یادداشتی بر شکلِ یک قطره رویِ سطحِ تختِ افقی

امیرحسینِ فتح‌اللهی

fatho@mail.cern.ch

چکیده: یک قطره مایع رویِ یک سطحِ تختِ افقی، در غیابِ اثرِ وزن، قسمتی از یک کُره است. با در نظر گرفتنِ اثرِ وزن تا مرتبه‌ی اول، اختلالِ شکلِ قطره‌ی مایع به دست می‌آید.

0 مقدمه

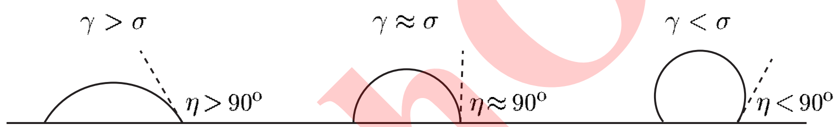
شکلِ یک قطره از مایع رویِ سطحِ جامد به وسیله‌ی این کمیت‌ها تعیین می‌شود: ۱) کششِ سطحیِ مایع σ، ۲) چسبنده‌گیِ مایع به سطح γ، و ۳) به واسطه‌ی نیرویِ وزن، حجمِ قطره. در نقطه‌ی تماسِ مایع با جامد، دو سطح با هم زاویه‌ای می‌سازند که فقط با کششِ سطحی و چسبنده‌گی تعیین می‌شود؛ اگر η زاویه‌ی تماس باشد داریم:

$$\cos\eta = 1 - \frac{\gamma}{\sigma} \qquad (1)$$

حالت‌هایِ مختلفی را که زاویه‌ی تماس می‌تواند بگیرد در شکل رسم شده است. در حالتِ $\gamma \approx 0$ قطره کم‌ترین تماس را با سطح دارد، و در $\gamma \geq 2\sigma$ قطره رویِ سطح کاملاً پَهن می‌شود. اگر Δp اختلاف‌فشارِ بیرون و داخل رویِ هر نقطه از سطحِ مایع باشد، داریم:

$$\Delta p = \pm\, \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \qquad (2)$$

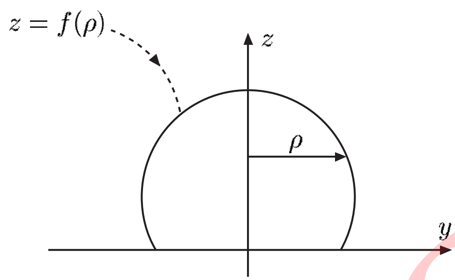
که به رابطه‌ی پوآسون معروف است، و در آن $R_{1,2}$ دو شعاع‌انحنای ِ عمود بر هم ِ سطح هست‌اند. در قراردادی که ما کار می‌کنیم، Δp فشار ِ بیرون منهای ِ فشار ِ داخل است، و $+$ $(-)$ برای ِ وقتی است که علامت ِ مؤلفه‌ی سوم ِ بردار ِ یکه‌ای که عمود به سطح ِ مایع و به طرف ِ خارج ِ مایع است مثبت (منفی) باشد. شعاع‌انحناهای ِ اصلی را می‌توان بر حسب ِ معادله‌ی سطح نوشت، و با احتساب ِ اختلاف‌فشار، که انتظار می‌رود از هیدروستاتیک بیاید، معادله‌ی پوآسون یک معادله‌ی دیفرانسیل برای ِ سطح می‌دهد، که در صورت ِ حل‌کردن، شکل ِ سطح را به‌دست می‌دهد.



شکل ِ سطح را می‌توان هم‌چنین با در نظر گرفتن ملاحظات ِ مربوط به کمینه‌شدن ِ انرژی در یک سیستم ِ ایستا نیز به دست آورد. به‌طور ِ ساده می‌توان گفت درحالی که کشش ِ سطحی تمایل به کم‌کردن ِ سطح ِ قطره، و در نتیجه برآمده‌تر کردن ِ آن دارد، چسبنده‌گی و وزن باعث ِ پخش شدن، و در نتیجه افزایش ِ سطح ِ قطره می‌شوند. رقابت ِ بین ِ این دو شکل ِ نهایی ِ قطره را تعیین می‌کند. برای ِ یک قطره با حجم ِ V، می‌توان برآوردی از سهم ِ اثرهای ِ مختلف در انرژی داشت. ابعاد ِ قطره، L، را ممکن است با کعب ِ حجم تخمین بزنیم: $L \sim V^{1/3}$. در این‌صورت سهم ِ اثر وزن از مرتبه‌ی mgL، یا $\mu g L^4$ است، که در آن μ چگالی ِ مایع است. سهم ِ کشش ِ سطحی از مرتبه‌ی σL^2 است؛ در بسیاری از موارد ممکن است فرض کنیم که اثر ِ چسبنده‌گی چیزی از رتبه‌ی کشش ِ سطحی است. با مقایسه‌ی این دو سهم سه حالت پیش می‌آید:

- $L \ll \sqrt{\sigma/(g\mu)}$، که در این‌صورت وزن در تعیین ِ شکل ِ قطره اثر ِ کمی دارد.
- $L \sim \sqrt{\sigma/(g\mu)}$، که در این‌صورت، اثر ِ وزن و کشش ِ سطحی از یک مرتبه است.
- $L \gg \sqrt{\sigma/(g\mu)}$، که در این‌صورت، وزن در تعیین ِ شکل ِ قطره اثر ِ غالب را دارد.

در واقع مقایسه‌ی کمیتِ $\ell = \sqrt{\sigma/(g\mu)}$ که بُعدِ طول دارد با L معیاری از این‌که کدام اثر غالب است را به ما می‌دهد. در این یادداشت شکلِ یک قطره بر رویِ یک سطحِ تختِ افقی، که قطره حولِ محورِ عمودِ بر سطح تقارنِ سمتی دارد، در حالتی که اثرِ وزن کوچک است تا مرتبه‌ی اولِ اختلال به دست می‌آید.



1 بعضی روابطِ ریاضی

همان‌طور که در پیوست نشان داده شده، اگر معادله‌ی یک سطح به شکلِ $z = f(x, y)$ داده شده باشد، داریم:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} + (1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \tag{3}$$

که در آن $f_x = \partial_x f$، $f_y = \partial_y f$، $f_{xx} = \partial_x^2 f$، $f_{yy} = \partial_{yy}^2 f$ و $f_{xy} = f_{yx} = \partial_x \partial_y f$.

