



سرگرمیهای هندسه

باکوب ایستاد و روح پرلمان

ترجمه

پرویز شهریاری



یاکوب ایسید ورویچ پرلمان

Перельман Яков Исидорович.

سرگرمیهای هندسه

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ترجمه: پرویز شهریاری



شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

مهر ۱۳۴۷

چاپ اول

یاکوب ایسید ورویچ پرلمان
سرگرمیهای هندسه

ترجمه از متن روسی : پرویز شهریاری

تیراژ : ۳۳۰۰ نسخه ؛ کاغذ : ۷۰ گرمی روسی ؛ چاپ : در چاپخانه خواجه ؛
پایان چاپ : مهر ۱۳۴۷ ؛ ناشر : شرکت سهامی انتشارات خوارزمی ؛ شماره
ثبت در کتابخانه ملی : ۸۸۷ ، ۱۳۴۷/۶/۲۴

برنامه‌های علمی دبیرستانی ، هر قدر هم که آگاهانه و حساب شده تنظیم شده باشد ، نمی‌تواند مستقیماً جوابگوی احتیاجات علمی دانش‌آموزان باشد .

در این مورد ، بخصوص علوم ریاضی دارای دو خصوصیت اصلی و متضاد است : از یکطرف بکلی ذهنی و انتزاعی است ، بنحوی که ظاهراً تکامل آن جز در درون خود و با پیوستن حلقه‌های زنجیر استدلال بدنبال هم ، انجام نمی‌گیرد و از طرف دیگر در همه علوم دیگر و همه جنبه‌های زندگی عملی مورد استعمال دارد . حقیقت اینست که ریاضیات تنها با ارتباط جدی با علوم دیگر ، تولید و زندگی عملی می‌تواند بارور شود و زندگی خود را بسوی کمال ادامه دهد .

ولی این رشته ارتباطی در کجاست و چگونه می‌توان دانش‌آموزان را با آن آشنا ساخت ؟ این چیزی است که جواب آن از عهده کتابهای درسی و «طبق برنامه» خارج است ، در حالیکه بدون آنهم تحصیلات مدرسه‌ای تحرك و قابلیت خود را از دست می‌دهد .

اینجاست که ضرورت تهیه کتابهای جنب درسی احساس می‌شود و این نه تنها بدان مناسبت است که دانش‌آموزان علاقمند امکان مطالعه بیشتری داشته باشند ، بلکه علاوه بر آن به عنوان وسیله پر قدرتی در دست معلم خواهد بود تا با ذکر نمونه‌های مختلف ، کلاس درس را از حالت خشکی بیرون آورد و شرایطی فراهم کند که دانش‌آموزان با رغبت بیشتری به قضایا و مسائل ریاضی بپردازند .

حتی اکثر لازم می‌شود که بخشی از اینگونه کتابها به عنوان درس و تکلیف در معرض بحث و قضاوت دانش‌آموزان گذاشته شود و بخصوص از

آنها خواسته شود تا خود روشهای مشابه دیگری برای بهره‌گیری از مطالب ریاضی کشف کنند و در معرض قضاوت دوستان خود قرار دهند. تجربه نشان داده است که این تدبیر نقش موثری در علاقمندی دانش‌آموزان به درس ریاضی و همچنین بروزنیروهای خفته و خلاقه آنها دارد.

انتشارات خوارزمی که با همت گروهی معلم و مترجم و نویسندگانه بوجود آمده است، آرزو دارد که با انتشار کتابهایی که برای این منظور در نظر گرفته است، در راه رفع کمبودی که از این لحاظ در مطبوعات فارسی وجود دارد قدمی، ولو ناچیز، برداشته باشد. از همه علاقمندان و صاحب نظران توقع داریم که ما را در این راه کمک و رهنما باشند.

انتقادات و نظریات خود را به نشانی: شاهرضا، خیابان ابوریحان شماره ۵۸، شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، ارسال دارید.

انتشارات خوارزمی

« سرگرمیهای هندسه » به همان اندازه که علاقمندان ریاضی را بکار می‌آید ، برای آن دسته از خوانندگانی هم که بنا به دلایلی از جنبه‌های عملی و جالب ریاضیات به دور مانده‌اند مفید است .

شاید بیش از همه ، این کتاب برای خوانندگانی مفید باشد که هندسه را تنها روی کاغذ و یا تخته‌سیاه فرا گرفته‌اند (و یا هم‌اکنون فرا می‌گیرند) و بنابراین از رابطه‌ای که هندسه با اشیاء و پدیده‌های جهان اطراف ما دارد بی‌خبرند و نمی‌دانند که چگونه می‌توان از هندسه در عمل و برای رفع مشکلات زندگی استفاده کرد .

این کتاب می‌خواهد علاقه به هندسه را در خواننده ایجاد کند و یا به قول مؤلف « ضمن مطالعه مسائل این کتاب ، ذوق و سلیقه و ابتکار او را برانگیزاند » .

مؤلف برای این منظور ، هندسه را « از چهار دیواری مدرسه خارج می‌کند و به فضای آزاد : دشت و جنگل و رودخانه و جاده می‌برد تا کار برد هندسه را زیر سرپوش نیلگون آسمان و بدون کتاب و تخته‌سیاه بیاموزد ... » ، خواننده را به مطالعه آثار تولستوی ، چخوف ، ژول ورن و مارک‌تواین می‌کشاند و قطعاتی از گوگول و پوشکین نقل می‌کند و بالاخره « مجموعه رنگارنگی مسئله در اختیار او می‌گذارد که از لحاظ موضوع دلچسب و از لحاظ نتیجه غیر منتظره‌اند » .

« سرگرمیهای هندسه » از چاپ هفتم به بعد ، بدون شرکت مستقیم نویسنده آن پرلمان چاپ می‌شود . یا . ای . پرلمان در سال ۱۹۴۲ در لنینگراد مرد .

از مقدمه « کوردسکی » بر چاپ نهم کتاب

قسمت اول . هندسه در هوای آزاد از صفحه ۱۳ تا صفحه ۲۲۳

۱. هندسه در جنگل از صفحه ۱۵ تا صفحه ۵۴

با کمک طول سایه	در صفحه ۱۵
دو وسیله دیگر	در صفحه ۲۱
راه حل ژولورن	در صفحه ۲۴
گروه بان چه کرد؟	در صفحه ۲۷
با کمک دفتر یادداشت	در صفحه ۲۸
اگر نتوانیم به درخت نزدیک شویم	در صفحه ۳۰
ارتفاع یاب جنگلبانان	در صفحه ۳۱
به کمک آینه	در صفحه ۳۵
دو درخت کاج	در صفحه ۳۷
شکل تنه درخت	در صفحه ۳۸
رابطه کلی	در صفحه ۴۰
حجم و وزن درخت قطع نشده	در صفحه ۴۴
قهرمانان شش پا	در صفحه ۵۱

۲. هندسه در کنار رودخانه از صفحه ۵۵ تا صفحه ۱۰۱

اندازه گیری عرض رودخانه	در صفحه ۵۵
با کمک لبه کلاه	در صفحه ۶۲
طول جزیره	در صفحه ۶۴
پیاده ای که آنطرف ساحل است	در صفحه ۶۶
مسافت یا بهای ساده	در صفحه ۶۹
انرژی رودخانه ها	در صفحه ۷۲
سرعت جریان آب	در صفحه ۷۴
چقدر آب در رودخانه جریان دارد؟	در صفحه ۷۷
چرخ آبی	در صفحه ۸۲
قشر رنگین	در صفحه ۸۳
دایره های روی آب	در صفحه ۸۵

گلوله منفجر شده	در صفحه ۸۷
موج حاصل از حرکت کشتی	در صفحه ۸۹
سرعت گلوله توپ	در صفحه ۹۳
عمق استخر	در صفحه ۹۵
آسمان پرستاره در آب رودخانه	در صفحه ۹۷
راهی از روی رودخانه	در صفحه ۹۸

۳. هندسه در فضای آزاد از صفحه ۱۰۲ تا صفحه ۱۴۶

اندازه‌های ظاهری ماه	در صفحه ۱۰۲
زاویه دید	در صفحه ۱۰۶
ماه و سکه کوچک	در صفحه ۱۰۸
عکاس با احساس	در صفحه ۱۱۰
زاویه یاب طبیعی	در صفحه ۱۱۴
يك وسیله قدیمی	در صفحه ۱۱۸
زاویه یاب دندان‌های	در صفحه ۱۲۰
زاویه یاب توپچی‌ها	در صفحه ۱۲۲
دقت دید	در صفحه ۱۲۵
زاویه حدی	در صفحه ۱۲۶
ماه و ستارگان در نزدیکی افق	در صفحه ۱۳۰
سایه ماه و سایه بالون	در صفحه ۱۳۴
فاصله ابرتازمین	در صفحه ۱۳۶
ارتفاع برج به وسیله عکس برداری	در صفحه ۱۴۳
طرح چند مسئله برای تمرین	در صفحه ۱۴۵

۴. هندسه در جاده از صفحه ۱۴۷ تا ۱۷۰

هنر اندازه‌گیری قدمها	در صفحه ۱۴۷
تخمین نظری	در صفحه ۱۴۹
شیبها	در صفحه ۱۵۴
توده شن	در صفحه ۱۵۷
تپه افتخار	در صفحه ۱۵۹
در پیچ جاده	در صفحه ۱۶۱

- شعاع پیچ در صفحه ۱۶۳
 کف اقیانوس در صفحه ۱۶۶
 آیا کوههای آب وجود دارد؟ در صفحه ۱۶۸

۵. مثلثات سیار از صفحه ۱۷۱ تا صفحه ۱۹۰

- محاسبه سینوس در صفحه ۱۷۱
 جذر گرفتن در صفحه ۱۷۷
 محاسبه زاویه از روی سینوس آن در صفحه ۱۷۸
 ارتفاع خورشید در صفحه ۱۸۱
 فاصله تا جزیره در صفحه ۱۸۱
 عرض دریاچه در صفحه ۱۸۳
 قطعه زمین به شکل مثلث در صفحه ۱۸۶
 تعیین اندازه یک زاویه در صفحه ۱۸۸

۶. زمین و آسمان کجا بهم می‌رسند؟ از صفحه ۱۹۱ تا ۲۱۱

- افق در صفحه ۱۹۱
 کشتی در افق در صفحه ۱۹۵
 دوری افق در صفحه ۱۹۷
 تپه پوشکین در صفحه ۲۰۴
 خطوط آهن کجا بهم می‌رسند؟ در صفحه ۲۰۴
 مسئله‌ای درباره چراغ دریائی در صفحه ۲۰۵
 برق در صفحه ۲۰۷
 کشتی بادی در صفحه ۲۰۸
 افق در ماه در صفحه ۲۰۹
 در دهانه آتشفشان ماه در صفحه ۲۰۹
 در مشتری در صفحه ۲۱۰
 چند تمرین در صفحه ۲۱۱

۷. هندسه روبینسونها از صفحه ۲۱۲ تا صفحه ۲۲۳

- هندسه آسمان پرستاره در صفحه ۲۱۲
 عرض جزیره اسرار آمیز در صفحه ۲۱۷
 تعیین طول جغرافیائی در صفحه ۲۲۱

قسمت دوم. شروخی و جدی در هندسه از صفحه ۲۲۵ تا صفحه ۴۰۷

۸. هندسه در تاریکی از صفحه ۲۲۷ تا صفحه ۲۵۸

- در عمق کشتی در صفحه ۲۲۷
- اندازه گیری بشکه در صفحه ۲۲۸
- خط کش اندازه گیری در صفحه ۲۲۹
- کارهایی که باید انجام می گرفت در صفحه ۲۳۲
- تحقیق درستی محاسبه در صفحه ۲۳۵
- مسافرت شبانه مارک تواین در صفحه ۲۴۰
- چرخش مرموز در صفحه ۲۴۴
- اندازه گیری با دستهای خالی در صفحه ۲۵۵
- زاویه قائمه در تاریکی در صفحه ۲۵۷

۹. مطالب کهنه و نو درباره دایره از صفحه ۲۵۹ تا صفحه ۳۰۴

- هندسه عملی مصر و روم در صفحه ۲۵۹
- خرد و بینش و آگاهی دانشمندان در صفحه ۲۶۱
- اشتباه جک لندن در صفحه ۲۶۴
- رها کردن سوزنها در صفحه ۲۶۶
- تبدیل محیط دایره به خط راست در صفحه ۲۶۹
- تربیع دایره در صفحه ۲۷۱
- مثلث بینگما در صفحه ۲۷۶
- سر یا پاها در صفحه ۲۷۸
- مفتولی دور خط استوا در صفحه ۲۷۹
- واقعیت و محاسبه در صفحه ۲۸۰
- دختر بچه بندباز در صفحه ۲۸۵
- راهی از روی قطب در صفحه ۲۹۰
- طول تسمه انتقال در صفحه ۲۹۷
- کلاغ تیرهوش در صفحه ۳۰۱

۱۰. هندسه بدون اندازه گیری و بدون محاسبه. از صفحه ۳۰۵ تا صفحه ۳۳۸

- رسم بدون پرگار در صفحه ۳۰۵

مرکز ثقل صفحه.....	در صفحه ۳۰۷
وسیله ساده‌ای برای تثلیث زاویه.....	در صفحه ۳۱۱
استفاده از ساعت برای تثلیث زاویه.....	در صفحه ۳۱۲
تقسیم محیط دایره.....	در صفحه ۳۱۴
جهت ضربه.....	در صفحه ۳۱۷
توپ «باهوش».....	در صفحه ۳۱۹
بایک حرکت قلم.....	در صفحه ۳۲۷
هفت پل کالنین گراد.....	در صفحه ۳۳۲
شوخی هندسی.....	در صفحه ۳۳۴
تحقیق درستی شکل.....	در صفحه ۳۳۵
بازی.....	در صفحه ۳۳۶

۱۱. مقادیر کوچک و بزرگ در هندسه..... از صفحه ۳۳۹ تا صفحه ۳۷۰

در یک انگشتانه.....	در صفحه ۳۳۹
نازکتر از تار عنکبوت و محکم‌تر از فولاد.....	در صفحه ۳۴۵
دو ظرف.....	در صفحه ۳۴۸
سیگار بزرگ.....	در صفحه ۳۴۹
تخم شتر مرغ.....	در صفحه ۳۵۰
تخم شتر مرغ - اداگاسگار.....	در صفحه ۳۵۱
تعیین وزن پوست تخم پرنده.....	در صفحه ۳۵۴
اندازه سکه‌های ما.....	در صفحه ۳۵۵
سکه ده‌میلیون ریالی.....	در صفحه ۳۵۶
تساویر روزنامه‌ای.....	در صفحه ۳۵۷
وزن معمولی ما.....	در صفحه ۳۶۱
غول‌پیکر و کوتوله.....	در صفحه ۳۶۲
هندسه گولیور.....	در صفحه ۳۶۳
چرا ابر و گرد و غبار در هوا شناورند؟.....	در صفحه ۳۶۷

۱۲. اقتصاد هندسی..... از صفحه ۳۷۱ تا صفحه ۴۰۷

چگونه «پاخوم» زمین خرید؟.....	در صفحه ۳۷۱
مسئله تولستوی.....	در صفحه ۳۷۵

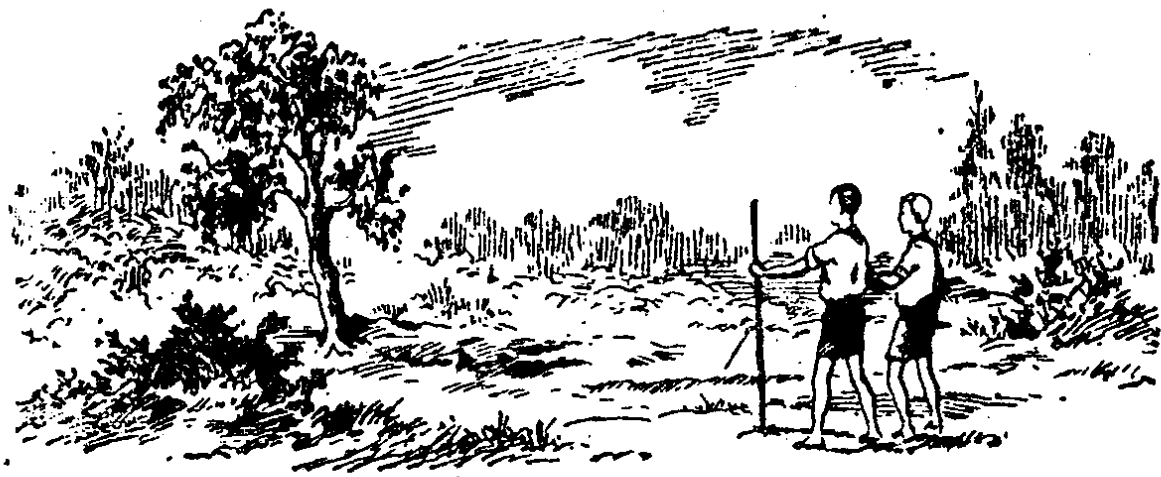
- ۳۷۸ در صفحه زوزنقه یا مستطیل
 ۳۷۹ در صفحه خاصیت قابل توجه مربع
 ۳۸۲ در صفحه قطعه زمین به شکل دیگر
 ۳۸۴ در صفحه اشکال به مساحت حداکثر
 ۳۸۸ در صفحه میخ
 ۳۸۹ در صفحه جسم با حجم حداکثر
 ۳۹۰ در صفحه حاصل ضرب عوامل مساوی
 ۳۹۲ در صفحه مثلث با مساحت حداکثر
 ۳۹۴ در صفحه تیری با حداکثر وزن
 ۳۹۵ در صفحه از مثلث مقوائی
 ۳۹۷ در صفحه مشکل حلپی ساز
 ۳۹۹ در صفحه مشکل تراشکار
 ۴۰۳ در صفحه چگونه تخته را دراز کنیم ؟
 ۴۰۵ در صفحه کوتاه ترین راه

قسمت اول

هندسه در هوای آزاد

طبیعت با زبان ریاضی صحبت می-کند ؛ حروف این زبان عبارتست از دایره‌ها ، مثلثها وسایر اشکال هندسی.

— مقاله



هندسه در جنگل

با کمک طول سایه

هنوز از خاطرم نرفته است که وقتی برای نخستین بار جنگلبان سپیدمویی را دیدم که در کنار درخت کاج تنومندی ایستاده و می‌خواست با وسیله‌ای که در جیبش جا می‌گرفت ارتفاع درخت را اندازه بگیرد، تا چه اندازه دچار حیرت شدم. وقتی که با وسیله چهار گوشه‌ای که داشت رأس درخت را نشانه‌گیری کرد، منتظر بودم که پیرمرد از درخت بالا برود و خود را به هدف برساند. ولی او وسیله ناچیز خود را در جیب گذاشت و معلوم شد که کار اندازه‌گیری به اتمام رسیده است، در حالیکه من فکرمی کردم هنوز شروع هم نشده است.

من در آن زمان جوان بودم و چنین وسیله‌ای که بتوان با کمک آن

ارتفاع درخت را اندازه گرفت ، بدون اینکه آنرا قطع کنیم و یا از آن بالا برویم ، بنظرم بيك معجزه كوچك شبیه بود . ولی بعدها ، وقتی که با مقدمات هندسه آشنا شدم ، دانستم که با چه سادگی می توان به چنین معجزه ای دست یافت . راههای زیادی وجود دارد که می توان با کمک وسائل بسیار ساده و یا حتی بدون هیچ وسیله ای اندازه گیریهای از این قبیل را انجام داد .

بدون تردید ، یکی از ساده ترین و در عین حال قدیمی ترین این روشها ، همانست که طالس متفکر یونانی در شش قرن قبل از میلاد بوسیله آن ارتفاع هرم بزرگ را در مصر اندازه گرفت . او از سایه هرم استفاده کرد . فرعون و کاهنان مصری که در کنار هرم بزرگ جمع شده بودند ، به این بیگانه شرقی که با کمک سایه این ساختمان عظیم ، مشکل محاسبه ارتفاع آنرا حل کرد ، می نگریستند . روایت می کنند که طالس روز وساعتی را انتخاب کرده بود که سایه خودش با قدش برابر باشد ، البته در چنین لحظه ای ارتفاع هرم هم مساوی با سایه ای که روی زمین انداخته است ، خواهد بود* . و این احتمالاً تنها موردی باشد که انسان می تواند از سایه خودش استفاده کند .

مسئله متفکر یونانی حالا برای ما خیلی بچه گانه و ساده است ولی نباید فراموش کرد که ما از فراز اطلاعات عظیمی که بعد از طالس در هندسه پیدا شده است ، به این مسئله نگاه می کنیم . قریب ۳۰۰ سال قبل از میلاد ، اقلیدس ریاضیدان یونانی ، کتابی تنظیم کرد که در جریان دوهزار سال بعد از او تنها کتاب آموزشی در زمینه هندسه بود . احکامی که در این کتاب بود ، و امروز هر شاگرد مدرسه ای از آنها اطلاع دارد ، هنوز در زمان طالس کشف نشده بود . ولی برای حل مسئله ارتفاع هرم

(* البته طول سایه را می بایست از مرکز مربع قاعده به حساب آورد و طالس هم می توانست عرض قاعده را به سادگی و مستقیماً محاسبه کند .

با استفاده از سایه آن ، باید به بعضی از خواص هندسی مثلث آشنا بود و بخصوص دو خاصیت زیر (که اولین آنها بوسیله خود طالس کشف شده است) :

۱. زوایای مجاور به قاعده يك مثلث متساوی الساقین برابرند و برعکس ، اضلاع مقابل به زوایای مساوی در مثلث با هم برابرند .
۲. مجموع زوایای هر مثلث (و یا لااقل مثلث قائم الزاویه) برابر است با دو قائمه .

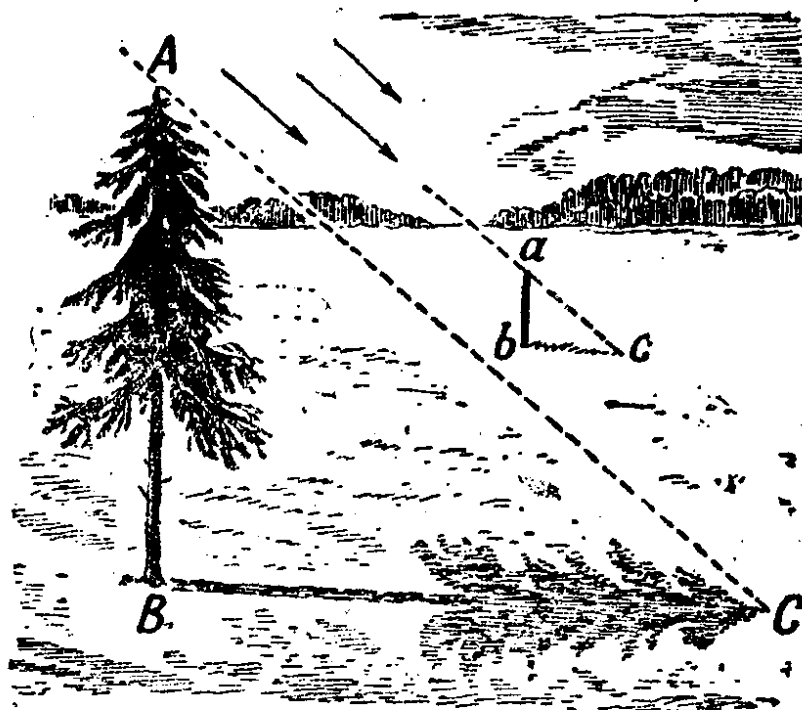
تنها بخاطر اطلاع از این احکام بود که طالس می دانست وقتی سایه شیئی با ارتفاع آن برابر باشد ، اشعه خورشید تحت زاویه ای مساوی نصف زاویه قائمه می تابد و بنابراین رأس هرم ، مرکز قاعده و انتهای سایه آن تشکیل يك مثلث متساوی الساقین می دهند .

از این روش ساده می توان برای اندازه گیری ارتفاع تك درختها (که سایه آنها با سایه درختان مجاور درهم نرفته باشد) در روز آفتابی استفاده کرد . ولی در عرض جغرافیائی ما* ، چنین لحظه ای به سادگی کشور مصر فرا نمی رسد ، در سرزمین ما خورشید نزدیک افق است و برای اینکه سایه شیئی با ارتفاع آن برابر باشد باید تا ساعات نیمروز ماههای تابستان منتظر بود . باین ترتیب روش طالس را به صورتی که ذکر کردیم همیشه نمی توان بکاربرد .

ولی می توان این وسیله را به سادگی چنان تغییر داد که در روز آفتابی از هر سایه ای و با هر طولی بشود استفاده کرد . اگر علاوه بر سایه بلندی ، سایه خودتان و یا سایه يك چوب را اندازه بگیرید ، آنوقت می توانید از نسبت زیر ، ارتفاع مورد نظر را بدست آورید (شکل ۱) :

$$AB:ab = BC:bc;$$

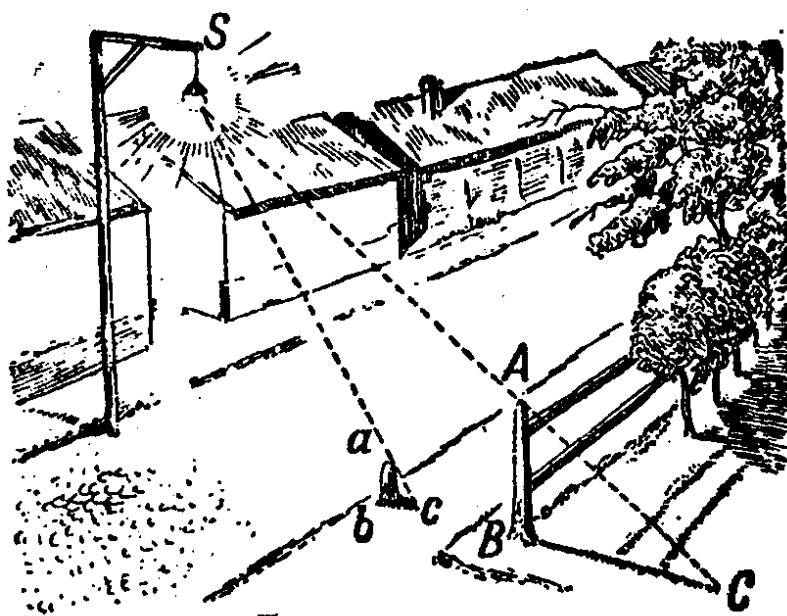
(* منظور عرض جغرافیائی سرزمین مؤلف . یعنی شمال اتحاد جماهیر شوروی



۱. اندازه گیری ارتفاع درخت به وسیله سایه آن

زیرا ارتفاع درخت هر چند برابر ارتفاع چوب باشد ، سایه آن نیز همانقدر برابر سایه چوب خواهد بود . این مطلب از تشابه هندسی دو مثلث ABC و abc نتیجه می شود (در حالت تساوی دو زاویه) .

ممکن است بعضی از خوانندگان اعتراض کنند که این وسیله ساده هیچگونه احتیاجی به هندسه مقدماتی ندارد : مگر بدون هندسه هم روشن نیست که هر چند ارتفاع درخت بیشتر باشد ، بهمان نسبت سایه آن هم بلندتر می شود ؟ ولی مطلب آنگونه که ظاهراً بنظر می رسد ساده نیست . اگر همین قانون را درباره سایه هائی که در اثر نور چراغهای خیابان و یا لامپ رومیزی بوجود آمده است بکار ببریم ، نتیجه نادرستی بدست می آید . در شکل ۲ دیده می شود که ستون AB از پایه ab مثلا دو بار بزرگتر است ، در حالیکه سایه ستون در حدود هشت برابر سایه پایه است ($BC:bc=8$) . حالا می فهمیم که چرا یکجا بدون استفاده از هندسه می توان این قانون را بکار برد و در جای دیگر نمی توان .



۲. چه وقت از اینگونه اندازه گیری نمی توان استفاده کرد ؟

مسئله

چرا این اختلاف بوجود آمد؟ در حقیقت مطلب بر سر اینست که اشعه خورشید با هم موازی اند، در حالیکه اشعه چراغ خیابان موازی نیستند. حکم اخیر واضح است، ولی چرا اشعه خورشید را موازی فرض می کنیم، در حالیکه می دانیم آنها هم در نقطه مبدا خود بهم می رسند ؟

حل

اشعه ای از خورشید را که به زمین می رسند، بدینجهت می توان موازی فرض کرد که زاویه بین آنها فوق العاده کوچک است، بنحوی که در عمل محسوس نیست. این مطلب را می توان بسادگی از نظر هندسی روشن کرد. فرض می کنیم دو شعاع نور از نقطه ای واقع در روی خورشید به زمین برسد و مثلاً فاصله آنها در روی زمین مساوی یک کیلومتر باشد یعنی اگر پرگاری در نظر بگیریم و نوك ثابت آن را در نقطه مبدا

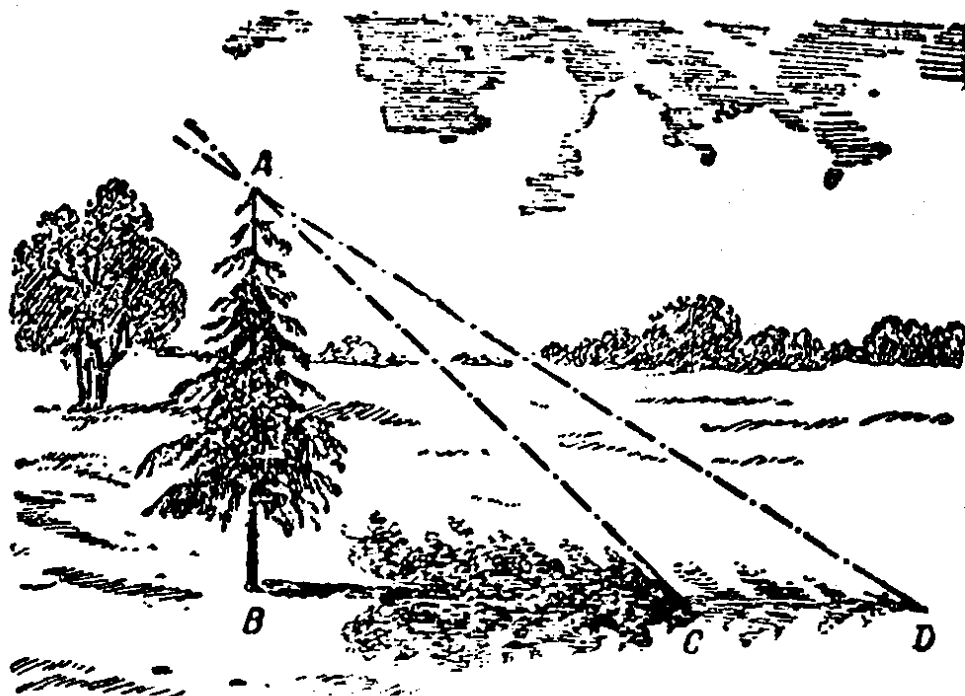
یعنی خورشید قرار دهیم و نوك دیگر آن دایره‌ای به شعاع فاصله خورشید تا زمین (یعنی به شعاع ۱۵۰ ۰۰۰ ۰۰۰ کیلومتر) رسم کند، فاصله بین دو شعاع نوری ما قوسی از این دایره به طول يك کیلومتر خواهد بود. محیط این دایره عظیم چنین است:

$$2\pi \times 150\,000\,000 = 940\,000\,000 \text{ (کیلومتر)}$$

قوس يك درجه از این دایره $\frac{1}{360}$ محیط یعنی قریب ۲۶۰۰۰۰۰ کیلومتر است، قوس يك دقیقه آن ۶۰ بار کوچکتر از قوس يك درجه یعنی ۴۳۰۰۰ کیلومتر و قوس يك ثانیه ۶۰ بار کوچکتر از قوس يك دقیقه یعنی ۷۲۰ کیلومتر است. ولی قوس ما فقط يك کیلومتر طول دارد، یعنی روبروی به زاویه مرکزی مساوی $\frac{1}{720}$ ثانیه قرار دارد. چنین زاویه‌ای، حتی در دقیق‌ترین وسائل نجومی هم نمی‌تواند به حساب بیاید و بنابراین عملاً می‌توان اشعه خورشید را که به زمین می‌رسند موازی فرض کرد.*

اگر این خاصیت هندسی بر ما معلوم نبود، نمی‌توانستیم ارتفاع بلندیاها را بر اساس سایه آنها اندازه بگیریم. گاهی هم روش بکاربردن سایه نامطمئن از آب درمی‌آید. حدود سایه آنچنان واضح نیست که بتوان طول آنها را با دقت اندازه گرفت. هر سایه‌ای که به وسیله خورشید به وجود آید دارای يك حاشیه کمرنگ نیم سایه است که باعث عدم تشخیص حدود سایه می‌شود. علت این امر آنست که خورشید يك نقطه نیست، بلکه جسم عظیم نورانی است که اشعه نور از نقاط مختلف آن سرچشمه می‌گیرد. در شکل ۳ دیده می‌شود که چرا سایه BC دنباله‌ای بصورت نیم سایه CD دارد که بتدریج از بین می‌رود.

(* اشعه‌ای که از يك نقطه خورشید به دوانتهای قطری از زمین می‌رسند، زاویه‌ای قریب ۱۷ ثانیه با هم می‌سازند. تعیین این زاویه یکی از وسائل است که منجمین به کمک آن می‌توانند فاصله بین خورشید و زمین را اندازه بگیرند.



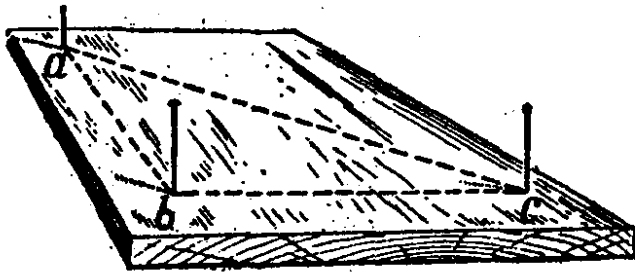
۳ . چگونه نیم سایه تشکیل می شود ؟

زاویه CAD ، بین دو حد نیم سایه ، برابر است با زاویه ای که تحت آن قرص خورشید را می بینیم (یعنی نیم درجه) . اشتباهی که از اندازه گیری غیر دقیق دو سایه به وجود می آید ، حتی در موردی که خورشید در نزدیکترین وضع خود نباشد ، ۵٪ و بیشتر است . اگر این اشتباه را به اشتباهی که اجباراً به خاطر ناهمواریهای زمین و بعضی اشکالات دیگر به وجود می آید ، اضافه کنیم ، اعتماد به نتیجه محاسبه را خیلی کم می کند ، بطوریکه مثلاً در مناطق کوهستانی بکلی نمی توان از این وسیله استفاده کرد .

