فصل دوم

هندسه تحلیلی و جبرخطی-بخش دوم

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir

AvaEducation16@gmail.com

@AvaEducation16

@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

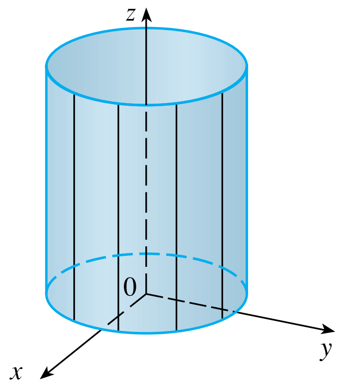
پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

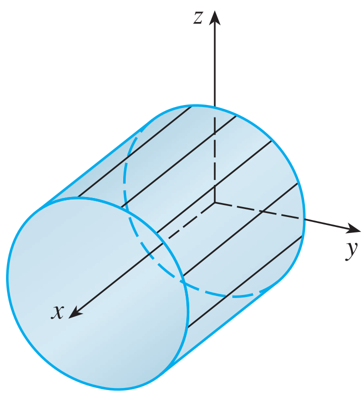
۱ رویه

یک معادله ضمنی شامل سه متغیر x، y و z که به صورت $f(x,y,z)=0$ هستند یک رویه[۱] را در فضای $\mathbb{R}^3$ به وجود می‌آورند. سطوحی خاص از درجه دوم در فضا وجود دارند که به مهمترین آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- استوانه: این شکل بسته به اینکه حول کدام محور مختصات قرار دارد، با رابطه‌های مختلف نشان داده می‌شود. توجه شود آن محوری که استوانه حول آن است در معادله وجود ندارد.

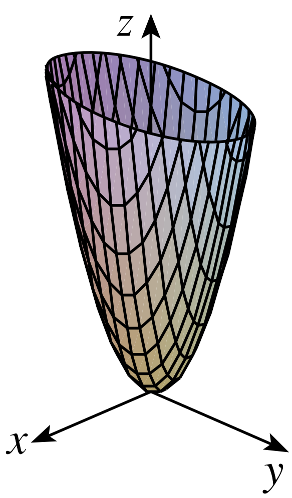


$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

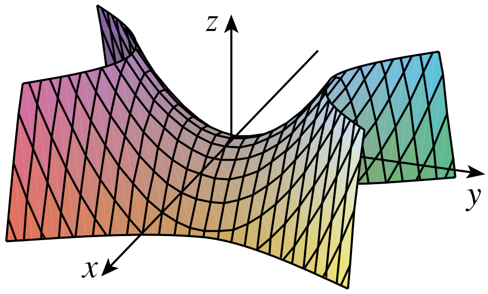
- سهمی بیضوی: به ازای $c>0$ شبیه یک کلاه برعکس است که دهانه آن رو به بالاست. اگر $c<0$ باشد، دهانه آن به سمت پایین قرار می‌گیرد



$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

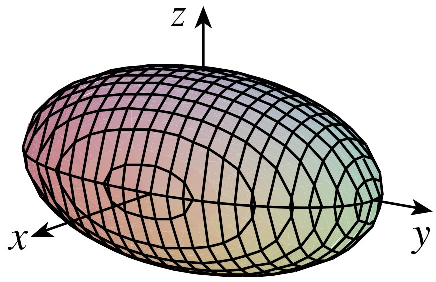
[۱] Surface

• سهمی هذلولی‌گون:



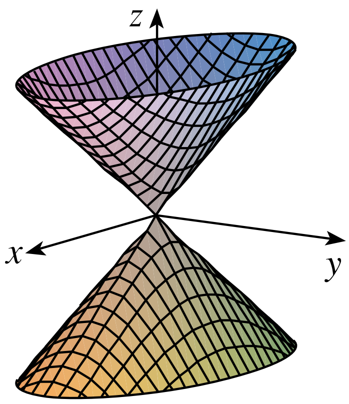
$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

• بیضی: محل برخورد بیضی با محورهای مختصات $x=\pm a$، $y=\pm b$ و $z=\pm c$ و مرکز آن مبدا است.



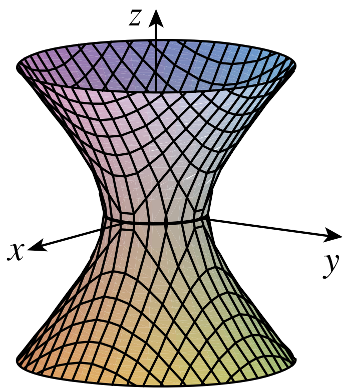
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- مخروط: رابطه ذیل شکل زیر هم برای بخش مثبت و هم برای بخش منفی مخروط به کار می‌رود. اگر مثلاً بخش منفی مخروط مورد نظر باشد، رابطه به صورت $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ نمایش داده می‌شود.