برایِ وقتی‌که سطحِ مایع حولِ محورِ z تقارن دارد، f فقط تابعِ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ است، یعنی $z = f(\rho)$. برایِ این سطح داریم:

$$\begin{aligned} &f_x = f'\frac{x}{\rho}, \quad f_y = f'\frac{y}{\rho}, \quad f_{xx} = f''\frac{x^2}{\rho^2} + f'\frac{y^2}{\rho^3}, \\ &f_{yy} = f''\frac{y^2}{\rho^2} + f'\frac{x^2}{\rho^3}, \quad f_{xy} = \frac{xy}{\rho^2}(f'' - \frac{f'}{\rho}), \end{aligned} \tag{4}$$

که در آن‌ها $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}$ و $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2}$. با جاگذاریِ روابطِ بالا داریم:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{f'' + \frac{f'}{\rho}(1 + f'^2)}{(1 + f'^2)^{3/2}} \tag{5}$$

با تعریفِ $\psi(\rho) = \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$، داریم $\psi'(\rho) = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$، و در نتیجه:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\psi'+\frac{\psi}{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\psi). \quad (6)$$

2 شکلِ قطره بدونِ اثرِ وزن

با توجه به رابطه‌ی اخیر در بخشِ قبل و رابطه‌ی پوآسون داریم:

$$\pm\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\psi_0)=\frac{\Delta p_0}{\sigma}, \quad (7)$$

که در آن Δp_0، چون اثرِ وزن کنار گذاشته شده، ثابت است. از این به بعد $\frac{\Delta p_0}{2\sigma}$ را با κ نمایش می‌دهیم. فعلاً با مثبت کار می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از بالا داریم:

$$\rho\psi_0=\kappa\rho^2+a_0 \quad (8)$$

که a_0 ثابتِ انتگرال است. چون $\rho=0$ بالاترینِ نقطه‌ی قطره است، مشتقِ f_0 در $\rho=0$ صفر است و داریم $\psi_0(0)=0$ و در نتیجه $a_0=0$. پس داریم:

$$\frac{f_0'^2}{1+f_0'^2}=\kappa^2\rho^2 \quad (9)$$

که می‌دهد:

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\rho}=\pm\frac{\kappa\rho}{\sqrt{1-\kappa^2\rho^2}} \quad (10)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم:

$$z=f_0(\rho)=\pm\sqrt{\frac{1}{\kappa^2}-\rho^2}+z_0 \quad (11)$$

که کره‌ای به شعاعِ $|\kappa^{-1}|$ است که مرکزاش رویِ محورِ z و به فاصله‌ی z_0 از مبدا است. دو ثابتِ κ و z_0، یا به طورِ معادل Δp_0 و z_0 به وسیله‌ی حجمِ قطره و $\cos\eta$ پیدا می‌شوند. قبل از آن، در موردِ دو علامتِ $\pm$ نیز باید دقت کرد. بسته به زاویه‌ی تماسِ η مرکزِ کره ممکن است داخلِ قطره $(\eta<90)$، رویِ سطحِ افقی $(\eta=90)$ یا خارجِ قطره $(\eta>90)$

باشد؛ رجوع به شکل‌های مقدمه. برایِ وقتی که مرکزِ کره خارجِ قطره یا رویِ سطح است باید علامت + را انتخاب کرد، چون برایِ سطح داریم: $z \geq z_0$. برایِ حالتی که مرکزِ کره داخلِ قطره است هر دو علامت باید نگه داشته شوند، زیرا + نقاطِ بالایِ مرکز و − نقاطِ پائینِ مرکز را می‌دهد.

با جاگذاریِ جوابِ $z = \pm\sqrt{R^2 - \rho^2} + z_0$ در معادله‌ی (7) می‌بینیم $R = -\kappa^{-1}$. توجه داریم که Δp_0 و در نتیجه κ منفی است. همان‌طور که اشاره شد دو مقدارِ z_0 و R به وسیله‌ی حجمِ قطره و $\cos\eta$ پیدا می‌شوند. با استدلالِ ساده‌ی هندسی می‌بینیم:

$$\cos\eta = \frac{z_0}{R} \tag{12}$$

برایِ $\eta < 90$ به دست می آوریم $z_0 > 0$، که درست است. برایِ $\eta > 90$ داریم $z_0 < 0$ که یعنی مرکزِ کره زیرِ سطحِ افقی است. هم‌چنین با نوشتنِ حجم بر حسبِ حجمِ قسمتی از یک کره یک معادله‌ی دیگر به دست می آید که برایِ تعیینِ z_0 و R کافی است.

3 شکلِ قطره با حجمِ کم یا گرانشِ ضعیف

حال در اولین مرتبه‌ی اختلال تصحیحِ وزنِ قطره را به شکلِ کروی ئی که در بخشِ قبل به دست آمد پیدا می‌کنیم. با وجودِ وزن اختلافِ فشار به شکلِ زیر خواهد بود:

$$\Delta p(z) = \Delta p_0 + \mu g z = \Delta p_0 + \mu g f(\rho) \tag{13}$$

برایِ نیمه‌ی بالائی داریم:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\psi) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f \tag{14}$$

می‌بینیم که اثرِ وزن، همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، با پارامترِ $\frac{\mu g}{\sigma}$ وارد می‌شود. از این پس کمیتِ بدونِ بُعدِ $V^{2/3}\frac{\mu g}{\sigma}$ که در آن V حجمِ قطره است را با λ نمایش می‌دهیم. انتظار می‌رود که در اولین تصحیح شکلِ کروی با توانِ یک از λ تغییر کند:

$$z = f(\rho) = f_0(\rho) + \lambda f_1(\rho) \tag{15}$$

که در آن $f_0(\rho)$ حلِ کروی ئی است که در بخشِ قبل پیدا شد، و در این‌جا هدف پیدا کردنِ $f_1(\rho)$ است. با جاگذاری داریم:

$$\psi(\rho) = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{f_0'}{\sqrt{1+f_0'^2}} + \lambda\frac{f_1'}{(1+f_0'^2)^{3/2}} + O(\lambda^2) \tag{16}$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا، و این‌که f_0 در معادله‌ی با $\lambda = 0$ صدق می‌کند به دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big[\rho\frac{f_1'}{(1+f_0'^2)^{3/2}}\Big] = \frac{1}{V^{2/3}}f_0(\rho)\rho \tag{17}$$

در بخشِ قبل برای نیمه‌ی بالائی به دست آمد $f_0(\rho) = \sqrt{R^2-\rho^2}+z_0$. با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$\rho\frac{f_1'}{(1+f_0'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{V^{2/3}}\Big(\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{3/2} - \frac{1}{2}z_0\rho^2\Big) + a \tag{18}$$