دو وسیله دیگر

بدون سایه هم می توان بلندیها را اندازه گرفت . این وسیلهها زیادند و ما از دو نمونه ساده تر آنها شروع می کنیم .
قبل از همه می توانیم از خاصیت مثلث قائم الزاویه استفاده کنیم .

ساختن این وسیله بسیار آسان و تنها به يك تخته چوبی و سه سنجاق احتیاج دارد. روی قطعه



چوب (شکل آن مطرح نیست و حتی می توان از پوست درخت استفاده کرد، به شرطی که روی آن صاف باشد) ، سه

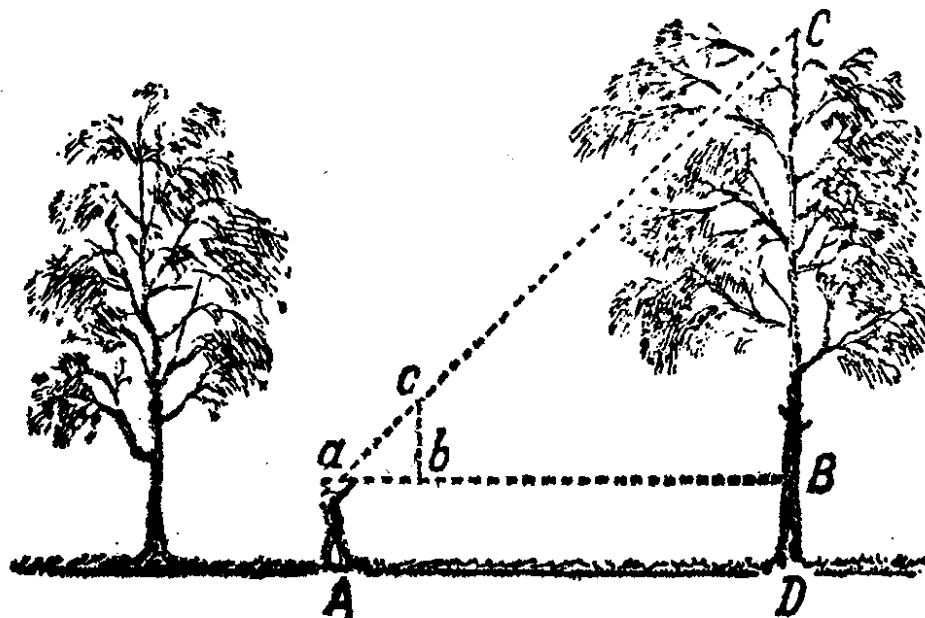
۴. استفاده از سنجاق برای اندازه گیری ارتفاعات

نقطه ، به عنوان رئوس يك مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ، در نظر می گیریم و در هر يك از این نقاط يك سنجاق فرو می کنیم (شکل ۴) . فرض کنید که گونیا برای رسم زاویه قائمه و پرگار برای جدا کردن اضلاع مساوی در اختیار نداشته باشید . يك قطعه کاغذ بردارید و آنرا از وسط تا کنید و سپس دوباره از وسط تاي قبلی، آنرا تا کنید، يك زاویه قائمه بدست خواهید آورد . از همین کاغذ هم می توان به جای پرگار استفاده کرد و قطعات مساوی جدا نمود .

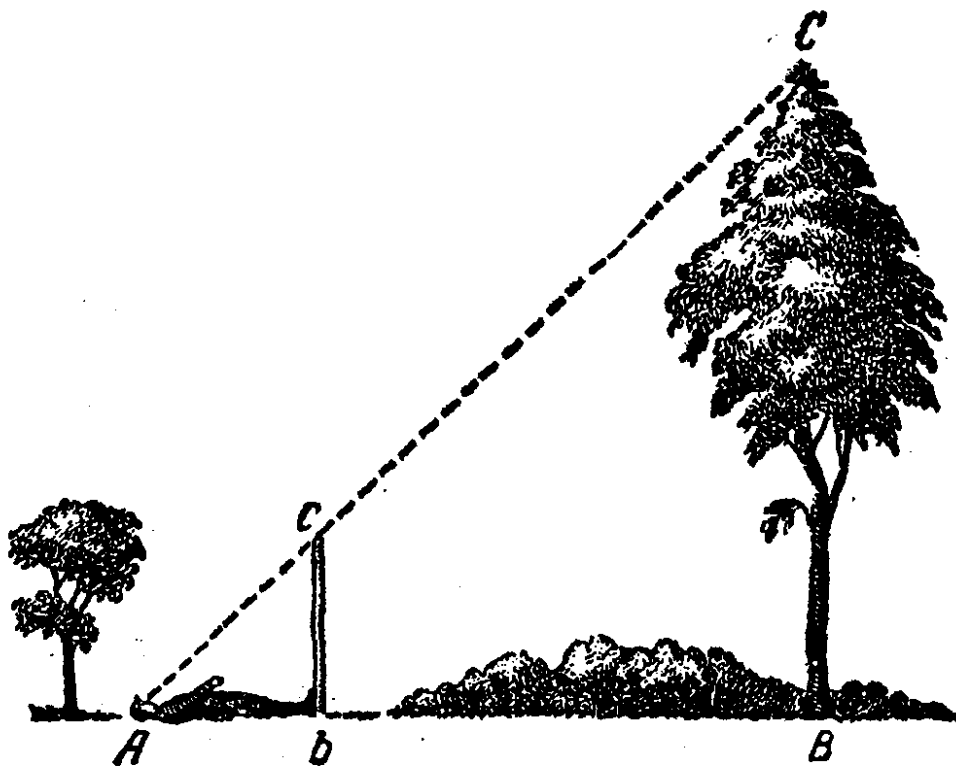
همانطور که می بینید می توان وسیله لازم را بطور کامل و با کمک مقدماتی ترین وسایل آماده کرد .

استفاده از این وسیله مشکل تر از ساختن آن نیست . برای اندازه گیری ارتفاع درخت ، وسیله را چنان می گیریم که یکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه مثلث قائم الزاویه بطور عمودی قرار گیرد ، برای این منظور می توان از شاغولی استفاده کرد که به سنجاق بالائی آویزان شده (برای شاغول می توان از نخ استفاده کرد که به انتهای آن وزنه ای بسته باشیم) . با دور و نزدیک شدن نسبت به درخت، همیشه می توان نقطه ای مانند A پیدا کرد (شکل ۵) ، که از آنجا با نگاه کردن به سنجاقهای a و c ، نقطه C ، رأس درخت ، بوسیله این سنجاقها مخفی شده باشد، و این به معنای آنست که امتداد وتر ac از نقطه C می گذرد . در این-

صورت واضح است که فاصله aB مساوی CB می شود (زیرا زاویه $a = 45^\circ$ است).



۵. طرح استفاده از وسیله سنجاقی



۶. راه دیگری برای اندازه گیری ارتفاع

بنابراین فاصله aB (و یا بجای آن فاصله AD) را اندازه می‌گیریم و طول BD ، یعنی aA ، فاصله چشم تا زمین، را به آن اضافه می‌کنیم، ارتفاع درخت بدست می‌آید.

می‌توان به طریق دیگری عمل کرد که حتی به سنجاق هم احتیاج نباشد.

برای این منظور به دیرکی احتیاج دارید که وقتی آنرا در زمین فرو کردید، ارتفاع بیرون از زمین آن با قد شما برابر باشد. دیرک را باید جایی محکم کنید که اگر شما مطابق شکل قرار گیرید، رأس درخت و رأس دیرک را در یک خط راست به بینید. از آنجا که مثلث ABC قائم-الزاویه و متساوی الساقین است، زاویه A مساوی 45 درجه می‌شود و بنابراین AB مساوی BC (یعنی ارتفاع درخت) می‌شود.

راه حل ژولورن

در اینجا از وسیله دیگری برای اندازه‌گیری ارتفاعات نام می‌بریم، که باز هم به اندازه کافی ساده است، و در زمان مشهور ژولورن بنام «جزیره اسرار آمیز» طرح آن داده شده است.

«مهندس گفت:

«حالا باید ارتفاع سکوی بلندی را، که بالای آن دورازما قرار گرفته است، اندازه بگیریم.

«هربرت پرسید:

«آیا وسائل کار را همراه خود دارید؟»

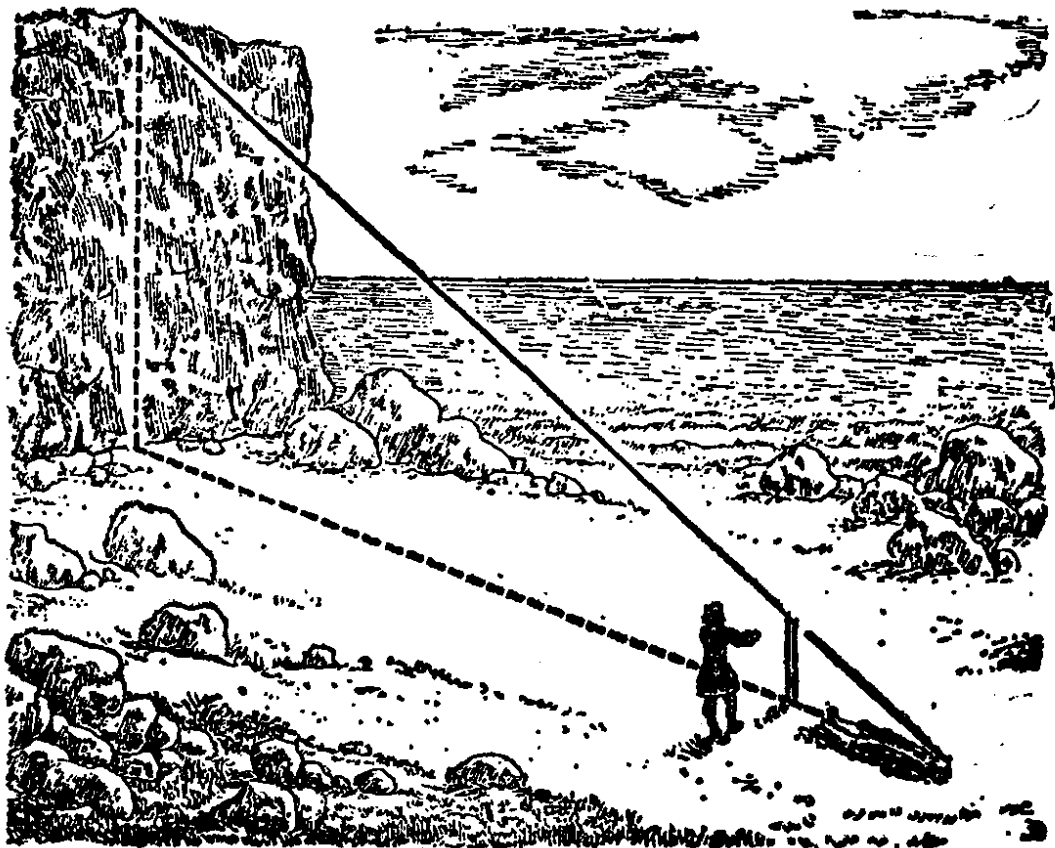
«نه! چیزی لازم نیست. به وسائل زیادی احتیاج نداریم و

تنها یک وسیله ساده و دقیق کافی است.

«جوان سعی کرد هرچه بیشتر چیز زیاد بگیرد و بدنبال مهندس،

که از کنار دیوار سنگی تا ساحل پائین آمد ، براه افتاد .
 « مهندس چوب راستی به طول ۱۲ فوت انتخاب کرد. او آنرا با کمک قد خود (که اندازه آنرا دقیقاً می دانست) تا حد ممکن با دقت اندازه گرفت . هربرت هم شاغولی که مهندس به او داده بود در دست داشت : شاغول به سادگی و با بستن سنگی به انتهای يك نخ درست شده بود .

« مهندس در حدود ۵۰۰ فوتی دیوار سنگی ایستاد و چوب را در شنزار فرو کرد، به نحوی که دو فوت آن در خاک رفت و با کمک شاغول آنرا کاملاً به صورت قائم در آورد .
 « سپس از چوب آنقدر دور شد که وقتی روی شنزار خوابید توانست نوک چوب و بالای بلندی را در يك خط راست به بیند (شکل ۷) . این نقطه را با دقت و بوسیله گذاشتن يك تکه سنگ علامت گذاشت .



« در همان حال که مهندس از زمین برمیخواست از هر بورت پرسید:

« - آیا با مقدمات هندسه آشنائی دارید؟

« - بله !

« - معنای مثلثهای متشابه را می‌دانید؟

« - بله ! اضلاع متناظر آنها متشابه‌اند .

« - کاملاً صحیح است ! و منهم دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه ساخته‌ام .

در مثلث کوچکتر یکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه طول چوب قائم و ضلع دیگر فاصله پای این چوب تا علامت سنگی و وتر این مثلث هم طول شعاع دید من تا نوك چوب است . در مورد مثلث دوم اضلاع مجاور به زاویه قائمه عبارتند از : ارتفاع صخره ، که باید آنرا معین کنیم ، و فاصله پای دیوار این صخره تا علامت سنگی . و تر این مثلث هم امتداد شعاع دید من تا نوك صخره است که بر امتداد وتر مثلث کوچکتر قرار دارد .
« جوان گفت :

« - فهمیدم ! نسبت فاصله علامت تا چوب به فاصله علامت تا

پای دیوار برابر است با نسبت ارتفاع چوب به ارتفاع دیوار .

« - بله . و بهمین مناسبت اگر دو فاصله اول را اندازه بگیریم ،

با توجه به اینکه ارتفاع چوب هم معلوم است می‌توانیم جزء چهارم تناسب یعنی ارتفاع دیوار را اندازه بگیریم . باین ترتیب ما توانستیم ارتفاع دیوار را بدون اندازه‌گیری مستقیم بدست آوریم .

« دو فاصله افقی را اندازه گرفتند : فاصله کوچکتر ۱۵ فوت و فاصله

بزرگتر ۵۰۰ فوت بود .

« و بالاخره مهندس برای محاسبه اصلی روابط زیر را نوشت :

$$۱۵:۵۰۰ = ۱۰:x;$$

$$۵۰۰ \times ۱۰ = ۵۰۰۰;$$

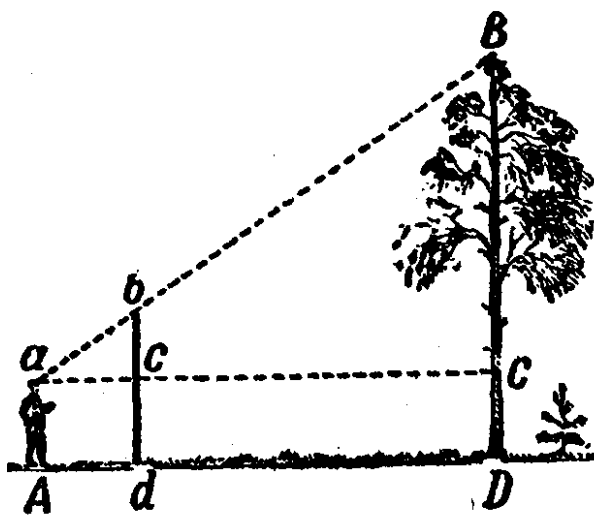
$$۵۰۰۰:۱۵ = ۳۳۳,۳$$

«یعنی ارتفاع دیوار سنگی برابر با $\frac{۳۳۳}{۳}$ فوت بود.»

گروهیان چه کرد

بعضی از روشهایی که برای اندازه گیری ارتفاعات ذکر کردیم، از اینجهت که باید روی زمین دراز کشید، ناراحت کننده بنظر می رسد. می توان ترتیبی داد که این ناراحتی هم برطرف شود.

از اتفاقی گفتگومی کنیم که در یکی از جنگلهای بزرگ میهنی پیش آمده است. به واحد ستوان «ایوانوکا» دستور رسید که بر روی یک



۸. اندازه گیری ارتفاع درخت به

کمک چوب

رودخانه کوهستانی پلی بسازند. در

ساحل مقابل فاشیستها مستقر بودند.

ستوان برای تعیین جای پل، یک گروه

تجسسی را به فرماندهی گروهیان

سالخورده «پوپوو» مأمور کرد.

این گروه در نزدیکترین نقطه جنگل،

قطر و ارتفاع درختهای نمونه را

اندازه گرفت و مقدار چوبی را

که می توانستند برای ساختن پل

مورد استفاده قرار دهند، محاسبه کرد.

ارتفاع درختها را همانطور که در شکل ۸ دیده می شود با کمک

یک قطعه چوب اندازه گرفتند. طریقه اندازه گیری آنها چنین بود:

قطعه چوبی را که طول آن از قد خودتان بیشتر است، انتخاب

کنید و آنرا در فاصله ای از درخت، به زمین فرو کنید (شکل ۸). سپس

از چوب در امتداد Dd آنقدر عقب بروید تا در نقطه ای مانند A بتوانید

رأس درخت و نقطه b (بالاترین نقطه چوب) را در یک امتداد به بینید. در

همانجا بدون اینکه وضع سرخود را تغییر دهید، در جهت خط راست و افقی aC نگاه کنید، نقاط c و C را روی چوب و تنه درخت درجائی که شعاع دید شما به آنها رسیده است، در نظر بگیرید و از کسیکه همراه شماست خواهش کنید در این نقاط علامت بگذارد. حالا این میماند که با کمک مثلثهای متشابه abc و aBC ، فاصله BC را از تناسب زیر بدست آورید:

$$BC:bc = aC:ac;$$

و از آنجا:

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}$$

فواصل bc ، aC و ac را می توان مستقیماً بدست آورد. به مقدار بدست آمده BC باید فاصله CD را (که آنهم مستقیماً اندازه گرفته می شود) اضافه کرد تا ارتفاع مجهول درخت بدست آید. برای تعیین مقدار چوب قابل استفاده، گروهبان پیر به سربازان دستور داد تا مساحت کل جنگل را اندازه بگیرند، سپس مقدار چوبی که در يك قطعه 50×50 متر مربع بود محاسبه کرد و ضرب مربوطه را انجام داد.

فرمانده با توجه به اطلاعاتی که از گروههای اکتشافی رسید، توانست تصمیم بگیرد که در کجا و چگونه پلی می تواند بسازد. پل فوراً ساخته شد و جنگل به موفقیت به انجام رسید.*

با کمک دفتر یادداشت

از دفترچه یادداشت جیبی هم می توان به عنوان وسیله ای برای

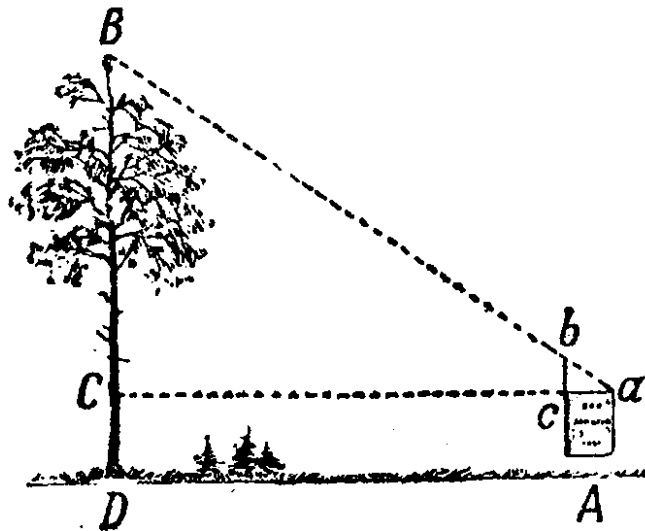
(* این حادثه و حادثه بعدی مربوط به جنگ بزرگ میهنی به وسیله

آ. دمیدویچ در مجله «اطلاعات نظامی» شماره ۸ سال ۱۹۴۹ چاپ شده است.

تخمین ارتفاعات غیر قابل دسترس استفاده کرد . به شرطی که این دفترچه يك مداد همراه خود داشته باشد . به كمك این دفترچه می توان دو مثلث متشابه را در فضا بوجود آورد و از روی آنها ارتفاع مجهول را محاسبه کرد . دفترچه را باید بنحوی که ساده شده آن در شکل ۹ دیده می شود پهلوی چشم نگه داشت . صفحه دفترچه را بطور عمودی نگه می داریم و مدار را از غلاف خود بیرون آورده و آنقدر بالا می بریم که وقتی از a رأس B درخت را نگاه می کنیم ، شعاع دید از نقطه b ، نوک مداد ، هم بگذرد . در اینصورت با توجه به تشابه دو مثلث aBC و abc می توان ارتفاع BC را از تناسب زیر بدست آورد :

$$BC:bc = aC:ac$$

فواصل bc ، ac و aC را می توان مستقیماً بدست آورد . به مقدار BC باید CD (یعنی ارتفاع چشم ناظر) را اضافه کرد ، تا ارتفاع اصلی درخت بدست آید .



۹. اندازه گیری ارتفاع درخت با كمك دفترچه یادداشت

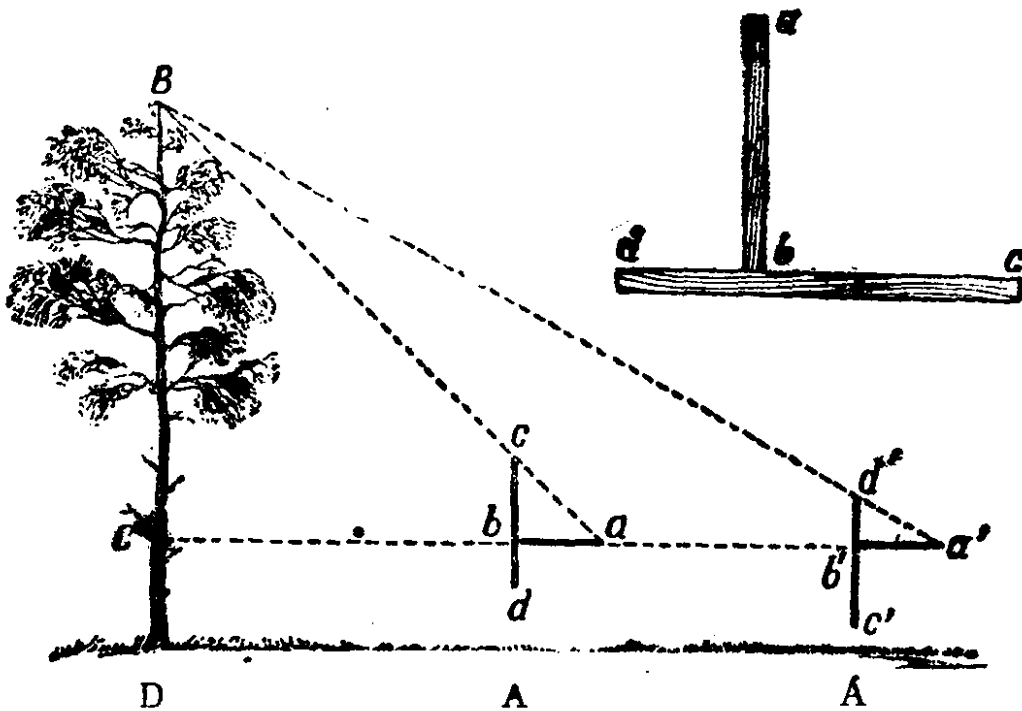
از آنجا که عرض ac دفترچه مقدار ثابتی است ، اگر همیشه به فاصله معینی از درخت و مثلاً ۱۰ متری آن، به ایستید، ارتفاع درخت تنها با اندازه گیری قسمت bc از مداد بدست می آید . بنابراین شما

می‌توانید از قبل با اندازه‌گیریهای مختلف، ارتفاعات متناظر را روی مدار علامت بگذارید. در اینصورت دفترچه یادداشت شما به یک ارتفاع سنج تبدیل می‌شود، زیرا بدون هیچگونه محاسبه‌ای می‌توانید ارتفاعات مورد نظر را از روی آن بدست آورید.

اگر نتوانیم به درخت نزدیک شویم

گاهی وضع درخت طوری است که نمی‌توانیم به راحتی خود را به پای آن برسانیم. آیا در اینحالت هم می‌توانیم ارتفاع درخت را بدست آوریم؟

در این موارد هم می‌توان به سادگی ارتفاعات را محاسبه کرد. برای این منظور هم باید از وسیله‌ای استفاده کرد که مثل موارد قبل به سادگی قابل تهیه است. دو تخته ab و cd (قسمت بالای شکل ۱۰) را تحت زاویه قائمه چنان بهم محکم می‌کنیم که ab مساوی bc ، و bd نصف ab باشد. تمام وسیله مورد نظر همین است. برای اندازه‌گیری ارتفاع، وسیله را چنان در دست می‌گیریم که امتداد cd قائم باشد (برای این منظور می‌توان از نخ‌کی که سنگی به انتهای آن بسته شده - شاغول - استفاده کرد) و در دو نقطه آنرا قرار می‌دهیم: ابتدا (شکل ۱۰) در نقطه A ، که در آنجا نقطه c بطرف بالا باشد و سپس در نقطه A' ، که در آنجا انتهای d بطرف بالا قرار گیرد. نقطه A باید چنان انتخاب شود که شعاع دید از نقطه a به نقطه c از B ، رأس درخت، بگذرد. بهمین ترتیب نقطه A' را باید طوری جستجو کرد که a' و d' و B بر یک امتداد باشند. وقتی که نقاط A و A' را پیدا کنیم، در حقیقت ارتفاع BC را پیدا کرده‌ایم، زیرا ارتفاع مجهول



۱۰. به کار بردن ارتفاع یاب ساده‌ای که از دو قطعه چوب درست شده است

BC با فاصله AA' برابر است. این تساوی به سادگی از روابط $aC = BC$ و $a'C = 2BC$ بدست می‌آید، یعنی:

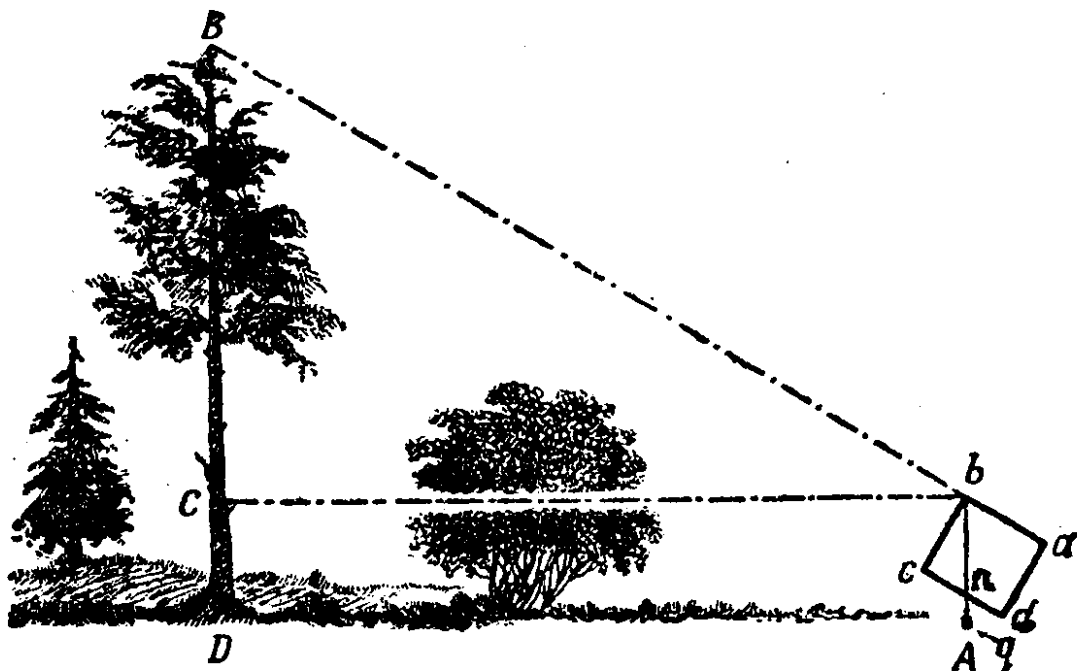
$$a'C - aC = BC$$

می‌بینید که توانستیم با استفاده از این وسیله ساده، بدون اینکه به پای درخت نزدیک شویم، ارتفاع آنرا محاسبه کنیم. واضح است که اگر می‌توانستیم به پای درخت نزدیک شویم، کافی بود یکی از دو نقطه A یا A' معلوم شود تا ارتفاع درخت بدست آید.

می‌توان به جای دو تخته چوب، از چهار سنجاق استفاده کرد. به این ترتیب که آنها را بشکل وسیله‌ای که ذکر کردیم روی یک چوب محکم کنیم.

ارتفاع یاب جنگلبانان

حالا موقع آنست با ارتفاع یابهای امروزی، که مورد استفاده



۱۱. طرح استفاده از ارتفاع یاب در جنگلها

کارگران جنگل قرار می‌گیرند، آشنا شویم. یکی از این ارتفاع یابها را، با مختصر تغییری، شرح می‌دهیم؛ بنحوی که ساختن آن برای هر کسی ممکن باشد.

اصل ساختمان را در شکل ۱۱ می‌بینید. مستطیل مقوائی و یا چوبی $abcd$ را چنان در دست می‌گیریم که ضلع ab آن و رأس B درخت بريك امتداد قرار گیرند. در نقطه b نخي که وزنه q به انتهای آن بسته شده آویزان است. نقطه n را روی cd در جایی که نخ این ضلع را قطع کرده است، علامت می‌گذاریم. مثلثهای bnc و bBC متشابه‌اند، زیرا هر دو قائم‌الزاویه‌اند و زوایای حاده bnc و bBC آنها با هم برابر است (اضلاع این دو زاویه حاده با هم موازی است). بنا بر این می‌توانیم تناسب زیر را بنویسیم:

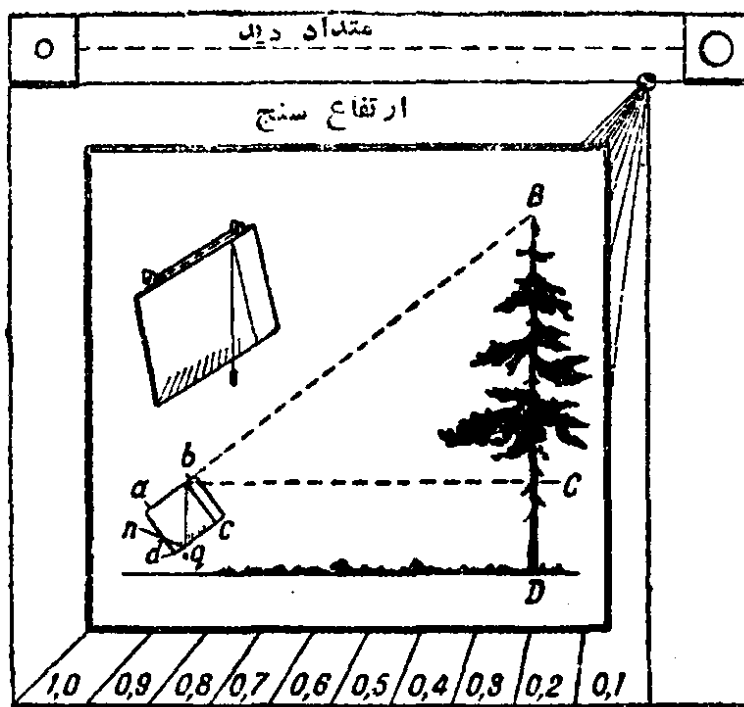
$$BC:nc = bC:bc;$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bc}$$

و چون bc ، nc و bc را می توان مستقیماً اندازه گرفت، ارتفاع درخت با اضافه کردن CD (ارتفاع وسیله اندازه گیری تا زمین) به BC بدست می آید .

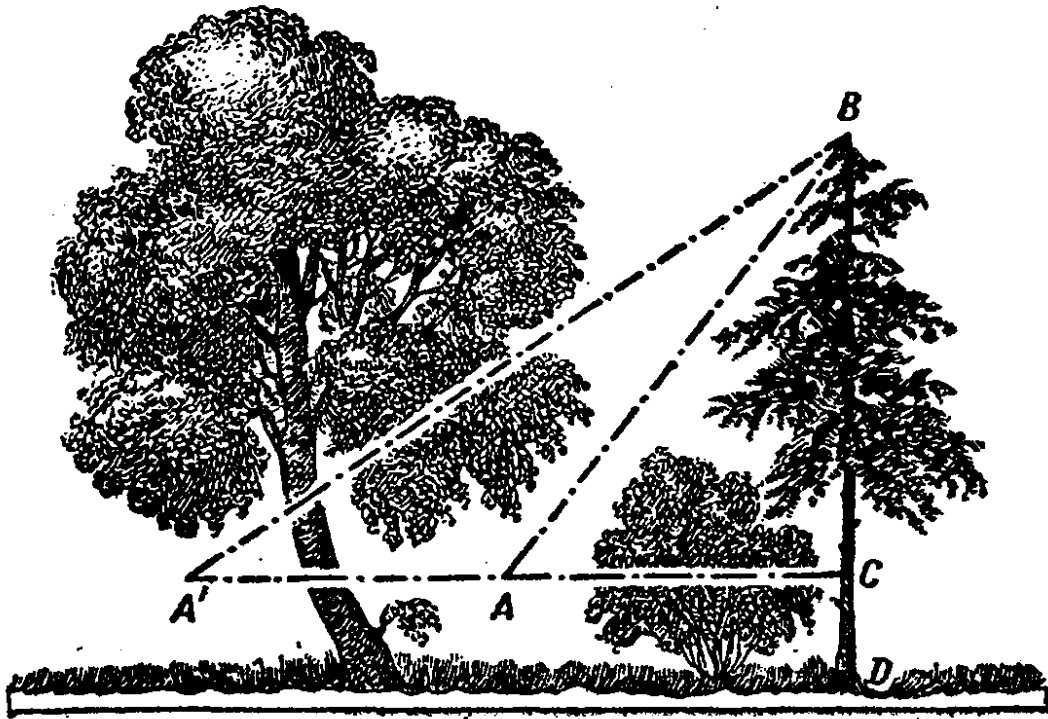
حالا باید به بعضی جزئیات پردازیم. اگر ضلع bc مثلاً مساوی ۱۰ سانتیمتر باشد و ضلع dc را با واحد سانتیمتر تقسیم بندی کرده باشیم، نسبت $\frac{nc}{bc}$ همیشه با کسراشاری معین می شود، و از آنجا معلوم



۱۲. ارتفاع یاب جنگلبانها

می شود که ارتفاع BC درخت چه قسمتی از فاصله bc است . مثلاً فرض کنید که نخ در مقابل قسمت هفتم قرار گرفته باشد (یعنی $nc = 7cm$) در این صورت ارتفاع درخت برابر با $7/0$ فاصله ناظر تا درخت خواهد بود. مطلب دوم مربوط به ناظر است : برای اینکه راحت تر بتوان در امتداد ab نگاه کرد، می توان روی زوایای بالائی مستطیل مقوایی دو مربع تعبیه کرد و در هر یک از این مربعها يك سوراخ : یکی کوچکتر برای جلو چشم و دیگری بزرگتر برای دیدن رأس درخت (شکل ۱۲).