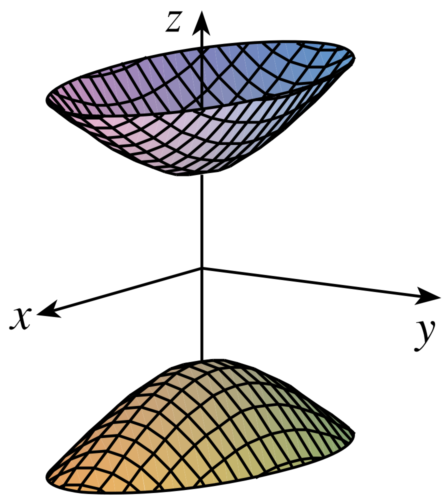
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

- هذلولی یکپارچه:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- هذلولی دوپارچه: برای تمایز این هذلولی از نوع یکپارچه باید به این سوال جواب داد که آیا امکان دارد $z = 0$ باشد؟ اگر با این فرض x و y موجود باشند، آنگاه یکپارچه است وگرنه دو پارچه. در هذلولی یکپارچه اگر $z = 0$ باشد، رابطه یک بیضی در صفحه به وجود می‌آید $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ اما در هذلولی دوپارچه هیچ جوابی برای این حالت وجود ندارد. $(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \neq 1)$



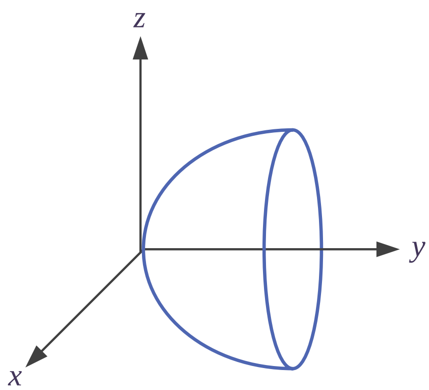
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

مثال ۱ روابط زیر نشان‌دهنده کدام رویه در فضای $\mathbb{R}^3$ هستند. آنها را به صورت تقریبی رسم کنید.

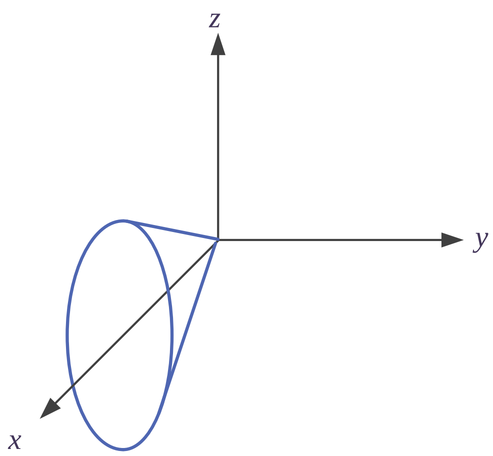
- $y = x^2 + 4z^2$
- $x = \sqrt{2y^2 + 3z^2}$
- $5x^2 + z^2 + 4z - y^2 + 2y = 0$
- $x^2 + 6x + 4z^2 = 0$

پاسخ:

- یک سهمی که به صورت زیر رسم می‌شود و حول محور y است.



- قسمت مثبت یک مخروط که به صورت زیر رسم می‌شود و حول محور x است.



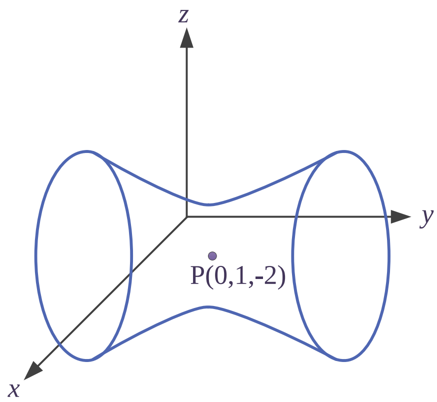
- ابتدا تبدیل به حالت استاندارد می‌کنیم:

$$5x^2 + z^2 + 4z - y^2 + 2y = 0, \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + z^2 + 4z \pm 4 - y^2 + 2y \pm 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2 + z^2 + 4z + 4 - y^2 + 2y - 1 = 3, \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + (z+2)^2 - (y-1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{3}{5}} + \frac{(z+2)^2}{3} - \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

رابطه فوق معادله استاندارد یک هذلولی یکپارچه به مرکز $(0, 1, -2)$ است که به صورت زیر رسم می‌شود.

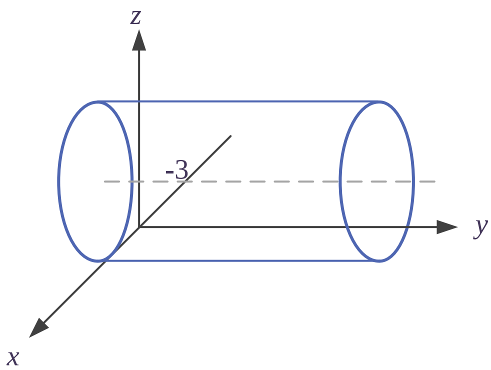


- ابتدا تبدیل به حالت استاندارد می‌کنیم:

$$x^2+6x+4z^2=0, \quad \Rightarrow \quad x^2+6x\pm 9+4z^2=0, \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2+4z^2=9$$

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{z^2}{\frac{9}{4}}=1$$

رابطه فوق معادله استاندارد یک استوانه به مرکز $x=-3,\ z=0$ است که به صورت زیر رسم می‌شود:



۲ خم‌های پارامتری

خم $\vec{\alpha}(t)$ معادله حرکت یک متحرک در فضای دو یا سه بعدی است. اگر هر یک از مولفه‌های این خم، مشتق‌پذیر باشند آنگاه مشتق خم $\vec{\alpha}(t)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\vec{V}(t) = \vec{\alpha}'(t) = \Big(x'(t), y'(t), z'(t)\Big)$$

این بردار، بردار سرعت نامیده می‌شود.