که در آن a ثابتِ انتگرال‌گیری است. $\rho = 0$ متعلق به نیمه‌ی بالائی است که با شرطِ صفر شدنِ مشتق می‌دهد $a = \dfrac{R^3}{3V^{2/3}}$. با جاگذاری یِ مجددِ $f_0(\rho)$ داریم:

$$f_1'(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}}\Big[\frac{1}{3\rho} - \frac{z_0}{2}\frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{3/2}} - \frac{R^3}{3\rho(R^2-\rho^2)^{3/2}}\Big] \tag{19}$$

توجه داریم که در رابطه‌ی بالا حدِ $\rho \to 0$ وجود دارد و همان‌طور که انتظار می‌رود، چون مماس بر قطره در بالاترین نقطه موازی یِ سطح است، صفر است. با یک‌بارِ دیگر انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا به دست می‌آوریم:

$$f_1(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}}\Big[\frac{1}{3}\ln\rho - \frac{3z_0+2R}{6\sqrt{R^2-\rho^2}} + \frac{1}{6}\ln\Big(\frac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}\Big)\Big] + b' \tag{20}$$

که در آن b' ثابتِ انتگرال‌گیری است. مجدداً توجه داریم که حدِ $\rho \to 0$ عبارتِ بالا وجود دارد. می‌توان جوابِ بالا را به شکلِ زیر هم نوشت:

$$f_1(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}}\Big[\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{2R}\Big) - \frac{3z_0+2R}{6\sqrt{R^2-\rho^2}}\Big] + b \tag{21}$$

که در آن b یک ثابت است. همان‌طور که دیده می‌شود جواب برایِ $\rho \approx R$ رفتارِ بدی دارد. در صورتی‌که $\eta > 90$ باشد نیمه‌ی پائینِ مرکز وجود ندارد و همین f_1 جواب است.

در این صورت ثابتِ b از این به دست می آید که $f_1(\rho_0)=0$، که در آن ρ_0 شعاعِ دایره‌ای است که قطره رویِ سطح می‌سازد، یعنی $\rho_0=\sqrt{R^2-z_0^2}$. اما در صورتی‌که $\eta<90$ باشد باید جوابِ نیمه‌ی پائینی را هم به دست آورد. برایِ نیمه‌ی پائینی هم پس از جاگذاری یِ $f_0(\rho)=-\sqrt{R^2-\rho^2}+z_0$، و دو بار انتگرال‌گیری می‌توان f_1 را به دست آورد. توجه داریم که برایِ نیمه‌ی پائینی معادله‌ی پوآسون باید با منفی انتخاب شود. این‌بار اولین ثابتِ انتگرال‌گیری با شرطِ $f'(\rho_0)=f_0'(\rho_0)+\lambda f_0'(\rho_0)=\tan\eta$ تعیین می‌شود. در این‌صورت جوابِ نهائی برایِ نیمه‌ی پائینی به شکلِ زیر است:

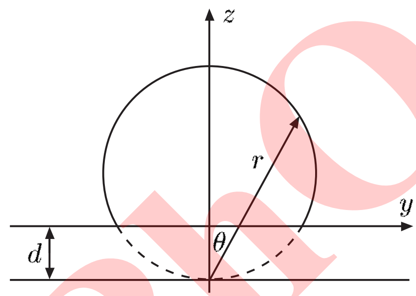
$$\begin{aligned} f_1(\rho) \;&=\; -\frac{R^3}{V^{2/3}}\Big[\frac{1}{3}\ln\frac{\rho}{2R}+\frac{z_0^3}{6R^2\sqrt{R^2-\rho^2}}\Big] \\ &\quad -\frac{z_0(3R^2-z_0^2)}{12V^{2/3}}\ln\Big(\frac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}\Big)+c \qquad (22) \end{aligned}$$

که در آن c ثابت است. این بار c با شرطِ $f_1(\rho_0)=0$ تعیین می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود این جواب هم در $\rho\approx R$ رفتارِ بدی دارد. پس در وقتی‌که هر دو نیمه‌ی بالائی و پائینی وجود دارند جواب‌هایِ اختلالی در $\rho\approx R$، که به اصطلاح شکمِ قطره است، قابل‌قبول نیست‌اند. یک راه برایِ به دست آوردنِ شکلِ قطره در ناحیه‌ی شکم این است جایِ متغیر (ρ) و تابع $(z=f(\rho))$ را با هم عوض کنیم، مثلاً به شکلِ $\rho=h(z)$. در این صورتِ مشتقِ $h(z)$ در ناحیه‌ی شکم، یعنی $z=z_0$، صفر می‌شود. با این تغییر باید دوباره تمامِ معادلات را برایِ سطح نوشت، و پس از حل شکلِ قطره را برایِ ناحیه‌ی شکم به دست آورد. البته دیده می‌شود تابعی که برایِ ناحیه‌ی شکم مناسب است، در ناحیه‌ی بالایِ قطره $(z\approx z_0+R)$ رفتارِ بدی دارد. با این روش ما سه تابع پیدا می‌کنیم، که عبارت‌اند از: f_1 برایِ نیمه‌های بالائی و پائینی، و h برای ناحیه‌ی شکم. این سه تابع را باید به شکلِ هم‌واری به هم چسباند تا شکلِ کلِ قطره به دست آید.

یک روشِ به‌تر هم وجود دارد که به‌وسیله‌ی آن احتیاجی به پیدا کردنِ جواب‌هایِ دیگر و سپس چسباندنِ آن‌ها نداریم. در این روش، با استفاده از یکی از جواب‌ها، مثلا f_1 برایِ نیمه‌ی بالائی، به مختصاتی می‌رویم که جواب را برایِ همه‌ی ناحیه‌ها بدهد. این مختصات باید طوری باشد که مثلاً مشتقِ توابع در آن بی‌نهایت نشود. یک انتخاب می‌تواند مختصاتِ کروی باشد. برایِ راحتیِ کار مبدا را در پائین‌ترین نقطه‌ی کره‌ای که قطره‌ی بدونِ وزن قسمتی از آن است می‌گیریم، یعنی در فاصله‌ی d از سطح؛ رجوع به شکل. می‌بینیم که: $d=R-z_0$ (z_0 می‌تواند مثبت یا منفی باشد). در مختصاتِ جدید

هم می‌توان معادله‌ی سطح را به دست آورد و به دنبالِ جواب‌هایِ دقیق یا اختلالی یِ آن گشت. ولی از آن‌جا که جواب‌ها، دستِ کم، در بعضی از نواحی به دست آمده‌اند، کارِ ساده‌تر این است که یکی از جواب‌ها را به مختصاتِ جدید ببریم، و انتظار داشته باشیم که حل برایِ همه‌ی نواحی باشد. در مختصاتِ جدیدی که انتخاب کرده‌ایم به دنبالِ r به عنوانِ تابعی از متغیرِ θ هستیم. به ساده‌گی دیده می‌شود:

$$r(\theta)\cos\theta - d = z = f(\rho) = f_0(\rho) + \lambda f_1(\rho) \tag{23}$$