آخرین تکمیل مربوط به وسیله است که تقریباً با اندازه‌های طبیعی در شکل ۱۲ داده شده است. تهیه این وسیله به سادگی و سرعت انجام می‌گیرد و به هیچگونه مهارت و استادی خاصی احتیاج ندارد. این وسیله جای زیادی را در جیب اشغال نمی‌کند ولی در عوض می‌توانید هر وقت که به گردش و تفریح می‌روید، هر بلندی را که سر راه شما قرار دارد (درختها، ستونها، عمارات و غیره) اندازه بگیرید.



۱۳. اندازه‌گیری ارتفاع درختی که نمی‌توان به آن نزدیک شد

مسئله

آیا به کمک ارتفاع یاب می‌توان ارتفاع درختی را اندازه‌گرفت که نزدیک شدن به پای آن ممکن نیست؟ در صورت امکان راه حل آن چگونه است؟

حل

باید از وسیله در دو نقطه A و A' استفاده کرد (شکل ۱۳).

فرض کنید که مثلا در نقطه A داشته باشیم :

$$BC = 0,9 AC$$

و در نقطه A' :

$$BC = 0,4 A'C$$

در اینصورت میدانیم :

$$AC = \frac{BC}{0,9} ; A'C = \frac{BC}{0,4}$$

واز آنجا :

$$A'A = A'C - AC = \frac{BC}{0,4} - \frac{BC}{0,9} = \frac{25}{18} BC$$

و به این ترتیب خواهیم داشت :

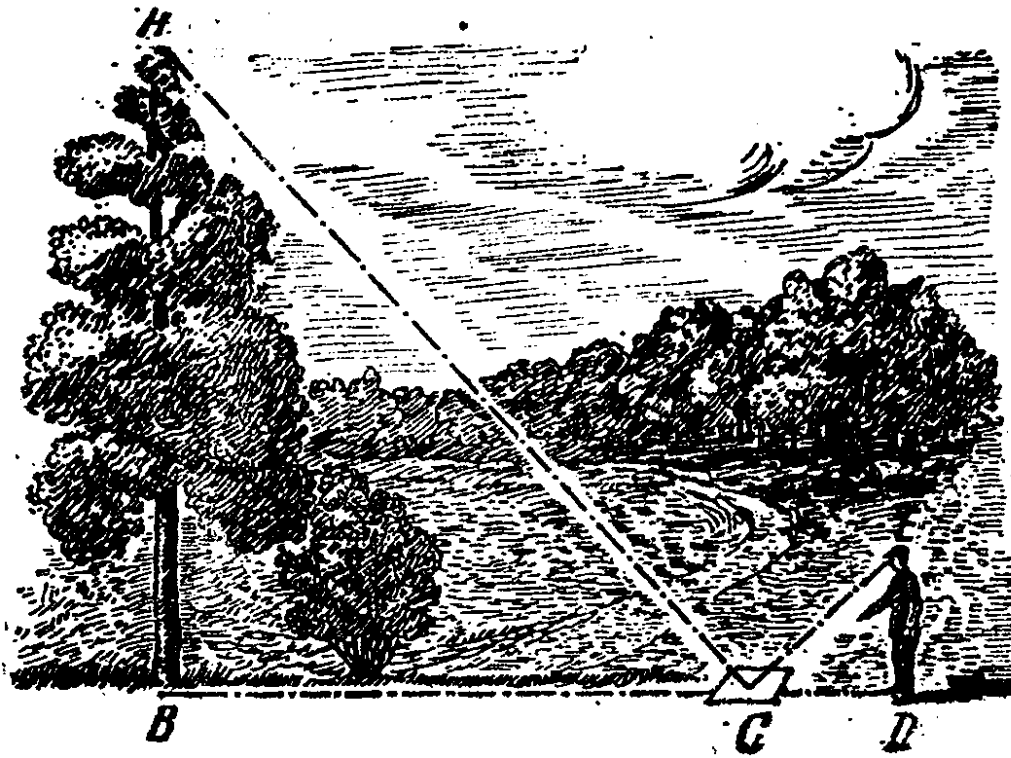
$$BC = \frac{18}{25} A'A = 0,72 A'A$$

می بینید که با اندازه گرفتن فاصله A'A ، بین دو نقطه مشاهده ، و در دست داشتن قسمت‌های ارتفاع یاب در این دو نقطه ، می توان ارتفاع غیر قابل دسترس را محاسبه کرد.

به کمک آینه

مسئله

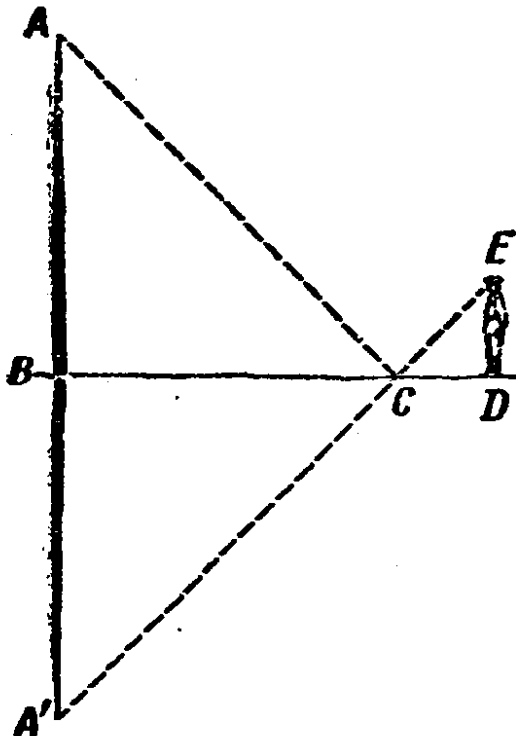
آینه هم وسیله دیگری برای تعیین ارتفاع درخت است. در فاصله ای از درخت (شکل ۱۴) ، که قابل اندازه گیری باشد. آینه ای روی زمین صاف در نقطه C بطور افقی می گذاریم. از آینه آنقدر دور می شویم تا به نقطه D برسیم که در آنجا رأس A درخت را در آینه به بینیم. در اینصورت نسبت ارتفاع AB درخت به قد مشاهده کننده ED برابر



۱۴. اندازه گیری ارتفاع به کمک آینه

است با نسبت BC ، فاصله آینه تا درخت ، به CD ، فاصله آینه تا مشاهده کننده . چرا ؟

حل



اساس این مطلب قانون انعکاس نور است. طبق این قانون باید $AB = A'B$ باشد (شکل ۱۵). از تشابه دو مثلث BCA' و CED نتیجه می شود :

$$A'B:ED = BC:CD$$

و در این رابطه کافی است بجای $A'B$ مساویش AB را قرار

۱۵. ساختمان هندسی وضعی که به وسیله آینه ، ارتفاعی اندازه گیری می شود

دهیم تا به رابطه مورد نظر برسیم .

از این وسیله ساده و بدون زحمت می توان در هر هوائی استفاده کرد ، بشرطی که سر و کار ما با يك درخت تنها باشد ، نه با انبوه درختان .

مسئله

ولی اگر به پای درخت دسترسی نداشته باشیم ، چگونه می توان به کمک آینه ارتفاع آنرا اندازه گرفت ؟

حل

این يك مسئله قدیمی است که بیش از ۵۰۰ سال از عمر آن می گذرد و بوسیله ریاضی دان قرون وسطی آنتونی دوکرمون در کتاب « درباره مساحی عملی » مورد مطالعه قرار گرفته است (سال ۱۴۰۰ میلادی) .

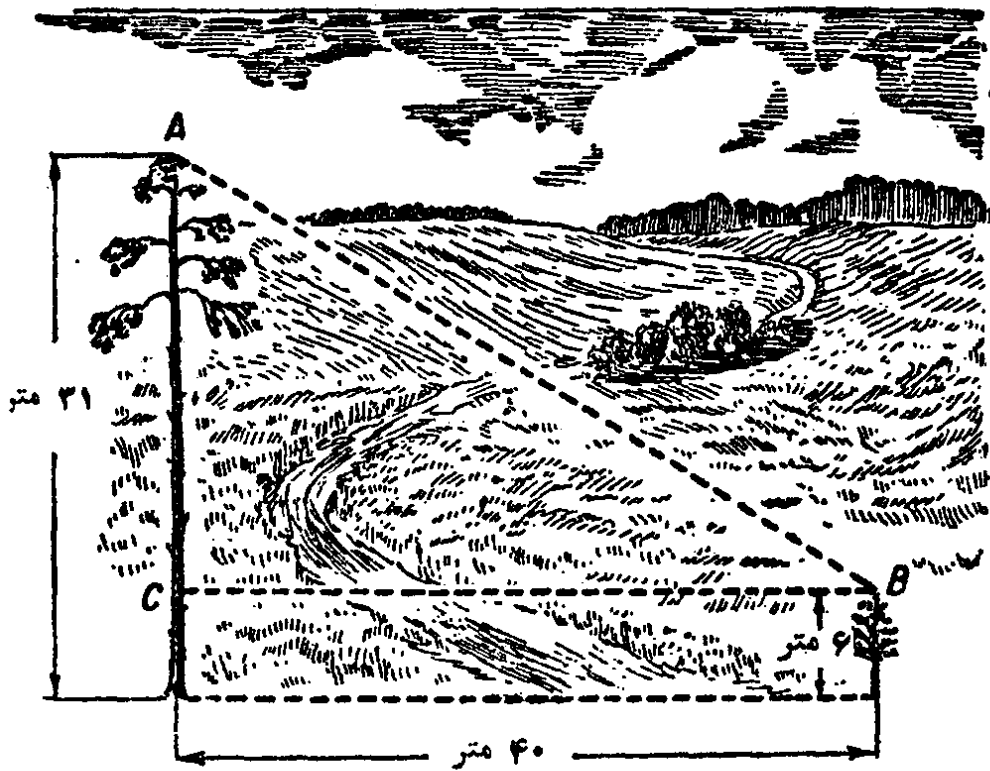
مسئله به این ترتیب حل می شود که از آینه در دو نقطه مختلف استفاده کنیم ، با این عمل می توان به سادگی از تشابه مثلثها نتیجه گرفت که ارتفاع درخت برابر است با بلندی ناظر ضرب در نسبت فاصله بین دو آینه بر اختلاف فواصل ناظر از آینه .

قبل از اینکه بحث مربوط به اندازه گیری ارتفاعات را تمام کنیم ، خواننده را با مسئله دیگری مربوط به « جنگل » آشنا می کنیم .

دو درخت کاج

مسئله

به فاصله ۴۰ متر از یکدیگر دو درخت کاج روئیده اند . ارتفاع



۱۶. فاصله بین دو رأس درخت چقدر است ؟

دو درخت را اندازه گرفته ایم : یکی ۳۱ متر و دیگری که جوانتر بود ۶ متر ارتفاع داشتند .

آیا می توانید فاصله بین دو رأس درخت را محاسبه کنید ؟

حل

فاصله مجهول بین دو رأس درخت ، طبق قضیه فیثاغورث چنین است (شکل ۱۶) :

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47 \text{ (متر)}$$

شکل تنه درخت

حالا دیگر ضمن گردشی که در جنگل می کنید ، می توانید ارتفاع هر درختی را اندازه بگیرید و برای این منظور از نیم دوجین روشی

که یاد گرفته‌اید می‌توانید استفاده کنید. احتمالاً برای شما جالب باشد که ضمناً بتوانید حجم درخت را نیز محاسبه کنید و به بینید چند متر مکعب چوب در آن وجود دارد و مثلاً با اطلاع برون آن به بینید که آیامی توان آنرا با یک گاری حمل کرد یا نه؟ هیچیک از این دو مسئله به سهولت تعیین ارتفاع درخت حل نمی‌شوند، متخصصین امر نتوانسته‌اند راهی برای حل دقیق این مسائل پیدا کنند و به تخمین کم و بیش تقریبی آنها اکتفا کرده‌اند. همینطور برای تنه بریده درخت هم که روبروی شما، بدون شاخ و برگ، افتاده است، نمی‌توان مسئله را خیلی ساده حل کرد.

مشکل مربوط به آنست که تنه درخت، حتی در مورد بهترین و یکنواخت‌ترین آنها، نه استوانه، نه مخروط کامل، نه مخروط ناقص و نه هیچ شکل کامل هندسی دیگری نیست که بتوان طبق روابط هندسه حجم آنرا بدست آورد. تنه درست به اینجهت استوانه نیست که هرچه بالاتر برویم از قطرش کم می‌شود، مخروط هم نیست، زیرا «مولد» آن مستقیم نیست بلکه خط منحنی است و این خط منحنی (که از دوران آن به دور محور درخت، تنه درخت بوجود آمده است) دایره هم نیست.^۵

محاسبه حجم تنه درختان را با تقریب لازم می‌توان تنها به کمک حساب انتگرال انجام داد. به عبارت دیگر، اگرچه ممکن است عجیب

(* این منحنی به منحنی $y^2 = 8x^3$ (که سهمی نیم‌مکعبی نامیده می‌شود) خیلی نزدیک است، جسمی که از دوران این منحنی بدست می‌آید نیلوئید نامیده می‌شود) از اسم ریاضی‌دان قدیم بنام نیلا که برای نخستین بار طول قوس این منحنی را محاسبه کرد. به این ترتیب تنه درخت بیش از همه به نیلوئید نزدیک است. حجم نیلوئید به وسیله روابطی که مربوط به ریاضیات عالی است محاسبه می‌شود.

باشد، محاسبهٔ مربوط به يك تیرچوبی ساده به ریاضیات عالی مربوط می‌شود. بسیاری گمان می‌کنند که ریاضیات عالی تنها مربوط به موارد کاملاً خاصی است و در زندگی عملی روزمره اطلاع بر ریاضیات مقدماتی کافی است. ولی این استنباط بکلی غلط است: حجم ستارگان و یا سیارات را می‌توان با دقت کافی با کمک هندسه بدست آورد ولی مثلاً حجم يك تیرچوبی و یا حجم يك بشکهٔ آب جو را بدون هندسهٔ تحلیلی و حساب انتگرال نمی‌توان محاسبه کرد. ولی ما نمی‌خواهیم در این کتاب به قوانین ریاضیات عالی پردازیم و بنابراین به این قانع می‌شویم که تنها محاسبهٔ تقریبی حجم تنهٔ درختان را مطرح کنیم.

با توجه به این مطالب است که حجم تنهٔ درختان را در مواردی مثل حجم يك مخروط ناقص و یا در مواردی که تا انتهای رأس لازم باشد مثل حجم يك مخروط و بالاخره مواقعی که با يك تیرچوبی کوتاه سروکار داشته باشیم، مثل حجم يك استوانه در نظر می‌گیریم. و می‌دانیم که حجم هر يك از این سه جسم هندسی را هم می‌توان به سادگی بدست آورد. آیا نمی‌شود رابطه‌ای بدست آورد که، بخاطر یکنواخت شدن محاسبات، بتوان برای محاسبهٔ حجم هر يك از اجسام نامبرده از آن استفاده کرد؟ اگر چنین رابطه‌ای بدست آوریم دیگر برای ما مهم نخواهد بود که ببینیم تنهٔ درخت مورد نظر به کداميك از این سه جسم: استوانه، مخروط و مخروط ناقص، نزدیک‌تر است.

رابطهٔ کلی

می‌توان رابطهٔ کلی بدست آورد که نه تنها برای استوانه، مخروط و مخروط ناقص بلکه برای هر نوع منشور، هرم (کامل یا ناقص) و حتی کره مورد استفاده قرار گیرد. این رابطهٔ مهم، که نزد ریاضی دانان

به رابطهٔ سیمپسون مشهور است ، چنین است :

$$v = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_2 + b_3) \begin{cases} h : & \text{ارتفاع جسم} \\ b_1 : & \text{سطح قاعدهٔ پائین} \\ b_2 : & \text{سطح مقطع متوسط} \\ b_3 : & \text{سطح قاعدهٔ بالا} \end{cases}$$

مسئله

ثابت کنید که با کمک رابطه‌ای که ذکر کردیم ، می‌توان حجم هر یک از هفت جسم هندسی زیر را بدست آورد : منشور ، هرم ، هرم ناقص ، استوانه ، مخروط ، مخروط ناقص و کره .

حل

با بکار بردن این رابطه در مورد هر یک از اجسام نامبرده، می‌توان به سادگی صحت آنرا اثبات کرد . برای منشور و استوانه داریم (شکل ۱۷- a) :

$$v = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 \cdot h;$$

برای هرم و مخروط (شکل ۱۷- b) :

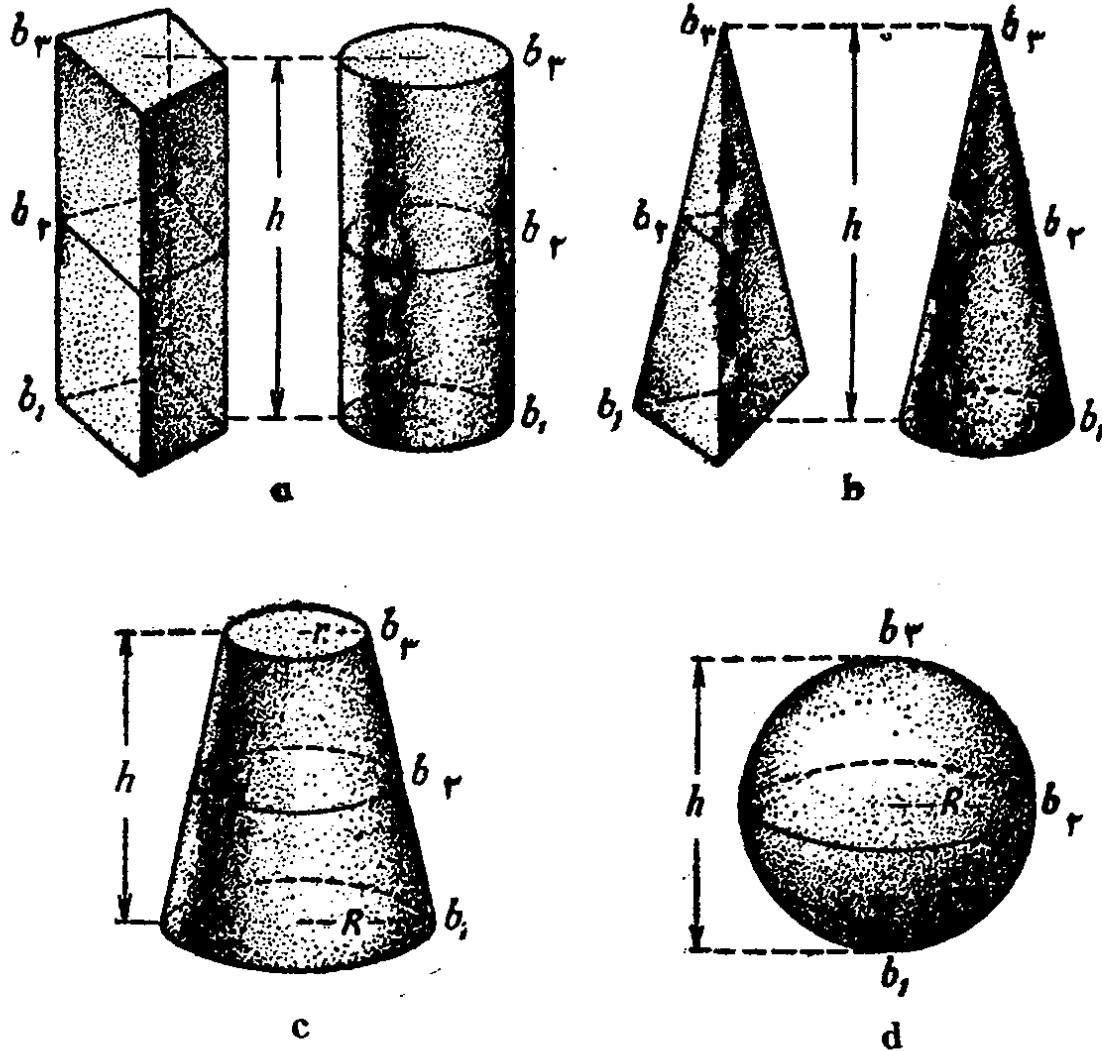
$$v = \frac{h}{6} (b_1 + 4 \times \frac{b_1}{4} + 0) = \frac{b_1 \cdot h}{3};$$

برای مخروط ناقص (شکل ۱۷- c) :

$$\begin{aligned} v &= \frac{h}{6} \left[\pi R^2 + 4\pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 + \pi r^2 \right] = \\ &= \frac{h}{6} (\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2) = \end{aligned}$$

(* یعنی سطح مقطع جسم در وسط ارتفاع آن

$$= \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2);$$



۱۷. اشکال هندسی که می‌توان حجم آنها را طبق یک رابطه بدست آورد

برای هرم ناقص هم کاملاً شبیه مخروط ناقص می‌توان عمل کرد و بالاخره برای کره (شکل ۱۷-د):

$$v = \frac{2R}{6} (0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

مسئله

یکی دیگر از خصوصیات جالب این رابطه کلی را ذکر می‌کنیم:
این رابطه می‌تواند برای محاسبه مساحت اشکال هندسی زیر هم بکار رود:

متوازی‌اضلاع، ذوزنقه و مثلث با این شرط که :

h ارتفاع شکل ،

b_1 طول قاعده پائین ،

b_2 طول قاعده متوسط ،

b_3 طول قاعده بالا باشد ؟

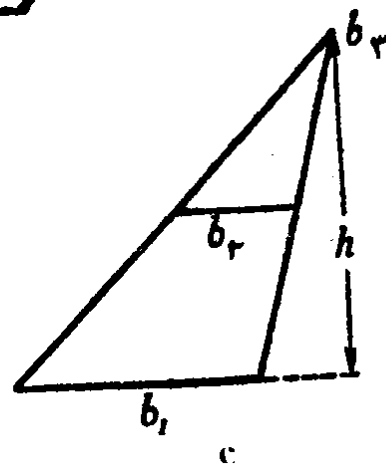
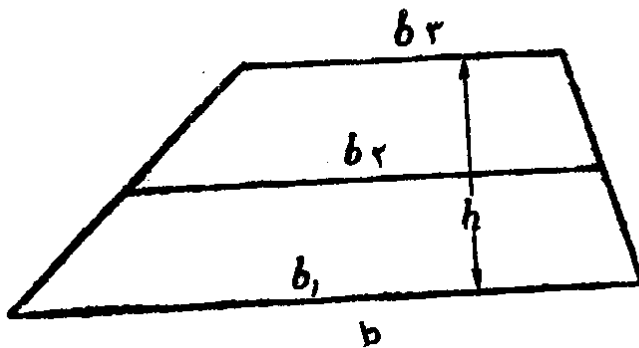
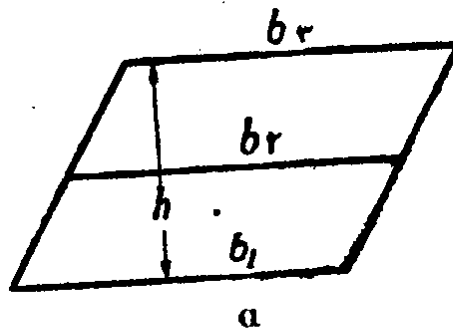
چگونه می‌توان این قضیه را ثابت کرد !

حل

با استفاده از رابطه خواهیم داشت :

برای متوازی‌الاضلاع (مربع و مستطیل) (شکل ۱۸-ا) :

$$S = \frac{h}{6} (b_1 + 2b_2 + b_3) = b_1 \cdot h;$$



۱۸. از رابطه کلی برای محاسبه مساحت این اشکال هم می‌توان استفاده کرد

برای ذوزنقه (شکل ۱۸-ب)

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4 \times \frac{b_1 + b_2}{2} + b_3) = \frac{h}{6}(b_1 + b_3);$$

و برای مثلث (شکل ۱۸-ع) :

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4 \times \frac{b_1}{2} + 0) = \frac{1}{2}b_1 \cdot h.$$

می بینید که حق داشتیم این رابطه را، رابطه کلی اسم بگذاریم.

حجم و وزن درخت قطع نشده

به این ترتیب، با در دست داشتن رابطه کلی می توانیم حجم تنه درختان بریده را بطور تقریب بدست آوریم، بدون اینکه درباره شکل آنها دقت کرده باشیم که به کدامیک از اجسام هندسی استوانه، مخروط

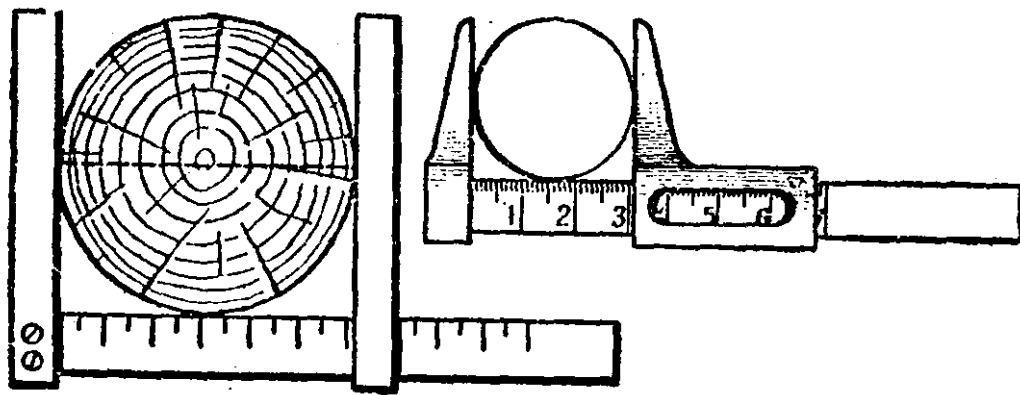


۱۹. اندازه گیری قطر درخت به وسیله خط کش دوبازد

و یا مخروط ناقص بیشتر شبیه است. برای این منظور باید چهار اندازه را بدست آوریم: طول تنه درخت و اندازه سه قطر آنرا - قطر پائین، قطر بالا و قطر وسط تنه درخت را. اندازه گیری قطرهای پائین و بالای درخت به سادگی انجام می گیرد و قطر وسط درخت را هم می توان بدون وسیله

(« خط کش دوبازوی» جنگلبانان شکلهای ۱۹ و ۲۰) بدست آورد .
ریسمانی دور تنه درخت می گیریم و طول آنرا بر $\frac{3}{4}$ تقسیم می کنیم ،
قطر درخت بدست می آید .^{۵۵}

حجم درختهای قطع شده را می توان با همین روش بدست آورد
که برای بسیاری از موارد عملی به اندازه کافی دقیق خواهد بود. اگر
بخواییم محاسبه را سریع تر، ولی با دقت کمتر، انجام دهیم ؛ می توان
تنه درخت را استوانه ای در نظر گرفت که قاعده آن ، قاعده متوسط
تنه درخت باشد . در اینصورت نتیجه ای که بدست می آیدگاهی تا ۱۲٪
اشتباه خواهد داشت . ولی اگر تنه درخت را به دو قسمت کنیم و هر
کدام را جداگانه و با همین روش بدست آوریم، از مجموع آنها حجمی
بدست می آید که اشتباه آن بیش از ۲ تا ۳ درصد نیست .



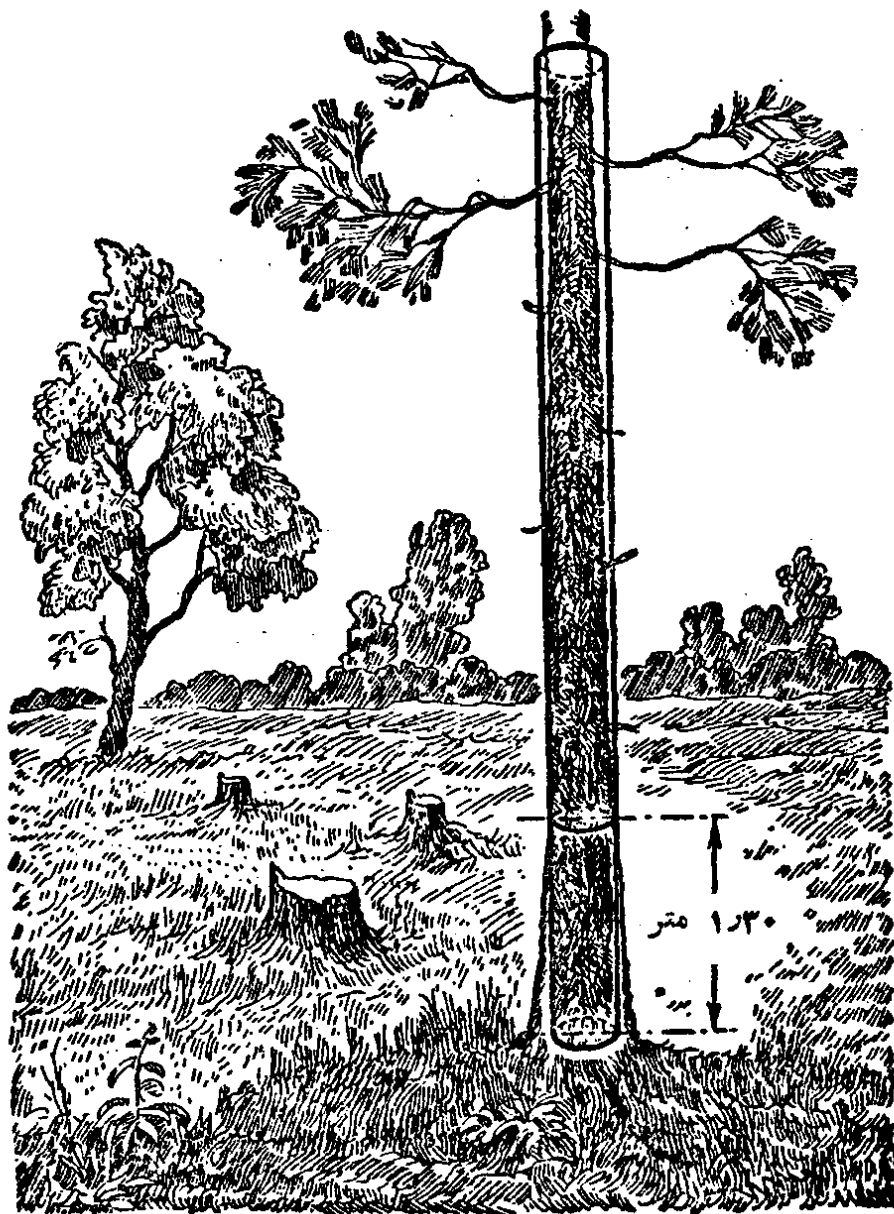
۲۰. خط کش دوبازو (سمت چپ) و کولیس (سمت راست)

ولی همه این کارها را درمورد درخت قطع نشده نمی توان انجام
داد : اگر درخت قطع نشده باشد ، تنها می توانید قطر قسمت پائین آنرا

(* شبیه همین وسیله را برای اندازه گیری قطر اجسام گرد ساخته اند
(کولیس - شکل ۲۰ ، سمت راست) .

** نسبت طول محیط دایره بر قطر آن برابر است با عدد π ، که
تقریباً مساوی $\frac{3}{4}$ است .

اندازه بگیرید . در اینگونه موارد باید به تخمین کاملاً تقریبی حجم قانع بود و دل را به این خوش کرد که جنگلبانان حرفه‌ای هم بهمین ترتیب عمل می‌کنند . آنها معمولاً از جدولی که به «اعداد نوعی» معروف است استفاده می‌کنند . این اعداد نشان می‌دهند که حجم درخت چه قسمتی از حجم استوانه‌ای است که ارتفاع آن مساوی ارتفاع درخت و قطر آن مساوی قطر درخت در فاصله قد انسان باشد (معمولاً این قطر را در ارتفاع ۱۳۰ سانتیمتری اندازه می‌گیرند، چون در این فاصله، کار اندازه‌گیری با سهولت بیشتری انجام می‌گیرد) . در شکل ۲۱ این مطلب نشان



داده شده است . البته این « اعداد نوعی » برای درختان مختلف با هم فرق دارند ، زیرا شکل تنه درخت یکجور نیست . ولی نوسان این اعداد خیلی بزرگ نیست : برای انواع کاج این اعداد بین ۰/۴۵ و ۰/۵۱ یعنی تقریباً ۰/۵ می باشد .

بنا بر این ، بدون اشتباه زیادی ، می توان حجم درخت کاج را مساوی نصف حجم استوانه ای دانست که ارتفاع آن مساوی ارتفاع درخت و قطر قاعده آن مساوی قطر درخت در ارتفاع ۱۳۰ سانتیمتری باشد .

این فقط يك تخمین تقریبی است ، ولی از مقدار واقعی هم خیلی دور نیست : تا ۲٪ در جهت زیادی و تا ۱۰٪ در جهت کمی * .

حالا به بینیم وزن درختان قطع نشده را بچه ترتیب می توان تخمین کرد ؟ برای این منظور کافی است بدانیم که يك متر مکعب چوب کاج قریب ۶۰۰-۷۰۰ کیلوگرم وزن دارد . فرض کنید ارتفاع درخت کاجی مساوی ۲۸ متر و محیط دایره تنه در ارتفاع ۱۳۰ سانتیمتری مساوی ۱۲۰ سانتیمتر باشد ، در اینصورت مساحت دایره مربوطه مساوی ۱۱۰۰ سانتیمتر مربع یا ۰/۱۱ متر مربع و حجم تنه درخت :

$$\frac{1}{2} \times 0,11 \times 28 = 1,5 \quad (\text{مترمکعب})$$

خواهد شد . با توجه به اینکه هر متر مکعب چوب کاج بطور متوسط ۶۵۰ کیلوگرم وزن دارد، وزن ۱/۵ متر مکعب در حدود يك تن می شود (۱۰۰۰ کیلوگرم) .

(* باید توجه داشت که «اعداد نوعی» را تنها برای درختانی که در جنگل روئیده اند (یکنواخت و بدون شاخ و برگ اضافی هستند) می توان بکار برد و نمی توان این قاعده را در مورد درختان تنهائی که با شاخ و برگ زیاد روئیده اند تعمیم داد .