نکته: اگر پارامتر t بین x، y و z حذف شود، معادله دکارتی بدست آمده را مسیر حرکت می‌نامند.

مثال ۲ خم $\vec{\alpha}(t) = \Big(\cos t, \sin t, \sin 2t\Big)$ را به صورت دکارتی در $\mathbb{R}^3$ نمایش دهید.

پاسخ: از روی رابطه خم داریم:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sin 2t$$

باید پارامتر t حذف شود. می‌دانیم $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ در نتیجه $x^2 + y^2 = 1$. از رابطه z داریم $z = 2\sin t \cos t = 2yx$. در نتیجه رابطه دکارتی یا مسیر حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2xy \end{cases}$$

لازم به ذکر است که بردار شتاب از مشتق گرفتن از بردار سرعت بدست می‌آید:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}$$

۱.۲ کنج فرنه

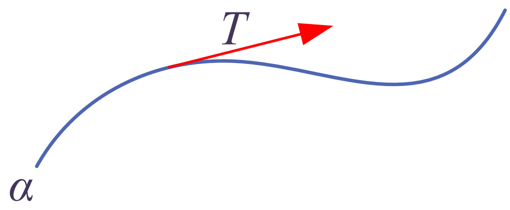
بردار یکه $\vec{T}(t)$ از تقسیم بردار سرعت بر اندازه آن بدست می‌آید. این بردار در حقیقت جهت حرکت را نشان می‌دهد و بر خم مماس است:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}$$

در شکل زیر مماس بودن بردار $\vec{T}(t)$ بر یک خم پارامتری نمایش داده شده است.

بردار قائم اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$



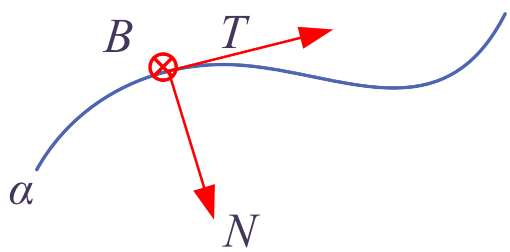
این بردار بر مسیر حرکت یا مسیر خم عمود است.
بردار قائم دوم به صورت زیر تعریف می‌شود که این بردار هم بر مسیر حرکت عمود است و از ضرب خارجی بردار مماس در بردار قائم اول بدست می‌آید:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

رابطه دیگری بر حسب شتاب و سرعت متحرک برای بردار قائم دوم وجود دارد. از آنجایی که بردار سرعت بر مسیر مماس بوده و بردار شتاب عمود بر مسیر است، ضرب خارجی این دو بردار نیز در جهت بردار قائم دوم خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\vec{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{|\vec{V} \times \vec{a}|}$$

عمود بودن این دو بردار آخر بر مسیر حرکت در شکل زیر نمایش داده شده است.



سه‌تایی $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ که یک سه‌تایی راستگرد است، کنج فِرنه[۲] نامیده می‌شود. صفحه‌ای که در هر نقطه روی خم به موازات بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ ساخته می‌شود، صفحه بوسان نامیده می‌شود و بردار قائم (مشخصه) آن $\vec{B}$ است. وقتی طول هر سه بردار برابر و هر سه بر هم عمود باشند، با توجه به راستگرد بودن سه‌تایی، خواهیم داشت:

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}, \qquad \vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$$

[۲] Frenet frame

مثال ۳ کنج فرنه را برای $\vec{\alpha}(t) = (2\frac{t^3}{3}, t^2, t)$ در $t = 1$ بدست آورید.

پاسخ: با مشتق از خم داریم:

$$\vec{V}(t) = (2t^2, 2t, 1)$$

بردار مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4t^4+4t^2+1}}(2t^2, 2t, 1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{(2t^2+1)^2}}(2t^2, 2t, 1)\\ &= \frac{1}{2t^2+1}(2t^2, 2t, 1)\end{aligned}$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}(t) = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$$

برای یافتن بردار قائم اول، ابتدا باید $\vec{T}'(t)$ محاسبه شود. اما با توجه به پیچیده بودن محاسبات مربوط به این بردار، ابتدا از رابطه دوم ارائه شده درباره قائم دوم، بردار $\vec{B}$ بدست می‌آید و سپس از این بردار می‌توان بردار قائم اول را تعیین نمود. سرعت متحرک قبلاً بدست آمده است و کافیست شتاب آن محاسبه گردد.

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = (4t, 2, 0)$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t) = (4, 2, 0), \quad \vec{V}(t) = (2, 2, 1)$$

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 4, -4)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{|\vec{V} \times \vec{a}|} = \frac{1}{6}(-2, 4, -4) = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$$

اکنون طبق راستگرد بودن سه‌تایی در کنج فرنه خواهیم داشت:

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

به طور خلاصه، کنج فرنه به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Rightarrow \quad \vec{T} = \frac{1}{3}(2,2,1)$$
$$\vec{N} = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$$
$$\vec{B} = \frac{1}{3}(-1,2,-2)$$

مثال ۴ معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = \cos t - t \\ z = t^2 - 2t - 1 \end{cases}$ در نقطه $t = 0$ را بدست آورید.