هم‌چنین انتظار داریم برایِ $r(\theta)$ هم یک قسمت برایِ قطره‌ی بدونِ وزن و یک قسمتِ دیگر برایِ حلِ اختلالی بشود در نظر گرفت. این دو قسمت را به‌ترتیب با $r_0(\theta)$ و $r_1(\theta)$ نشان می‌دهیم. پس داریم: $r(\theta) = r_0(\theta) + \lambda r_1(\theta)$. هم‌چنین

$$\rho = r(\theta)\sin\theta = r_0(\theta)\sin\theta + \lambda r_1(\theta)\sin\theta \tag{24}$$

برایِ حلِ کروی، با توجه به شکل، می‌توان دید که $r_0(\theta) = 2R\cos\theta$، که می‌دهد:

$$\rho = r(\theta)\sin\theta = R\sin(2\theta) + \lambda r_1(\theta)\sin\theta \tag{25}$$

با جاگذاری در (23) تا مرتبه‌ی یک در λ داریم:

$$\lambda^0: \qquad r_0(\theta)\cos\theta - R + z_0 = f_0(\rho)\Big|_{\rho=R\sin(2\theta)} \tag{26}$$

$$\lambda^1: \qquad r_1(\theta)\cos\theta = \left[r_1(\theta)\sin\theta\,\frac{\partial f_0}{\partial\rho} + f_1(\rho)\right]_{\rho=R\sin(2\theta)} \tag{27}$$

از این‌جا به بعد f_0 و f_1 را برای ِ نیمه‌ی بالائی که همیشه وجود دارد جای‌گزین می‌کنیم. رابطه‌ی اول که برآورده می‌شود. با جاگذاری در رابطه‌ی دوم به‌دست می‌آوریم:

$$r_1(\theta) = -\frac{R^3}{V^{2/3}\cos\theta}\left(\frac{2}{3}\cos(2\theta)\ln\cos\theta - \frac{3z_0+2R}{6R}\right) + b\frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta} \tag{28}$$

اگرچه این رابطه از رابطه‌ای که برای ِ نیمه‌ی بالائی وجود داشت به دست آمد، ولی به راحتی دیده می‌شود که برای ِ همه‌ی سطح ِ قطره درست است، یعنی برای ِ بیش‌ترین محدوده‌ای که θ ممکن است بگیرد، یعنی $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$. ثابت ِ b مانند ِ قبل از شرط ِ زیر می آید:

$$r_1(\theta_0) = 0, \qquad \tan\theta_0 = \frac{\rho_0}{d} = \frac{\sqrt{R^2 - z_0^2}}{R - z_0} \tag{29}$$

4 پیوست: انحنای ِ میان‌گین برای ِ سطح ِ دوبُعدی

یک سطح ِ دوبُعدی یک نگاشت از $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^3$ است:

$$(u,v) \to \mathbf{r} = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v)) \tag{30}$$

حالت ِ خاص ِ بالا این است که

$$x^1 = x = u, \quad x^2 = y = v, \quad x^3 = z \tag{31}$$

خم ِ α روی ِ سطح یک نگاشت از $t \in \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^3$ است:

$$\alpha : t \to (u(t), v(t)) \to (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v)) \tag{32}$$

مماس بر خم با بردار ِ زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{u}\,\partial_u\mathbf{r} + \dot{v}\,\partial_v\mathbf{r} = \dot{u}\,\mathbf{r}_u + \dot{v}\,\mathbf{r}_v = v_\alpha\mathbf{t} \tag{33}$$

که در آن $\mathbf{t}$ بردار ِ یکه است. می‌توان خم‌های ِ v–ثابت و u–ثابت را بر روی ِ این سطح ِ دوبُعدی تعریف کرد. مماس بر خم‌های ِ v–ثابت و u–ثابت به ترتیب با عبارت‌های ِ زیر داده می‌شوند:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \partial_u \mathbf{r} = (\partial_u x^1, \partial_u x^2, \partial_u x^3), \tag{34}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \partial_v \mathbf{r} = (\partial_v x^1, \partial_v x^2, \partial_v x^3) \tag{35}$$

هر بردارِ مماس بر سطح را می‌توان ترکیب ِ خطی ئی از این دو بردار نوشت:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{r}_u + \lambda_2 \mathbf{r}_v \tag{36}$$

هم‌چنین بردارِ یکه‌ی عمود بر هر نقطه‌ی سطح را داریم:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{37}$$

خم ِ سرعت‌واحد خمی است که: $|\mathbf{v}_\alpha| = v_\alpha = 1$. شتاب نیز چیزی غیر از مشتق بردارِ مماس (بردارِ سرعت) نیست:

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}_\alpha = \dot{v}_\alpha \mathbf{t} + \frac{v_\alpha^2}{r}\, \mathbf{s} \tag{38}$$

که در آن $\mathbf{s}$ بردارِ یکه است با تعریف ِ $\dot{\mathbf{t}} \propto \mathbf{s}$. توجه داریم که چون طول ِ $\mathbf{t}$ واحد است، $\mathbf{s}$ به آن عمود است. البته $\mathbf{s}$ لزوماً به سطح عمود نیست. r در بالا نقش ِ شعاع‌انحنای ِ موضعی ی ِ خم را دارد. شعاع‌انحنای ِ R بر روی ِ یک خم ِ سرعت‌واحد ِ α با مولفه‌ی شتاب روی ِ بردارِ عمود بر سطح تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{R} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{v}}_\alpha \cdot \mathbf{n} \tag{39}$$

در نتیجه داریم: $\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}{r}$. از آن‌جا که $\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$، با گرفتن ِ مشتق داریم:

$$\frac{1}{R} = \dot{\mathbf{v}}_\alpha \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{v}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{n}} \tag{40}$$

با تعریف ِ $\mathbf{n}_u = \partial_u \mathbf{n}$ و $\mathbf{n}_v = \partial_v \mathbf{n}$ داریم:

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{u}\, \mathbf{n}_u + \dot{v}\, \mathbf{n}_v \tag{41}$$

که با جاگذاری می‌دهد:

$$\frac{1}{R} = -(\dot u\,\mathbf{r}_u + \dot v\,\mathbf{r}_v)\cdot(\dot u\,\mathbf{n}_u + \dot v\,\mathbf{n}_v) \tag{42}$$

$$= l\dot u^2 + 2m\dot u\dot v + n\dot v^2 \tag{43}$$

که در آن

$$l = -\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_u, \quad 2m = -(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_u + \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_v), \quad n = -\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_v \tag{44}$$

