفاوت مقایسه شده است. در [7] امکان محدود کردن ارتباطات اجزاء را با تولید یک توپولوژی همسایگی بررسی می شود. ایده این روش این است که بهترین موقعیت یافت شده، آهسته تر بر روی اجزاء دیگر اثر گذارد، طوری که اجزاء تنها با همسایگان خود در توپولوژی تبادل اطلاعات نمایند. نتایج نشان داده است که توپولوژی ستاره عموماً مناسب است. اما به طور کلی انتخاب یک توپولوژی بهینه به مساله وابسته است. اینگونه از الگوریتم PSO با محدود کردن تبادل اطلاعات میان اجزاء گوناگونی راه حلها را کاهش می دهد.

الگوریتم بهینه سازی PSO در مسائل مشهور عددی کارایی خوبی داشته است. اما در مسائل پیچیده، PSO دچار همگرایی زودرس می شود. علت این مساله کاهش گوناگونی راه حلها در فضای جستجو است. بالا نگه داشتن گوناگونی جوابهای مساله امری ضروری در جلو-

$$f(x) = [-13 + x_1 + ((5 - x_x)x_2 - 2)x_2]^2 + [-29 + x_1 + ((x_2 + 1)x_2 - 14)x_2]^2 \quad (۶)$$

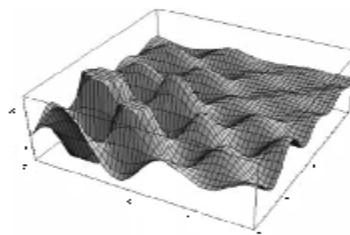
جدول (۱): مقایسه نتایج یافتن بهینه سراسری توابع Levy.3 و Levy.5

Levy No.3		Levy No.5		تعداد اجزاء	الگوریتم
میانگین	% موفقیت	میانگین	% موفقیت		
۶۶.۲۱	۱۰۰	۵۸	۱۰۰	۱۶ در ۴ گروه	MPSO
۸۵.۳۲	۹۳	۷۴	۵۰	۱۶	PSO
۱۶	۱۰۰	۲۲۲	۱۰۰	۲۰ در ۴ گروه	MPSO
۷۶.۲۰	۸۶	۲۵۳	۹۰	۲۰	PSO
۶.۱۰	۱۰۰	۲۶	۹۰	۴۰ در ۱۰ گروه	MPSO
۱۱.۴	۱۰۰	۳۸	۸۰	۴۰	PSO

که در آن $-10 \leq x_i \leq 10$ و $i=1,2$ است و مینیمم سراسری با مقدار تابع $f(x^*) = 0$ در $x^* = (5,4)$ وجود دارد.

آزمایشاتی جهت ارزیابی توانایی الگوریتم PSO و الگوریتم گسترش یافته PSO در یافتن مینیمم سراسری صورت گرفته است. هر یک از اجزاء با ساختاری که شامل یک بردار دو بعدی برای نمایش x_1 و x_2 ، برداری دو بعدی برای نمایش سرعت و برداری دو بعدی برای نگهداری بهترین حالتی که تاکنون داشته است، نمایش داده می شود. جدول (۱) میانگینی از نتایج ۱۵۰ آزمایش جستجوی بهینه سراسری، شامل میانگین تکرار الگوریتم تا دستیابی به بهینه سراسری و درصد موفقیت را نشان می دهد.

جدول (۲) نتیجه ۸۰ آزمایش جستجوی بهینه سراسری تابع Freudenstein-Roth را نشان می دهد. مشاهده می شود که MPSO موفق می شود مینیمم سراسری را با احتمال بیشتری نسبت به PSO بیابد. در شرایط برابر PSO با احتمال بیشتری در مینیمم محلی گیر می کند و وقتی تعداد اجزاء در جمعیت کم است، MPSO با تعداد جمعیت مساوی در برابر PSO با همان تعداد اجزاء با درصد موفقیت بیشتر و سرعت همگرایی بالاتری عمل می نماید. به علاوه MPSO مانع همگرایی زودرس PSO می شود. این خواص هنگامی که تعداد اجزاء بیشتر می شود و اجزاء، ناحیه بزرگتری از فضای جستجو را پوشش می دهند، کاهش می یابد. آزمایشات نشان می دهد که افزایش تعداد اجزاء در هر دو الگوریتم با افزایش کارایی همراه است.