پاسخ: باید بردار مماس بر این خم بدست آید. سپس با استفاده از نقطه داده شده روی خم می‌توان معادله خط مماس بر منحنی را تعیین نمود.

$$\vec{V}(t) = (\cos t + 1, -\sin t - 1, 2t - 2), \quad \overset{t=0}{\Rightarrow} \quad \vec{V} = (2,-1,-2), \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}| = 3$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$$

با توجه به $t = 0$ نقطه مورد نظر روی خم $(0,1,-1)$ است. در نتیجه معادله خط با نمایش متقارن به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

مثال ۵ بردار یکه قائم بر مارپیچ $x = 2\cos 2t,\ y = 2\sin 2t,\ z = 3t$ را بدست آورید.

پاسخ: یکه قائم بر مارپیچ همان $\vec{N}$ است. اما ابتدا باید $\vec{T}$ تعیین شود:

$$\vec{V}(t) = (-4\sin 2t, 4\cos 2t, 3), \quad \Rightarrow \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|} = \frac{(-4\sin 2t, 4\cos 2t, 3)}{\sqrt{(-4\sin 2t)^2 + (4\cos 2t)^2 + (3)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T}(t) = \frac{1}{5}(-4\sin 2t, 4\cos 2t, 3)$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{5}(-8\cos 2t, -8\sin 2t, 0), \quad |\vec{T}'(t)| = \frac{1}{5}\sqrt{(-8\cos 2t)^2 + (-8\sin 2t)^2 + (0)^2} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = (-\cos 2t, -\sin 2t, 0)$$

مثال ۶ معادله صفحه عمود و صفحه بوسان بر خم با رابطه زیر را در نقطه $(0,\pi,-2)$ تعیین کنید.

$$\vec{r}(t)=(2\sin 3t, t, 2\cos 3t)$$

پاسخ: بردار مشخصه صفحه عمود بر خم برابر با بردار مماس بر خم است. برای یافتن این بردار به بردار سرعت نیاز است:

$$\vec{V}(t)=(6\cos 3t, 1, -6\sin 3t)$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}=\frac{1}{\sqrt{37}}(6\cos 3t, 1, -6\sin 3t)$$

نقطه داده‌شده به ازای $t=\pi$ اتفاق می‌افتد. بردار مماس بر خم در این نقطه به صورت زیر می‌شود:

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{37}}(-6,1,0)$$

صفحه مماس به صورت زیر قابل نمایش است:

$$-6x+y=d$$

با جایگذاری نقطه داده شده، مقدار $d=\pi$ می‌شود و در نهایت صفحه عمود بر خم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad -6x+y=\pi$$

در قسمت بعد سوال، صفحه بوسان برای خم در نقطه داده شده بدست می‌آید. صفحه بوسان دارای بردار مشخصه $\vec{B}$ می‌باشد. در واقع بردار مشخصه صفحه بوسان در راستای بردار قائم دوم است. برای یافتن بردار قائم دوم، نیاز به یافتن بردار قائم اول می‌باشد. اما یک رابطه وجود دارد که بردار قائم دوم را مستقیماً ایجاد می‌کند. این رابطه به شرح زیر است:

$$\vec{B}=\frac{\vec{V}\times\vec{a}}{|\vec{V}\times\vec{a}|}$$

پس نیاز به یافتن بردار سرعت و شتاب در نقطه داده شده می‌باشد. بردار سرعت در ابتدای حل مسئله بدست آمد که عبارت است از $\vec{V}=(-6,1,0)$. بردار شتاب از مشتق بردار سرعت بدست می‌آید:

$$\vec{a}(t)=(-18\sin 3t, 0, -18\cos 3t), \quad \overset{t=\pi}{\Rightarrow} \quad \vec{a}(t)=(0,0,18)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix}=(18,108,0)$$

چون در بردار مشخصه فقط از جهت برداری استفاده می‌شود، دیگر نیازی به محاسبه اندازه بردار فوق و تقسیم نمودن بردار بر اندازه نیست. دقیقا از همین بردار برای ساختن صفحه بوسان استفاده می‌شود.

$$18x + 108y = 108\pi$$

با تقسیم دو طرف بر 18 رابطه صفحه ساده‌تر می‌شود:

$$x + 6y = 6\pi$$

مثال ۷ معادله صفحه عمود و صفحه بوسان بر خم با رابطه زیر را در نقطه $(-1, \pi, 0)$ تعیین کنید.

$$\vec{r}(t) = (-\cos 2t, -t, \sin 2t)$$

پاسخ: بردار سرعت از مشتق بردار مکان بدست می‌آید:

$$\vec{V} = (2\sin 2t, -1, 2\cos 2t), \qquad |\vec{V}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -1, 2)$$

صفحه عمود دارای معادله زیر است:

$$-y + 2z = d, \quad \Rightarrow \quad d = -\pi, \quad \Rightarrow \quad y - 2z = \pi$$

معادله مشخصه صفحه بوسان از بردار $\vec{B}$ ساخته می‌شود:

$$\vec{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{|\vec{V} \times \vec{a}|}$$

چون در آن نقطه داریم:

$$\vec{V} = (0, -1, 2), \qquad \vec{a} = (4, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$$

صفحه بوسان دارای معادله زیر است:

$$2y + z = d, \quad \Rightarrow \quad d = 2\pi, \quad \Rightarrow \quad 2y + z = 2\pi$$

۲.۲ طول قوس

در خم $\vec{\alpha}$، طول قسمتی از مسیر که از لحظه t_0 تا t پیموده می‌شود به صورت زیر است:

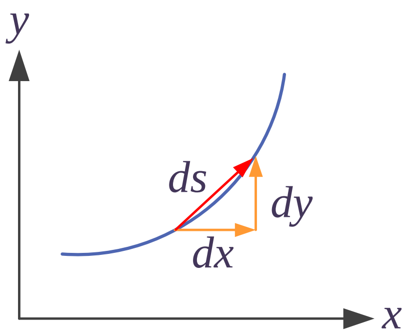
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{V}(t)| \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)} \mathrm{d}\tau$$

دو حالت خاص برای محاسبه طول قوس در مختصات دکارتی و قطبی به شرح زیر است:

- در یک تابع دو بعدی $y = f(x)$ المان طول منحنی با $\mathrm{d}s$ نمایش داده می‌شود که به صورت زیر است:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

رابطه فوق با توجه به شکل زیر بدست آمده است. اگر یک المان کوچک از طول منحنی مد نظر باشد، با استفاده از رابطه فیثاغورس می‌توان آن را بدست آورد.



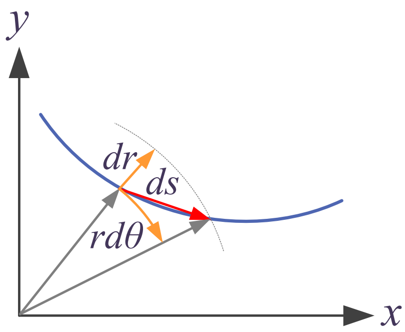
با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}\\ &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2\Big(1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\Big)}\\ &= \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- در یک تابع دو بعدی با مختصات قطبی $r = f(\theta)$ المان طول منحنی با $\mathrm{d}s$ نمایش داده می‌شود که به صورت زیر است:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

رابطه فوق با توجه به شکل زیر بدست آمده است. می‌دانیم طول یک قطاع از دایره از ضرب شعاع در اندازه زاویه روبروی قطاع بدست می‌آید. اگر یک المان کوچک از طول منحنی مد نظر باشد، با استفاده از رابطه فیثاغورس می‌توان آن را بدست آورد.



با توجه به شکل داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} \\
&= \sqrt{(\mathrm{d}\theta)^2\Big((\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2 + r^2\Big)} \\
&= \sqrt{r^2 + (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

مثال ۸ طول منحنی $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ از $x = 0$ تا $x = 3$ چقدر است؟

پاسخ: این مسئله حالت خاص اول است:

$$f'(x) = \sqrt{x}$$

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^3 \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \sqrt{1 + x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 \\
&= \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

مثال ۹ اگر نمایش پارامتری یک منحنی $\vec{r}(t) = (t, \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, t^2)$ باشد، طول منحنی از $t = 0$ تا $t = 5$ چند واحد است؟

پاسخ: چون این مسئله حالت خاص نیست از همان رابطه اصلی طول قوس استفاده می‌شود:

$$\vec{V}(t) = (1, 2\sqrt{t}, 2t), \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}(t)| = \sqrt{(1)^2 + (2\sqrt{t})^2 + (2t)^2} = 2t + 1$$

$$s = \int_0^5 |\vec{V}(t)| \mathrm{d}t = \int_0^5 (2t+1)\mathrm{d}t = \Big[t^2 + t\Big]_0^5 = 30$$

مثال ۱۰ طول منحنی $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ را به صورت انتگرال نمایش دهید.

پاسخ: مسئله به صورت پارامتری است. با مشتق از مکان، بردار سرعت بدست می‌آید.

$$\vec{V}(t) = (-3\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$$

طول قوس با رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2 + (0)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 5\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 5\Big(\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\Big)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sqrt{13 - 5\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

در رابطه فوق از $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ استفاده شد.

مثال ۱۱ طول منحنی $\vec{r}(t) = \hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ را در بازه $0 \leq t \leq 1$ بدست آورید.

پاسخ: ابتدا باید اندازه بردار سرعت بدست آید:

$$\vec{V}(t) = (0, 2t, 3t^2), \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}(t)| = \sqrt{(0)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} = t\sqrt{4 + 9t^2}$$

$$s = \int_0^1 |\vec{V}(t)| \mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} \mathrm{d}t$$

با تغییر متغیر $u = 4 + 9t^2, \ \mathrm{d}u = 18t\mathrm{d}t$ داریم:

$$\begin{aligned} s &= \int_4^{13} \frac{1}{18}\sqrt{u}\mathrm{d}u \\ &= (\frac{1}{18})(\frac{2}{3})\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{13} \\ &= \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8) \end{aligned}$$

مثال ۱۲ اگر خم $\vec{\alpha}$ از تقاطع سهمی استوانه‌ای $x^2 = 2y$ و سطح $3z = xy$ به وجود آمده باشد، طول قوس این منحنی از مبدا تا نقطه $(6, 18, 36)$ را بدست آورید.