انحنای ِ میان‌گین با کمک ِ دو خم ِ سرعت‌واحد ِ عمود بر هم ِ α_1 و α_2 تعریف می‌شود:

$$v_{\alpha_1} = v_{\alpha_2} = 1, \quad \alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \mathbf{v}_{\alpha_1}\cdot\mathbf{v}_{\alpha_2} = 0 \tag{45}$$

در این‌صورت انحنای ِ میان‌گین ِ H می‌شود:

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = l(\dot u_1^2 + \dot u_2^2) + 2m(\dot u_1\dot v_1 + \dot u_2\dot v_2) + n(\dot v_1^2 + \dot v_2^2) \tag{46}$$

با نوشتن ِ شرط‌های ِ سرعت‌واحد بودن و تعامد داریم:

$$E\dot u_1^2 + 2F\dot u_1\dot v_1 + G\dot v_1^2 = 1 \tag{47}$$

$$E\dot u_2^2 + 2F\dot u_2\dot v_2 + G\dot v_2^2 = 1 \tag{48}$$

$$E\dot u_1\dot u_2 + F(\dot u_1\dot v_2 + \dot u_2\dot v_1) + G\dot v_1\dot v_2 = 0 \tag{49}$$

که در آن‌ها:

$$E = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v \tag{50}$$

با حذف ِ $\dot u_i$ و $\dot v_i$ بین ِ (37) تا (40) داریم:

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \tag{51}$$

در حالت ِ خاص که $u = x$، $v = y$ و $x^3 = z = f(u,v)$، داریم:

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, f_u), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, f_v) \tag{52}$$

که در آن $f_u = \partial_u f$ و $f_v = \partial_v f$. در نتیجه: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-f_u, -f_v, 1)$، که می‌دهد:

$$\mathbf{n} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \tag{53}$$

هم‌چنین داریم:

$$E + 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2 \tag{54}$$

می‌توان $\mathbf{n}_u = \partial_u \mathbf{n}$ و $\mathbf{n}_v = \partial_v \mathbf{n}$ را حساب کرد، و از آن‌جا l، m و n را. با جاگذاری به دست می آید:

$$H = \frac{(1 + f_v^2) f_{uu} + (1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} \tag{55}$$

قدردانی: از محمد ِ خرّمی که پیش‌نهاد ِ پیداکردن ِ حل در مختصات ِ متفاوت را داد بسیار متشکرم. از امیر آقامحمدی و محمد خرّمی برای ِ نکاتی که در مورد ِ متن متذکر شدند ممنون‌ام.

یادداشت‌ها و مراجع

- یک مرجع ِ خوب برای ِ یادگرفتن ِ مطالب ِ مربوط به سطوح ِ مایع کتاب ِ زیر است:

J. Oprea, “The Mathematics Of Soap Films: Explorations With Maple,” American Mathematical Society, 2000.

- مرجع ِ خوب ِ دیگر، درس‌نامه‌ی امیر آقامحمدی برای ِ مکانیک ِ سیالات است (دانش‌گاه ِ الزهرا).

یادداشتی بر شکلِ یک قطره رویِ سطحِ تختِ افقی II

امیرحسینِ فتح‌اللهی

ahfatol@gmail.com

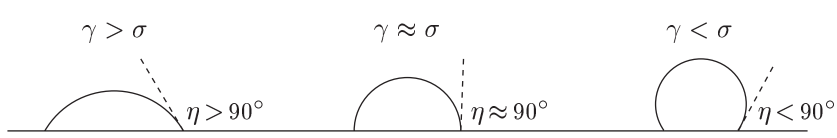
چکیده: شکلِ یک قطره‌ی مایع رویِ یک سطحِ تختِ افقی، در حالتی که زاویه‌ی تماس بینِ مایع و سطح بزرگ‌تر از 90° است، به وسیله‌ی حلّ از نوعِ سری مطالعه شده است.

0 مقدمه

زاویه در نقطه‌ی تماسِ یک مایع با یک جامد با کشش‌سطحیِ مایع (σ) و چسبنده‌گیِ مایع به جامد (γ) تعیین می‌شود؛ اگر η زاویه‌ی تماس باشد داریم:

$$\cos\eta = 1 - \frac{\gamma}{\sigma} \tag{1}$$

حالت‌هایِ مختلفی را که زاویه‌ی تماس می‌تواند بگیرد در شکل رسم شده است.



سطحِ قطره از معادله‌ی پوآسون داده می‌شود؛ اگر Δp اختلاف‌فشارِ بیرون و داخل رویِ هر نقطه از سطحِ مایع باشد، داریم:

$$\Delta p = \pm\, \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{2}$$

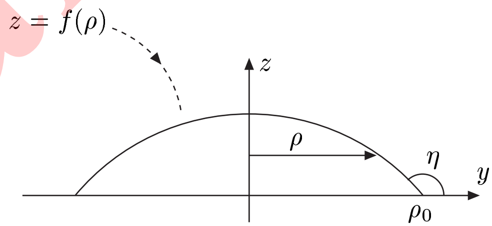
در آن $R_{1,2}$ دو شعاع‌انحنایِ عمود بر همِ سطح هست‌اند. برایِ قراردادی که برایِ $\pm$ به کار می‌بریم به [1] رجوع کنید.

در مقاله‌ی قبلی [1] شکلِ یک قطره رویِ یک سطحِ تختِ افقی در مرتبه‌ی صفر و یک از اثرِ وزن به دست آمد. دیده شد که در مرتبه‌ی صفر، یعنی بدونِ اثرِ وزن، قطره قسمتی از یک کره است. مشخصاتِ کره به وسیله‌ی حجم و زاویه‌ی تماسِ بینِ مایع و سطح داده می‌شود.

در این یادداشت از روشِ سری معادله‌دیفرانسیلِ سطح را مطالعه می‌کنیم. دو حالتِ $\eta > 90^\circ$ و $\eta < 90^\circ$ باید جداگانه مطالعه شوند، چون در دوّمی قطره ناحیه‌ی به اصطلاح شکم را دارد که کار را متفاوت می‌کند. در این یادداشت به حالتِ $\eta > 90^\circ$ می‌پردازیم.

1 مقدماتِ ریاضی

برایِ یک قطره که تقارنِ سمتی دارد، مانندِ [1]، از مختصاتِ استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت zِ سطح به عنوانِ تابعی از ρ بیان می‌شود، $z = f(\rho)$.