مسئله

در سایهٔ درخت تبریزی جوانه‌هایی از ریشهٔ آن بیرون آمده است (جوانه‌های حرامزاده). برگی از آن جدا کنید و بزرگی آنرا با برگهای اصلی درخت و بخصوص آنهایی که در معرض آفتاب بوده‌اند ، مقایسه کنید . سطح برگهایی که در سایه هستند برای جبران کمبود نور بزرگتر می‌شوند تا نور بیشتری جذب کنند . طرح اصلی این مسئله مربوط به گیاه شناسی است ، ولی عالم هندسه می‌تواند در اینجا نقشی داشته باشد : او می‌تواند محاسبه کند که برگ حرامزاده چند مرتبه بزرگتر از برگ اصلی درخت است .
این مسئله را چگونه باید حل کرد ؟

حل

به دو طریق می‌توان عمل کرد . طریق اول اینست که ابتدا مساحت هر یک از برگها را بطور جداگانه محاسبه کنیم و سپس نسبت آنها را بدست آوریم . برای اندازه‌گیری سطح برگ می‌توان از کاغذ شفاف شطرنجی استفاده کرد که مثلاً هر مربع آن ۴ میلیمتر مربع مساحت داشته باشد . این طریق ، اگر چه جواب صحیح را بدست می‌دهد ، ولی دقت فوق‌العاده‌ای لازم دارد* .

طریقهٔ دوم بر این اساس قرار گرفته است که برگها ، اگر چه

(* ولی این طریقه رجحان دیگری هم دارد: با این وسیله می‌توان مساحت

برگهایی را هم که بهم شباهتی ندارد مقایسه کرد ، در حالیکه طریقهٔ دوم را ، که بعداً ذکر می‌شود ، نمی‌توان دربارهٔ اینگونه برگها بکار برد .

اندازه‌های مختلف دارند ولی با شکلهای یکنواخت (و یا تقریباً یکنواخت) هستند: به عبادت دیگر شکل برگها از لحاظ هندسی متشابه‌اند. در اینصورت می‌دانیم که نسبت مساحت آنها مساوی مجذور نسبت خطی آنها خواهد بود. بنابراین اگر بدانیم که طول یا عرض يك برگ چند برابر طول یا عرض برگ دیگر است، با مجذور کردن آن، نسبت مساحت‌های آنها بدست می‌آید. فرض کنید طول يك برگ حرامزاده ۱۵ سانتیمتر و طول برگی که در شاخه درخت است مساوی ۴ سانتیمتر باشد، نسبت خطی این دو برگ مساوی $\frac{15}{4}$ و بنابراین نسبت مساحت‌های آنها مساوی $\frac{225}{16}$ یعنی ۱۴ می‌شود. از آنجا که این محاسبه تقریبی است می‌توان گفت که برگ حرامزاده تقریباً ۱۵ برابر برگ اصلی درخت مساحت دارد.

نمونه دیگری ذکر کنیم.

مسئله

طول برگ گل قاصدی که در سایه روئیده است مساوی ۳۱ سانتیمتر است. طول برگ نمونه دیگری از این گیاه که در معرض نور خورشید بوده است فقط $\frac{3}{3}$ سانتیمتر است. سطح برگ نمونه اول چند برابر سطح برگ نمونه دوم است؟

حل

طبق راه حل قبل عمل می‌کنیم. نسبت مساحتها چنین است:

$$\frac{31^2}{3/3^2} = \frac{960}{10/9} \approx 87;$$

یعنی برگ اول قریب ۹۰ برابر برگ دوم مساحت دارد.

ضمن گردش در جنگل می توان به برگهای زیادی برخورد کرد که از لحاظ شکل متشابه ولی از لحاظ اندازه با هم متفاوت باشند و از آنجا مواد اولیه زیادی برای نسبت مساحت های دو شکل متشابه بدست آورد . از لحاظ دید ظاهری همیشه عجیب است که برگهایی که از لحاظ طول و عرض اختلاف زیادی با هم ندارند ، از لحاظ مساحت اختلاف قابل توجهی پیدا می کنند . مثلا اگر دو برگگی که از لحاظ شکل متشابه اند ، طول یکی ۲۰٪ بیشتر از طول دیگری باشد ، نسبت مساحت های آنها چنین می شود :

$$۱/۲^۲ \# ۱/۴$$

یعنی اختلاف مساحت های آنها ۴۰٪ می شود . یا اگر برگگی ۴۰٪ عریض تر از برگ دیگر باشد ، نسبت مساحت های آنها می شود :

$$۱/۴^۲ \# ۲$$

یعنی مساحت برگ بزرگتر قریب دو برابر مساحت برگ کوچکتر می شود .



۲۳ . نسبت مساحت های این برگها را

پیدا کنید

۲۲ . نسبت مساحت های این برگها را

پیدا کنید

این مسئله را برای خواننده می‌گذاریم که نسبت مساحت‌های برگهائی که در شکل‌های ۲۲ و ۲۳ داده شده است، پیدا کند.

قهرمانان شش پا

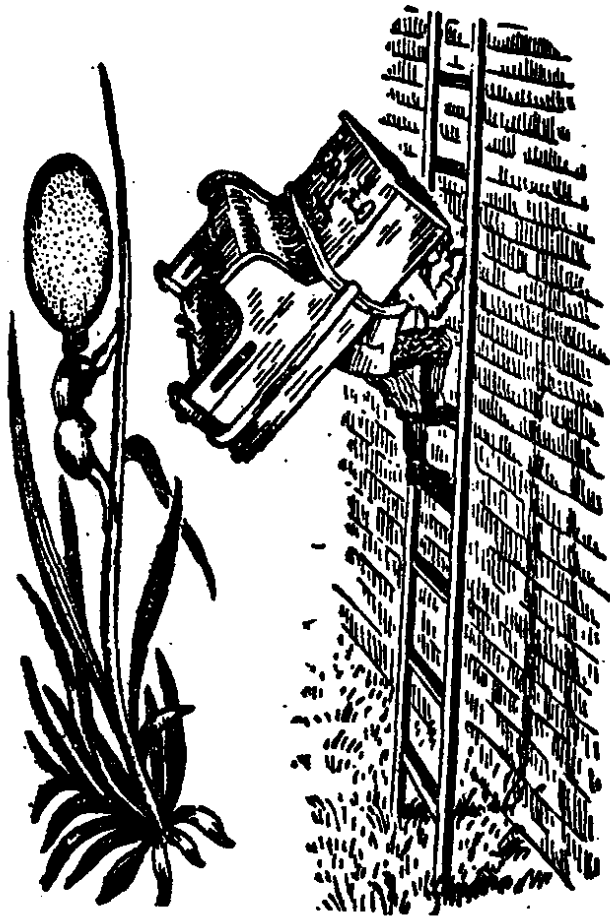
دنیای عجیب مورچه‌ها !

مورچه باری را که نسبت به جثه کوچکش خیلی سنگین است به دهان می‌گیرد و با چاپکی از ساقه درخت بالا می‌رود (شکل ۲۴) و برای بشر معمای بزرگی بوجود آورده است : این حشره نیروی لازم را از کجا می‌آورد که می‌تواند بدون اینکه تظاهری به سختی کارداشته باشد ، باری را که ده برابر وزن خودش است به سادگی بالا ببرد ؟ مثلاً انسان نمی‌تواند پیانوئی را به دوش بگیرد و از پلکان بالا ببرد ، در حالیکه نسبت وزن پیانو به وزن انسان تقریباً همان نسبت وزن باری است که مورچه می‌برد به وزن خود مورچه ، یعنی مورچه بطور نسبی به مراتب قوی‌تر از انسان است !

آیا همین‌طور است؟ بدون هندسه نمی‌توان به این سؤال جواب داد. قبل از همه به بینیم متخصص امر (پروفسور آ.اف. براند) درباره نیروی عضلات چه می‌گوید و سپس به سئوالی که طرح کرده‌ایم، یعنی مقایسه نیروی حشره با نیروی انسان پردازیم .

« عضله زنده مثل يك بند قابل ارتجاع است، فقط انقباض آن بر اساس قابلیت ارتجاع نیست و مبتنی بر اصل دیگری است . انقباض معمولاً در اثر تحريك عصبی و تجربه فیزیولوژیکی، از ضربه الکتریکی که روی عصب مربوطه و یا مستقیماً روی خود عضله وارد می‌شود ،

بوجود می آید .



۲۴ . قهرمان شش پا

تجربه روی عضله رامی توان به سادگی روی قورباغه کشته شده انجام داد، زیرا عضلات حیوانات خون سرد برای مدت نسبتاً طولانی و خارج از ارگانیسم ، حتی در درجه حرارت معمولی، خصوصیات زنده بودن خود را حفظ می کنند. نوع تجربه خیلی ساده است. عضله اصلی پای راست را همراه با استخوان ران و همراه با پی های انتهائی جدا می کنیم . این عضله، چه از لحاظ اندازه ، چه از لحاظ شکل و چه از لحاظ سادگی ترکیبات

راحت ترین نوع برای مطالعه بنظر می رسد . عضله را بوسیله قطعه استخوان به دیوار آویزان می کنیم ، بدین ترتیب که چنگک را از وسط پی ها می گذرانیم و وزنه ای هم به انتهای پائین عضله آویزان می کنیم . اگر به وسیله سیمی که به یک باطری وصل است ضربه ای به عضله وارد کنیم ، بلافاصله انقباضی در عضله بوجود می آید ، کوتاه تر می شود و وزنه را کمی بطرف بالا می برد . اگر بتدریج وزنه های کوچکی به آن اضافه کنیم ، می توان به سادگی حداکثر استعداد عضله را برای بلند کردن وزنه تعیین کرد . حالا دو ، سه و یا چهار عضله مثل هم را به دنبال هم می بندیم و آنها را یکباره تحریک می کنیم . ولی با این ترتیب به نیروی بزرگتری نمی رسیم، بلکه وزنه تا همان حداکثر ارتقاعی که در مورد عضلات جداگانه بود ، بالا می رود . سپس دو ، سه و چهار

عضله را بصورت دسته بهم می‌بندیم و تمام دستگاه را تحت تحریک قرار می‌دهیم. به این دسته می‌توان وزنه‌هایی به تعداد عضلات آویزان کرد تا به همان ارتفاع قبلی برسد. واضح است در حالتی هم که عضله‌ها بین هم رشد کرده باشند بهمین نتیجه خواهیم رسید. به این ترتیب روشن می‌شود که ازدیاد نیروی عضلات نه به طول و نه به وزن کلی ارتباط ندارد، بلکه تنها به ضخامت یعنی مقطع قطری آن بستگی دارد.

بعد از روشن شدن این مطلب، حالا به مقایسه عضلاتی می‌پردازیم که از لحاظ ساختمانی یکنواخت و از لحاظ هندسی متشابه‌اند، ولی اندازه آنها بسته به بزرگی حیوان، متفاوت است. دو حیوان را در نظر می‌گیریم که دومی از جهت همه اندازه‌های خطی دو برابر اولی باشد. حجم و وزن حیوان دوم، و همچنین حجم و وزن هر یک از اعضاء آن، ۸ برابر اولی خواهد بود، از طرف دیگر اندازه‌های سطحی حیوان دوم، و مثلاً مقطع عضلات، فقط چهار برابر اندازه‌های سطحی نظیر در حیوان اول است. روشن می‌شود که نیروی عضلانی حیوانی که از لحاظ طولی دو برابر و از لحاظ وزن هشت برابر دیگری است، فقط چهار مرتبه زیادتر شده است. یعنی حیوان بطور نسبی دو بار ضعیفتر شده است. بر این اساس حیوانی که سه برابر دیگری طول دارد (یعنی مقطع قطری عضلاتش ۹ برابر و وزنش ۲۷ برابر دیگری است)، نسبت به دومی سه بار ضعیفتر و حیوانی که ۴ برابر دیگری طول دارد، چهار برابر از دومی ضعیفتر بنظر می‌رسد و غیره.

باتوجه به اینکه رشد حجم و وزن و به‌مراه آن قدرت عضلات حیوانات یکنواخت نیست، روشن می‌شود که چرا حشرات، و مثلاً مورچه‌ها، می‌توانند باری ۳۰ تا ۴۰ برابر وزن خود را حمل کنند، در حالیکه انسان در حالت معمولی (ما ورزشکاران و وزنه برداران را استثنا

کرده ایم) نزدیک $\frac{9}{10}$ و اسب قریب $\frac{7}{10}$ تمام وزن خود را می تواند حمل کند».

بعد از این توضیحات بدنیست قهرمانیهای این مورچه پهلوان را از زبان طنزآمیز ای.آ.گریلوف هم بشنوید :

مورچه ای بود ما قدرتی بی پایان ،
قدرتی که همانند آنرا در اعصار گذشته هم کسی نشنیده است ،
(مورخ قابل اعتمادی نقل می کند) که او حتی ،
قدرت بلند کردن دو دانه جو بزرگ را داشته است .





۲

هندسه در کنار رودخانه

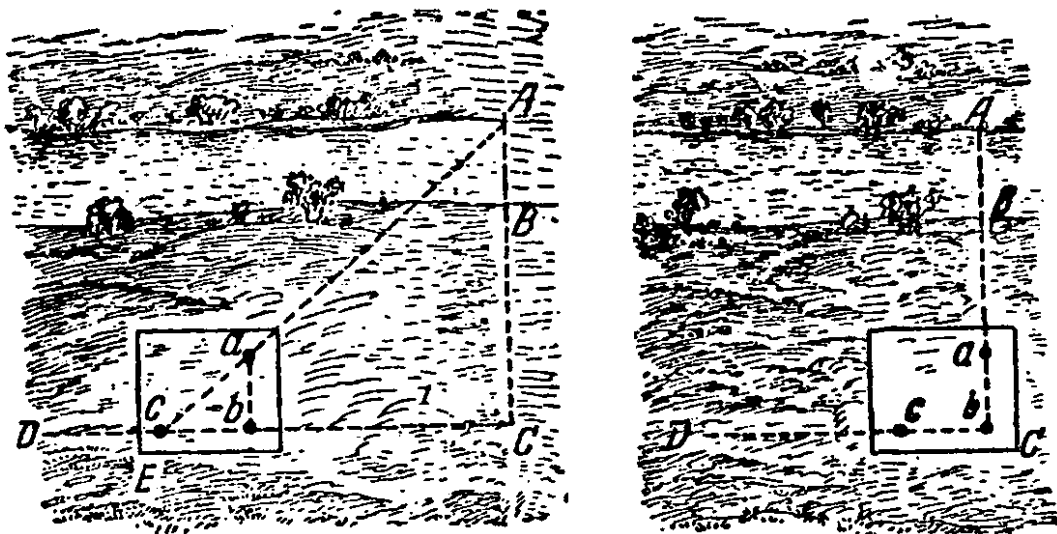
اندازه گیری عرض رودخانه

اندازه گیری عرض رودخانه ، بدون اینکه با کمک شنا یا قایق از آن عبور کنیم ، برای عالم هندسه بهمان سادگی اندازه گیری ارتفاع درخت ، بدون آنکه از آن بالا برویم ، انجام می گیرد. فواصلی را که از دسترس ما خارج اند ، می توانیم با همان روشهای اندازه گیری ارتفاعات ، بدست آوریم . در هر دو حالت ، تعیین فاصله مجهول را به تعیین فاصله دیگری تبدیل می کنیم که می توان به سادگی و مستقیماً اندازه آنرا بدست آورد .

از بین انواع مختلفی که برای حل این مسئله وجود دارد، ساده ترین آنها را در اینجا مطرح می کنیم :

برای طرح روش اول به وسیله‌ای احتیاج داریم ، که برای ما آشناست و آن سه سنجاق است که رؤوس يك مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین را تشکیل داده باشند (شکل ۲۵). فرض کنید که بخواهیم عرض AB از رودخانه را اندازه بگیریم (شکل ۲۶) ، ما در ساحل طرف B ایستاده‌ایم و نمی‌توانیم به ساحل مقابل آن برویم . جایی در نقطه C به ایستید و وسیله خود را جلو چشمتان چنان نگاه دارید که وقتی يك چشم خود را در امتداد دو سنجاق می‌گیرید، نقاط A و B بوسیله آنها پوشیده شوند . روشن است که در این حالت سنجاقها و چشم شما در امتداد خط AB قرار گرفته است . حالا ، بدون اینکه تخته شامل سنجاقها را تکان بدهید ، در امتداد دو سنجاق دیگر (که عمود بر امتداد قبلی است) نگاه کنید و نقطه‌ای مانند D را که بوسیله این دو سنجاق پوشیده شده است نشان کنید ، در این صورت D بر امتداد عمود بر AC قرار خواهد داشت .



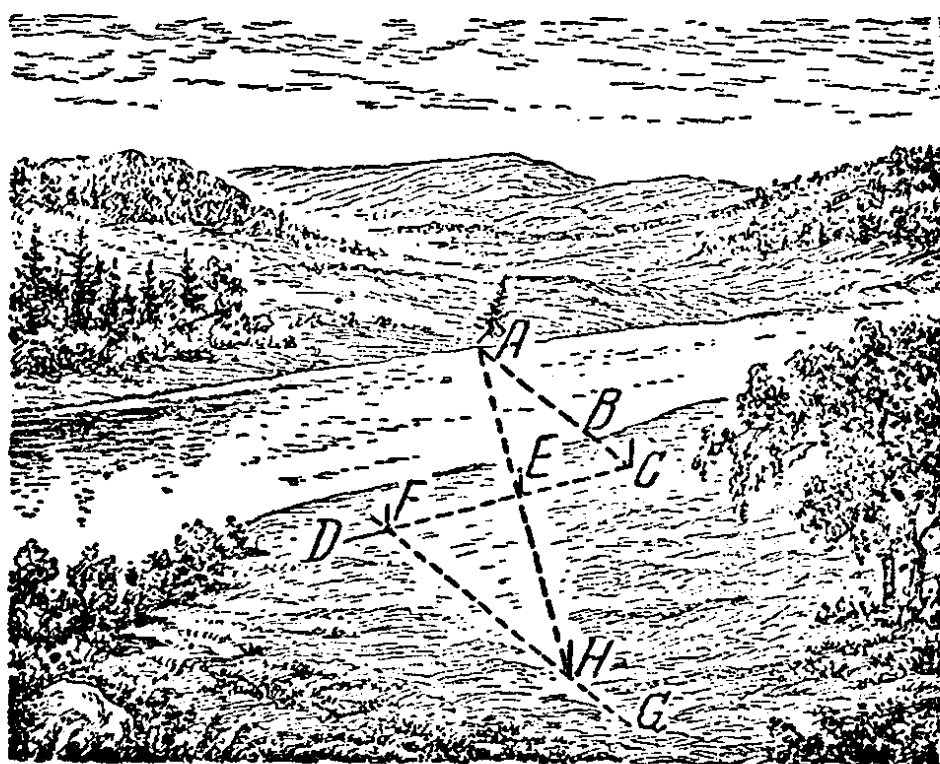


۲۶. وضع اول تخته سنجاق . ۲۷. وضع دوم تخته سنجاق

حالا چوبی به عنوان علامت در نقطه C به زمین فرو کنید ، جای اول خود را ترك کنید و همراه با وسیله خود در امتداد خط CD جلو بروید ، تا جاییکه در نقطه E (شکل ۲۷) چشم شما از یکطرف با سنجاق b و چوب C و از طرف دیگر با سنجاق a و نقطه A در یک امتداد قرار گیرند . باین ترتیب در ساحل رودخانه مثلث ACE بدست می آید که در آن زاویه C قائمه و زاویه E مساوی زاویه حاده مثلث سنجاقها یعنی ۴۵ درجه است . واضح است که زاویه A هم مساوی ۴۵ درجه می شود و خواهید داشت : $AC = CE$. بنابراین اگر فاصله CE را ، و مثلاً با قدمهای خود ، اندازه بگیرید ، فاصله AC را خواهید داشت و با کم کردن فاصله BC از آن (که به سادگی بدست می آید) ، عرض مجهول رودخانه معین می شود .

بیحرکت نگه داشتن تخته سنجاق روی دست مشکل و ناراحت است ، بنابراین بهتر است تخته سنجاق را روی چوبی که نوك تیز دارد محکم نماییم ، که بتوانیم چوب را بطور عمودی در زمین فرو کنیم .

روش دوم شباهت زیادی به روش اول دارد . اینجا هم نقطه



۲۸ . استفاده از مثلثهای مساوی

C را در امتداد AB پیدا می کنیم و به کمک تخته سنجاقها خط CD را عمود بر CA علامت می گذاریم . از اینجا به بعد روش کار فرق می کند (شکل ۲۸). روی خط CD فواصل مساوی CE و EF را با طولهای دلخواه جدا می کنیم و در نقاط E و F چوبهائی به زمین فرو می کنیم . سپس در نقطه F با تخته سنجاقها می ایستم و جهت FG را عمود بر FC علامت می گذاریم . حالا روی امتداد FG، نقطه ای مانند H را پیدا می کنیم ، بنحوی H و E و A بر یک امتداد قرار گیرند . مسئله دیگر حل شده است: فاصله FH با فاصله AC برابر است ،

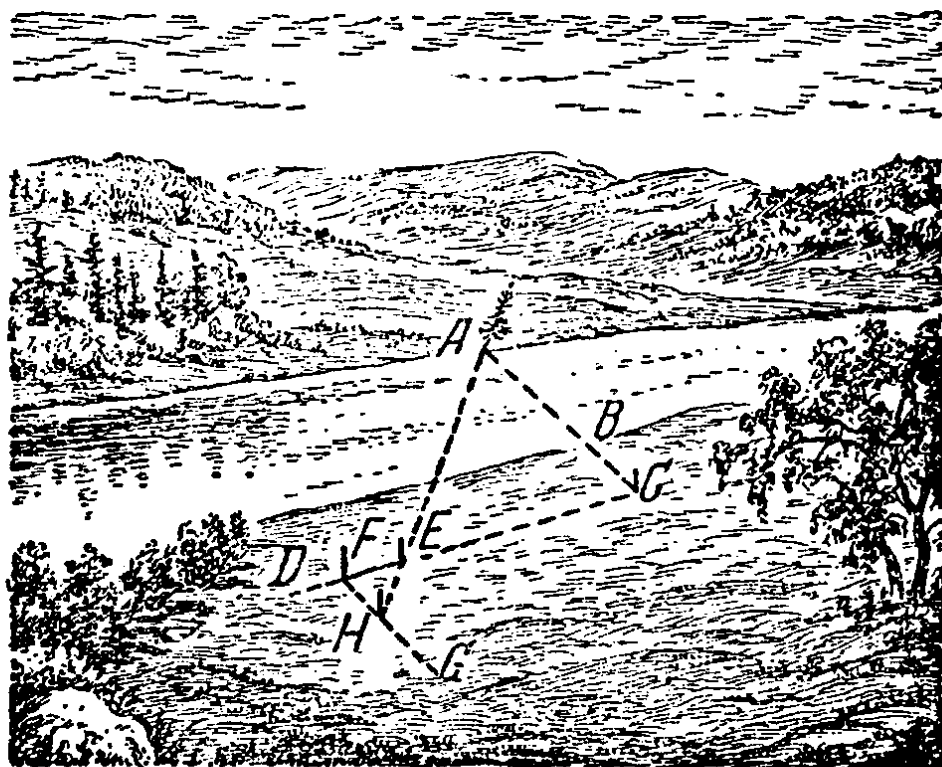
که برای بدست آوردن عرض رودخانه باید فاصله BC را از آن کم کرد (البته خواننده خود به سادگی می فهمد که چرا FH برابر است

با (AC) .

در این روش، نسبت به روش اول به جای بیشتری احتیاج داریم؛ در شرایطی که امکان استفاده از هر دو روش وجود دارد، بهتر است با هر دو روش صحت نتایج را آزمایش کنیم.

۳.

در روشی که هم اکنون ذکر کردیم، می‌توان مختصر تغییری داد: روی خط CD ، بجای فواصل مساوی، فواصلی که یکی چند مرتبه از دیگری کوچکتر است انتخاب می‌کنیم. مثلاً (شکل ۲۹) EF را یک‌چهارم EC می‌گیریم، و دنباله کار را مثل حالت قبل عمل می‌کنیم: در امتداد FG (عمود بر FC) نقطه H را چنان می‌گیریم که نقاط H و E و A بر یک امتداد باشند. البته دیگر FH مساوی AC نیست، بلکه یک‌چهارم آنست: در اینجا مثلثهای ACE و EFH مساوی



نیستند ، بلکه متشابه‌اند (زوایای مساوی ولی اضلاع نامساوی دارند) .
از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود :

$$AC: FH = CE: EF = ۴:۱$$

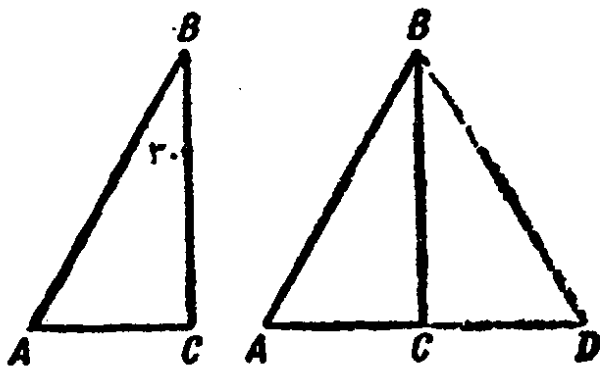
اندازه FH را اندازه می‌گیریم و از چهار برابر آن (که مساوی AC است)، فاصله BC را کم می‌کنیم، عرض رودخانه بدست می‌آید .
در این روش به جای کمتری احتیاج داریم و بهمین مناسبت معمولاً ساده‌تر از روش قبل است .

۰۴

روش چهارم بر اساس استفاده از مثلث قائم الزاویه‌ای قرار گرفته است که يك زاویه حاده آن مساوی ۳۰ درجه باشد ، در اینصورت ضلع مقابل به این زاویه مساوی نصف وتر خواهد بود . اثبات صحت این مطلب خیلی ساده است . فرض کنید زاویه B از مثلث قائم الزاویه

ABC (شکل ۳۰- چپ) مساوی ۳۰ درجه باشد، ثابت می‌کنیم که در اینحالت داریم :

$$AC = \frac{1}{2} AB$$



مثلث ABC را دور ضلع

BC دوران می‌دهیم تا در وضعی ۳۰. وقتی که يك ضلع مساوی نصف وتر است متقارن نسبت به وضع اولیه خود

قرار گیرد (شکل ۳۰- راست) ، شکل ABD بدست می‌آید که در آن خط ACD راست است ، زیرا هر دو زاویه طرفین C قائمه است . در مثلث ABD ، زاویه A = ۶۰° است، زاویه ABD هم که از دو زاویه مساوی ۳۰ درجه تشکیل شده است ، مساوی ۶۰ درجه است . یعنی

زیرا اضلاع روبروبه زوایای مساوی، مساوی اند. ولی $AB = BD$ است و بنابراین خواهیم داشت: $AC = \frac{1}{2} AD$.

اگر بخواهیم از این خاصیت مثلث استفاده کنیم، باید سنجاقها را بر تخته چوبی چنان قرار دهیم که مثلث قائم الزاویه‌ای بسازند که يك ضلع مجاور به زاویه قائمه آن مساوی نصف وتر باشد. سپس این وسیله را در نقطه C چنان قرار

می‌دهیم (شکل ۳۱)، که امتداد AC

بر امتداد وتر مثلث منطبق باشد.

بانگاه کردن در امتداد وتر کوچکتر

این مثلث، امتداد CD را معین

می‌کنیم و روی آن نقطه‌ای مانند

E چنان پیدا می‌کنیم که امتداد

EA بر CD عمود باشد (نقطه

مورد نظر E را هم می‌توان با کمک

همین تخته سنجاقها پیدا کرد). در این صورت واضح است که ضلع CE

روبروی به زاویه ۳۰ درجه و مساوی نصف وتر AC می‌شود. بنابراین

با اندازه گیری فاصله CE، دو برابر آن یعنی AC بدست می‌آید،

که اگر فاصله معلوم BC را از آن کم کنیم، عرض مورد نظر رودخانه

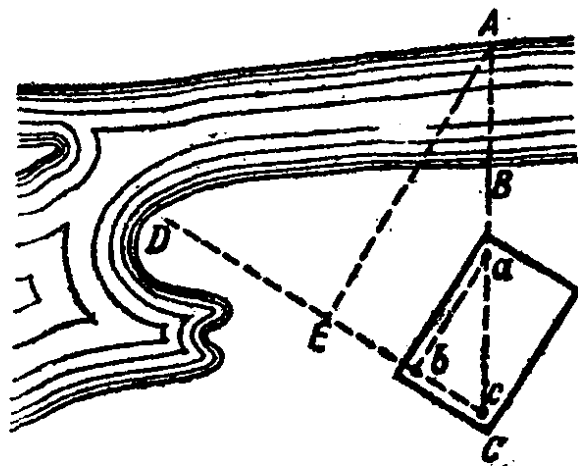
بدست می‌آید.

به این ترتیب چهار راه حل ساده یاد گرفتیم که به کمک آنها

می‌توانیم عرض هر رودخانه‌ای را، بدون عبور از آن و با دقت مورد لزوم،

اندازه بگیریم. ما در اینجا از روشهای دیگری که به وسایل بفرنج‌تر

احتیاج دارند صحبت نمی‌کنیم.



۳۱. طرح استفاده از مثلث قائم الزاویه با زاویه مساوی ۳۰ درجه

با کمک لبه کلاه

اینهم روش دیگری که بنا بر موقعیت جبهه ، مورد استفاده گروهبان کوپریانو قرار گرفت^۵ . به جوخه او دستوری رسید که عرض رودخانه ای را ، که می بایست ترتیب عبور از آنرا بدهند ، اندازه بگیرد ...

قسمت کوپریانو کنار بوته های نزدیک رودخانه دراز کشیدند و خود کوپریانو و سرباز کارپوو به رودخانه نزدیکتر شدند ، تا جایی که دیگر فاشیستها ، که آنطرف رودخانه را اشغال کرده بودند ، بخوبی دیده می شدند . در چنین شرایطی می بایست عرض رودخانه را با چشم اندازه بگیرند .

کوپریانو پرسید :

- خوب کارپوو بنظر تو چقدر است ؟

- بنظر من از ۱۰۰ - ۱۱۰ متر بیشتر نیست .

کوپریانو با نظر سرباز موافق بود ، ولی برای اطمینان بیشتر عرض رودخانه را « به کمک لبه کلاه » خود اندازه گرفت .

طرز عمل چنین است : باید روبروی رودخانه ایستاد و کلاه لبه دار را آنقدر بطرف چشم پائین آورد تا لبه پائین آن بر خط ساحل مقابل رودخانه منطبق شود (شکل ۳۲) . بجای لبه کلاه می توان از کف دست یا دفترچه یادداشت استفاده کرد که در اینصورت باید آنرا محکم به پیشانی خود چسباند . سپس ، بدون اینکه ، در وضع سر تغییری داده شود ، باید بسمت راست یا چپ و یا حتی به عقب چرخید (به طرفی که سطح زمین هموارتر و برای اندازه گیری فواصل مناسب تر است) و نقطه ای را که از زیر لبه کلاه (کف دست ، دفترچه یادداشت) دیده

می شود علامت گذاشت .

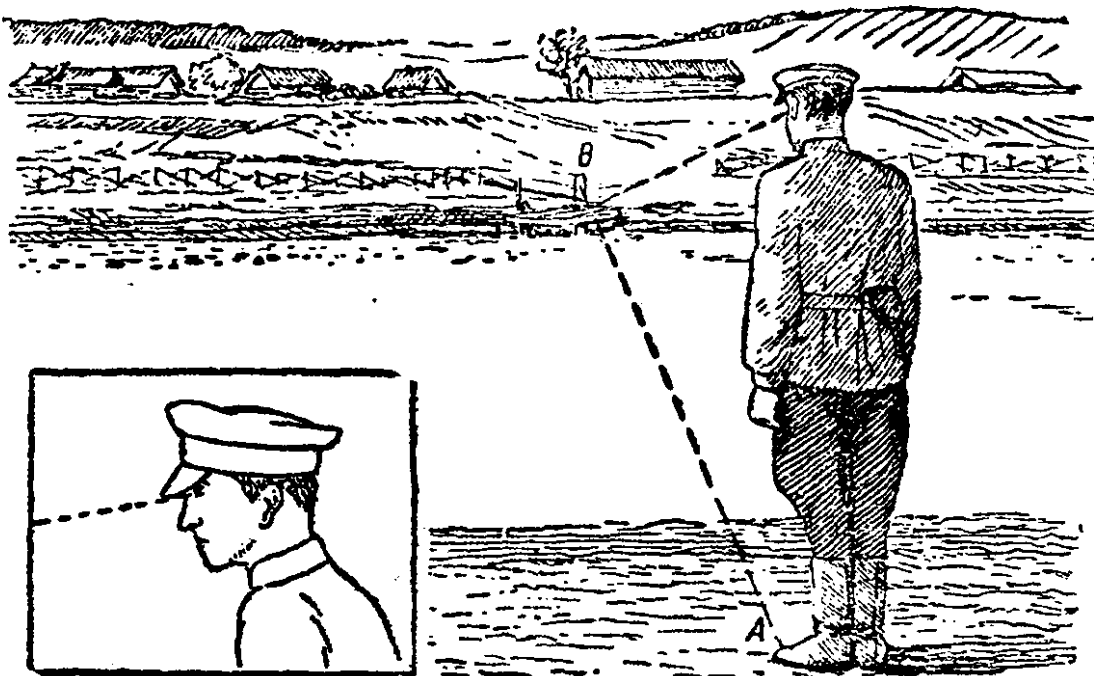
فاصله تا این نقطه ، به تقریب همان عرض رودخانه خواهد بود .
 کوپریانو هم از همین طریقه استفاده کرد . به سرعت داخل
 بوته ها بلند شد و دفترچه یادداشت را روی پیشانی خود گرفت ، سپس
 به سرعت چرخید و نقطه دوری را در نظر گرفت . سپس با کمک کارپوو
 خودش را سینه کش به آن نقطه رسانید و فاصله را با نخ اندازه گرفت ،
 ۱۰۵ متر بدست آمد . کوپریانو آنچه را که بدست آورده بود به
 پست فرماندهی گزارش داد .