پاسخ: اگر مقدار x را پارامتر آزاد t در نظر بگیریم، آنگاه

$$y = \frac{1}{2}t^2, \qquad z = \frac{1}{6}t^3$$

در نتیجه خم حاصل از تقاطع این دو سطح به صورت زیر است:

$$\vec{\alpha} = t\hat{i} + \frac{1}{2}t^2\hat{j} + \frac{1}{6}t^3\hat{k}$$

با مشتق از مکان بردار سرعت بدست می‌آید:

$$\vec{V}(t) = \hat{i} + t\hat{j} + \frac{1}{2}t^2\hat{k}$$

در مبدا $t = 0$ و در نقطه داده شده $t = 6$ است. در نتیجه طول قوس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^6 \sqrt{1^2 + t^2 + (\frac{1}{2}t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^6 (\frac{1}{2}t^2 + 1)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{6}t^3 + t\right]_0^6 \\ &= 42 \end{aligned}$$

۳.۲ انحنا و دایره انحنا

اگر خم $\vec{\alpha}$ پارامتری شود، مقدار انحراف آن از خط راست را انحنا نامیده و با

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

نشان داده می‌شود. شعاع انحنا $\rho = \frac{1}{\kappa}$ می‌باشد. در رابطه انحنا $\vec{T}$ همان بردار مماس بر خم می‌باشد.

رابطه انحنا را به فرم دیگر هم می‌توان نمایش داد:

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}\right| = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{V}(t)|}$$

مثال ۱۳ انحنای یک دایره به شعاع a را بدست آورید.

پاسخ: یک دایره با شعاع a در مختصات دکارتی با رابطه $x^2+y^2=a^2$ نمایش داده می‌شود. اگر آن را پارامتری کنیم خواهیم داشت:

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t$$

بنابراین معادله پارامتری دایره به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{\alpha}(t)=(a\cos t, a\sin t, 0)$$

با مشتق گرفتن از این رابطه، بردار سرعت بدست می‌آید:

$$\vec{V}(t)=(-a\sin t, a\cos t, 0)$$

بردار مماس بر خم به صورت زیر است:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}=\frac{1}{a}(-a\sin t, a\cos t, 0)=(-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T}'(t)=(-\cos t, -\sin t, 0)$$

بر اساس رابطه انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{V}(t)|}=\frac{\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2+(0)^2}}{\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+(0)^2}}=\frac{1}{a}$$

شعاع انحنا در این مسئله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=a$$

نکته جالب در این مسئله این است که شعاع انحنا همان شعاع دایره داده شده می‌باشد. همچنین مقدار انحنا با معکوس شعاع ارتباط دارد. در واقع هرچه شعاع منحنی بیشتر باشد اندازه انحنای آن کمتر است که به لحاظ فیزیکی امری بدیهیست.

برای بدست آوردن انحنا علاوه بر رابطه اصلی ارائه شده، روابط زیر نیز قابل اثبات هستند:

- اگر خم $\vec{\alpha}$ بر حسب t بیان شده باشد:
$$\kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$
- اگر خم $\vec{\alpha}$ مسطح بوده و به صورت $\vec{\alpha} = (x, y, 0)$ باشد:
$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$
- اگر خم $\vec{\alpha}$ مسطح بوده و به صورت $\vec{\alpha} = (x, y, 0)$ باشد به طوری که $y = f(x)$ است:
$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال ۱۴ در مارپیچ $\vec{R}(t) = a\cos\omega t\hat{i} + a\sin\omega t\hat{j} + b\omega t\hat{k}$ مقدار انحنا را بدست آورید.

پاسخ: رابطه انحنا به صورت زیر است:

$$\kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

برای محاسبه انحنا، نیاز به بردار سرعت و شتاب می‌باشد:

$$\vec{V}(t) = -a\omega\sin\omega t\hat{i} + a\omega\cos\omega t\hat{j} + b\omega\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = -a\omega^2\cos\omega t\hat{i} - a\omega^2\sin\omega t\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\omega\sin\omega t & a\omega\cos\omega t & b\omega\hat{k} \\ -a\omega^2\cos\omega t & -a\omega^2\sin\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \times \vec{a} = ab\omega^3\sin\omega t\hat{i} - ab\omega^3\cos\omega t\hat{j} + a^2\omega^3\hat{k}$$

اندازه بردار فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} |\vec{V} \times \vec{a}| &= \sqrt{(ab\omega^3\sin\omega t)^2 + (-ab\omega^3\cos\omega t)^2 + (a^2\omega^3)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2\omega^6 + a^4\omega^6} \\ &= \sqrt{a^2\omega^6(b^2 + a^2)} \\ &= a\omega^3\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

برای اندازه بردار سرعت هم داریم:

$$\begin{aligned} |\vec{V}| &= \sqrt{(-a\omega\sin\omega t)^2 + (a\omega\cos\omega t)^2 + (b\omega)^2} \\ &= \sqrt{a^2\omega^2 + b^2\omega^2} \\ &= \omega\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{a\omega^3\sqrt{a^2 + b^2}}{(\omega\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

مثال ۱۵ مقدار انحنای نمودار $y=\ln(\cos x)$ را در نقطه $x=\frac{\pi}{3}$ بدست آورید.

پاسخ: رابطه انحنا به صورت زیر است:

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x \quad \overset{x=\pi/3}{\Rightarrow} \quad y'=-\sqrt{3}$$

$$y''=-(1+\tan^2 x) \quad \overset{x=\pi/3}{\Rightarrow} \quad y''=-4$$

$$\Rightarrow \quad \kappa=\frac{|-4|}{\left(1+(-\sqrt{3})^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$$

شعاع انحنا به صورت زیر است:

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=2$$

مثال ۱۶ مقدار انحنای نمودار $y=\ln x$ را در نقطه $x=1$ بدست آورید.