$\rho = 0$ قله‌ی قطره است، پس $f'(0) = 0$. نقطه‌ای که f صفر می‌شود را ρ_0 می‌گیریم که مقدارش باید تعیین شود. پس داریم:

$$f(\rho_0) = 0 \tag{3}$$

$$f'(\rho_0) = \tan\eta < 0 \tag{4}$$

در [1] نشان داده شد که معادله‌ی پوآسون با تقارنِ سمتی به شکلِ زیر خواهد بود:

$$\sigma\,\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\,\frac{f'}{\sqrt{1+f'^{\,2}}}\right)=\Delta p, \tag{5}$$

برای قطره با $\eta > 90$ که همه جا محدّب است قرارداد علامتِ مثبت را نگه می‌دارد. برای تفاوتِ فشار داریم:

$$\Delta p=\Delta p_0+\mu\,g\,f(z) \tag{6}$$

که در آن μ چگالیِ مایع و g شتاب‌جاذبه است. Δp_0 یک مقدارِ ثابت است که باید تعیین شود. با انتگرال‌گیری از دو طرفِ معادله داریم:

$$\rho\,\frac{f'}{\sqrt{1+f'^{\,2}}}=\kappa\,\rho^2+\frac{\mu g}{\sigma}\int_0^{\rho}\xi\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{7}$$

که در آن $\kappa=\dfrac{\Delta p_0}{2\,\sigma}$ است؛ از [1] می‌دانیم Δp_0 و κ منفی هستند. در واقع معادله‌ی بالا معادله‌ای است که با حلِّ آن $f(\rho)$ به دست می آید.

برایِ حجمِ قطره داریم:

$$V=2\pi\int_0^{\rho_0}\xi\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

با استفاده از تعریفِ حجم، با انتخابِ $\rho=\rho_0$ در (7) داریم:

$$-\rho_0\sin\eta=\kappa\,\rho_0^2+\frac{\mu g}{2\pi\,\sigma}\,V \tag{9}$$

که برایِ به دست آوردنِ آن از این استفاده کرده‌ایم که:

$$\left.\frac{f'}{\sqrt{1+f'^{\,2}}}\right|_{\rho=\rho_0}=\frac{\tan\eta}{\sqrt{1+\tan^2\eta}}=-\sin\eta<0$$

به این ترتیب داریم:

$$-\,\kappa=\frac{\sin\eta}{\rho_0}+\frac{\mu g\;V}{2\pi\,\sigma\,\rho_0^2} \tag{10}$$

توجه داریم که رابطه‌ای که به دست آمد دقیق است، و ρ_0 و κ را، به عنوانِ دو ثابتِ ناشناخته، به هم ربط می‌دهد. خواهیم دید که با استفاده از این رابطه‌ی دقیق می‌توان برآوردی از اعتبارِ جوابِ سری، و در صورتِ لزومِ درصدِ خطا، به دست آورد.

در این‌جا حل برای ِ حالت ِ بدون ِ گرانش ($g = 0$) را یادآوری می‌کنیم [1]. به راحتی دیده می‌شود که تابع به شکل ِ

$$f_{g=0}(\rho) = z_0 + \sqrt{R^2 - \rho^2} \tag{11}$$

در (7) صدق می‌کند به شرطی که $R = |\kappa|^{-1}$، و z_0 یک ثابت باشد. عبارت ِ بالا معادله‌ی یک کره به شعاع ِ R است که مرکزش در z_0 است. ثابت‌های ِ R، z_0 و ρ_0 از شرط‌های ِ (3)، (4) و (8) به دست می‌آیند:

$$z_0 = R\ \cos\eta < 0, \tag{12}$$

$$\rho_0 = R\ \sin\eta, \tag{13}$$

$$R = \left(\frac{3\,V}{\pi\ (1+\cos\eta)^2(2-\cos\eta)}\right)^{1/3} \tag{14}$$

دیده می‌شود که همه چیز بر حسب ِ η و V داده می‌شود.

2 حل ِ معادله به روش ِ سری

می‌خواهیم معادله‌ی (7) را به روش جای‌گزینی ِ یک سری برای ِ f بر حسب ِ ρ حل کنیم. چون f تابع ِ زوج است پس فقط توان‌های ِ زوج ِ ρ وارد می‌شوند، پس داریم:

$$f(\rho) = a_0 + a_2\,\rho^2 + a_4\,\rho^4 + a_6\,\rho^6 + \cdots \tag{15}$$

در حلّ ِ دقیق تمام ِ جمله‌ها می‌مانند، امّا ما در این‌جا به دنبال ِ حالت‌هائی هستیم که تعداد ِ محدودی از جمله‌ها هم جواب ِ خوبی باشند. طبیعی است هر چه تعداد ِ بیش‌تری از جمله‌ها نگه داشته شوند تقریب به‌تر می‌شود.

معادله‌ی (7) با بسط ِ جمله‌ی دارای ِ رادیکال، و جاگذاری ِ بسط ِ (15) در انتگرال ِ آن، به شکل ِ زیر در می‌آید:

$$\rho\,f'\left(1 - \frac{1}{2}\,f'^{\,2} + \frac{3}{8}\,f'^{\,4} - \frac{5}{16}\,f'^{\,6} + \cdots\right) = \kappa\,\rho^2 + \frac{\mu g}{\sigma}\left(\frac{1}{2}a_0\rho^2 + \frac{1}{4}a_2\rho^4 + \frac{1}{6}a_4\rho^6 + \frac{1}{8}a_6\rho^8 + \cdots\right) \tag{16}$$

قبل از آوردنِ مثال‌هائی از روشِ سری، در موردِ شرایطِ عمومی که تحتِ آن انتظار داریم حلِّ سری، مخصوصاً وقتی تعدادِ جملاتِ کمی دارد، تقریبِ خوبی باشد بحث می‌کنیم [2]. تبدیل‌هایِ $\rho = A\,x$ و $f = B\,F$ را طوری درنظر می‌گیریم که در آن‌ها A و B دو ثابت باشند، و عبارت‌هایِ شاملِ متغیرهایِ جدید (x و F) از مرتبه‌ی 1 باشند؛ نه خیلی کوچک، نه خیلی بزرگ. در این صورت، از دو شرطِ (4) و (8)، که شاملِ پارامترهایِ قطره هستند داریم:

$$\frac{B}{A} \sim |\tan\eta|, \tag{17}$$

$$B\,A^2 \sim V \tag{18}$$

که می‌دهد $A \sim \left(\dfrac{V}{|\tan\eta|}\right)^{1/3}$ و $B \sim (V\,\tan^2\eta)^{1/3}$. با انجامِ تبدیل‌ها در معادله‌دیفرانسیلِ (7) داریم:

$$x\,\frac{F'}{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}\,F'^{\,2}}} = \frac{A^2}{B}\kappa\,x^2 + \frac{\mu g}{\sigma}\,A^2\int_0^x x'\,F(x')\,\mathrm{d}x' \tag{19}$$