مسئله

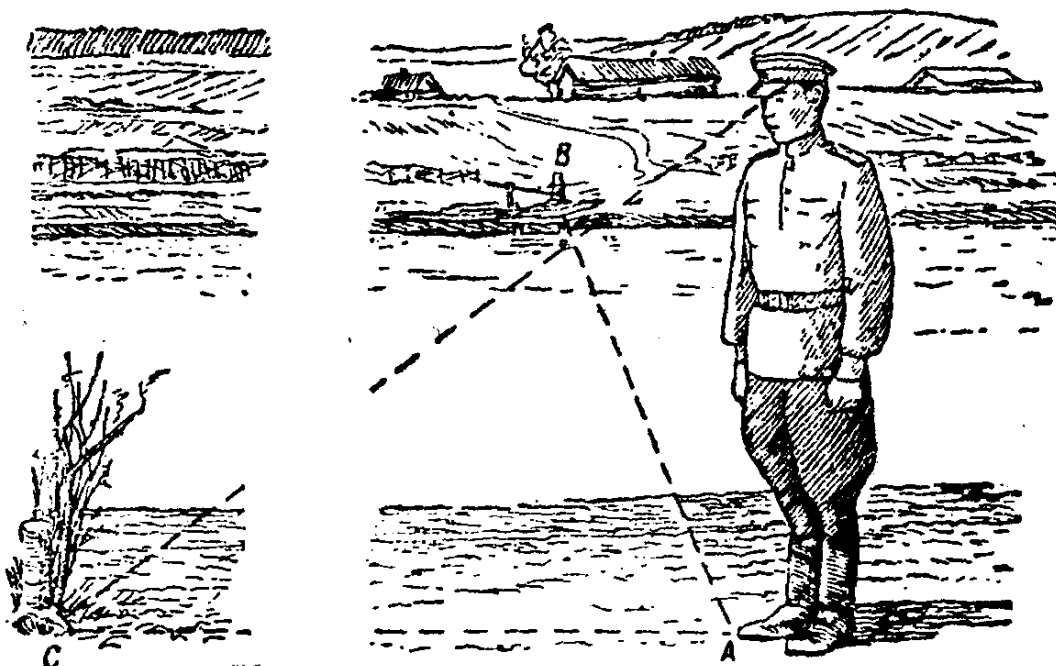
« روش لبه کلاه » را از لحاظ هندسی توضیح دهید .

حل

شعاع دید که مماس بر لبه کلاه (کف دست ، دفترچه یادداشت)



است ، ابتدا مستقیماً به خط ساحل مقابل رودخانه می‌رسد (شکل ۳۲). وقتی که ناظر می‌چرخد ، شعاع دید ، مثل يك پرگار دایره‌ای رسم می‌کند و بنابراین $AC = AB$ به‌عنوان شعاعهای يك دایره می‌شوند (شکل ۳۳).



۳۳. بهمین ترتیب نقطه‌ای را در ساحل طرف خود نشانه بگیرید

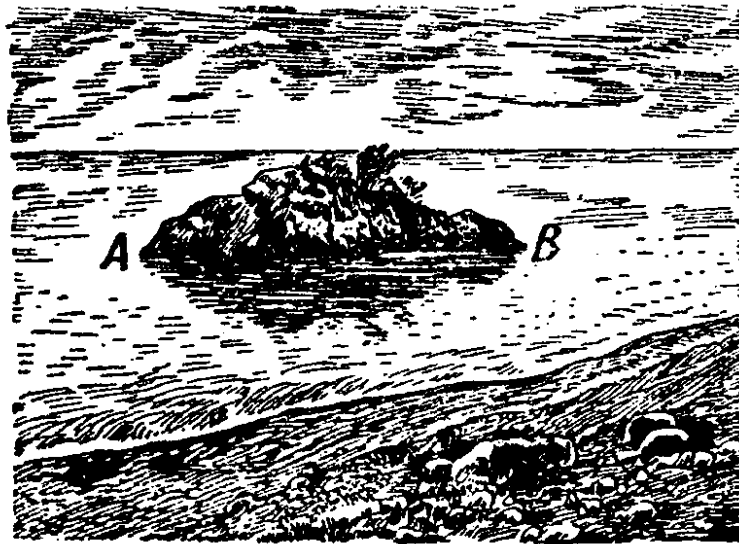
طول جزیره

مسئله

حالا مسئلهٔ بفرنج‌تری را مطرح می‌کنیم . کنار رودخانه و یا دریاچه‌ای ایستاده‌اید (شکل ۳۴) و جزیره‌ای را می‌بینید ، می‌خواهید بدون اینکه ساحل را ترك کنید طول جزیره را اندازه بگیرید ، آیا می‌توانید این اندازه‌گیری را انجام دهید ؟

با وجودیکه در این مورد هیچیک از دو طرف جزیره در دسترس ما نیست ، می‌توان بدون استفاده از وسائل بفرنج طول مورد نظر را

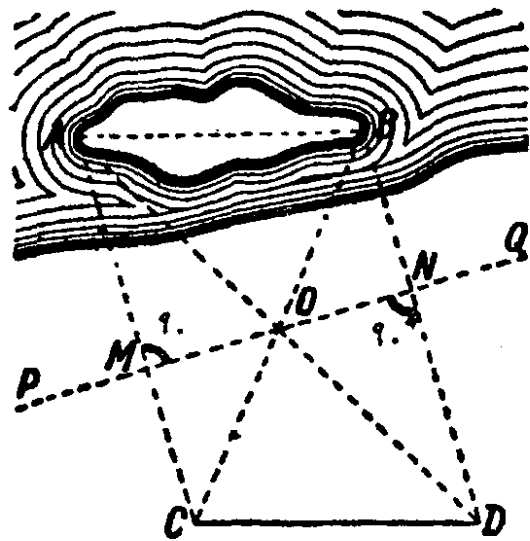
اندازه گرفت .



۳۴. طول جزیره را چگونه اندازه بگیریم؟

حل

فرض کنید که می‌خواهیم طول AB (شکل ۳۵) از جزیره‌ای را اندازه بگیریم، در حالیکه در لحظه اندازه‌گیری در ساحل ایستاده‌ایم. دو نقطه P و Q را در ساحل انتخاب می‌کنیم و علامتهائی در آنجا می‌گذاریم. روی خط PQ ، نقاط M و N را چنان جستجو می‌کنیم که امتدادهای AM و BN با امتداد PQ زاویه قائمه بسازند (برای این منظور می‌توان از تخته سنجاقها استفاده کرد). در نقطه O وسط MN علامتی می‌گذاریم و روی امتداد AM ، نقطه C را چنان جستجو می‌کنیم که نقاط C و O و B بر یک امتداد باشند،



۳۵. از تساوی مثلثهای قائم الزاویه استفاده می‌کنیم

بهمین ترتیب روی امتداد BN ، نقطه D را طوری پیدا می کنیم که D و O و A بر یک امتداد باشند ، در اینصورت فاصله CD همان طول مجهول جزیره خواهد بود .

اثبات این مطلب ساده است . مثلثهای قائم الزاویه AMO و OND را در نظر بگیرید، دو ضلع MO و NO از این دو مثلث برابرند، علاوه بر آن زوایای AOM و NOD نیز برابرند، بنابراین دو مثلث برابرند و خواهیم داشت : $OA = OD$. بهمین ترتیب می توان ثابت کرد : $BO = OC$. حالا با مقایسه دو مثلث ABO و COD ، تساوی آنها بدست می آید و نتیجه می شود : $AB = CD$.

پیاده‌ای که آنطرف ساحل است

مسئله

کسی در ساحل و در امتداد رودخانه راه می رود . شما از طرف دیگر رودخانه به روشنی قدمهای او را تشخیص می دهید . آیا می توانید از جایی که هستید ، فاصله خودتان را تا او بتقریب معین کنید ؟ با این شرط که هیچ وسیله‌ای در دسترس شما نیست .

حل

شما وسیله‌ای در دسترس ندارید ، چشمها و دستهای شما هست و همین برای شما کافی است . دستتان را به جلو و در جهت پیاده دراز کنید و وقتی که پیاده بطرف دست راست شما حرکت می کند با چشم راست ، و وقتی که بطرف دست چپ شما حرکت می کند با چشم چپ به انتهای انگشتان نگاه کنید. وقتی انگشت دست شما درست پیاده را

پوشانند (شکل ۳۶)، چشمی را که باز بود به بندید و چشم دیگر را باز کنید: بنظر تان می رسد که پیاده به عقب رفته است، به بینید چند قدم بره‌ی دارد تا دوباره پشت انگشت شما قرار گیرد. آنچه را که برای اندازه‌گیری فاصله لازم است شما بدست آورده‌اید.



۳۶. چگونه می‌توان فاصله خود را تا پیاده‌ای که در ساحل دیگر حرکت می‌کند، پیدا کرد؟

به بینیم از این معلومات چگونه می‌توان استفاده کرد. فرض کنید در شکل ۳۶ نقاط a و b جای چشمهای شما، نقطه M انتهای انگشت دستی که دراز کرده‌اید، A وضع اولیه پیاده و B وضع دوم او باشد. دو مثلث abM و ABM متشابه‌اند (مسیر حرکت پیاده را می‌توان با ab تقریباً موازی گرفت). بنابراین داریم:

$$BM : bM = AB : ab$$

در این تناسب تنها BM مجهول است و بقیه را می‌توان مستقیماً بدست آورد. در حقیقت bM طول دست شما و ab فاصله بین دو چشم شماست، AB را هم با کمک قدمهای پیاده اندازه گرفته‌اید (هر

قدم را می‌توان بطور متوسط $\frac{3}{4}$ متر گرفت). به این ترتیب فاصله شما تا پیاده‌ای که در ساحل طرف دیگر رودخانه است چنین می‌شود:

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}$$

مثلاً اگر فاصله بین دو چشم شما (ab) ۶ سانتیمتر، طول bM از انتهای دست باز شده تا چشم شما ۶۰ سانتیمتر باشد و پیاده فاصله بین A و B را با ۱۴ قدم طی کرده باشد، برای فاصله مجهول خواهید داشت:

$$MB = 14 \times \frac{60}{6} = 140 \text{ (قدم)} = 105 \text{ (متر)}$$

کافی است که شما از قبل فاصله bM (چشم تا انتهای دست باز شده) و فاصله بین دو چشم خود را اندازه بگیرید، در این صورت نسبت $\frac{bM}{ab}$ برای شما معلوم خواهد بود و به کمک آن می‌توانید فاصله خود را تا هر شیئی غیر قابل دسترس پیدا کنید. در این مورد تنها محاسبه AB در این تناسب برای شما لازم است. نسبت $\frac{bM}{ab}$ برای اکثر مردم با جزئی اختلافی برابر با ۱۰ است. مطلب دشوارتر در اینست که فاصله AB را چگونه اندازه بگیریم. در مسئله‌ای که حل کردیم، برای این منظور، از قدمهایی که پیاده برمی‌داشت استفاده کردیم. ولی ممکن است مسئله بصورت دیگری باشد و مثلاً بخواهیم فاصله خود را تا قطار باربری اندازه بگیریم. در این مورد می‌توان طول AB را با مقایسه طول هر واگون (معمولاً $\frac{7}{6}$ متر) تخمین زد. و یا اگر مثلاً بخواهیم فاصله خود را تا یک منزل بدست آوریم، می‌توان فاصله AB را با عرض پنجره یا طول یک آجر و غیره مقایسه کرد.

با همین روش می‌توان اندازه شیئی را که در فاصله معلومی از

ما قرار گرفته است ، بدست آورد . و برای این منظور می‌توان از « مسافت‌یاب » استفاده کرد که ما هم اکنون بشرح آن می‌پردازیم .

مسافت‌یابهای ساده

در فصل اول از ارتفاع یاب - وسیله ساده‌ای که ارتفاعات غیر قابل دسترس را تعیین می‌کند - نام بردیم . و حالا وسیله ساده دیگری را معرفی می‌کنیم که برای اندازه‌گیری فواصل غیر قابل دسترس به کار می‌رود و « مسافت‌یاب » نام دارد . مسافت‌یاب ساده را می‌توان با کمک کبریت معمولی آماده کرد . برای این منظور باید در یکطرف چوب کبریت، تقسیمات میلیمتری به وجود آورد و برای روشن بودن این تقسیمات بهتر است متناوباً علامتهای روشن و تاریک گذاشت (شکل ۳۷)



۳۷. کبریت مسافت‌یاب

با این «مسافت‌یاب» ابتدائی تنها وقتی می‌توان فاصله تا شیئی دوری را تخمین زد که اندازه‌های خود آن شیئی برای شما معلوم باشد (شکل ۳۸) ، البته از تمام انواع دیگر مسافت‌یابها هم که ساختمان کاملتری دارند ، می‌توان در این مورد استفاده کرد . فرض کنیم، شخصی را که دور از شماست می‌بینید و می‌خواهید فاصله خود را تا او اندازه بگیرید . در اینجا کبریت مسافت‌یاب می‌تواند مشکل شما را حل کند . کبریت را در دست خود بگیرید ، دستتان را دراز کنید و درحالیکه فقط یک چشم خود را بازنگه داشته‌اید ، دست خود را بالا و پائین ببرید تا انتهای آزاد کبریت را با قسمت بالای شکلی که دور از شماست در



۳۸. استفاده از کبریت مسافت یاب برای تعیین فاصله غیر قابل دسترس

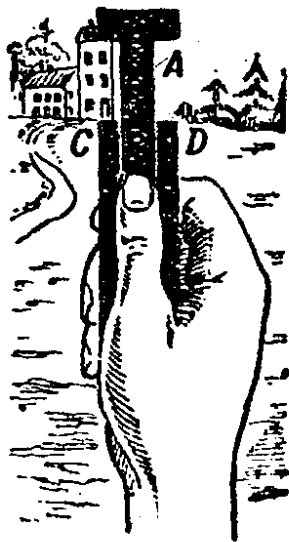
يك امتداد به بینید . سپس انگشت شصت خود را به آرامی روی چوب کبریت آنقدر پائین بیاورید تا در نقطه‌ای قرار گیرد که با قسمت پائین شکل دوردست در يك امتداد باشد . حالا دیگر کافی است که چوب کبریت را به چشم خود نزدیک کنید تا درجه‌های آنرا بشمارید . با معلوم بودن این درجه‌ها فاصله مجهول را بدست خواهید آورد .
تناسب زیر به سادگی بدست می آید :

فاصله مجهول	قد متوسط انسان
فاصله چشم تا کبریت	اندازه قسمتهای چوب کبریت

از این تناسب به سادگی فاصله مجهول بدست می آید . مثلاً اگر فاصله چشم تا چوب کبریت را ۶۰ سانتیمتر و قد متوسط انسان را ۱/۷ متر و اندازه قسمتهای چوب کبریت را ۱۲ میلیمتر بگیریم ، فاصله مورد نظر چنین می شود :

$$60 \times \frac{1700}{12} = 8500 \text{ (سانتیمتر)} = 85 \text{ (متر)}$$

برای اینکه به کار با این مسافت یاب عادت کنید ، قد دوستان خود را اندازه بگیرید و از آنها خواهش کنید در فاصله‌ای از شما به ایستند و سپس کوشش کنید که معین کنید چند قدم از شما دور شده‌اند .
 بهمین ترتیب شما می‌توانید فاصله خود را تا دو چرخه سوار (ارتفاع متوسط آن ۲/۲ متر و قطر چرخ دو چرخه ۷۵ سانتیمتر است) ، تا تیر تلگرافی که در امتداد راه آهن است (ارتفاع تیر ۸ متر و فاصله عمودی بین دو عایق متوالی ۹۰ سانتیمتر) ، تا قطار راه آهن ، تا خانه آجری و یا هر چیز دیگری که می‌توانید اندازه‌های آنرا تخمین بزنید ، بدست آورید . و این می‌تواند وسیله خوبی برای سرگرمی شما در روزهای گردش باشد .



۳۹. مسافت یاب کشوی در عمل

وسیله ساده‌تری می‌توان ساخت که با کمک آن بتوان فواصل تا اشیاء را نسبت به بزرگی خود آن اشیاء اندازه گرفت .

ساختمان این وسیله از شکل‌های ۳۹ و ۴۰ روشن می‌شود . با پائین و بالا بردن قسمت کشوی دستگاه ، شیئی مورد نظر را در فاصله A قرار می‌دهیم ، مقدار این فاصله به سادگی از روی تقسیماتی که روی حاشیه‌های C و D وجود دارد ، معین می‌شود . برای اینکه احتیاجی به محاسبات اضافی نباشد ، می‌توان روی باریکه

C در مقابل تقسیمات ، فواصل متناظر را برای وقتی که شیئی مورد نظر انسان است ، مستقیماً نوشت . روی باریکه D می‌توان فواصل متناظر را ، برای وقتی که شیئی مورد نظر سوار است ، از قبل یادداشت کرد .
 برای تیر تلگراف (به ارتفاع ۸ متر) و یا هواپیما (با فاصله بین دو ابتدای بال ۱۵ متر) و یا بسیاری از اشیاء دیگر ، می‌توان از قسمتهای

بالای باریک‌های C و D که آزاد است ، استفاده کرد . در اینصورت وسیله ما به صورتی مثل شکل ۴۰ در می آید .

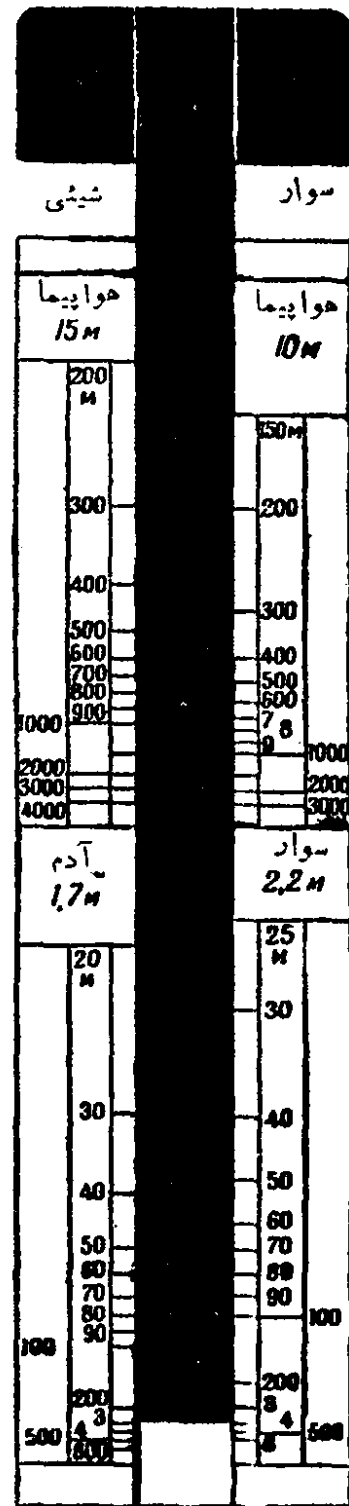
البته دقت این تخمین زیاد نیست، باید بخاطر داشت که این تخمین فاصله است نه اندازه گیری آن . در مثالی که قبلا حل کردیم و فاصله تا يك آدم را ۸۵ متر تخمین زدیم ، هر يك میلیمتری که روی چوب کبریت اشتباه کنیم، در فاصله ۷ متر اشتباه خواهد شد ($\frac{1}{12}$ از ۸۵ متر) . ولی اگر فاصله مورد نظر چهار برابر مثال مذکور بود، روی چوب کبریت بجای ۱۲ میلیمتر، ۳ میلیمتر بدست می آمد و در اینصورت يك اشتباه نیم میلیمتری ۵۷ متر در فاصله تغییر می داد . بنابراین ، وسیله ای را که ذکر کردیم تنها برای تخمین فواصل ۱۰۰ تا ۲۰۰ متری مناسب است و برای تخمین فواصل بزرگتر باید از وسائل بغرنجتری استفاده کرد .

انرژی رودخانه‌ها

تو سر زمینی را می شناسی که اینهمه پر برکت باشد ، جاییکه رودخانه‌های پاك تر از فقره جریان دارد . جاییکه سبزه زارهای آن با نسیم ملایمی می لرزد ، و دهکده‌های آن در پیشه‌های آلبالو فرق شده است .
- آ. ک. تولستوی

رودخانه‌ای کسه طولش بیش از ۱۰۰

کیلومتر نباشد ، کوچک شمردن می شود ، آیا



۴۰ . ساختمان مسافت

یاب کشوی

می‌دانید که از اینگونه رودخانه‌های کوچک در کشور شوروی چند تا است؟ خیلی زیاد - ۴۳ هزار .

اگر این رودخانه‌ها را به دنبال هم می‌گذاشتند ، نواری به طول ۱۳۰۰۰۰۰ کیلومتر بدست می‌آمد. چنین نواری می‌تواند بیش از ۳۰ دور روی خط استوا دور کره زمین پیچیده شود (طول خط استوا به تقریب ۴۰۰۰۰ کیلومتر است) .

جریان این رودخانه‌ها آرام است، ولی در خود انرژی بی‌پایانی ذخیره دارند. متخصصین حساب کرده‌اند که اگر می‌شد امکانات مخفی همه این رودخانه‌ها را رویهم ریخت، عدد فوق‌العاده‌ای بدست می‌آمد - ۳۴ میلیون کیلووات! و این انرژی مجانی بطور وسیعی برای الکتریکی کردن اقتصاد روستاهای نزدیک رودخانه‌ها مورد احتیاج است .

بگذار رودخانه جریان آزاد خود را داشته باشد ، -

اگر با نقشه آشنائی دارید ، سد ،

همچون شانه سنگی در اعماق رودخانه فرو می‌رود

و راه او را به طرف قرنهاى آینده می‌بندد

- س. شچیباچن

می‌دانید که این امر به کمک ایستگاههای برق آبی تحقق می‌پذیرد و شما می‌توانید با ابتکار خود طرح ساختمان يك ایستگاه برق آبی کوچک ، ولی واقعی را بریزید .

در حقیقت ساختمان يك ایستگاه برق آبی به وضع رودخانه مربوط است : عرض رودخانه و سرعت جریان آب در آن ، سطح مقطع عرضی بستر رودخانه (مقطع زنده) و فشار آب یعنی حجم آبی که می‌تواند جریان داشته باشد همه اینها مهم می‌توان با وسائل عادی و به عنوان مسائل ساده‌ای از هندسه بدست آورد .

ما به حل این مسائل خواهیم پرداخت ، ولی قبلاً توصیه عملی متخصصین : مهندس و. یاروش و مهندس ای. فدوروف را که مربوط به

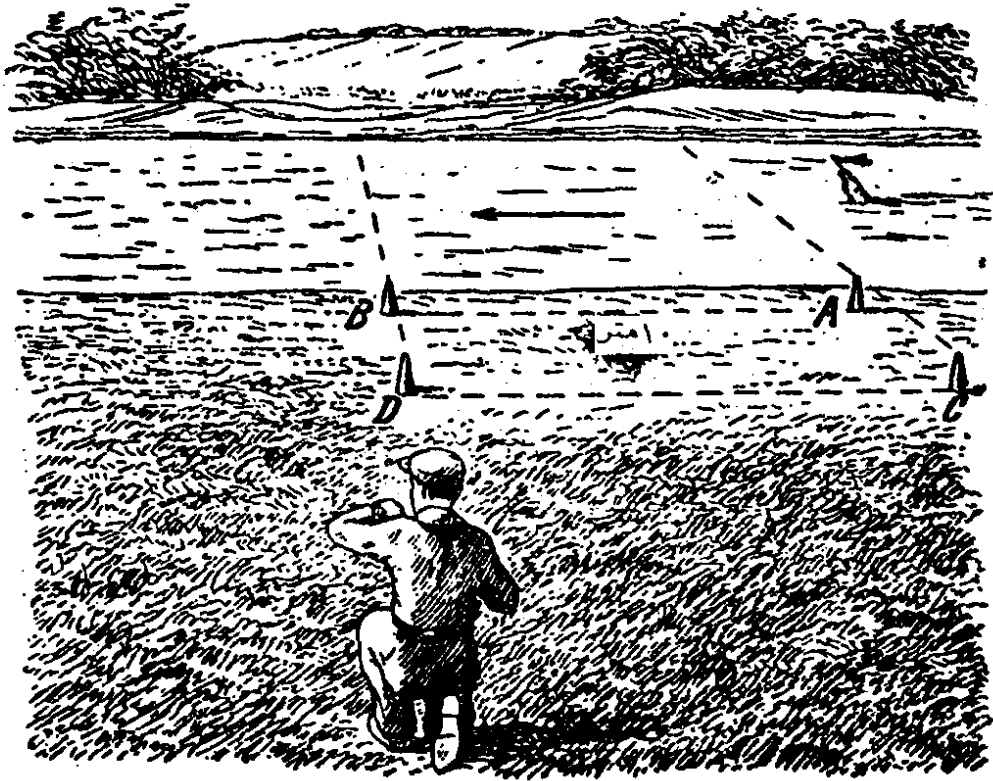
انتخاب محل مناسب برای ساختمان يك سد است مطرح می کنیم .
 آنها توصیه می کنند که يك ایستگاه برق آبی کوچک با قدرت
 ۱۵ تا ۲۰ کیلووات نباید دورتر از ۵ کیلومتری روستا باشد .
 « سد مربوط به ایستگاه برق آبی باید نزدیکتر از ۱۰-۱۵ کیلومتر
 و دورتر از ۲۰-۴۰ کیلومتر نسبت به سرچشمه نباشد ، زیرا دوری از
 سرچشمه ، بخاطر جریان بیشتر آب ، مستلزم مخارج بیشتری است . و
 اگر سد نزدیکتر از ۱۰-۱۵ کیلومتری سرچشمه ساخته شود ، ایستگاه
 برق آبی در مقابل جریان ضعیف آب و با فشار غیر کافی خواهد بود و
 نمی تواند قدرت لازم را تامین کند . در انتخاب جای ساختن سد باید
 از نقاطی که گودیهای زیاد دارد ، پرهیز کرد ، زیرا در اینصورت هم ،
 بخاطر زیرسازی سنگینی که لازم دارد ، مخارج را بالا می برد . »

سرعت جریان آب

بین روستا و بیشه‌ای که بر بالای تپه است ،
 نوار روشن و مارپیچ رودخانه در حرکت است .
 - آ. فت

در هر شبانه روز چقدر آب در این رودخانه جریان دارد ؟
 این محاسبه را وقتی می توان انجام داد که بدانیم سرعت جریان
 آب در رودخانه چقدر است . برای اندازه گیری سرعت جریان آب
 به دو نفر احتیاج است . وسایل مورد احتیاج عبارتست از يك ساعت
 و يك جسم شناور که بخوبی دیده شود: مثلاً يك بطری نیم خالی که
 پرچمی به سر آن باشد) .

قطعه مستطیل شکلی از رودخانه را در نظر می گیریم و در امتداد
 ساحل آن ، دو علامت A و B را به فاصله‌ای ، مثلاً ۱۰ متر از یکدیگر
 قرار می دهیم (شکل ۴۱)



۴۱. اندازه گیری سرعت جریان رودخانه

روی خطوط عمود بر AB ، دو نقطه دیگر C و D را هم علامت می گذاریم . یکی از دو نفر ، آنکه ساعتی با خود دارد ، پشت علامت D می ایستد ، دیگری کمی دورتر از علامت A ، جسم شناور را به آب می اندازد و خود فوراً پشت علامت C قرار می گیرد . هر دو نفر در امتداد CA و DB به سطح آب نگاه می کنند . در لحظه ای که جسم شناور از خط CA عبور می کند ، ناظر اول دست خود را تکان می دهد . با این علامت ، ناظر دوم وقت را نگاه می کند و سپس دوباره ، وقتی که جسم شناور امتداد DB را قطع می کند ، باز هم به ساعت خود نگاه می کند . فرض می کنیم که اختلاف این دو زمان ۲۰ ثانیه باشد ، در این صورت سرعت جریان آب رودخانه چنین خواهد بود :

$$\frac{10}{20} = 0.5 \text{ (متر در ثانیه)}$$

معمولاً این اندازه گیری را ده بار تکرار می کنند و هر بار جسم

شناور را در جایی از سطح آب می اندازند*. سپس اعدادی که بدست می آید با هم جمع و بر تعداد دفعات اندازه گیری تقسیم می کنند. این عمل سرعت متوسط جریان آب را در قشر سطحی آب رودخانه بدست می دهد.

در قشرهای عمیق تر آب، جریان کندتر است و سرعت متوسط همه جریان آب بتقریب $\frac{4}{5}$ سرعت سطحی است و بنابراین در مورد مثال ما، این سرعت 0.8 متر در ثانیه می شود. می توان سرعت آب سطحی را به طریق دیگری، که البته دقت آن کمتر است، اندازه گرفت.

در قایقی بنشینید و به اندازه یک کیلومتر (که در ساحل اندازه گرفته اید) در خلاف جریان آب حرکت کنید، سپس برعکس همین فاصله را در جهت جریان آب بروید و سعی کنید که در هر حال با یک قدرت بارو بزنید.

فرض کنید که مثلاً این ۱۰۰۰ متر را در خلاف جریان آب در ۱۸ دقیقه و در جهت جریان آب در ۶ دقیقه طی کرده باشید، اگر سرعت جریان آب رودخانه را به x و سرعت حرکت شما را در آب ساکن به y نشان دهیم، معادلات زیر را خواهید داشت:

$$\frac{1000}{y-x} = 18; \quad \frac{1000}{y+x} = 6$$

و از آنجا:

$$+ \begin{cases} y+x = \frac{1000}{6} \\ y-x = \frac{1000}{18} \end{cases}$$

$$2x = 110 \Rightarrow x = 55$$

(* بجای اینکه ده مرتبه جسم شناور را در آب بیندازیم، می توان ۱۰ جسم شناور را یکبار و در فواصل مختلف از یکدیگر به آب انداخت.

سرعت جریان آب در سطح رودخانه مساوی ۵۵ متر در دقیقه است ، و بنابراین ، سرعت متوسط - قریب $\frac{5}{6}$ متر در ثانیه می شود .

چقدر آب در رودخانه جریان دارد ؟

بهر حال ، شما می توانید با یکی از روشهایی که ذکر کردیم سرعت آب را در رودخانه معین کنید . قسمت دوم کار ، یعنی تعیین مساحت مقطع عرضی بستر رودخانه (که برای محاسبه مقدار آبی که در جریان است مورد احتیاج است) کمی مشکل تر است . برای تعیین این مساحت - که بنام « مقطع زنده » رودخانه موسوم است - باید از رسم این مقطع استفاده کرد .

روش اول

جائیکه می خواهید عرض رودخانه را اندازه بگیرید ، در خود آب و در هر يك از طرفین رودخانه ، علامت چوبی به زمین فرو کنید . سپس با دوست خود در قایق بنشینید و از يك علامت به طرف علامت دیگر حرکت کنید و در هر حال کوشش کنید روی خط راستی که دو علامت را بهم وصل می کند ، حرکت کنید . اگر قایق ران بی تجربه باشد و بخصوص اگر جریان آب تند باشد ، موفق به انجام این عمل نمی شود . دوست شما باید پارو زن قابلی باشد و علاوه بر آن باید نفر سومی به او کمک کند ، به این ترتیب که در ساحل دیگر به ایستد و مواظب باشد که قایق از مسیر تعیین شده خارج نشود و در مواقع لزوم علامت بدهد که قایق به کدام طرف تغییر جهت بدهد . در عبور اول از رودخانه ، شما باید حساب تعداد ضربات پارو را نگه دارید و به این ترتیب معلوم شود که با چند ضربه پارو می توان قایق را ۵ یا ۱۰ متر منتقل کرد . حالا

برای بار دوم حرکت کنید ، منتهی چوب بلندی ، که به فواصل ۵-۱۰ متری تقسیم شده است ، در دست بگیرید و آنرا در نقاط مختلف تا کف رودخانه فرو کنید (به تعداد ضربات پارو) و عمق رودخانه را در هر نقطه یادداشت کنید .

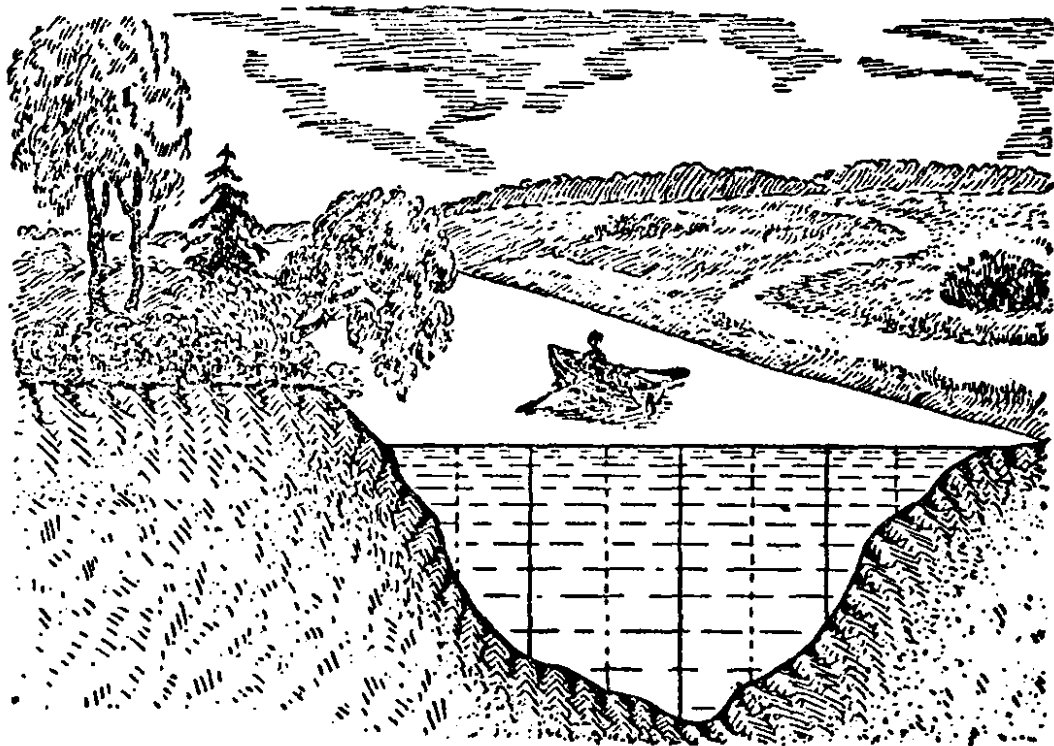
با این روش تنها می توان مقطع زنده رودخانه های کوچک را اندازه گرفت و برای رودخانه های عریض و پر آب و سائل بغرنجتری که مورد استفاده متخصصین است ، لازم می شود. علاقمندان می توانند در هر مورد مشخص وسائل ساده و مناسب را انتخاب کنند .

روش دوم

در مورد رودخانه های تنگ و کم عمق قایق هم لازم نیست . بین دو علامتی که در ساحلها گذاشته اید ، نخ محکمی عمود بر جریان آب بکشید و یک متر به یک متر آنرا علامت بگذارید (یا گره بزنید) و سپس عمق بستر رودخانه را در تمام نقاطی که روی نخ علامت گذاشته اید ، اندازه بگیرید .

وقتی که همه اندازه گیریها تمام شد، قبل از همه ، مقطع عرضی رودخانه را روی کاغذ میلیمتری و یا صفحه ای از کاغذ شطرنجی رسم کنید . در اینصورت شکلی شبیه شکل ۴۲ بدست می آورید . محاسبه مساحت چنین شکلی مشکل نیست ، زیرا سطح این شکل تشکیل شده است از چند ذوزنقه (که قاعده ها و ارتفاع هر یک معلوم است) و دو مثلث ، در دو طرف ، که باز هم اندازه قاعده و ارتفاع هر یک معلوم است . اگر مقیاس را ۱۰۰ : ۱ گرفته باشیم، نتیجه را می توان بر حسب متر مکعب بدست آورد .