پاسخ: رابطه انحنا به صورت زیر است:

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'=\frac{1}{x} \quad \overset{x=1}{\Rightarrow} \quad y'=1$$

$$y''=-\frac{1}{x^2} \quad \overset{x=1}{\Rightarrow} \quad y''=-1$$

$$\Rightarrow \quad \kappa=\frac{|-1|}{\left(1+(1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

شعاع انحنا به صورت زیر است:

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=2\sqrt{2}$$

مثال ۱۷ شعاع انحنای نمودار $y=e^{x\sqrt{3}}$ را در نقطه $x=0$ تعیین کنید.

پاسخ: رابطه انحنا به صورت زیر است:

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'=\sqrt{3}e^{x\sqrt{3}} \quad \overset{x=0}{\Rightarrow} \quad y'=\sqrt{3}$$

$$y''=3e^{x\sqrt{3}} \quad \overset{x=0}{\Rightarrow} \quad y''=3$$

$$\Rightarrow \quad \kappa=\frac{|3|}{\left(1+(\sqrt{3})^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{8}$$

شعاع انحنا به صورت زیر است:

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{8}{3}$$

مثال ۱۸ انحنای خم $\vec{R}(t)=(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t, \sin t\cos t, 0)$ را در نقطه $t=\frac{\pi}{6}$ تعیین کنید.

پاسخ: با توجه به رابطه $\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$ باید بردار سرعت و شتاب در نقطه داده شده تعیین شود.

$$\vec{V}=(-\sin 2t, \cos 2t, 0), \qquad \vec{a}=(-2\cos 2t, -2\sin 2t, 0)$$

$$t=\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \qquad |\vec{V}|=1, \qquad \vec{a}=(-1, -\sqrt{3}, 0)$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}=(0,0,2)$$

$$\Rightarrow \quad \kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{2}{1^3}=2$$

مثال ۱۹ مقدار شعاع انحنای خم $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$ را در نقطه $(1, 0, 0)$ بیابید.

پاسخ: ابتدا باید مقدار انحنا تعیین شود و سپس معکوس آن که شعاع انحناست بدست می‌آید.

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$$

$$\vec{V}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, 1)$$

$$\vec{a}(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, 0)$$

با جایگذاری $t = 0$ که معادل نقطه داده شده است خواهیم داشت:

$$\vec{V} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{a} = (0, 2, 0)$$

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2), \quad \Rightarrow \quad |\vec{V} \times \vec{a}| = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

مقدار شعاع انحنای خم

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۲۰ انحنای نمودار قطبی $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}$ را در نقطه متناظر $\theta = 0$ تعیین کنید.

پاسخ: براساس تبدیلات قطبی داریم:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad x = (1+\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta, \quad y = (1+\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta$$

چون این خم مسطح است از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x' = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - (1+\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta$$

$$y' = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta + (1+\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta$$

با جایگذاری $\theta = 0$ داریم:

$$x' = 0, \quad y' = 2$$

چون $x' = 0$ است و طبق فرمول در y'' ضرب می‌شود، نیازی به محاسبه y'' نمی‌باشد. اما برای مشتق دوم x داریم:

$$x'' = -\frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta - (1+\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta$$

با جایگذاری $\theta = 0$ داریم:

$$x'' = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{|(0)y'' - (2)(-\frac{9}{4})|}{((0)^2 + (2)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{16}$$

نکته: در نمایش قطبی، برای تعیین انحنا از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال ۲۱ انحنای منحنی $r = 3 + 2\cos\theta$ در نقطه $(\frac{\pi}{2}, 3)$ در مختصات قطبی را بدست آورید.

پاسخ: در نقطه دادهشده که به فرم (r, θ) است، $r = 3$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. با توجه به رابطه انحنا در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r' = -2\sin\theta, \quad r'' = -2\cos\theta \quad \overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} r = 3,\ r' = -2,\ r'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{17}{13\sqrt{13}}$$

۳ سوالات کوتاه همراه با پاسخ

۱. رابطه $z = x^2 + y^2$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: سهمی بیضوی حول محور z که تقعر آن رو به بالاست.

۲. رابطه $x + y + z = 2$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: صفحه

۳. رابطه $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: بیضی به مرکز مبدا که حالت استاندارد آن $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{4}{3}} = 1$ است.

۴. رابطه $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: کره به مرکز مبدا و شعاع $\frac{1}{\sqrt{2}}$ که حالت استاندارد آن $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ است.

۵. رابطه $z = 1 - 4x^2 - 9y^2$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: سهمی بیضوی حول محور z که تقعر آن رو جهت منفی محور z است. مرکز سهمی بیضوی بر نقطه $(0, 0, 1)$ قرار دارد.

۶. رابطه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: مخروط حول محور z که تقعر آن رو به بالاست. مرکز مخروط بر نقطه $(0, 0, 0)$ قرار دارد.

۷. رابطه $x = -\sqrt{z^2 + y^2}$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: مخروط حول محور x که تقعر آن رو به جهت منفی محور x است. مرکز مخروط بر نقطه $(0, 0, 0)$ قرار دارد.

۸. رابطه $y = -5 - \sqrt{2z^2 + (x-4)^2}$ توصیف کننده چه رویه‌ای در فضاست؟

پاسخ: مخروط حول محور y که تقعر آن رو به جهت منفی محور y است. مرکز مخروط بر نقطه $(4, -5, 0)$ قرار دارد.

