

استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای حل دستگاه $X' = AX$.

دقت کنید در $X' = AX$ ، $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ بردار مجهول، $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ بردار مشتق

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ماتریس معلوم فرایب هستند. قبل از هر چیز، اگر بردار صفر $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

و عدد مختلط r به گونه ای موجود باشند که $A\vec{U} = r\vec{U}$ گوئیم r مقدار ویژه ماتریس A ،

$\vec{U}$ بردار ویژه مشاط با مقدار ویژه r برای ماتریس A است. برای بدست آوردن مقدار

ویژه r ، معادله $\det(A - rI) = 0$ را که در آن $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ماتریس همانی است

حل می کنیم و عبارت محاسبه r ، بردار ویژه $\vec{U}$ از حل دستگاه $(A - rI)\vec{U} = \vec{0}$

بدست می آید.

Ex) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مشاط با آنها را برای ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ بدست آوریم.

حل: $\bullet \quad \det(A - rI) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2-r & -1+0 \\ -1+0 & 2-r \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-r)(2-r) - 1 = 0 \Rightarrow 4 - 4r + r^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow (r-3)(r-1) = 0 \begin{cases} r=1 \\ r=3 \end{cases}$$

$\xrightarrow[r=1]{(A-rI)\vec{U} = \vec{0}}$ $\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \rightarrow u_1 = u_2 \rightarrow \vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

همی توانیم $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (برای c مختلف)

$$r = +3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \rightarrow u_2 = -u_1$$

$$\Rightarrow \vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \quad (\forall c \in \mathbb{C}).$$

جواب دستگاه. حالا می‌توانیم $x' = Ax$ را به صورت $x = \vec{U} e^{rt}$ و در نتیجه $x' = r \vec{U} e^{rt}$ در نظر می‌گیریم و داریم

$$r \vec{U} e^{rt} = A \vec{U} e^{rt} \rightarrow A \vec{U} = r \vec{U}$$

$$\Rightarrow (A - rI) \vec{U} = 0$$

دستگاه فوق‌زانی جواب می‌دهد که $\det(A - rI) = 0$. لذا این r و $\vec{U}$.
تقریباً درجه بردارهای شش‌ضلعی با یکدیگر برای ماتریس A هستند.
بحث در مورد ریشه‌های $\det(A - rI) = 0$ داریم.

① اگر r_1, r_2 ریشه‌های متمایز $\det(A - rI) = 0$ باشند، داریم

$$x_1 = e^{r_1 t} \vec{U}, \quad x_2 = e^{r_2 t} \vec{V} \quad \text{که بدان } \vec{U} \text{ بردار ریشه شش‌ضلعی } r_1 \text{ و } \vec{V} \text{ بردار ریشه شش‌ضلعی } r_2 \text{ است.}$$

و در آخر جواب عمومی دستگاه، به دست می آید

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 \\ = \gamma(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که در آن $\gamma(t)$ یک ماتریس 2×2 است که آن ماتریس اساسی جواب گفته می شود.

5. ماتریس اساسی جواب دستگاه، $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X$ که داده است؟

حل: نخست طالعاده $\det(A - rI) = 0$ برای به دست آوردن مقادیر ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ می داریم}$$

$$\det(A - rI) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{دستگاه}}$$

$$-(2-r)(2+r) + 3 = 0 \Rightarrow r^2 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

حال بردارهای ویژه شاخص با مقادیر ویژه 1 و -1 :

$$\xrightarrow{r=1} \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 3 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ 3u_1 - 3u_2 = 0 \end{cases} \rightarrow u_1 = u_2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

P:126

$$\xrightarrow{r=-1} \begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 \\ 3 & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3v_1 - v_2 = 0 \\ 3v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{v_2 = 3v_1}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = e^{-1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \omega$$

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{جواب آخر}$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{و ماتریس آس جواب}$$

② اگر $1 \pm i\mu$ مقادیر ویژه فکتور برای ماتریس A باشند و

$\bar{a} + i\bar{b}$ بردار ویژه متعلق به $1 + i\mu$ ، $\bar{a} - i\bar{b}$ بردار ویژه متعلق به $1 - i\mu$ باشند

حالتی خاص $x_1 := e^{it}(\bar{a}\cos\mu t - \bar{b}\sin\mu t)$ ، $x_2 := e^{it}(\bar{a}\sin\mu t + \bar{b}\cos\mu t)$

جواب آخر - مد

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ \dot{c} = \gamma(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

رابطه شد

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

دستگاه معادلات تفاضلی

حل:

محلول ماتریسی دستگاه فوق عبارت است از

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X$$

به دست آوردن مقادیر ویژه و اکتورها

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-r)(-1-r) + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$-3 - 3r + r^2 + r + 8 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0$$

p: 128

$$r = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{4} \sqrt{-1} = 1 \pm 2i$$

حال بردار ویژه $\vec{a} + \vec{b}i$: $1+2i$

$$\begin{matrix} r=1+2i \\ AU=ru \end{matrix} \begin{pmatrix} 3-1-2i & -2 \\ 4 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (2-2i)u_1 - 2u_2 = 0 \\ 4u_1 - 2(1+i)u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-i)u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_1 - (1+i)u_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1-i)^2 u_1 - (1+i)u_2 = 0 \\ 2u_1 - (1+i)u_2 = 0 \end{cases}$$

$$2u_1 = (1+i)u_2$$

$$\begin{matrix} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{2u_1}{1+i} \end{matrix} \rightarrow u_2 = \frac{2}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{2(1-i)}{1-(i)^2} = \frac{2(1-i)}{1-(-1)} = 1-i$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\rightarrow x_1 = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$x_2 = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t \right) = e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ e^t (\cos 2t + \sin 2t) & e^t (\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ e^t (\cos 2t + \sin 2t) & e^t (\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}$$

ماتریس اسی

③ اگر r مقدار ویژه ضاعف و $\vec{U}$ بردار ویژه متعلق به آن برای ماتریس A باشد،

جواب اول به صورت $x_1 = e^{rt} \vec{U}$ ، جواب دوم به شکل $x_2 = t e^{rt} \vec{U} + e^{rt} \vec{V}$

که بردار $\vec{V}$ از حل دستگاه $(A - rI) \vec{V} = \vec{U}$ بدست می آید و جواب آخر

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = x(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

مثلاً ماتریس اسی جواب برای $x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x$ پیدا است؟

$$\det(A - rI) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 4-r & -2 \\ 8 & -4-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 - 16 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = 0 \text{ ضاعف}$$

$$\xrightarrow{r=0} (A - 0I) U = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4u_1 - 2u_2 = 0 \\ 8u_1 - 4u_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{u_1=1 \\ u_2=2}} U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = t e^{0t} U + e^{0t} V$$

p: 130

$$(A - 0I)V = U \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\begin{cases} 4v_1 - 2v_2 = 1 \\ 8v_1 - 4v_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow[v_1 = 1/4]{v_2 = 0} V = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = t e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{0t} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} t + 1/4 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t + 1/4 \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & t + 1/4 \\ 2 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t + 1/4 \\ 2 & 2t \end{pmatrix}$$

المعادلات:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ x_2 = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ x_2 = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \end{cases} \quad (4)$$

تبرين: جواب عمومی دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 e^{-t} \\ x_2 = c_1 e^t + c_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 \\ x_2 = c_1 + 2c_2 e^t \end{cases} \quad (3)$$