دیگر شما تمام معلومات لازم را ، برای محاسبه مقدار آبی که در



۴۲. « مقطع زنده » از يك رودخانه

جریان است ، در اختیار دارید . واضح است که حجم آبی که در هر ثانیه از مقطع زنده عبور می کند برابر است با حجم منشوری که قاعده آن همین مقطع و ارتفاع آن سرعت متوسط جریان آب در ثانیه می باشد .
مثلا اگر سرعت متوسط جریان آب را $۰/۴$ متر در ثانیه و سطح مقطع زنده رودخانه را مساوی $۳/۵$ متر مربع بگیریم در هر ثانیه به اندازه :

$$۳/۵ \times ۰/۴ = ۱/۴ \quad (\text{مترمکعب})$$

$۱/۴$ متر مکعب (یا همینقدر تن^{*}) آب از این مقطع عبور می کند .
بنابراین در هر ساعت :

$$۱/۴ \times ۳۶۰۰ = ۵۰۴۰ \quad (\text{مترمکعب})$$

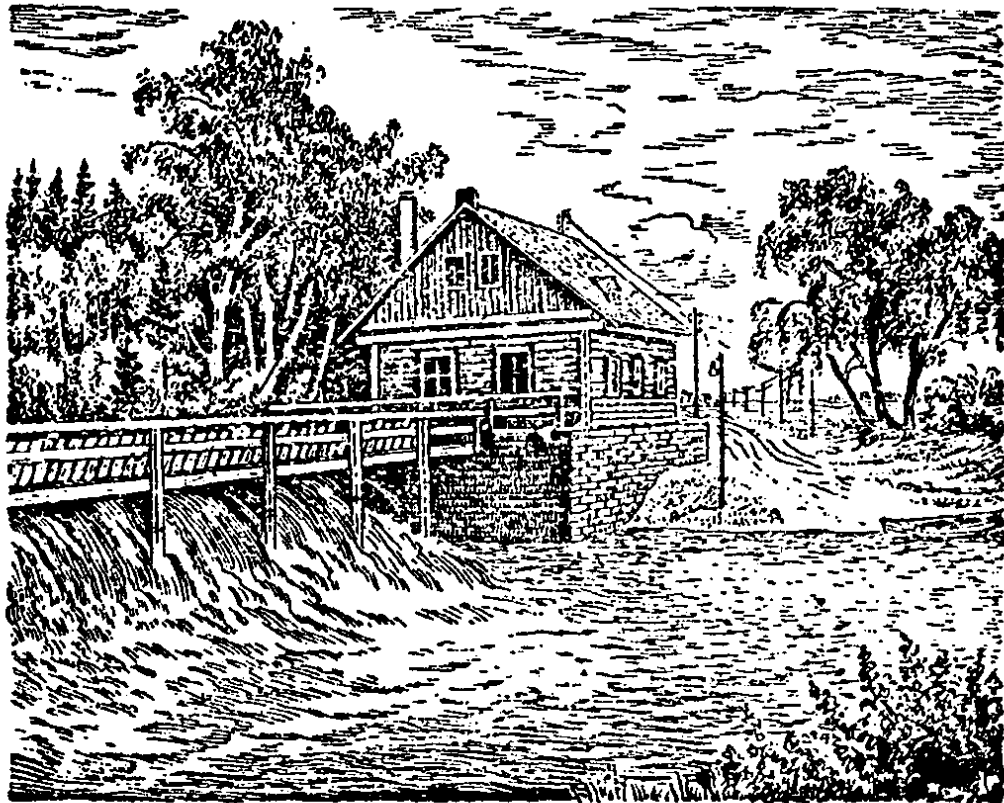
و در هر شبانه روز :

$$۵۰۴۰ \times ۲۴ = ۱۲۰۹۶۰ \quad (\text{مترمکعب})$$

یعنی بیش از صد هزار متر مکعب آب عبور می کند .

* هر مترمکعب آب يك تن (۱۰۰۰ کیلوگرم) وزن دارد .

رودخانه‌ای که مقطع زنده آن $3/5$ متر مکعب باشد، رودخانه کوچکی است: می‌توان آنرا به عرض $3/5$ متر و عمق یک متر در نظر گرفت. ولی می‌بینیم که همین رودخانه چه نیروی عظیمی را در خود پنهان کرده است، نیروئی که بخصوص می‌تواند به نیروی الکتریکی پر قدرتی تبدیل شود. بنابراین از رودخانه‌ای مثل « نهوا » در هر شبانه‌روز

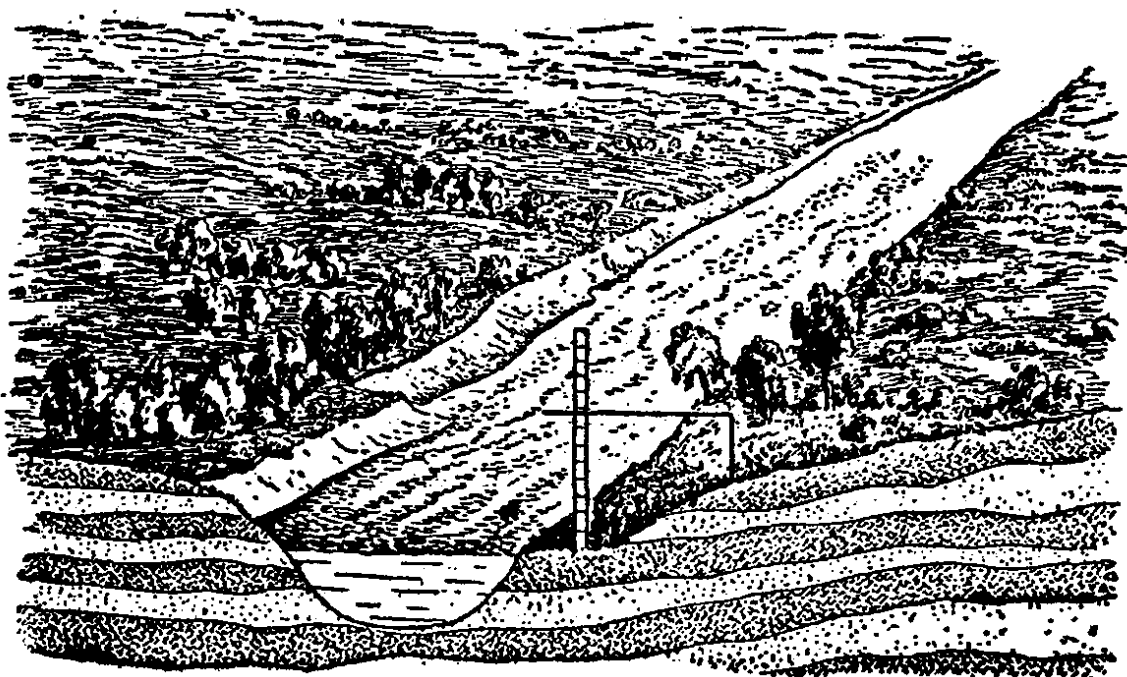


۴۳. ایستگاه برق آبی با قدرت ۸۰ کیلووات در آرتل کشاورزی بورما کین به هفت کلخوز انرژی می‌دهد

چقدر آب جریان دارد: « عبور متوسط » آب در نهوا (لنینگراد) از مقطع زنده ثانیه‌ای ۳۳۰۰ متر مکعب است! و « عبور متوسط » آب در « دنپیر » (کیه‌وا) ۷۰۰ متر مکعب .

برای ساختن یک ایستگاه برق آبی اندازه‌گیری دیگری هم لازم است: سواحل رودخانه تا چه اندازه فشار آب را تحمل می‌کنند، یعنی سد را با چه اختلاف سطح آب می‌توان ساخت (شکل ۴۳)؟ برای این

منظور در ۵-۱۰ متری آب، در دو طرف رودخانه، روی خط عمود بر امتداد جریان آب، دو تیر چوبی روی ساحل به زمین فرو کنید. سپس در حالیکه در امتداد این خط حرکت می کنید، در نقاط شکستگی ساحل علامتهائی قرار دهید (شکل ۴۴). به کمک یک چوب مدرج، ارتفاع هر علامت را از دیگری و فاصله بین آنها را اندازه بگیرید. با استفاده از اندازه هائی که بدست آورده اید مقطع ساحلها را، شبیه مقطع بستر رودخانه، رسم کنید.



۴۴. اندازه گیری مقطع ساحلها

با مقطع سواحل رودخانه می توان درباره مقدار قابل قبول فشار قضاوت کرد.

فرض کنیم که بتوان سطح آب را بوسیله سد تا $2/5$ متر بالا آورد. در اینصورت شما می توانید قدرت ایستگاه برق آبی آینده خود را محاسبه کنید.

برای این منظور عدد $1/4$ («عبور» ثانیه ای رودخانه) را در $2/5$ (ارتفاع سطح آب) و در 6 (ضریبی که بسته به اتلاف نیرو در ماشین

تغییر می کند) ضرب کنید ، نتیجه بر حسب کیلووات بدست می آید .
 بنابراین :

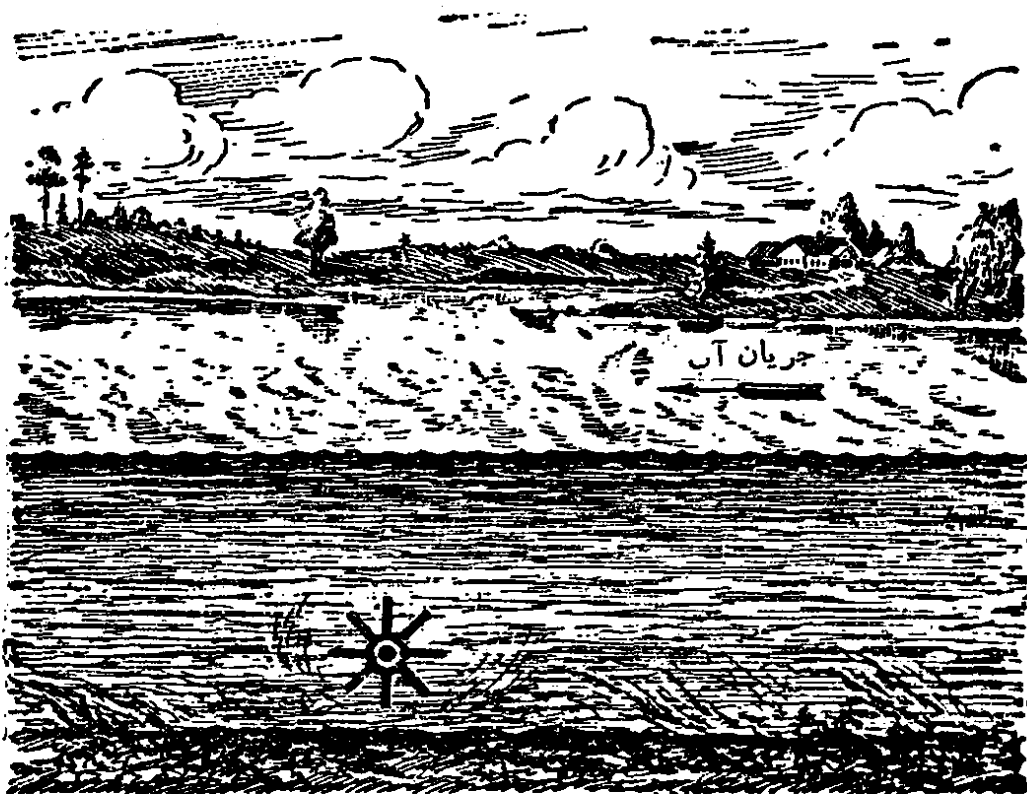
$$(کیلووات) \quad ۱/۴ \times ۲/۵ \times ۶ = ۲۱$$

از آنجا که سطح آب ، و بنابراین میزان عبور آب ، در طول
 سال تغییر می کند، برای محاسبه باید میزانی را در نظر گرفت که با قسمت
 عمده سال تطبیق کند ،

چرخ آبی

مسئله

چرخ پره داری را در نزدیکی کف رودخانه مستقر می کنیم
 بنحوی که بتواند به راحتی بچرخد . به شرطی که جریان آب از راست
 به چپ باشد ، چرخ در چه جهتی خواهد چرخید (شکل ۴۵) ؟



۴۵. چرخ در چه جهتی می چرخد؟

چرخ در عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. سرعت جریان آب در قشرهای پائین‌تر کمتر از قشرهای بالاتر است و بنابراین فشار آب به پره‌های بالای چرخ بیش از فشار آبی است که به پره‌های پائین چرخ وارد می‌شود.

قشر رنگین

در رودخانه، آنجا که آب از کارخانه بیرون می‌آید، اغلب می‌توان در نزدیکی ریزش آب رنگ‌های زیبایی مشاهده کرد. روغنی که از کارخانه وارد آب رودخانه می‌شود، به علت اینکه سبک‌تر از آب است، به صورت قشر فوق‌العاده نازکی روی سطح آب قرار می‌گیرد. آیا می‌توان ضخامت این قشر نازک را اندازه گرفت و یا لااقل تخمین زد؟ بنظر می‌رسد که مسئله پیچیده‌ای است، ولی حل آن مشکل نیست. حدس می‌زنید که ما به این کاریاس آور یعنی اندازه‌گیری مستقیم ضخامت قشر چربی نخواهیم پرداخت، بلکه آنرا بطور غیر مستقیم، یعنی به طریق محاسبه انجام خواهیم داد.

مقدار معینی روغن ماشین، و مثلاً ۲۰ گرم، بردارید و جایی دور از ساحل (به وسیله قایق) در آب بریزید. وقتی که روغن در سطح آب به صورت لکه دایره‌ای شکل در آمد، و لوبطور تقریبی، قطر دایره را اندازه بگیرید. با در دست داشتن اندازه قطر، مساحت دایره را محاسبه کنید و چون حجم روغن هم برای شما معلوم است (حجم روغن را به کمک وزن آن می‌توان به سادگی بدست آورد)، می‌توانید ضخامت قشر روغن را محاسبه کنید، مثلاً به این نمونه توجه کنید.

اگر يك گرم نفت را در آب بریزیم، دایره‌ای به قطر ۳۰ سانتیمتر به وجود می‌آورد*. ضخامت این قشر روی آب چقدر است؟ هر سانتیمتر مکعب نفت ۰/۸ گرم وزن دارد .

حل

حجم قشر را که البته برابر با حجم نفت است پیدا می‌کنیم ، وقتی که هر سانتیمتر مکعب نفت ۰/۸ گرم وزن دارد ، يك گرم آن $\frac{1}{0.8} = 1.25$ سانتیمتر مکعب و یا ۱۲۵۰ میلیمتر مکعب حجم خواهد داشت . سطح دایره به شعاع ۳۰ سانتیمتر یا ۳۰۰ میلیمتر برابر با ۷۰۰۰۰ میلیمتر مربع خواهد بود . برای پیدا کردن ضخامت قشر نفت باید حجم آنرا بر سطح قاعده‌اش تقسیم کرد :

$$\frac{1250}{70000} = 0.018 \text{ (میلیمتر)}$$

یعنی کمتر از يك پنجاهم میلیمتر . روشن است که برای چنین ضخامتی ممکن نیست با وسائل معمولی بطور مستقیم اندازه گیری را انجام داد .

قشرهای روغن و صابون را خیلی بیشتر از این و تا ضخامت ۰/۰۰۰۱ میلیمتر و کمتر هم می‌توان پخش کرد . فیزیکدان انگلیسی : بویز در کتاب « حبابهای صابون » می‌نویسد :

« روزی این تجربه را در استخر انجام دادم . روی سطح آب

(* معمولاً برای از بین بردن پشه‌های مالاریا برای هر هکتار ۴۰۰

کیلوگرم نفت مصرف می‌شود .

يك قاشق چایخوری روغن زیتون ریختم . لکه بزرگی به قطر ۲۰-۳۰ متر بوجود آمد . چون لکه روغن هم از جهت طول و هم از جهت عرض قریب هزار برابر طول و عرض قاشق چایخوری بود ، بنابراین ضخامت روغن می بایست قریب يك میلیونیم ضخامت روغن در قاشق ، یعنی تقریباً $2/000000$ میلیمتر باشد .»

دایره‌های روی آب

مسئله

مسئله شما بارها به این تفریح جالب پرداخته‌اید که اگر سنگی را در آب ساکن بیندازیم ، دایره‌هایی در اطراف آن به وجود می‌آید (شکل ۴۶) ، و بدون تردید ، هرگز توضیح این پدیده طبیعت اشکالی



۴۶. دایره‌های روی آب

برای شما بوجود نیاورده است : موجی با سرعت یکنواخت از نقطه

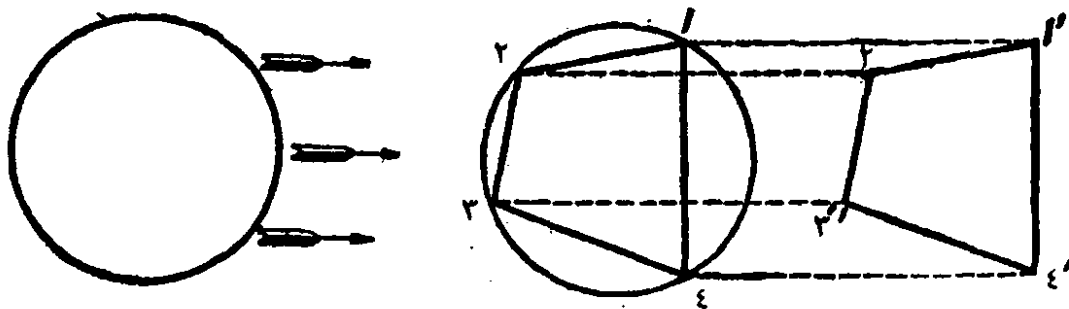
برخورد سنگ با آب منتشر می‌شود و بنابراین در هر لحظه همه نقاطی که تحت تأثیر موج بحرکت آمده‌اند بیک فاصله از این نقطه قرار دارند یعنی روی محیط يك دایره‌اند .

ولی وضع در مورد آب جاری چگونه است ؟ آیا موجی که در اثر ضربه سنگ بر آب جاری پیدا می‌شود باز هم به شکل دایره است یا شکل کشیده‌ای دارد ؟

در نظر اول بنظر می‌رسد که امواج دایره‌ای باید در آب جاری در جهت جریان آب کشیده شوند : امواج در جهت جریان آب نسبت به جهت مخالف آن و یا امتدادهای عمود بر جریان آب، سرعت بیشتری پیدا می‌کنند. باین ترتیب بنظر می‌رسد که امواج تولیدشده به صورت منحنیهای بسته و کشیده‌ای درمی‌آیند که بهر حال به شکل دایره نیستند. ولی ، درحقیقت اینطور نیست . وقتی که سنگی را در آب جاری بیندازید ، می‌بینید که امواج تولید شده درست مثل حالتی که در آب ساکن بود ، به شکل دایره درمی‌آیند . چرا ؟

حل

دلیل آن اینست : وقتی که آب ساکن است امواج به صورت دایره هستند . به بینیم جریان آب چه تغییری در آن می‌دهد؟ جریان آب



هر نقطه موج دایره‌ای را ، در جهتی که نشان داده‌ایم ، با خود می‌برد (سمت چپ شکل ۴۷) ، ضمناً نقاط مختلف دایره روی خطوط موازی هم و با يك سرعت منتقل می‌شوند ، یعنی فواصل آنها نسبت بهم تغییر نمی‌کند. و میدانیم که «انتقال موازی» شکل را تغییر نمی‌دهد. در حقیقت در نتیجه این انتقال، نقطه ۱ (سمت راست شکل ۴۷) به نقطه ۱' ، نقطه ۲ به ۲' و غیره تبدیل می‌شود و چهار ضلعی ۱۲۳۴ به صورت ۱'۲'۳'۴' درمی‌آید که با هم برابرند (تساوی دو چهار ضلعی را می‌توان به سادگی و از روی خواص متوازی‌الاضلاعهای ۱'۲'۳'۴' ، ۱۲۳۴ : ۲۳۳'۲' و غیره نتیجه گرفت) . اگر روی دایره به جای چهار نقطه ، نقاط بیشتری در نظر بگیریم، باز هم چند ضلعی‌های مساوی بدست می‌آوریم و بالاخره با در نظر گرفتن بی‌نهایت نقطه (یعنی خود دایره) ، پس از انتقال باز هم دایره‌ای مساوی آن بدست خواهیم آورد .

به این ترتیب روشن می‌شود که امواج در هر حال به صورت دایره هستند ، چه در آب ساکن و چه در آب جاری ، تنها اختلاف در این است که در آب ساکن منتقل نمی‌شوند (به شرطی که دور شدن آنها را از مرکز ثابت خود به حساب نیاوریم) . در آب جاری رودخانه هم امواج همراه با مرکز خود با سرعت جریان آب حرکت می‌کنند* .

گلوله منفجر شده

مسئله

مسئله‌ای مطرح می‌کنیم که ظاهراً با مسئله قبل ارتباطی ندارد،

(* در این استدلال شرطی وجود دارد ؛ آب باید برای تمام نقاط محیط موج دایره‌ای سرعت‌های مساوی داشته باشد، اگر سنگریزه را در نقطه‌ای از سطح آب بیندازیم که سرعت جریان آب در نقاط مختلف اطراف آن یکی نباشد (و مثلاً در نزدیکی ساحل) ، شکل دایره‌ای امواج ثابت نمی‌ماند و بهم می‌خورد.

ولی همانطور که خواهید دید با زمینه اصلی آن رابطه نزدیک پیدا می کند .

گلوله توپی را فرض کنید که در ارتفاع زیادی در هوا در حرکت است . وقتی که این گلوله شروع به فرود آمدن کرد ، ناگهان منفجر شد و تکه های آن به اطراف پراکنده شد، فرض می کنیم که این قطعات با یک قدرت به اطراف پرتاب شوند و هوا هیچگونه مانعی برای آنها نباشد . حالا میخواهیم بدانیم که بعد از یک ثانیه تکه های منفجر شده در چه وضعی قرار می گیرند؟ به شرطی که در این لحظه هنوز به زمین اصابت نکرده باشند .

حل

این مسئله به مسئله دایره های روی آب شباهت دارد . در اینجا هم بنظر می رسد که قطعات گلوله باید روی شکلی که بطرف پائین (در جهت سقوط) کشیده است، قرار گیرند: زیرا قطعاتی که بطرف بالا پرتاب شده اند باید ظاهراً با سرعتی کمتر از قطعاتی که بطرف پائین پرتاب شده اند، حرکت کنند. ولی بسادگی می توان ثابت کرد که قطعات گلوله فرضی ما روی سطح یک کره قرار می گیرند . فرض کنید برای چند لحظه نیروی ثقل از بین رفته باشد، در این صورت تمام قطعات گلوله طوری به اطراف پراکنده می شوند که در هر حال بیک فاصله از مرکز انفجارند یعنی روی سطح یک کره قرار دارند . حالا اثر نیروی ثقل را هم در نظر بگیریم . میدانیم که همه قطعات در اثر این نیرو با یک سرعت سقوط می کنند*، در نتیجه قطعات گلوله روی خطوط موازی

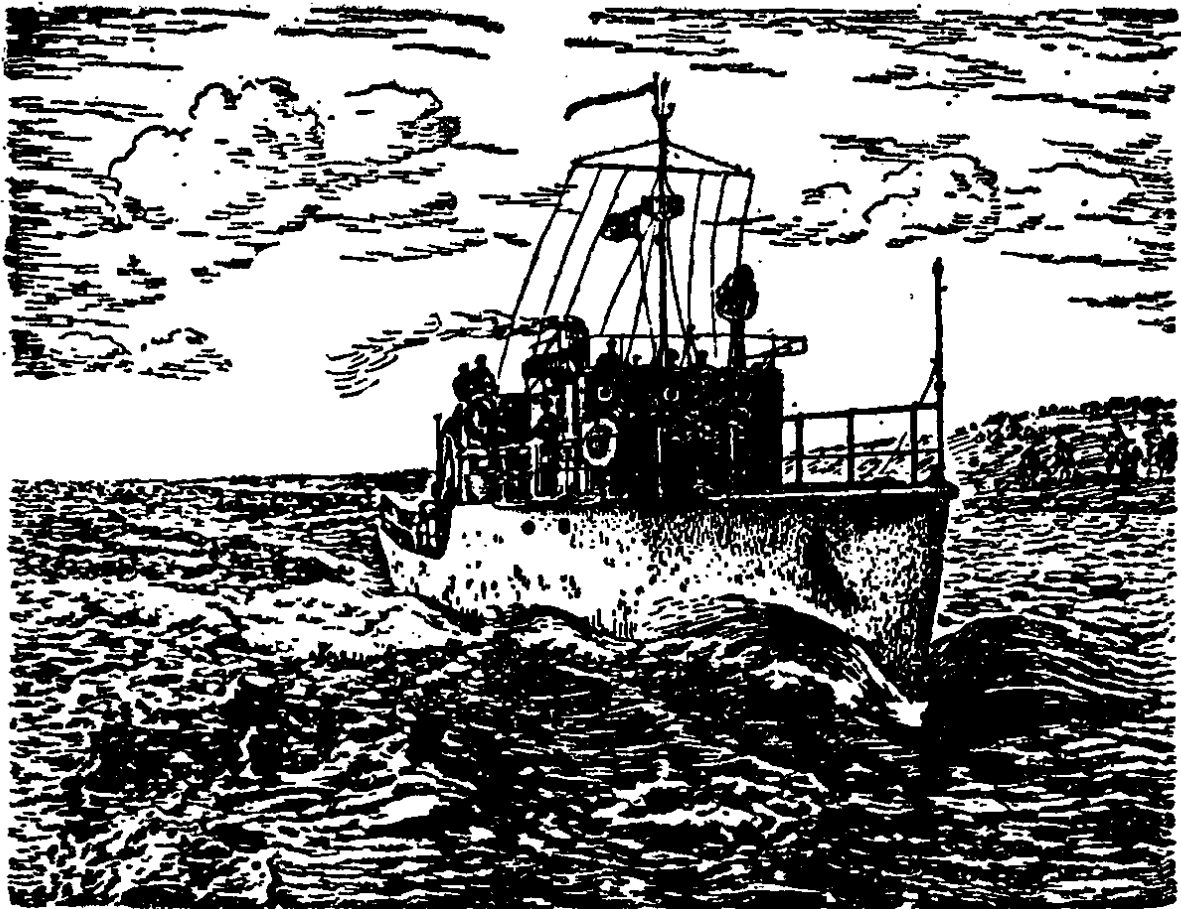
(* البته اگر مقاومت هوا را در نظر بگیریم (که ما در اینجا از آن صرف نظر

با هم حرکت می‌کنند و بنابراین فواصل آنها نسبت بهم بدون تغییر میماند. و میدانیم که انتقال بموازات خود، شکل جسم را تغییر نمی‌دهد. کره به شکل کره باقی میماند.

به این ترتیب قطعات گلوله فرضی ما کره‌ای را تشکیل می‌دهند که با سرعت سقوط آزاد بطرف پائین حرکت می‌کند.

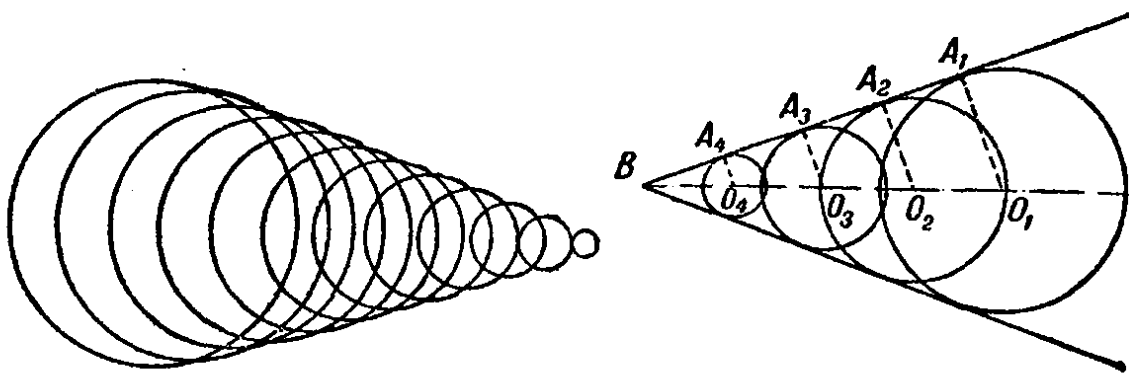
موج حاصل از حرکت کشتی

به رودخانه برگردیم. روی پل به ایستید و به اثری که پس از عبور سریع کشتی در آب باقی میماند نگاه کنید. می‌بینید که چگونه از قسمت دماغه، آب به دو قسمت می‌شود (شکل ۴۸).



این دو شانه آبی از کجا می آید؟ و چرا وقتی که سرعت کشتی بیشتر می شود زاویه بین دو شانه کوچکتر می شود؟
 برای اینکه علت به وجود آمدن شانه های آبی را روشن کنیم، دوباره به مسئله تشکیل دایره ها، که در اثر انداختن سنگ در آب پیدا می شد، برمی گردیم.

اگر به فواصل معین، سنگریزه هایی متناوباً در آب بیندازیم، روی سطح آب دایره هایی با اندازه های مختلف پیدا می شود. سنگریزه ای که دیرتر به آب افتاده باشد دایره کوچکتری به وجود می آورد. حالا اگر سنگریزه ها را در امتداد یک خط راست و پشت سر هم در آب بیندازیم، دایره هایی به وجود می آید که مجموعاً شبیه امواجی است که در دماغه کشتی پیدا می شود. هرچه سنگریزه ها کوچکتر و فاصله زمانی پرتاب سنگریزه ها کمتر باشد، این شباهت محسوس تر می شود. چوبی را در آب فرو کنید و آنرا در سطح آب جلو ببرید، مثل اینست که سقوط انفصالی سنگریزه ها را به سقوط انفصالی آنها تبدیل کنید، آنوقت خواهید دید که درست موجی شبیه آنچه که دماغه کشتی بوجود می آورد، پیدا می شود.



۴۹. موج کشتی چگونه به وجود می آید؟

برای آنکه مطلب بطور کامل روشن شود، باید نکات دیگری هم به آن

اضافه کنیم . دماغه کشتی در هر لحظه ، شبیه به سنگریزه‌های که در آب انداخته‌ایم ، موج دایره‌ای به وجود می‌آورد . موج به اطراف منتشر می‌شود ، ولی در همین لحظه کشتی به جلو می‌رود و موج دوم را تولید می‌کند که پشت سر آن بلافاصله موج سوم پیدا می‌شود و غیره . دایره‌های منفصل مربوط به سقوط سنگریزه‌ها ، در اینجا به دایره‌های متصل تبدیل می‌شود و طرحی شبیه شکل ۴۹ به وجود می‌آورد . در اثر برخورد هر دو موج مجاور با یکدیگر ، هریک دیگری را می‌شکند و تنها دو قسمت کوچک از دایره‌های کامل باقی‌ماند که قسمت خارجی آنها ظاهر می‌شود . این قسمتهای خارجی بهم مربوط می‌شوند و دوشانه متصل بهم را تشکیل می‌دهند که به وضع دو مماس مشترك خارجی دایره‌های امواج درمی‌آیند (شکل ۴۹ - سمت راست) .

شبیه امواج شانه‌ای که در عقب هر کشتی دیده می‌شود، می‌توان در مورد هر جسمی که با سرعت کافی در سطح آب حرکت کند ، مشاهده نمود .

از این مطلب مستقیماً نتیجه می‌شود که این پدیده وقتی به وجود می‌آید که جسم سریع‌تر از موج آب حرکت کند . اگر شما چوبی را به آهستگی در آب حرکت دهید می‌بینید که شانه‌های آبی به وجود نمی‌آید و امواج دایره‌ای یکی در داخل دیگری تشکیل می‌شود و برای آنها مماس مشتركی هم وجود ندارد .

در حالتی هم که جسمی ساکن باشد و آب از پهلوئی آن عبور کند ، باز هم می‌توان شانه‌های آبی را مشاهده کرد . اگر جریان آب رودخانه به اندازه کافی سریع باشد ، شانه‌های آبی را در کنار ستونهای پل هم می‌توان دید . در اینجا شکل امواج کاملاً روشن‌تر از مورد کشتی هستند ، زیرا دیگر حرکت پروانه باعث شکستگی آنها نمی‌شود .

برای روشن کردن جنبه هندسی مطلب ، مسئله زیر را طرح

می‌کنیم .

مسئله

مقدار زاویه بین دو شاخه موجی که از حرکت کشتی به وجود می‌آید به چه عاملی مربوط است؟

حل

از مرکز امواج دایره‌ای (شکل ۴۹- سمت راست) شعاعهائی را که به یکی از مماس مشترکها می‌رسد، رسم می‌کنیم، بسادگی روشن می‌شود که O_1B راهی است که در زمان معینی دماغه کشتی طی کرده است و O_1A_1 فاصله‌ای که در همان زمان، موج منتشر شده است. نسبت $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ سینوس زاویه O_1BA_1 است، که در عین حال عبارتست از نسبت سرعت موج به سرعت کشتی. به این ترتیب زاویه B ، بین شانه‌های موج، عبارتست از دو برابر زاویه‌ای که سینوس آن نسبت سرعت انتشار موج به سرعت کشتی است.

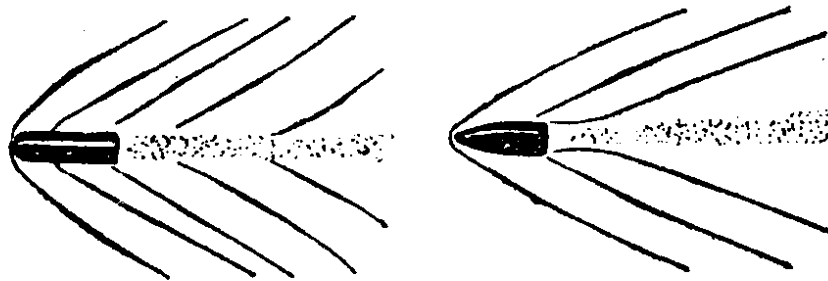
سرعت انتشار امواج دایره‌ای در آب تقریباً مربوط به این نیست که به وسیله حرکت کدام کشتی بوجود آمده است و بنابراین زاویه بین شانه‌های موجی که در اثر حرکت کشتی بدست می‌آید، اساساً مربوط به سرعت کشتی خواهد بود: سینوس نصف این زاویه با سرعت کشتی نسبت عکس دارد. برعکس با در دست داشتن مقدار زاویه می‌توان نسبت سرعت کشتی را به سرعت موج پیدا کرد. اگر فی‌المثل زاویه بین شاخه‌های موج مساوی ۳۰ درجه باشد (همانطور که در مورد کشتی‌های بزرگ مسافربری چنین است)، سینوس نصف آن ($\sin 15^\circ$)

مساوی $0/26$ می شود و این به معنای آنست که سرعت کشتی $0/26$ یا تقریباً 4 برابر سرعت انتشار موج است .