۹. بردار مماس خمی که در یک لحظه خاص بر صفحه $x - 4z = 1$ عمود باشد و آن را قطع کند در چه جهتی است؟

پاسخ: می‌دانیم بردار مشخصه هر صفحه، برداریست عمود بر آن و با مولفه‌های ضرایب x، y و z در آن صفحه. اگر خم، صفحه را قطع کند و بر آن عمود باشد، بردار مشخصه صفحه همان بردار مماس بر خم خواهد بود. در اینجا خواهیم داشت:

$$\vec{T} = (1, 0, -4)$$

۱۰. خم $\vec{\alpha}(t) = (t^2, t-1, t+1)$ صفحه $x + 2y + 2z = 5$ را در چه نقطه یا نقاطی قطع می‌کند؟

پاسخ: این مسئله مانند یافتن تقاطع خط با صفحه است که به صورت پارامتری حل می‌شود. با جایگذاری مقادیر پارامتری خم در صفحه به به پارامتر مناسب می‌رسیم.

$$x+2y+2z = 5, \quad \Rightarrow \quad t^2+2(t-1)+2(t+1) = 5, \quad \Rightarrow \quad t^2+4t-5 = 0, \quad \Rightarrow \quad t = 1, 5$$

نقاط مورد نظر $(1, 0, 2)$ و $(25, -6, -4)$ هستند.

۱۱. بردار سرعت را برای خم $\vec{\alpha}(t) = \Big(t, t^2, 2t^3\Big)$ بدست آورید.

پاسخ: بردار سرعت از مشتق بردار مکان بدست می‌آید.

$$\vec{V}(t) = \Big(1, 2t, 6t^2\Big)$$

۱۲. بردار سرعت را برای خم $\vec{\alpha}(t) = \Big(\cos t, \sin t, \sin 2t\Big)$ بدست آورید.

پاسخ: بردار سرعت از مشتق بردار مکان بدست می‌آید.

$$\vec{V}(t) = \Big(-\sin t, \cos t, 2\cos 2t\Big)$$

۱۳. بردار سرعت را برای خم $\vec{\alpha}(t) = \Big(\tan t, \ln t, \sqrt{t^2+1}\Big)$ بدست آورید.

پاسخ: بردار سرعت از مشتق بردار مکان بدست می‌آید.

$$\vec{V}(t) = \Big((1+\tan^2 t), \frac{1}{t}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\Big)$$

۱۴. بردار شتاب را برای خم $\vec{\alpha}(t) = \Big(1-t^2, 1+t^2, 1\Big)$ بدست آورید.

پاسخ: بردار شتاب با دو بار مشتق گرفتن از بردار مکان بدست می‌آید.

$$\vec{V}(t) = \Big(-2t, 2t, 0\Big), \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t) = (-2, 2, 0)$$

۱۵. بردار شتاب را برای خم $\vec{\alpha}(t) = \Big(\sin 2t, t^3, \cos 2t\Big)$ در $t = 0$ بدست آورید.

پاسخ: بردار شتاب با دو بار مشتق گرفتن از بردار مکان بدست می‌آید.

$$\vec{V}(t) = \left(2\cos 2t, 3t^2, -2\sin 2t\right), \ \vec{a}(t) = (-4\sin 2t, 6t, -4\cos 2t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(0) = (0, 0, -4)$$

۴ تمرین

۱. روابط زیر نشان‌دهنده کدام رویه در فضای $\mathbb{R}^3$ هستند. آنها را به صورت تقریبی رسم کنید.

الف- $x^2+3y^2+3z^2-2x+18y+27=0$ ب- $z+4\sqrt{x^2+4y^2}=0$

ج- $4x^2+z^2-y-16x-4z+20=0$

۲. سه‌تایی کنج فرنه را برای خم $\vec{\alpha}(t)=t\hat{i}+\cos 2t\hat{j}-\sin 2t\hat{k}$ در نقطه $(\frac{\pi}{2},-1,0)$ بیابید.

۳. معادله صفحه عمود و صفحه بوسان بر خم با رابطه زیر را در نقطه $(1,1,1)$ تعیین کنید.

$$\vec{r}(t)=(t,t^2,t^3)$$

۴. طول قوس منحنی‌های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

الف- $0\leq t\leq 4$ ، $\vec{r}(t)=(t,-2,1)$

ب- $-1\leq t\leq 2$ ، $\vec{r}(t)=(3-\sqrt{6}t,1+\sqrt{15}t,4-2t)$

ج- $-10\leq t\leq 10$ ، $\vec{r}(t)=(2+\sin 2t,3+5t,1-\cos 2t)$

۵. طول منحنی $f(x)=\int_1^x\sqrt{t^6-1}\mathrm{d}t$ را در بازه $[0,2]$ بدست آورید.

۶. طول قوس تابع با نمایش قطبی $r=e^{3\theta}$ را در بازه $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$ بدست آورید.

۷. مقدار انحنا را در خم‌های زیر بدست آورید.

الف- $\vec{r}(t)=t^2\hat{i}+t\hat{k}$ ب- $\vec{r}(t)=(t+\sin t,t-\sin t,\sqrt{2}\cos t)$

بسیاری از افراد موفق در زمان‌هایی که
دیگران در حال وقت تلف کردن هستند،
پیشرفت می‌کنند.