در این بحث جمله‌ی شاملِ κ مهم نیست، چون همان طور که خواهیم دید، این جمله به همراهِ جملاتِ دیگرِ شاملِ x^2، فقط مقدارِ κ را می دهد. همان‌طور که دیده شد، در (16) فرض شد که می‌توان $f\,'$ را کوچک گرفت، که به طورِ معادل می‌دهد:

$$\frac{B^2}{A^2} \sim \tan^2\eta \ll 1 \tag{20}$$

از مقایسه‌ی جملاتِ بعد از x^2 در دو طرف داریم:

$$\frac{B^2}{A^2} \sim \frac{\mu g}{\sigma}\,A^2 \tag{21}$$

که می‌دهد:

$$\left(\frac{\mu g}{\sigma}\right)^3 V^2 \ll \tan^2\eta \ll 1. \tag{22}$$

2.1 حالتِ $f = a_0 + a_2\,\rho^2$:

در این حالت چهارمجهول داریم: a_0، a_2، ρ_0، و κ. برای پیدا کردنِ سه تایِ اوّل سه شرطِ (3)، (4) و (8) کافی هست‌اند، و احتیاجی به معادله‌دیفرانسیلِ (7) نیست. از سه

شرط داریم:

$$a_0 + a_2\,\rho_0^2 = 0, \qquad (23)$$
$$2\,a_2\,\rho_0 = \tan\eta, \qquad (24)$$
$$\pi\,\rho_0^2\,(a_0 + \frac{1}{2}\,a_2\,\rho_0^2) = V \qquad (25)$$

به این ترتیب به دست می آید:

$$a_0 = \frac{2V}{\pi\rho_0^2}, \qquad (26)$$
$$a_2 = -\frac{2V}{\pi\rho_0^4}, \qquad (27)$$
$$\rho_0 = \left(\frac{-4\,V}{\pi\,\tan\eta}\right)^{1/3} \qquad (28)$$

(یادآوری می‌شود $\tan\eta < 0$). در این صورت داریم:

$$f(\rho) = \frac{2V}{\pi\rho_0^2}\left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \qquad (29)$$

که یک سهمیِ وارونه است. دیده می‌شود که در این جواب اثری از شتابِ جاذبه‌ی g نیست. همان طور که انتظار می‌رود و خواهیم دید این جواب و جوابِ کره در شرایطی یک‌سان با هم یکی می‌شوند.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، با استفاده از رابطه‌ی دقیقِ (10) می‌توان از این که چه‌قدر تقریبِ به کاررفته خوب است، و در صورتِ لزوم درصدِ خطا را حساب کرد استفاده کنیم. به سراغِ معادله‌دیفرانسیل می‌رویم تا κ را به دست آوریم. از نگه‌داشتنِ جمله‌ها تا مرتبه‌ی ρ^2 در (7) داریم:

$$2\,a_2\,\rho^2\,(1 + \mathrm{O}(\rho^2)) = \kappa\,\rho^2 + \frac{\mu g}{\sigma}\frac{1}{2}a_0\rho^2 + \mathrm{O}(\rho^4) \qquad (30)$$

که می‌دهد:

$$-\kappa = -2\,a_2 + \frac{\mu g}{2\sigma}\,a_0 \qquad (31)$$

با جاگذاری از جواب‌هائی که به دست آمد داریم:

$$-\kappa = -\frac{\tan\eta}{\rho_0} + \frac{\mu g\ V}{\pi\,\sigma\,\rho_0^2} \tag{32}$$

از مقایسه‌ی عبارتِ بالا با رابطه‌ی دقیقِ (10) داریم:

$$-(\tan\eta + \sin\eta) + \frac{\mu g\ V}{2\pi\,\sigma\,\rho_0} = 0 \tag{33}$$

عبارتِ بالا جمعِ دو جمله‌ی مثبت است و تنها وقتی می‌تواند درست باشد که هر کدام صفر باشند. در واقع، چون یکی از جواب‌ها تقریبی است، کافی است داشته باشیم:

$$-(\tan\eta + \sin\eta) \ll 1 \tag{34}$$

$$\frac{\mu g\ V}{\sigma\,\rho_0} \ll 1 \tag{35}$$

از اولی نتیجه می‌گیریم که η از $180°$ دور نباشد، که یعنی قطره در نقطه‌ی تماس با جامد با زاویه‌ی کمی از سطح جدا می‌شود. مثلاً برایِ وقتی که مایع با زاویه‌ی $20°$ جدا می‌شود ($\eta = 160°$) داریم:

$$-(\tan\eta + \sin\eta) \simeq 0.02 \tag{36}$$

رابطه‌ی دوم کم‌بودنِ اثر جمله‌ای را که شاملِ g است را نشان می‌دهد. در واقع اگر در رابطه‌ی دوم ρ_0 ِ به دست آمده را جاگذاری کنیم داریم:

$$\frac{\mu g\ V}{\sigma\,\rho_0} \approx \frac{\mu g\ V^{2/3}}{\sigma}\,(-\tan\eta)^{1/3} \ll 1 \tag{37}$$

برایِ $\eta = 179°$ داریم $(-\tan\eta)^{1/3} \simeq 0.26$. در نتیجه می‌بینیم که رابطه‌ی بالا عمدتاً شرط رویِ بزرگیِ حجمِ قطره می‌گذارد:

$$V^{1/3} \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\,g}} \tag{38}$$

که دقیقاً محدوده‌ای است که کم‌بودنِ اثرِ وزن را نشان می‌دهد [1]. به طورِ خلاصه برایِ وقتی که η از $180°$ دور نیست، و قطره خیلی بزرگ نیست، جوابِ سهمیِ وارونه خوب است. تحلیل و مقدارهایِ گفته شده در بالا با رابطه‌ی عمومیِ (22) سازگاری دارد.

آیا این حل با حالتِ خاصّی از حلِّ دقیقِ $g=0$ تطابق دارد؟ می‌بینیم که بله.

در حلِ کروی که با $g=0$ به دست آمد، اگر η نزدیکِ $180°$ باشد ($\eta \lesssim 180°$)، از رابطه‌هایِ بخشِ قبل، خواهیم داشت:

$$\rho_0 \ll R, \tag{39}$$

در این صورت می‌توانیم رادیکالِ (11) را بسط دهیم، که می‌دهد:

$$f_{g=0}(\rho)\Big|_{\rho\ll R} = z_0 + R - \frac{\rho^2}{2\,R} + \cdots \tag{40}$$

با انتخابِ $\eta = 180° - \alpha$، با شرطِ $\alpha \ll 1\ \mathrm{rad}$، برایِ R داریم:

$$R \simeq \left(\frac{3\,V}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^{2/3} 3^{1/3}} \simeq \left(\frac{4\,V}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{\alpha^{4/3}} \tag{41}$$

با

$$\tan\eta \simeq -\sin\eta = -\sin\alpha \simeq -\alpha$$

و این که $\rho_0 = R\sin\eta \simeq R\,\alpha$ مقدارِ ρ_0 همان مقدارِ قبلی می‌شود. هم چنین داریم

$$z_0 + R \simeq R\,\frac{\alpha^2}{2} \tag{42}$$

که با این جاگذاری دقیقاً جوابِ سهمیِ وارونه‌ای که داشتیم تولید می‌شود.