سرعت گلوله توپ

مسئله

حرکت گلوله و یا گلوله توپ در فضا هم امواجی ، شبیه آنچه هم اکنون مطالعه کردیم ، به وجود می آورد . وسائلی وجود دارد که به کمک آنها می توان از گلوله ای که در حال پرواز است عکس گرفت ، در شکل ۵۰ دو نمونه از عکس گلوله هائی که با سرعتهای متفاوت پرواز می کنند ، استنساخ شده است . در شکل ، موج مورد نظر ما (موجی که در اثر حرکت گلوله در هوا به وجود می آید و به موج مخروطی



۵۰. موجی که در هوا در اثر پرواز گلوله به وجود می آید

مشهور است) به خوبی دیده می شود . خصوصیات به وجود آمدن این موج کاملاً شبیه موجی است که در اثر حرکت کشتی در آب به وجود می آید . در اینجا از همان رابطه هندسی می توان استفاده کرد : سینوس نصف زاویه ای که موج مخروطی به وجود می آورد، برابر است با نسبت سرعت انتشار موج در هوا بر سرعت پرواز خود گلوله . سرعت انتشار موج در هوا تقریباً برابر است با سرعت صوت ، یعنی 300 متر در

ثانیه . بنابراین با عکس برداری از گلوله‌ای که در حال پرواز است، می‌توان سرعت تقریبی آنرا به سادگی تعیین کرد .
حالا برای دو عکسی که در صفحه قبل آورده ایم سرعت گلوله را پیدا کنید .

حل

زاویه بین شاخه‌های موجها را در شکل ۵۰ اندازه می‌گیریم . در حالت اول قریب ۸۰ درجه و در حالت دوم ۵۵ درجه بدست می‌آید ، نصف آنها ۴۰ درجه و $۲۷\frac{۱}{۲}$ درجه می‌شود و داریم :

$$\sin 40^\circ = 0,64 ; \quad \sin 27\frac{1}{2}^\circ = 0,46$$

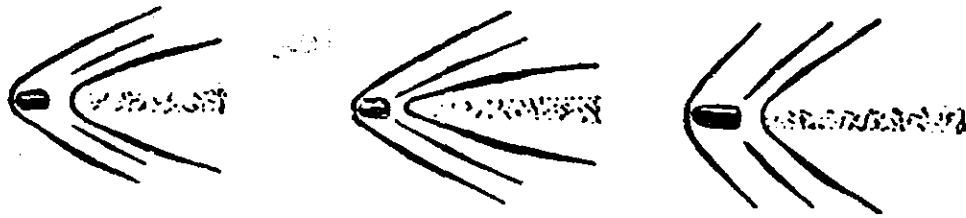
بنابراین ، سرعت انتشار صوت در هوا ، یعنی ۳۳۰ متر ، در حالت اول ۰/۶۴ و در حالت دوم ۰/۴۶ سرعت گلوله است . از آنجا سرعت گلوله اول $\frac{۳۳۰}{0,64}$ یعنی ۵۲۰ متر در ثانیه و سرعت گلوله دوم $\frac{۳۳۰}{0,46}$ یعنی ۷۲۰ متر در ثانیه است .

می‌بینید که با کمک مطالب ساده و مقدماتی هندسه و استفاده از بعضی جوانب فیزیک می‌توان مسئله‌ای را حل کرد که در نظر اول بغرنج بنظر می‌رسد : با کمک عکس گلوله ، می‌توان سرعت آنرا در لحظه عکسبرداری بدست آورد (البته این محاسبه تقریبی است ، زیرا بعضی از عوامل فرعی را در مورد آن در نظر نگرفته ایم) .

مسئله

برای علاقمندان در اینجا عکس سه گلوله در حال پرواز را

آورده‌ایم که خواننده می‌تواند خود سرعت آنها را بدست آورد
(شکل ۵۱).



۵۱. سرعت گلوله‌ای که در حال پرواز است چگونه تعیین می‌شود؟

عمق استخر

دوایری که در آب تشکیل می‌شود، ما را به مبحث توپخانه
کشاند. دوباره به رودخانه برمی‌گردیم و یک مسئله هندی را مطرح
می‌کنیم.

در هند قدیم عادت بر این بود است که مسائل ریاضی را به شعر
بیان کنند و ما در اینجا ترجمه یکی از آنها را نقل می‌کنیم.

مسئله

روی دریاچه آزام ،
گل نیلوفر به اندازه نیم فوت از آب بیرون آمده است .
او صاف و یکنواخت روئیده ، نسیمی وزید
و آنرا بیک طرف خم کرد .
گل نیلوفر درست روی آب قرارگرفت ،
صیاد، این گل بهاری زودرس را ،
در دو فوتی جای اولش پیدا کرد .
حالا سئوالی مطرح می‌کنم :
عمق آب دریاچه
در اینجا چقدر است ؟

عمق مجهول آب یعنی CD را x فرض می کنیم (شکل ۵۲).
طبق قضیه فیثاغورث خواهیم داشت :

$$BD^2 - x^2 = BC^2$$

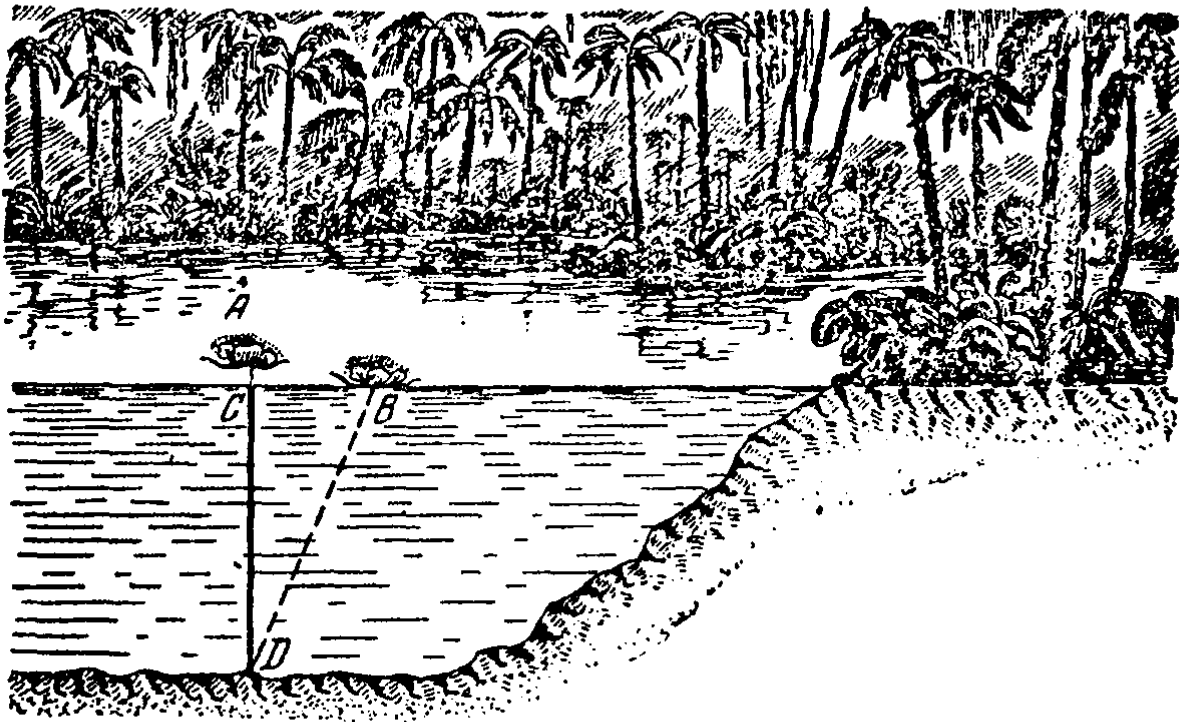
که با استفاده از مفروضات می شود :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = 2^2$$

و از آنجا :

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 = 4 \Rightarrow x = 3\frac{3}{4}$$

یعنی عمق آب برابر $3\frac{3}{4}$ فوت است.



۵۲. مسئله هندی درباره گل نیلوفر

گیاهان آبی که در نزدیک ساحل ویا بر که های کم عمق روئیده اند

وسائل اصلی برای طرح مسائل مشابهی هستند : بدون هیچ زحمتی و حتی بدون اینکه دستتان را در آب فرو کنید ، می توانید عمق آب را در این نقطه معین کنید .

آسمان پرستاره در آب رودخانه

رودخانه هنگام شب هم در مقابل هندسه دانها مسائلی طرح می کند.
گوگول در توصیف دنپر می گوید :

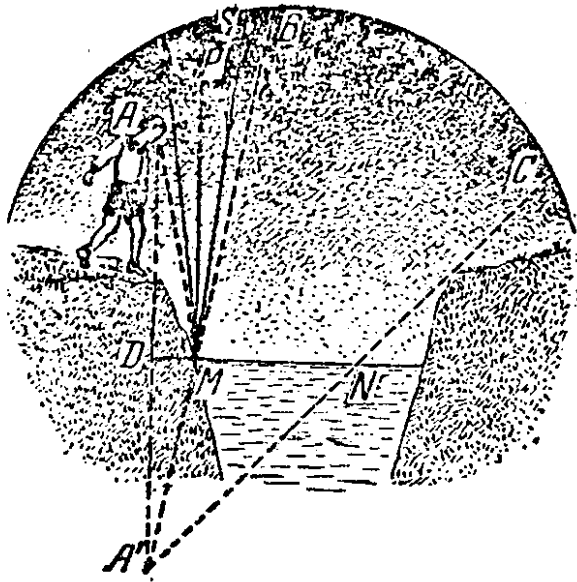
« ستارگان بر فراز عالم برق می زنند و می درخشند و همیشه خود را به دنپر تسلیم می کنند . دنپر همه آنها را در آغوش تاریک خود نگه می دارد : هیچکدام از او فرار نمی کنند ، مگر اینکه در آسمان خاموش شوند » .

در حقیقت ، وقتی که در ساحل رودخانه پهنی ایستاده باشید ، سطح آب به آئینه ای می ماند که گنبد ستاره ای آسمان در آن منعکس شده است .

ولی واقع امر چگونه است ؟ آیا همه ستارگان در رودخانه « می افتند » ؟

به شکل مراجعه کنیم (شکل ۵۳) : A - چشم ناظر ، که در ساحل رودخانه نزدیک سرایشی ایستاده و MN سطح آب است . ناظر از نقطه A کدام ستاره ها را می تواند در آب ببیند ؟

برای جواب دادن به این سؤال ، از نقطه A عمود AD را بر امتداد MN فرود می آوریم و به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد می دهیم . اگر چشم ناظر در A' بود ، تنها قسمتی از آسمان پرستاره را می توانست به بیند که در داخل زاویه $BA'C$ قرار داشت و منطقه دید ناظر حقیقی هم ، که در نقطه A ایستاده است ، درست همانجا است . ستاره هایی که



در خارج این منطقه قرار گرفته اند دیده نمی شوند، زیرا اشعه منعکس شده آنها به چشم ناظر نمی رسند. دلیل این مطلب چیست؟ چگونه می توان ثابت کرد که مثلاً ناظر ما نمی تواند ستاره S را، که در خارج زاویه $BA'C$ قرار گرفته است، در رودخانه به بیند؟

۵۳. کدام قسمت آسمان پرستاره را می توان از داخل آب دید؟

شعاع نوری آنرا تعقیب می کنیم. این شعاع در نزدیکی ساحل، در نقطه M، فرود می آید

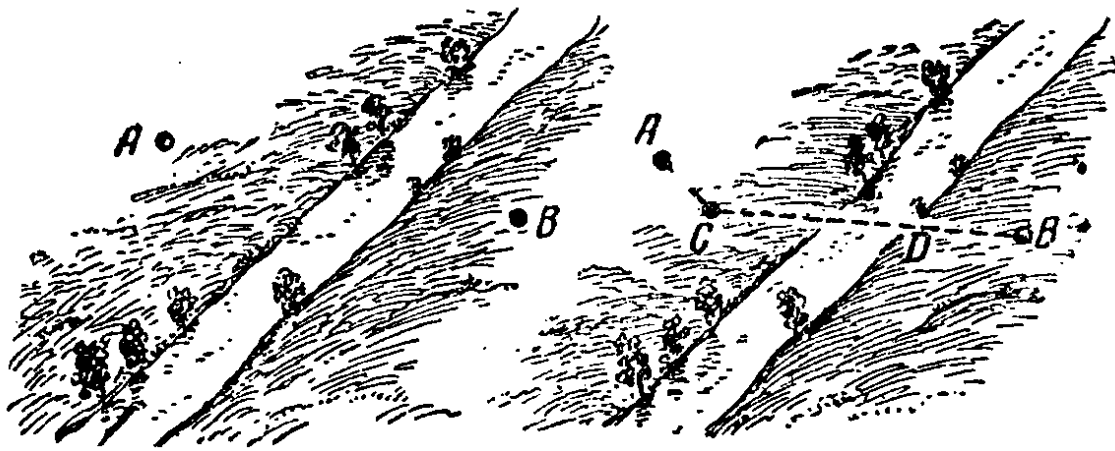
و طبق قانون فیزیک شعاع منعکس با عمود MP زاویه ای مساوی زاویه فرود SMP می سازد که از زاویه PMA کوچکتر است (این مطلب به سادگی و با توجه به تساوی مثلثهای ADM و A'DM ثابت می شود). بنابراین شعاع منعکس باید از کنار نقطه A عبور کند.

به این ترتیب نقل قولی را که از گوگول کردیم اغراق آمیز است! در دنپر همه ستارگانی را که در آسمان می بینیم منعکس نمی شوند.

راهی از روی رودخانه

مسئله

بین دو نقطه A و B رودخانه ای واقع است که ساحلهای آن تقریباً موازی یکدیگرند (شکل ۵۴). می خواهیم پلی روی رودخانه بسازیم که امتداد آن با مسیر رودخانه زاویه قائمه بسازد. جای پل را



۵۴. پل را در کجا عمود بر ساحل بسازیم تا جاده بین A و B کمترین فاصله را داشته باشد؟

۵۵. جائیکه برای ساختن پل باید انتخاب کرد

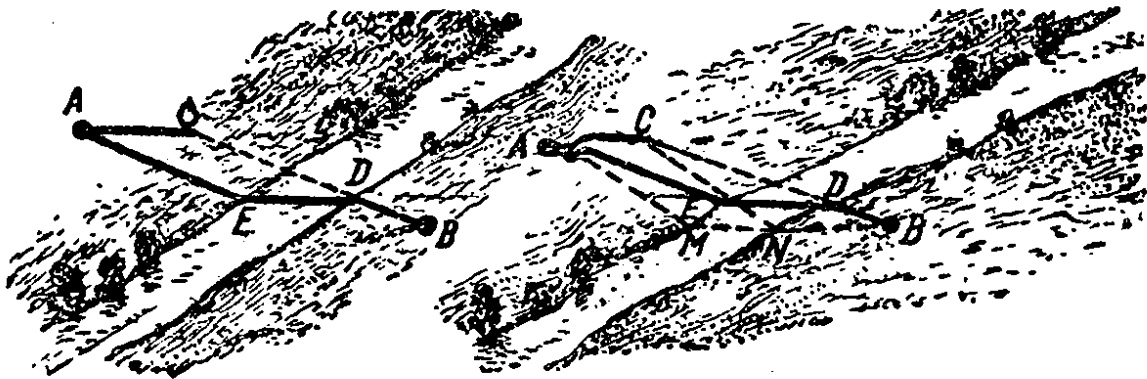
در کجا انتخاب کنیم تا راه از A به B حداقل باشد؟

حل

از نقطه A (شکل ۵۵) عمودی بر امتداد مسیر رودخانه رسم می‌کنیم، روی این عمود قطعه AC را مساوی عرض رودخانه جدا می‌کنیم و C را به D وصل می‌نمائیم. اگر پل را در نقطه D بسازیم، فاصله عبور از A به B حداقل خواهد بود.

در حقیقت اگر پل DE را بسازیم (شکل ۵۶)، با وصل E به A، راه AEDB بدست می‌آید که در آن قسمت AE با CD موازی است (چهار ضلعی AEDC متوازی‌الاضلاع است، زیرا دو ضلع روبروی AC و ED موازی و مساوی‌اند). بنابراین راه AEDB از لحاظ طول با راه ACB برابر است. بسادگی می‌توان ثابت کرد که هر راه دیگری طولانی‌تر از این راه است. مثلاً فرض می‌کنیم مسیر AMNB (شکل ۵۷) کوتاهتر از AEDB یعنی کوتاهتر از ACB باشد. C را به N وصل می‌کنیم، می‌بینیم که CN مساوی AM است و بنابراین

راه $AMNB$ برابر است با راه $ACNB$. ولی واضح است که CNB بزرگتر از CB و بنابراین $ACNB$ بزرگتر است از ACB (و یا از $AEDB$). بنابراین مسیر $AMNB$ طولانی‌تر از مسیر $AEDB$ است نه کوتاهتر از آن.



۵۶. پل ساخته شده است

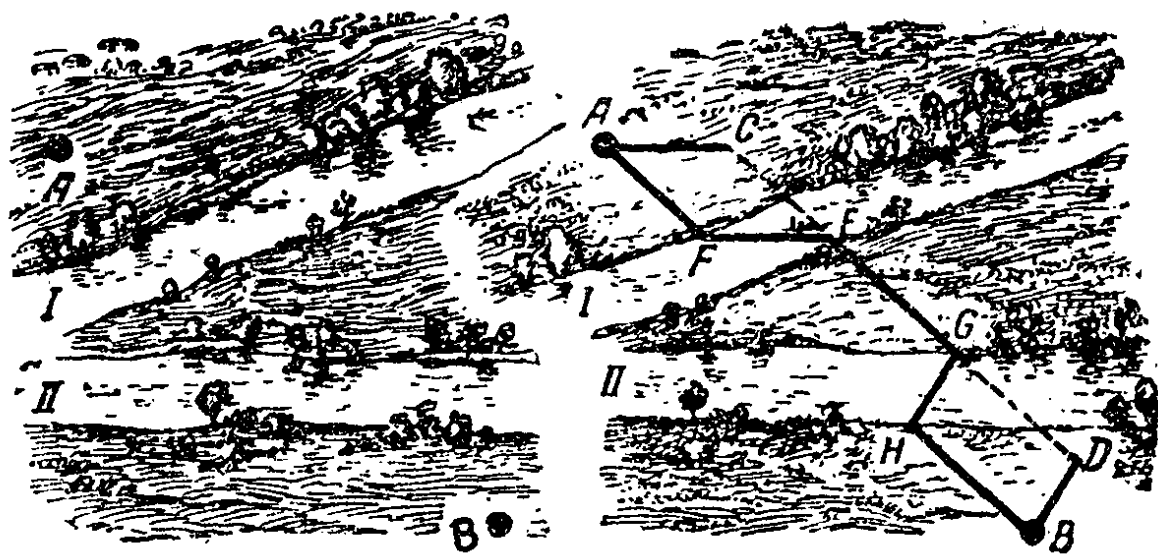
۵۷. راه $AEDB$ کوتاهترین راه است

همین استدلال را می‌توان درباره هر پل دیگری که غیر از ED باشد، انجام داد، بعبارت دیگر مسیر $AEDB$ واقعاً کوتاهترین راه ممکن است.

دو پل بسازید

مسئله

می‌توان حالت بغرنجتری را مطرح کرد: بین دو نقطه A و B دو رودخانه قرار گرفته است و می‌خواهیم با ساختن دو پل آنها را بهم وصل کنیم، اگر هر پل عمود بر ساحل مربوطه باشد، جای پلها را چنان پیدا کنید که راه بین A و B کوتاهترین راه ممکن باشد (شکل ۵۸).



۵۸. ساختمان دوپل

حل

از نقطه A (شکل ۵۸-سمت راست) پاره خط AC را مساوی عرض رودخانه I و عمود بر ساحل آن رسم می کنیم . از نقطه B هم پاره خط BD را مساوی عرض رودخانه II و عمود بر ساحل آن رسم می کنیم . نقاط C و D را با یک خط مستقیم بهم وصل می نمائیم . در نقطه E ، پل EF و در نقطه G پل GH را می سازیم . راه A-F-E-G-H-B کوتاهترین راه بین A و B خواهد بود .
اثبات این راه حل را بعهدہ خواننده می گذاریم که در حقیقت کاملاً شبیه استدلال حالت قبل است .





۲

هندسه در فضای آزاد

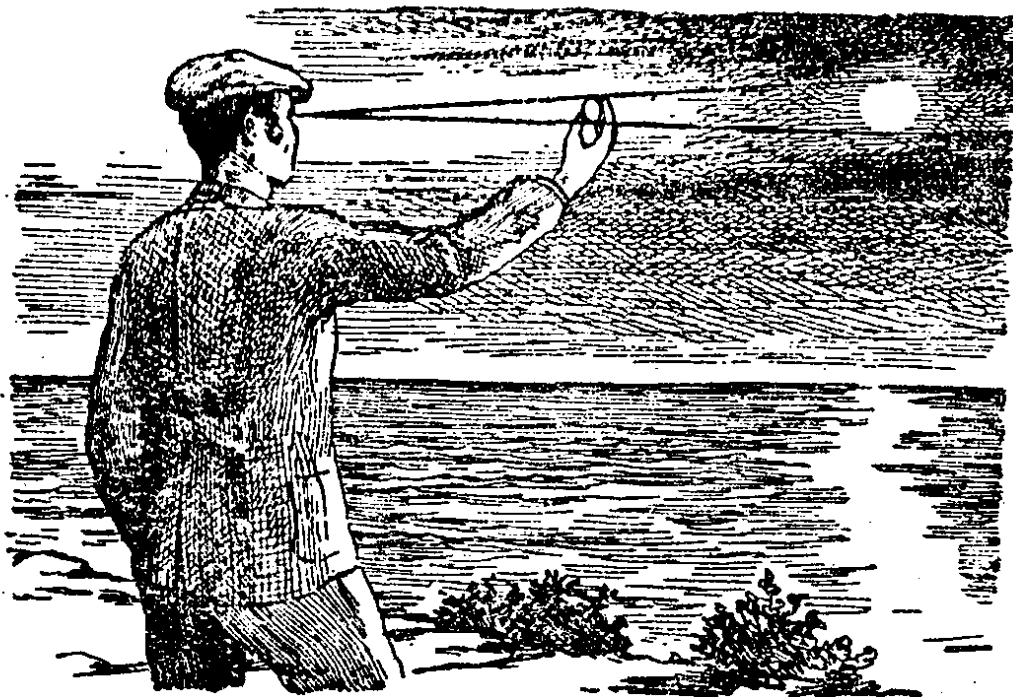
اندازه‌های ظاهری ماه

اندازه قرص ماه (بدر) در آسمان بنظر شما چقدر است؟ اگر این سؤال را از افراد مختلف بکنید، جوابهای کاملاً مختلفی دریافت می‌کنید.

ماه «به اندازه بشقاب است»، «به سببی میماند»، «مثل کف دست است» و غیره. اینها جوابهایی است که می‌شنوید: این تخمینهای غیر دقیق و نامعین تنها حاکی از اینست که جواب دهندگان استنباط صحیحی از حقیقت سؤال ندارند.

به سئوالی که تا به این اندازه عادی بنظر می‌رسد، تنها کسی می‌تواند جواب صحیح بدهد که تصور روشنی درباره اندازه «ظاهری»

يك شيشی داشته باشد . کمتر کسی گمان می‌برد که در اینجا صحبت از مقدار يك زاویه است، زاویه‌ای که رأس آن چشم ما و دو ضلع آن خطوط راستی هستند که از دو طرف شیشی عبور می‌کنند ، چنین زاویه‌ای را «زاویه دید» و یا «اندازه زاویه‌ای شیشی» گویند (شکل ۵۹ را به بینید) و وقتی که برای تخمین اندازه ظاهری ماه در آسمان، آنرا با اندازه‌های بشقاب و یا چیز دیگری مقایسه می‌کنند، یا بدون هیچ فکری این مقایسه را انجام می‌دهند و یا به این معنی می‌گیرند که ماه در آسمان تحت زاویه‌ای مساوی زاویه دید بشقاب و یا سیب دیده می‌شود . ولی این اشاره به تنهائی کافی نیست : بشقاب یا سیب، بسته به دوری یا نزدیکیشان از ما ، تحت زوایای مختلفی دیده می‌شوند : هرچه نزدیکتر باشند زاویه دید بزرگتر و هرچه دورتر باشند ، زاویه دید کوچکتر می‌شود . برای اینکه مطلب کاملا روشن باشد ، باید معین کرد که بشقاب یا سیب در چه فاصله‌ای باید قرار گیرد .



مقایسه اندازه‌های اشیاء مختلف با یکدیگر ، بدون در نظر گرفتن فواصل آنها ، در نوشته‌های ادبی خیلی عادی است که حتی مورد استفاده نویسندگان درجه اول هم قرار گرفته است . این روش ، بخاطر اینکه به روحیه بیشتر مردم نزدیکتر است ، اثر قابل فهم‌تری در ذهن آنها می‌گذارد ، ولی البته طرح روشن و دقیقی بدست نمی‌دهد . نمونه‌ای از کتاب «شاه‌لیر» نوشته شکسپیر نقل می‌کنیم که توصیفی از يك پرتگاه ساحل دریاست (از زبان ادگار) :

چه وحشتناك است !

چه سرگیجه‌ای به آدم دست می‌دهد . چشم تا کجا کار می‌کند ؛ ...

زاغها و کلاغهائی که آجا وسط زمین و آسمان پرواز می‌کنند ،

به اندازه عکسهائی بنظر می‌رسند . در نیمراه پائین ،

مردی آویزان است و علفهای دریائی جمع می‌کند ... چه حرفه پرخطری!

بنظر من او بزرگتر از سر خودش نیست .

ماهگیرائی که در ساحل قدم می‌زنند ،

درست به اندازه موش شده‌اند ؛ و آن کشتی بزرگی که در لنگرگاه است .

به اندازه قایق خودش ، کوچک شده است ؛ و قایقش — همچون نقطه‌ای شناور است ،

و برای چشم آدمی چقدر کوچک است

این مقایسه وقتی تصور دقیق و روشنی درباره فاصله به وجود می‌آورد که فاصله اشیاء مورد مقایسه (مگس ، سر آدم ، موش ، قایق ...) را هم به همراه داشته باشد . همینطور ، وقتی که اندازه ماه را با سیب مقایسه می‌کنیم ، باید فاصله این اشیاء عادی را هم تا چشم خود روشن نمائیم . این فاصله ، خیلی بیشتر از آنست که بنظر می‌رسد . وقتی که سیبی را بدست بگیرید و دست خود را بجلو باز کنید ، نه ماه ، بلکه قسمت بزرگی از آسمان به وسیله سیب پنهان می‌شود . سیب را به نخ‌ی آویزان کنید و بتدریج از آن دور شوید ، تا آنجا که سیب فقط قرص ماه را (و نه بیشتر از آن) بپوشاند ، در این وضع است که سیب و ماه برای ما بیک اندازه دیده می‌شوند . اگر در اینحالت

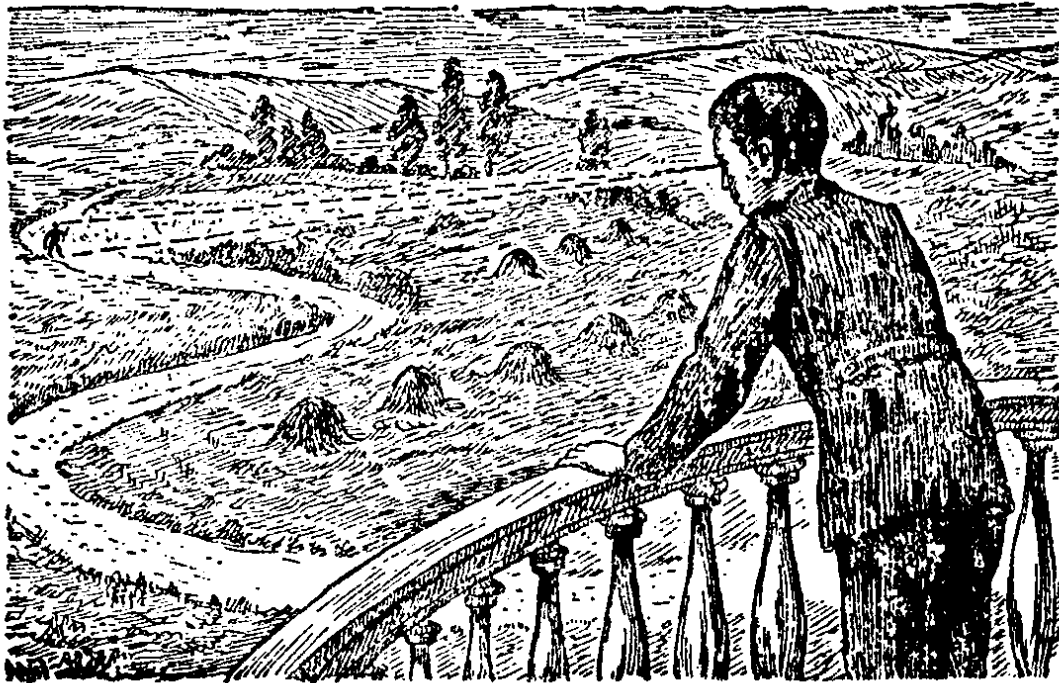
فاصله چشم خود را تا سبب اندازه بگیرید ، به تقریب ۱۰ متر ابدست خواهید آورد . و این فاصله ای است که باید از سبب دور باشید تا آنرا به اندازه قرص ماه آسمان به بینیم ! و برای بشقاب ، باید آنرا در فاصله ۳۰ متری یعنی ۵۰ قدمی قرار دهیم .

کسی که برای اولین بار این مطلب را بشنود ، بنظرش نادرست می آید ، ضمناً از همین جا ، می توان به این نتیجه هم رسید که ما ماه را با زاویه دیدی که تقریباً نیم درجه^۵ است ، می بینیم . در زندگی معمولی تقریباً هرگز پیش نمی آید که احتیاج به تخمین زاویه ای داشته باشیم ، به همین مناسبت اکثر مردم درباره زوایای کوچک ، مثل زاویه ۱ درجه ، ۲ درجه یا ۵ درجه تصور تاریک و مبهمی دارند (روشن است که ما از مساح ، نقشه کش و سایر متخصصینی که دائماً و در عمل با اینگونه زوایا سروکار دارند ، صحبت نمی کنیم) . تنها درباره زوایای بزرگ است که می توانیم ، کم و بیش صحیح ، تخمین بزنیم ، بخصوص وقتی که این زوایا را با اندازه زاویه بین عقربه های ساعت (که به اندازه کافی با آن آشنائی داریم) مقایسه کنیم این تخمین دقیق تر می شود : زوایائی به اندازه های ۹۰ درجه ، ۶۰ درجه ، ۳۰ درجه ، ۱۲۰ درجه و ۱۵۰ درجه برای ما خیلی آشناست ، زیرا بلافاصله و با یک نظر به صفحه ساعت ، آنها را باز می شناسیم (در ساعت های ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵) ، در این موارد حتی احتیاجی به ارقام صفحه ساعت نداریم . ولی اشیاء کوچک و جدا از هم را معمولاً تحت زوایای خیلی کوچک می بینیم و بنابراین حتی به تقریب هم نمی توانیم زاویه دید آنها را تخمین بزنیم .

(* در حقیقت قطر ظاهری ماه . یا زاویه دید برای ماه ، مقدار ثابتی نیست . وقتی که ماه در مدار خود گردش می کند ، فاصله آن تا زمین از ۳۵۴ تا ۴۰۶ هزار کیلومتر تغییر می کند و همراه با آن ، زاویه دید ماه هم از ۳۳'۴۰" تا ۲۹'۲۴" تغییر می کند .

زاویه دید

می‌خواهیم نمونه‌ای در مورد زاویه دید يك درجه ذکر کنیم ، به بینیم يك مرد با قامت معمولی ($۱/۷$ متر) ، در چه فاصله‌ای از ما قرار گیرد تا او را تحت زاویه يك درجه به بینیم . مسئله را به زبان هندسه بیان کنیم : می‌خواهیم شعاع دایره‌ای را پیدا کنیم که قوس يك درجه آن $۱/۷$ متر طول داشته باشد (قاعدتاً باید گفت طول وتر این قوس مساوی $۱/۷$ متر است ، ولی برای زوایای کوچک ، اختلاف بین طول قوس و طول وتر آن قابل صرف نظر کردن است) .



۶۰ . مردی که در فاصله ۱۰۰ متری ما قرار گرفته باشد ، با زاویه يك درجه دیده می‌شود

وقتی که قوس يك درجه برابر $۱/۷$ متر است ، محیط دایره ، یعنی قوس ۳۶۰ درجه طولی مساوی ۶۱۰ متر ($۱/۷ \times ۳۶۰$) خواهد داشت ، و برای پیدا کردن طول شعاع باید این عدد را بر ۲π تقسیم کنیم ، اگر مقدار π را به تقریب $\frac{۲۲}{۷}$ بگیریم ، شعاع این دایره چنین میشود :

$$(متر) \quad ۹۸ \neq \frac{۴۴}{۷} : ۶۱۰$$

به این ترتیب یک مرد را وقتی با زاویه یک درجه می بینیم که تقریباً در فاصله ۱۰۰ متری ما قرار گرفته باشد (شکل ۶۰). اگر او تا فاصله ۲۰۰ متری از ما دور شود با زاویه نیم درجه و اگر تا فاصله ۵۰ متری به ما نزدیک شود با زاویه ۲ درجه دیده می شود و غیره .