شکل (۲) - نمای تابع Levy No.5

۳-۱- ارزیابی الگوریتم MPSO از نظر محاسباتی

شکل (۱) را در نظر بگیرید. در هر تکرار از الگوریتم PSO برای یافتن gbest به ۱۵ مقایسه و برای یافتن هر pbest به یک مقایسه نیاز است، لذا با در نظر گرفتن گروه ۱۶ جزئی جمعاً ۱۶+۱۵ مقایسه انجام می شود. در هر تکرار از الگوریتم MPSO برای یافتن هر gbest در گروه چهار عضوی به ۳ مقایسه و برای یافتن mbest از میان gbest های چهار گروه به ۳ مقایسه و برای یافتن هر pbest به یک مقایسه نیاز است. بنابراین هر تکرار الگوریتم MPSO با چهار گروه چهار عضوی نیازمند $۱۶+۳+(۴ \times ۳)$ مقایسه است. به این ترتیب از نظر پیچیدگی محاسباتی الگوریتم MPSO معادل PSO می باشد.

۳-۲- ارزیابی الگوریتم MPSO از نظر عملکرد

چند تابع جهت ارزیابی عملکرد روش ارائه شده مورد بررسی قرار گرفته است. اولین تابع دو بعدی Levy No.5 نامیده می شود و به صورت رابطه (۴) تعریف می گردد [12].

$$f(x) = \sum_{i=1}^5 [i \cos((i-1)x_1 + i)] \sum_{j=1}^5 [j \cos((j+1)x_2 + j)] + (x_1 + 1.42513)^2 + (x_2 + 0.80032) \quad (۴)$$

که در آن $-10 \leq x_i \leq 10$ و $i=1,2$ است. در این بازه حدود ۷۶۰ مینیمم محلی و یک مینیمم سراسری با مقدار تابع $f(x^*) = -176.1375$ در $x^* = (-1.3068, -1.4248)$ وجود دارد. تعداد زیاد مینیمم های محلی شناسایی مینیمم سراسری را دشوار می سازد. در شکل (۲) نمای تابع Levy No.5 در مکعب $[-2,2]^2$ نشان داده می شود. تابع دیگر Levy No.3 نام دارد و بشکل رابطه (۵) تعریف می گردد.

$$f(x) = \sum_{i=1}^5 [i \cos((i-1)x_1 + i)] \sum_{j=1}^5 [j \cos((j+1)x_2 + j)] \quad (۵)$$

که در آن $-10 \leq x_i \leq 10$ و $i=1,2$ است. حدود ۷۶۰ مینیمم محلی و ۱۸ مینیمم سراسری با مقدار تابع $f(x^*) = -176.542$ در بازه تعریف شده وجود دارد. تابع دو بعدی Freudenstein-Roth نیز جهت سنجش الگوریتم های جستجوی بهینه سراسری مورد استفاده قرار می گیرد [12]. تعریف این تابع بصورت رابطه (۶) است:

درصد کاهش خطا در بازشناسی هر واحد برای الگوریتم PSO ۳.۳۶٪ و برای الگوریتم MPSO ۴.۸۳٪ است.

جدول (۳): نتایج بدست آمده از آموزش مدل‌های مخفی مارکوف

دقت بازشناسی			تعداد اجزاء
MPSO	PSO	ML	
۷۰.۸۶	۷۰.۴۲	۶۶.۴۴	۱۶ جزء در ۴ گروه

۶- جمع بندی

در این مقاله نسخه‌ای از الگوریتم PSO ارائه شد که در آن به جای یک گروه بزرگ، چندین گروه کوچک که مجموع اجزاء آنها برابر با تعداد اجزاء گروه در PSO استاندارد باشد در نظر گرفت. آزمایشات متعددی که بر روی توابع بهینه‌سازی آزمایشی انجام گرفته است، نشان می‌دهد که گستردگی اجزاء در فضای جستجو باعث می‌شود که نسخه PSO ارائه شده با احتمال بیشتری نسبت به نسخه استاندارد PSO به بهینه سراسری دست یابد و کارایی بالاتری را داشته باشد. الگوریتم MPSO همچنین نحوه بکارگیری آن در فرآیند آموزش مدل مخفی مارکوف مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که درصد خطای بازشناسی، نسبت به بکارگیری الگوریتم‌های کلاسیک، بطور متوسط ۴.۸۳٪ کاهش یافت.