2.2 حالتِ $f = a_0 + a_2\,\rho^2 + a_4\,\rho^4$:

با جاگذاریِ بسطِ دارایِ سه جمله، و مساوی قراردادنِ ضرایبِ ρ^2 و ρ^4 در دو طرفِ (16) برایِ ضرایب به دست می آوریم:

$$2\,a_2 = \kappa + \frac{\mu g}{2\sigma}\,a_0 \tag{43}$$

$$4\,a_4 = 4\,a_2^3 + \frac{\mu g}{4\sigma}\,a_2 \tag{44}$$

سه شرطِ (3)، (4) و (8) می‌دهند:

$$a_0 + a_2\,\rho_0^2 + a_4\,\rho_0^4 \;=\; 0 \tag{45}$$

$$2\,a_2\,\rho_0 + 4\,a_4\,\rho_0^3 \;=\; \tan\eta \tag{46}$$

$$\pi\,\rho_0^2\,\left(a_0 + \frac{1}{2}\,a_2\,\rho_0^2 + \frac{1}{3}\,a_4\,\rho_0^4\right) \;=\; V \tag{47}$$

مجهول‌ها a_0، a_2، a_4، ρ_0 و κ هستند که با پنج معادله‌ی بالا باید تعیین می‌شوند. از ترکیبِ سه معادله‌ی بالا که از شرط‌ها می آمدند داریم:

$$a_0 = \frac{1}{4}\,\rho_0\,\tan\eta + \frac{3\,V}{\pi\,\rho_0^2} \tag{48}$$

$$a_2 = -\,\frac{\tan\eta}{\rho_0} - \frac{6\,V}{\pi\,\rho_0^4} \tag{49}$$

$$a_4 = \frac{3\,\tan\eta}{4\,\rho_0^3} + \frac{3\,V}{\pi\,\rho_0^6} \tag{50}$$

دیده می‌شود که ضریب‌ها بر حسبِ ρ_0 پیدا می‌شوند. خودِ ρ_0 را می‌توان از معادله‌ای که از جای‌گذاریِ a_2 و a_4 در (44) به دست می آید حساب کرد. با جای‌گذاری داریم:

$$\frac{3\,\tan\eta}{\rho_0^3} + \frac{12\,V}{\pi\,\rho_0^6} + 4\left(\frac{\tan\eta}{\rho_0} + \frac{6\,V}{\pi\,\rho_0^4}\right)^3 = -\frac{\mu g}{4\sigma}\left(\frac{\tan\eta}{\rho_0} + \frac{6\,V}{\pi\,\rho_0^4}\right) \tag{51}$$

با حلّ ِ معادله‌ی بالا ρ_0 بر حسبِ مقدارهایِ معلومِ مسئله داده می‌شود. در حالتِ بسیار کلی معادله‌ی بالا فقط برایِ حلّ ِ عددی یا ترسیمی مناسب است.

از معادله‌ی (43)، با جاگذاریِ مقدارهایِ پیداشده، می‌توان مقدارِ κ را تعیین کرد. مانندِ بخشِ قبل، می‌توان از مقایسه‌ی این مقدارِ پیداشده برایِ κ و آن چه از رابطه‌ی دقیقِ (10) داریم برایِ برآوردِ خطا استفاده کرد. در واقع، شرطِ خوب‌بودنِ تقریب هم‌خوانیِ κ هائی است که از دو رابطه می آیند، که به ما می‌دهد:

$$2\,\tan\eta - \sin\eta + \frac{12\,V}{\pi\,\rho_0^3} + \frac{\mu g}{\sigma}\left(\frac{1}{8}\,\rho_0^2\tan\eta + \frac{V}{\pi\,\rho_0}\right) \approx 0 \tag{52}$$

در حالت‌هائی که عبارتِ بالا برآورده شود تقریبی که برایِ تابعِ f به کار رفت خوب خواهد بود. یک حالتِ خاص با کنار گذاشتنِ جمله‌ی شاملِ g است، که می‌دهد:

$$2\,\tan\eta - \sin\eta + \frac{12\,V}{\pi\,\rho_0^3} \approx 0 \tag{53}$$

با توجه به این شرط، و عبارت‌هائی که برایِ a_n ها داریم، می‌شود دید که این جواب همان جوابِ $g=0$ است، در حالتی که η به گونه‌ای بزرگ باشد که لازم باشد سه جمله از بسطِ رادیکال در جوابِ کروی را نگه داشت. امّا بر خلافِ بخش قبل، تقریبِ این بخش لزوماً حالتِ خاصّی از حالتِ $g=0$ نیست.

2.3 حالت‌هایِ با جملاتِ بیش‌تر در بسطِ f:

تعمیمِ روشِ بالا به بسط‌هائی که توان‌هایِ بیش‌تری از ρ را دارند به نسبت سرراست است، اگرچه حلِّ معادله‌هائی که به دست می‌آیند از روش‌هایِ عددی ممکن هست‌اند. در بسط شاملِ k توانِ زوج ِپی‌درپی از ρ، تعدادِ $k+2$ مجهول، شاملِ k تا a_n، ρ_0 و κ، وجود دارد. از معادله‌دیفرانسیل $k-1$ معادله به دست می‌آید، که به همراهِ سه شرطِ (3)، (4) و (8) تعداد معادله‌هایِ لازم برایِ پیدا کردنِ مجهول‌ها را داریم. در هر مورد از مقایسه‌ی مقدارِ به دست آمده برایِ κ با آن‌چه از رابطه‌ی دقیقِ (10) داریم، می‌توان برآوردی از مناسب بودنِ تقریب به دست آورد.

به نظر می‌رسد حل به روشِ سری این قابلیّت را دارد تا بر اساسِ آن نرم‌افزاری تهیّه کرد که با تقریبِ داده‌شده شکلِ یک قطره با حجم و جنسِ مشخص رویِ یک سطحِ با جنسِ داده‌شده را بدهد.

قدردانی: از محمّدِ خرّمی برایِ پیش‌نهادِ استفاده از روشِ سری ممنون‌ام.

یادداشت‌ها و مراجع

[1] ا. ح. فتح‌اللهی، یادداشتی بر شکلِ یک قطره رویِ سطحِ تختِ افقی، گاما 8، ص. 30.

[2] از داورِ این نوشته به خاطرِ ارائه‌ی این تحلیل ممنون‌ام.