اگر در انتگرال فوریه، تابع $f(x)$ زوج باشد در این صورت

$$B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx$$

$\cos\omega x$ در این صورت

انتگرال فوریه کسینوسی $\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(u)\cos\omega u\, du\, d\omega$

اگر در انتگرال فوریه، تابع $f(x)$ فرد باشد در این صورت

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx$$

$\sin\omega x$

انتگرال فوریه سینوسی $\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(u)\sin\omega u\, du\, d\omega$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$f(x)$ is even, so $B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\omega x\, dx = \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ \frac{\pi}{4} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

Find the Fourier integral of the followings; $K>0$

a) $f(x)=e^{-Kx}$ when $x>0$ and $f(-x)=f(x)$

b) $f(x)=e^{-Kx}$ when $x>0$ and $f(-x)=-f(x)$

a) $f(x)$ is an even function

$B(\omega)=0$,

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-Kx}\cos\omega x\,dx=\frac{2K}{\pi(K^2+\omega^2)}$$

$$2\int_0^\infty e^{-Kx}e^{i\omega x}\,dx=\frac{2}{-(+K-i\omega)}e^{-x(K-i\omega)}\Big|_0^\infty=\frac{2}{K-i\omega}=\frac{2(K+i\omega)}{K^2+\omega^2}$$

$$f(x)=e^{-Kx}=\frac{2K}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\omega x}{K^2+\omega^2}\,d\omega$$

$$\int_0^\infty\frac{\cos\omega x}{K^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2K}e^{-Kx}$$ انتگرال لاپلاس

b)

$$\int_0^\infty\frac{\omega\sin\omega x}{K^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-Kx}$$ انتگرال لاپلاس

تبدیل کسینوسی فوریه

تبدیل سینوسی فوریه

تبدیل کسینوسی فوریه

تبدیل کسینوسی فوریه درمورد توابع زوج درنظر گرفته می‌شود.

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x \, d\omega \quad \text{where} \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$(B(\omega) = 0)$$

تبدیل کسینوسی فوریه $\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$

تبدیل کسینوسی فوریه معکوس $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega$

تبدیل سینوسی فوریه (توابع فرد)

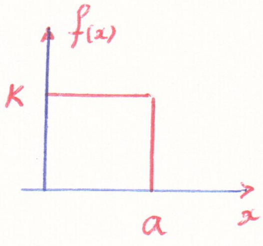
$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

نوشتار دیگر

$$F_c\{f\} = \hat{f}_c \qquad F_s\{f\} = \hat{f}_s$$

$$F_c^{-1}\{\hat{f}_c\} = f(x) \qquad F_s^{-1}\{\hat{f}_s\} = f(x)$$



مثال: تبدیل کسینوسی و تبدیل سینوسی فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} K & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a K \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, K \, \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a K \sin \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, K \left(\frac{1 - \cos a\omega}{\omega}\right)$$

خواص

خطی بودن

$$F_c\,(af+bg)=aF_c(f)+bF_c(g)$$

$$F_s\,(af+bg)=aF_s(f)+bF_s(g)$$

تبدیلات کسینوسی فوریه مشتقات

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد و $f'(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته و $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$$F_c\{f'(x)\}=\omega F_s\{f(x)\}-\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,f(0)$$

$$F_s\{f'(x)\}=-\omega\,F_c\{f(x)\}$$

اثبات: صفحه ۵۲۰

$$F_c\{f''(x)\}=-\omega^2F_c\{f(x)\}-\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,f'(0)$$

$$F_s\{f''(x)\}=-\omega^2F_s\{f(x)\}+\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$$

مثال: تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x)=e^{-ax}$ که $a>0$ را بدست آورید

$$(e^{-ax})''=a^2e^{-ax}$$

$$f''(x)=a^2f(x)$$

$$F_c\{f''\}=a^2F_c\{f\}$$

$$-\omega^2F_c\{f\}-\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,f'(0)=a^2F_c\{f\}$$

$$F_c\{f\}(a^2+\omega^2)=-\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,f'(0)=-\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,(-a)=a\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}$$

$$F_c\{f\}=\frac{a}{a^2+\omega^2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\qquad a>0$$