مراجع

- [۱] ساجدی هدیه، ثامنی حسین، بیگی حمید، "آموزش تمایزی مدل مخفی مارکوف با استفاده از الگوریتم PSO"، یازدهمین کنفرانس کامپیوتر ایران، ۱۳۸۵
- [2] J.Kennedy,R.C.Eberhart,Particle Swarm Optimization, IEEE Conference on Neural Networks,Vol.4, 1995
- [3] K.E.Parsopoulos,M.N.Vrahatis, Recent approaches to global optimization problems through Particle Swarm Optimization, Natural Computing, pp.235-306, 2002
- [4] Eberhart RC,Simpson P,Dobbins R,Computational Intelligence PC Tools,Academic Press,1996
- [5] R.Eberhart,J.Kennedy,New Optimizer using particle swarm theory, Micro Machine and Human Science, 1995
- [6] Clerc, Kennedy, The particle swarm Explosion, stability and convergence in a multidimensional complex space,IEEE Tran. on Evolutionary Computation, 2002
- [7] J.Kennedy,Small Worlds and Mega-Minds:Effects of Neighborhood Topology on Particle Swarm Performance, IEEE Evolutionary Computation, vol.3, 1999
- [8] Jacques Riget, Jakob S. Vesterstrom, A Diversity-Guided Particle Swarm Optimizer –the ARPSO, EVALife Group, University, Denmark, Tech. Report,2002
- [9] Xie. X.F,Zhang W.J,Yang Z L. A dissipative particle swarm optimization.Evolutionary Computing Congress,1456-1461,2002
- [10] Kenedy J,Eberhart R C, Bare bones particle swarms, IEEE Swarm Intelligence Symposium,pp.80-87,2003
- [11] M.Lovbjerg,T.K.Rasmussen,T.Krink,Hybrid particle swarm optimizer with breeding and subpopulation, Genetic and Evolutionary Computation Conference,1998

جدول (۲): نتایج یافتن بهینه سراسری تابع Freudenstein-Roth، میانگین دفعات تکرار الگوریتم تا دستیابی به بهینه سراسری و درصد موفقیت

Freudenstein-Roth		تعداد اجزاء	الگوریتم
درصد موفقیت	میانگین		
۶۵	۱۵۷	۵۰ در ۱۰ گروه	MPSO
۲۰	۵۰	۵۰	PSO
۹۰	۱۲۷	۱۰۰ در ۱۰ گروه	MPSO
۲۵	۵۶	۱۰۰	PSO

۴- آموزش HMM با استفاده از الگوریتم PSO

در این تحقیق از مدل مخفی مارکوف درجه اول جهت مدلسازی واحدهای آوایی استفاده می‌شود. الگوریتم‌های هیوریستیکی بسیاری برای بهینه سازی پارامترهای HMM وجود دارد که عموماً الگوریتم های تپه نوردی هستند و به تخمین های اولیه پارامترها وابسته‌اند. هر HMM به عنوان یک جزء گروه، به یک بردار چند بعدی نگاشت شده و برای دستیابی به هر مدل متناظر با یک واحد بازشناسی (واج)، یک گروه در نظر گرفته می‌شود. هدف آن است که با استفاده از الگوریتم MPSO پارامترهای مدل مخفی مارکوف تخمین زده شود. در این تحقیق بردار ویژگی هر واحد، ۱۲ ضریب کپسترال و ۱۲ مشتق اول کپسترال هستند. اجزاء اولیه در MPSO بر اساس مدل‌های کمی آموزش دیده توسط الگوریتم بیشترین میزان شباهت مقداردهی اولیه می‌شوند. ارزیابی هر جزء با استفاده از نتیجه بازشناسی صورت می‌پذیرد و نمایش هر جزء توسط بردارهای با اعداد اعشار شناور برای موقعیت و سرعت است. بردار موقعیت یک جزء شامل مولفه‌هایی است که نشان دهنده مقدار میانگین و واریانس هر یک از توابع گوسی و ضرایب این توابع است. مقداردهی اولیه بردار سرعت با اعداد تصادفی در بازه ای معین انجام می‌شود. بردار موقعیت هر جزء از راه‌حلهای اولیه بدست آمده است که توسط الگوریتم مبتنی بر بیشترین میزان شباهت، آموزش دیده‌اند. در هر تکرار الگوریتم، حرکت اجزاء بر اساس بهترین موقعیتی که خود آن فرد تاکنون داشته است (pbest)، بهترین موقعیت گروه و بهترین موقعیتی که تاکنون توسط کل اجزاء گروهها به وجود آمده است و در واقع بهترین gbest در کل جمعیت (mbest) انجام می‌شود.

۵- نتایج آزمایشات انجام شده

مدل مخفی مارکوف مورد استفاده چپ به راست سه حالت به مشاهدات پیوسته، چگالی احتمال مشاهدات ترکیبی از چگالیهای گوسی و ماتریس کوواریانس آنها قطری فرض شده است. هر حالت بصورت ۳ تلفیق با ۲۴ مولفه‌ی گاوسی در نظر گرفته شده است. در آموزش مدل‌ها از ۵۰۰ جمله و در آزمون از ۱۰۰ جمله دادگان گفتاری فارسی دات استفاده شده است. آزمایشات به ازای تعداد swarm های مختلف انجام پذیرفته و نتیجه در جدول (۳) آمده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که MPSO در بازشناسی موثرتر از الگوریتم PSO است.

- [12] Levy A, Montalvo A, Gomez S, Galderon A, Topics in Global Optimization, Springer-Verlag, New York, 1981

-
- ¹ Particle Swarm Optimization
² Artificial life
³ Hidden Markov Model
⁴ Maximum likelihood
⁵ Life Cycle Model
⁶ Hill Climbing