فرم نمائی انتگرال فوریه:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x \, d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x \, dx \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x \, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\big(\underbrace{\cos\omega u\cos\omega x + \sin\omega u\sin\omega x}_{\cos\omega(x-u)}\big)\,du\,d\omega$$

تابع انتگرالده نسبت به ω تابعی زوج است

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\omega(x-u)\,du\,d\omega$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\omega(x-u)\,du\,d\omega$$

$i = \sqrt{-1}$ و $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\big(\cos\omega(x-u) + i\sin\omega(x-u)\big)\,du\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{i\omega(x-u)}\,du\,d\omega$$

انتگرال فوریه مختلط

تبدیل فوریه و معکوس آن:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\,du\, e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$F\{f(x)\} = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx$$

تبدیل فوریه

$$F^{-1}\{\hat{f}\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\,d\omega$$

تبدیل فوریه معکوس

مثال:

$$f(x)=1 \qquad |x|<1$$
$$0 \qquad \text{otherwise}$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0 \qquad a>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$F\{e^{-ax}\}=F\{f\}=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-ax}e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\right|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a+i\omega)}$$

Page 536 جدول III

خواص:

- خطی بودن

$$F\{af+bg\}=aF\{f\}+bF\{g\}$$

۲- تبدیل فوریه مشتقات

$$F\{f'(x)\}=i\omega\,F\{f(x)\}$$
$$F\{f''(x)\}=-\omega^2F\{f(x)\}$$
$$F\{f^{(n)}(x)\}=(i\omega)^nF\{f(x)\}$$

مثال

$$e^{-x^2}\xrightarrow{F}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$x e^{-x^2}$ را بدست آورید

تبدیل فوریه

$$F\{xe^{-x^2}\}=F\left\{-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right\}=-\frac{1}{2}F\left\{\left(e^{-x^2}\right)'\right\}=-\frac{1}{2}\,i\omega\,F\{e^{-x^2}\}$$

$$=-\frac{1}{2}i\omega\,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}=\frac{-i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

- کانولوشن (پیچش)

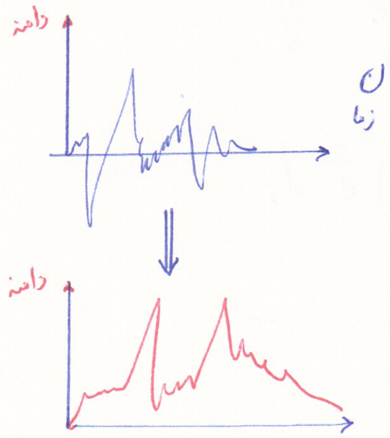
$$h(x) = f(x) * g(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)\, g(x-p)\, dp = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-p)\, g(p)\, dp$$

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی کراندار پیوسته، محدود و مطلقاً انتگرال پذیر باشند

$$F\{f*g\} = \sqrt{2\pi}\; F\{f\}\, F\{g\}$$

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

با استفاده از تبدیل فوریه، می توان نمودار زمان - دامنه را به فرکانس - دامنه تبدیل نمود و از خصوصیاتش استفاده نمود.



ارزیابی رفتار لرزه ای طی مراحل زیر انجام می پذیرد

۱) شناسائی سیستم System Identification

۲) Module updating

۳) Damage Detection

۴) بهسازی

۵) مقاوم سازی

تبدیل لاپلاس:

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, e^{-i\omega u}\, du\; e^{+i\omega x}\, d\omega$$

$$h(x)=e^{-cx} f(x)$$

$f(x)=0 \quad x<0$ و

$$e^{-cx} f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-cu}\, e^{-i\omega u}\, du\; e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$f(x)=\frac{e^{cx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-(c+i\omega)u}\, du\; e^{i\omega x}\, d\omega$$

ثابت

$s=c+i\omega$

$ds=i\,d\omega$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-su}\, du\; e^{sx}\, \frac{ds}{i}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\omega}\left(\int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-su}\, du\right) e^{sx}\, ds$$

تبدیل لاپلاس $F(s)=\int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx$

تبدیل لاپلاس معکوس $f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{sx}\, ds$

تبدیل لاپلاس روی دامنه‌های نیمه بینهایت و تبدیل فوریه روی دامنه‌های تمام بینهایت