به سادگی می توان محاسبه کرد که اگر چوبی به طول یک متر داشته باشیم و بخواهیم به زاویه یک درجه دیده شود ، باید در فاصله ۵۷ متری $(\frac{۴۴}{۷} : ۳۶۰)$ قرار گیرد . بهمین ترتیب با همین زاویه می توان یک سانتیمتر را در فاصله ۵۷ سانتیمتری ، یک کیلومتر را در فاصله ۵۷ کیلومتری و غیره مشاهده کرد، بطور کلی هر شیئی که در فاصله ای برابر با ۵۷ برابر طول خود قرار گرفته باشد، با زاویه یک درجه دیده می شود. وقتی که از این عدد ۵۷ اطلاع داشته باشیم ، می توانیم به سرعت و به سادگی همه محاسبه مربوط به مقدار زاویه ای اشیاء را انجام دهیم . مثلاً اگر بخواهیم فاصله ای را تعیین کنیم که از آنجا یک سیب با مقطع به قطر ۹ سانتیمتر را با زاویه یک درجه به بینیم ، باید حاصل ضرب ۹×۵۷ را بدست آوریم :

$$(متر) \quad ۵ \neq (سانتیمتر) \quad ۵۱۰ \neq ۹ \times ۵۷$$

اگر فاصله را دو برابر کنیم ، زاویه دید نصف می شود : نیم درجه ، یعنی زاویه دید ماه .

بهمین ترتیب می توان برای هر جسم دلخواه فاصله ای را معین کرد که با قرص ماه یک زاویه دیده شود .

بشقاب و ماه

مسئله

بشقابی به قطر ۲۵ سانتیمتر را درچه فاصله‌ای قراردهیم تا با ماه در آسمان بیک اندازه دیده شود؟

حل

$$(متر) \quad ۲۸ \# ۲ \times ۵۷ \times ۲۵ \quad (سانتیمتر)$$

ماه و سکه کوچک

مسئله

همین محاسبه را برای سکه‌ای که به قطر ۲۵ میلیمتر (سکه پنج ریالی) و هم برای سکه‌ای که به قطر ۲۲ میلیمتر است (سکه دوریالی) انجام دهید.

حل

$$(متر) \quad ۲/۸ \# ۲ \times ۵۷ \times ۰/۰۲۵$$

$$(متر) \quad ۲/۵ \# ۲ \times ۵۷ \times ۰/۰۲۲$$

اگر در این مطلب تردید دارید که ماه به چشم ما از سکه ۵ ریالی که در فاصله چهار قدمی ما باشد، یا ته مداد معمولی که به فاصله ۸۰ سانتیمتری ما باشد، بزرگتر نیست، مدادی را بدست بگیرید و دست خود را به جلو کاملاً باز کنید، خواهید دید که ته مداد قسمت عمده

سطح ماه را می‌پوشاند. و با وجود تعجبی که برمی‌انگیزد می‌توانید چیزهای بهتری برای مقایسه با ماه پیدا کنید که حتی به اندازه بشقاب و یا سیب و یا حتی آلبالو هم نباشند، مثلاً يك نخود و یا حتی بهتر از آن سرچوب کبریت! مقایسهٔ ماه با بشقاب یا سیب ما را قانع کرد که باید در فاصلهٔ نسبتاً دوری باشند: سیبی را که در دست است و یا بشقابی را که روی میز نهار خوری قرار گرفته، به مراتب بزرگتر از قرص ماه می‌بینیم. و اما در مورد سرچوب کبریت، اگر آنرا در فاصلهٔ ۲۵ سانتیمتری قرار دهیم (فاصله‌ای که برای دید مناسب است)، با زاویهٔ نیم درجه (یعنی زاویهٔ دید ماه) خواهیم دید.

اینکه قرص ماه به چشم بسیاری از مردم ۱۰-۲۰ مرتبه بزرگتر بنظر می‌آید، یکی از جالبترین موارد مربوط به خطای باصره است. این خطا قاعدتاً باید مربوط به درخشندگی ماه باشد: ماه تمام، در زمینهٔ آسمان خیلی مشخص‌تر و برجسته‌تر است تا مثلاً بشقاب، سیب، سکه و یا اشیاء مقایسه‌ای دیگری که در بین اثاثیهٔ دوربر ما قرار گرفته‌اند.* این تصور غلط چنان بما تحمیل شده است که حتی نقاشها (که دیدی دقیق‌تر از دیگران دارند)، در نقاشیهای خود، همراه با اعتقاد سایر مردم، ماه را خیلی بزرگتر از آنچه که باید باشد نشان می‌دهند. کافی است که مثلاً دورنمایی را که يك نقاش کشیده است، با عکس برداری واقعی مقایسه کنیم، تا صحت این مطلب روشن شود.

آنچه را که در مورد ماه گفتیم دربارهٔ خورشید هم صدق می‌کند، زیرا خورشید هم از زمین تقریباً با همان زاویهٔ نیم درجه دیده می‌شود: قطر کرهٔ خورشید ۴۰۰ مرتبه بزرگتر از قطر کرهٔ ماه است، ولی فاصلهٔ

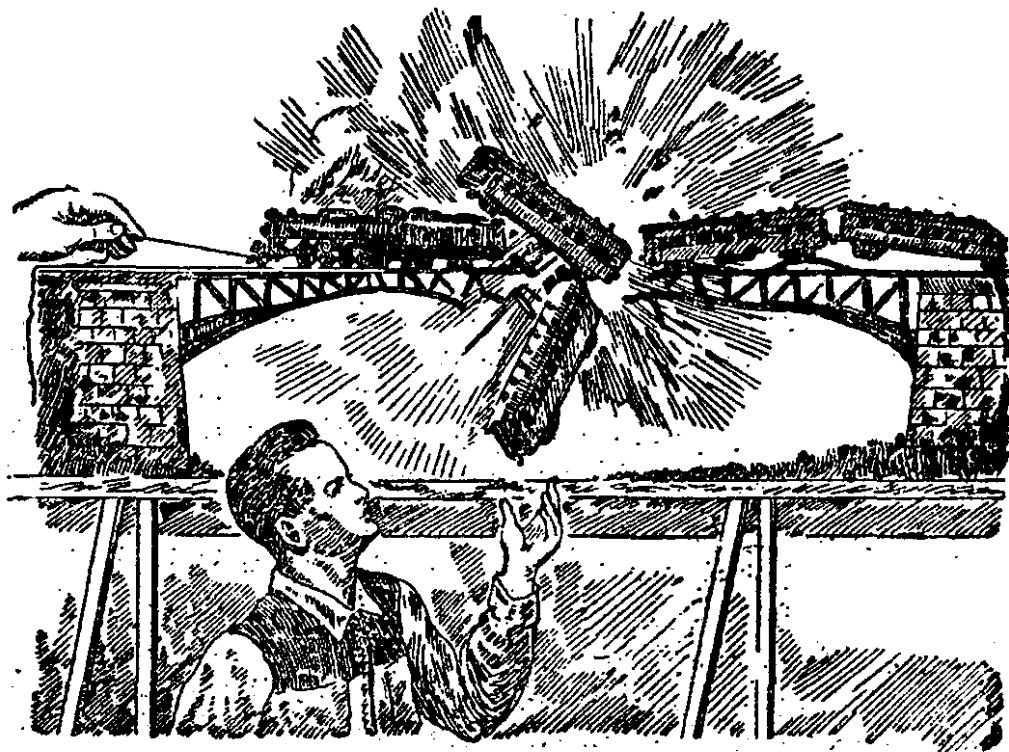
(* بهمین علت است که مثلاً رشتهٔ تابان يك لامپ الکتریکی خیلی کلفتتر

آن تا زمین هم ۴۰۰ برابر فاصله زمین تا ماه است*.

عکاس با احساس

برای اینکه اهمیت مفهوم زاویه دید را روشن کنیم، موقتاً زمینه اصلی بحث خود، یعنی هندسه در فضای آزاد، را کنار می‌گذاریم و به نمونه‌هایی از رشته عکاسی می‌پردازیم. شما مسلماً روی پرده سینما دیده‌اید که فاجعه‌ای، و مثلاً برخورد دو قطار، به وقوع می‌پیوندد، یا صحنه غیرممکنی مثل حرکت اتومبیل از قعر دریا به وجود می‌آید.

فیلم «بچه‌های کاپیتان گرانت» را بخاطر بیاورید. کدام صحنه آن نمی‌توانست واقعی باشد؟ - مثلاً صحنه نابودی کشتی‌هایی که دچار

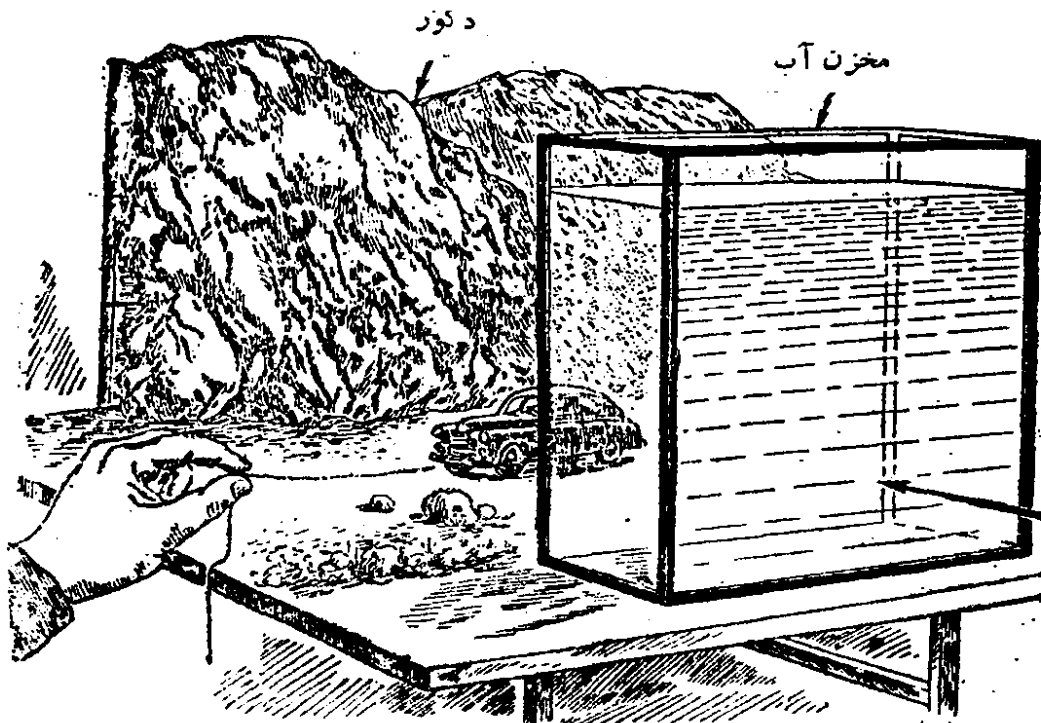


۶۱. آماده کردن فاجعه راه آهن برای فیلمبرداری

(* برای فاصله متوسط زمین تا خورشید، زاویه دید یا قطر ظاهری خورشید تقریباً مساوی ۳۲ دقیقه است.)

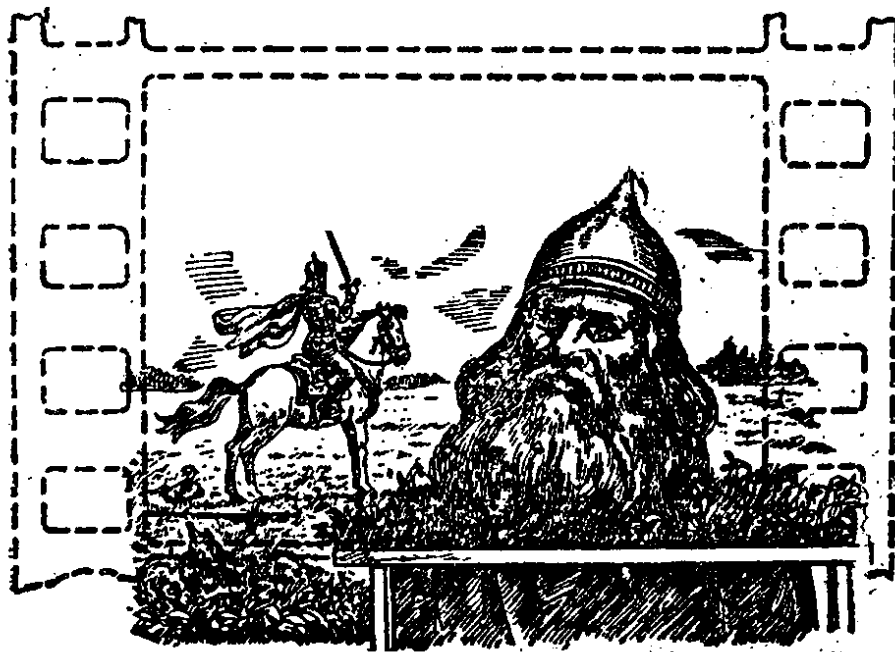
طوفان شده‌اند یا نمایش کرو کودیلها وقتی که پسر بچه‌ای را که در باتلاق فرو می‌رفت، دوره کرده بودند. البته، هیچکس فکر نمی‌کند که این صحنه‌ها از روی حوادثی که واقعاً اتفاق افتاده‌است فیلمبرداری شده باشد. پس با چه روشهایی بدست آمده‌اند؟

این راز را در اینجا برملا می‌کنیم. در شکل ۶۱ «فاجعه» قطار را (که در حقیقت يك اسباب بازی است) می‌بینید و در شکل ۶۲ اتومبیل کوچک اسباب بازی را می‌بینید که به وسیله نخ در عقب يك ظرف آب کشیده می‌شود. این همان چیزی است که در «واقع» اتفاق می‌افتد و به وسیله آن نوار فیلم پر می‌شود. پس چرا با دیدن این عکسها روی پرده سینما، تصور می‌کنیم که در جلو ما قطار و یا اتومبیل واقعی و با اندازه‌های حقیقی قرار گرفته است؟ مگر روی پرده آنها را با اندازه‌های عکسی خود نمی‌بینیم (حتی اگر هم نتوانیم آنها را با اندازه سایر اشیاء مقایسه کنیم)؟ علت ساده است: قطار و یا اتومبیل اسباب بازی را در فاصله خیلی نزدیک قرار می‌دهند؛ به این مناسبت بنظر



۶۲. اتومبیلی که در قعر دریا حرکت می‌کند

تماشاچی با همان زاویه‌ای دیده می‌شود که واگنها و یا اتومبیل حقیقی دیده می‌شود . تمام راز تصویر همین است .



۶۳. عکسی از فیلم « روسلان و لیودمیل »

و اینهم عکسی از فیلم « روسلان و لیودمیل » (شکل ۶۳) .
 سر بزرگ در جلو و روسلان کوچک در گوشه . سر روی زمینه ماکت
 در نزدیکی دوربین فیلمبرداری قرار گرفته است و روسلان در گوشه و
 در فاصله زیاد از دور بین . تمام راز این تخیل همین است .

شکل ۶۴ نمونه دیگری از تخیل است ، که بر همین اساس تهیه
 شده است . شما منظره عجیبی می‌بینید که دورانهای قدیم زمینشناسی
 را بخاطر می‌آورد : درخت عجیب و غریبی که به خزه‌های عظیم -
 الجته‌ای شباهت دارد که روی آن قطرات بزرگ آب وجود دارد ، و
 در جلو نقشه ، غول وحشتناکی دیده می‌شود که شبیه خرخاکیهای بی-
 آزار است . وای این منظره با همه غرابت خود با استفاده از طبیعت
 نقاشی شده است : این منظره چیزی جز یک قطعه زمین کوچک از جنگل
 نیست ، فقط با زاویه دید غیر معمولی رسم شده است . ما هرگز خزه ،



۶۴. منظره اسرارآمیز تقلید از طبیعت

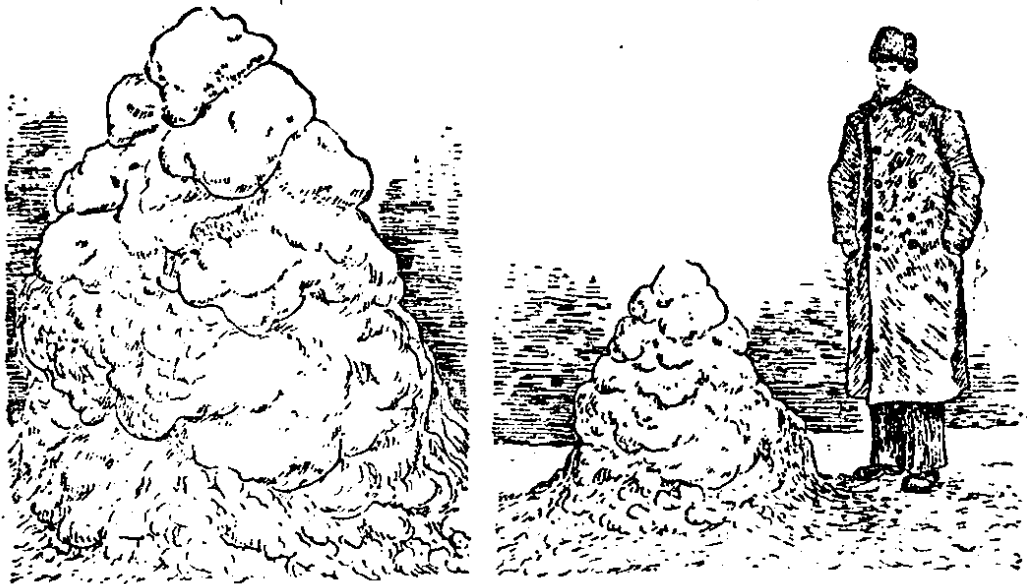
قطره آب و یا خرخاکی را با چنین زاویه دید بزرگی نمی بینیم و همین است که این نقشه غیر آشنا و عجیب بنظر می رسد. اگر ما به اندازه یک مورچه کوچکی می شدیم، این منظره را به همین شکل نقشه می دیدیم .

بعضی از روزنامه ها هم برای فریب دیگران ، عکسهای خبری غیر واقعی خود را به همین شیوه تهیه می کنند . زمانی در یکی از این روزنامه های خارجی مقاله ای ، همراه با سرزنشها

و انتقاداتی نسبت به استقلال ایالتی ، چاپ شده بود که چرا اجازه می دهند در خیابانهای شهر کوههای بزرگی از برف رویهم انباشته شود . برای تایید ادعای خود عکس یکی از این کوهها را هم چاپ کرده بود که اثری بیشتر داشته باشد (شکل ۶۵ - سمت چپ) . ضمن رسیدگی به این مسئله معلوم شد که برای عکس از کوه برفی کوچکی استفاده شده بود (شکل ۶۵ - سمت راست) ، منتهی عکس را از فاصله خیلی نزدیک یعنی با زاویه دید بزرگ برداشته بودند .

در همین روزنامه یکبار دیگر عکسی از شکاف وسیع صخره نزدیک شهر چاپ شده بود که بنا به ادعای روزنامه ، به یک زیرزمین منتهی می شد و عده زیادی از جهانگردان بی احتیاط که جرأت کرده بودند و به این

غار وارد شده بودند ، به زیر زمین سقوط کرده و جان خود را از دست داده بودند . دسته‌های داوطلبی که برای جستجوی این فراموش شده‌ها



۶۵. کوه برف درعکس (سمت چپ) و درطبیعت (سمت راست)

تشکیل شده بود ، بالاخره کشف کردند که غار مورد ادعای روزنامه که در عکس نشان داده شده بود ، شکاف کوچکی است که بزحمت دیده می‌شد ، شکافی با عرض یک سانتیمتر .

زاویه یاب طبیعی

تهیه زاویه یاب با ساختمان ساده خیلی مشکل نیست ، ولی اکثراً در مواقع گردشهای خارج شهر زاویه یاب در اختیارمان نیست . درچنین مواردی می‌توان از «زاویه یاب طبیعی» که همیشه با ما همراه است ، استفاده کرد . این وسیله ، انگشتان دست ماست و برای اینکه بتوانیم از آنها برای تخمین تقریبی زوایای دید استفاده کنیم ، باید قبلاً چند اندازه‌گیری و محاسبه را انجام دهیم .

قبل از همه باید تعیین کنیم که وقتی دست خود را بجلو دراز

می‌کنیم ، ناخن انگشت اشاره را تحت چه زاویه‌ای می‌بینیم . عرض معمولی ناخن يك سانتیمتر و فاصله چشم تا این وضع قریب ۶۰ سانتیمتر است ، بنابراین آنرا تقریباً با زاویه يك درجه می‌بینیم (البته کمی کمتر از يك درجه ، زیرا زاویه يك درجه برای فاصله ۵۷ سانتیمتری بدست می‌آید) . ناخن جوانان کمسال کوچکتر است ، ولی در عوض ، دست آنها هم کوتاهتر است و بنابراین زاویه دید در مورد آنها هم تقریباً همین يك درجه خواهد بود . اگر خواننده در مورد نتیجه‌ای که گرفتیم ، برای ناخن خود باور ندارد ، می‌تواند زاویه دید را اندازه بگیرد و در صورتیکه مقدار این زاویه با يك درجه اختلاف نسبتاً زیادی داشت ، از انگشت دیگری استفاده کند .

با این اطلاع شما می‌توانید با دست خالی زوایای دید کوچک را واقعاً تخمین بزنید . هر جسم دور دستی که به وسیله ناخن انگشت شهادت دست باز شده ما پوشانده شود ، تحت زاویه يك درجه دیده می‌شود و بنابراین به اندازه ۵۷ برابر قطر خود از ما دور است . اگر ناخن انگشت شهادت نصف جسم را پوشاند ، زاویه دید جسم ۲ درجه است و در فاصله ۲۸ برابر قطر خود نسبت به ما ، قرار گرفته است . قرص ماه تنها به وسیله نصف ناخن پوشیده می‌شود ، یعنی زاویه دید آن نیم درجه است و بنابراین تا زمین به اندازه ۱۱۴ برابر قطر خود فاصله دارد ، و این يك اندازه‌گیری نجومی است که با دست خالی انجام گرفته است !

برای زوایای بزرگتر ، از بند بالای انگشت شصت استفاده می‌کنیم . برای شخص بالغ معمولی طول (توجه کنید : طول و نه عرض) این بند شصت قریب ۳۱ سانتیمتر و فاصله آن از چشم . وقتی که دست را بطرف جلو باز کرده باشیم ، ۵۵ سانتیمتر است . به سادگی

می‌توان حساب کرد که مقدار زاویه دید آن در این وضع مساوی ۴ درجه است. به این ترتیب امکان تخمین زوایای دید ۴ درجه (و در نتیجه ۸ درجه) هم برای ما پیدا می‌شود.

از دو زاویه دیگر هم، که بوسیله انگشتان قابل اندازه‌گیری هستند، باید نام برد. این دو زاویه عبارتند از:

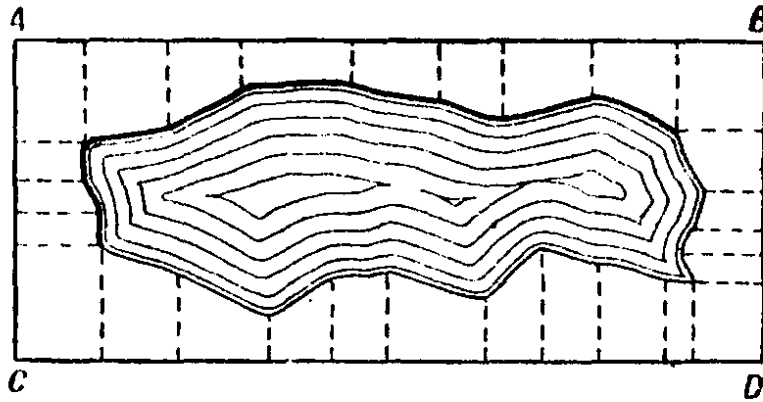
(۱) زاویه دید فاصله بین دو انگشت اشاره و وسطی که تا حد امکان باز شده باشند.

(۲) زاویه دید فاصله بین دو انگشت شصت و اشاره که باز هم کاملاً باز شده باشند. اگر دست را کاملاً به جلو باز کرده باشیم، در حالت اول زاویه دید ۷-۸ درجه و در حالت دوم زاویه دید ۱۵-۱۶ درجه خواهیم داشت.

استفاده از اعضای بدن به عنوان زاویه یاب، به آنچه گفتیم ختم نمی‌شود و در موقع گردشهای دسته جمعی در فضای آزاد می‌تواند به طرق مختلف طرح شود. فرض کنید واگن باری را به بینید که نصف بند بالای انگشت شصت شما را، در حالت دست کشیده، بپوشاند، یعنی تحت زاویه ۲ درجه دیده شود. چون طول واگن باری برای شما معلوم است (قریب ۶ متر)، به سادگی می‌توانید فاصله خود را تا واگن محاسبه کنید: $170 = 6 \times 28$ یعنی قریب ۱۷۰ متر. البته این محاسبه تقریبی است ولی بهر حال از تخمینی که با چشم و بدون محاسبه حدس زده می‌شود، قابل اطمینان‌تر است.

حالا به روش رسم زوایای قائمه در روی زمین، با کمک اعضای بدن، می‌پردازیم.

اگر می‌خواهید از نقطه‌ای بر امتداد مفروضی، عمود رسم کنید، در این نقطه به ایستید بنحوی که صورتتان به طرف امتداد خط مفروض باشد و، بدون اینکه فعلاً سر خود را بچرخانید، دست خود را به همان جهتی



۶۶. شمای دریاچه روی نقشه

که می‌خواهید عمود رسم کنید. به جلو دراز کنید. سپس انگشت شصت همین دست خود را بلند کنید و سر خود را به طرف آن برگردانید و چیزی، مثلاً یک قطعه سنگ یا شاخهٔ چوب و غیره، را روی زمین در نظر بگیرید، طوریکه، وقتی با چشم متناظر همان دست، به شصت خود نگاه می‌کنید، در امتداد انگشت شما باشد (یعنی اگر دست راست خود را باز کرده‌اید با چشم راست نگاه کنید و اگر دست چپ خود را باز کرده‌اید، با چشم چپ نگاه کنید).

حالا باید، روی زمین از نقطه‌ای که ایستاده‌اید تا شیئی که در نظر گرفته‌اید، خط راستی رسم کنید. این خط همان عمود مورد نظر خواهد بود. البته نمی‌توان قول داد که به این وسیله نتیجهٔ کاملاً خوبی بدست آید، ولی با کمی تمرین می‌توان استفاده از این «گونمای طبیعی» را دقیق‌تر کرد.

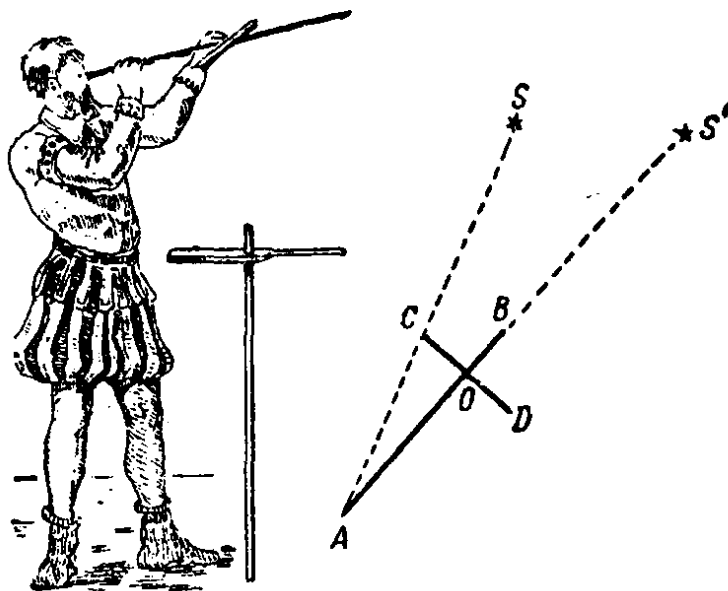
بالاخره با استفاده از «زاویه یاب طبیعی» می‌توان بدون هیچ وسیله‌ای ارتفاع زاویه‌ای اجرام سماوی را نسبت به افق، فاصلهٔ زاویه‌ای دو ستاره، اندازه قابل تشخیص مسیر روشن شهاب و غیره را اندازه گرفت. همچنین با امکان رسم زوایای قائمه در روی زمین، بدون وسیله، می‌توان نقشهٔ قطعات کوچک را، به طریقی که اساس آن در شکل ۶۶ روشن شده

است، تنظیم کرد. مثلا درشمای دریاچه، مستطیل ABCD و سپس طول عمودهایی که از نقاط محیط ساحل رسم شده‌اند و فواصل قاعده آنها تا رئوس مستطیل را اندازه می‌گیریم.

بطور خلاصه، می‌توان خود را در وضع روبنسون قرارداد و تنها با استفاده از دستها، برای اندازه‌گیری زوایا و پاها، برای اندازه‌گیری فواصل، با مهارت تمام از عهده انجام متنوع‌ترین احتیاجات ضروری برآمد.

يك وسیله قدیمی (ژاکوب)

اگر مایل باشید اندازه‌گیری زوایا را دقیق‌تر انجام دهید، می‌توانید وسیله عملی و ساده‌ای، که اغلب مورد استفاده پدران دورما بوده است برای خود تهیه کنید.



۶۷. ژاکوب و طرح استفاده از آن

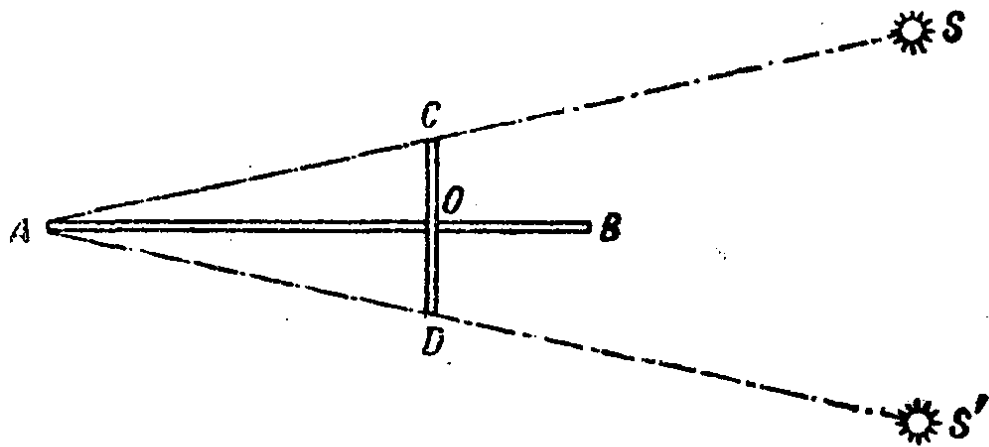
این وسیله به نام «ژاکوب» مکتشف آن مشهور است، قبلا و تا قرن هیجدهم (شکل ۶۷) مورد استعمال وسیعی در دریانوردی داشته

است، ولی بعداً به عنوان زاویه یاب دقیق و راحت جای خود را باز کرد.

این وسیله تشکیل شده است از يك خط کش بزرگ به طول ۷۰ تا ۱۰۰ سانتیمتر که روی آن قطعه قابل لغزش CD، بطور عمودی قرار گرفته است، دو قسمت CO و OD قطعه لغزان، مساوی یکدیگرند. وقتی که بخواهید فاصله زاویه ای بین دو ستاره S و S' را با کمک این وسیله، اندازه بگیرید (شکل ۶۷)، انتهای A از خط کش را جلو چشم قرار می دهید (که برای سهولت کار می توان صفحه سوراخ داری در آنجا تعبیه کرد) و خط کش را در چنان جهتی قرار داد که ستاره S' در انتهای B خط کش دیده شود؛ سپس عمود CD را در امتداد خط کش جلو و عقب می برید تا جایی که بتوان ستاره S را از انتهای C مشاهده کرد (شکل ۶۷). حالا اگر فاصله AO را اندازه بگیرید، با در دست داشتن طول CO می توانید اندازه زاویه SAS' را محاسبه کنید. کسانیکه به مقدمات مثلثات آشنائی دارند، می دانند که تانژانت این زاویه برابر است با نسبت $\frac{CO}{OA}$ ، در فصل پنجم این کتاب از «مثلثات سیار» گفتگو کرده ایم که با توجه به آن کافی است با کمک قضیه فیثاغورث طول AC را محاسبه کنید و سپس با در دست داشتن سینوس زاویه مجهول (نسبت $\frac{CO}{AC}$) اندازه آنرا بدست آورید.

علاوه بر آن شما می توانید مثلث ACO را روی صفحه کاغذ، و با هر مقیاسی که مایلید، رسم کنید و سپس با کمک نقاله، زاویه A را اندازه بگیرید و در صورت نداشتن نقاله از «مثلثات سیار» استفاده کنید (فصل پنجم را به بینید).

به این ترتیب نیمه دوم قطعه عمودی برای چه منظوری لازم است؟ برای حالتی که زاویه مورد نظر به اندازه کافی بزرگ باشد و



۶۸. تعیین فاصله زاویه‌ای بین ستارگان با کمک ژاکوب

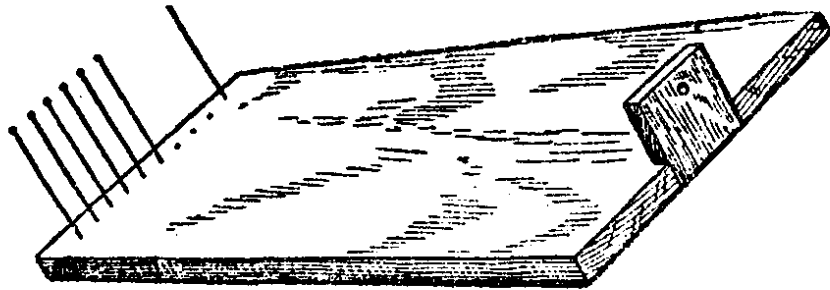
نتوان آنرا به طریقی که ذکر کردیم ، اندازه گرفت . در اینصورت نقطه S' را به وسیله امتداد AD نشانه می‌رویم (و نه امتداد AB) و CD را جلو و عقب می‌بریم تا در همان حال نقطه S هم در امتداد AC دیده شود (شکل ۶۸) . و البته پیدا کردن زاویه SAS' ، چه به وسیله محاسبه و چه به وسیله ساختن زاویه مشکل نیست .

برای اینکه مجبور نباشم در مورد هر اندازه‌گیری ، زاویه مربوطه را محاسبه کنیم و یا در خارج بسازیم ، می‌توان از قبل زوایای مختلف را اندازه گرفت و خط کش AB را درجه بندی کرد ، در اینصورت وقتی که می‌خواهیم فاصله زاویه‌ای دو نقطه را اندازه بگیریم ، کافی است پس از تنظیم وسیله ، مقدار زاویه را در نقطه O بخوانیم .

زاویه‌یاب دندانهای

به سادگی می‌توان نوع دیگری زاویه‌یاب تهیه کرد که آنرا «زاویه‌یاب دندانهای» می‌نامیم و شباهت زیادی به یک شن کش دارد (شکل ۶۹) : این وسیله از تخته‌ای تشکیل شده است (شکل این تخته

مهم نیست) و در یک طرف آن صفحه کوچک سوراخ داری محکم کرده اند که چشم ناظر پشت سوراخ آن قرار می گیرد. در طرف دیگر سنجاقهایی



۶۹. زاویه یاب دندانهای

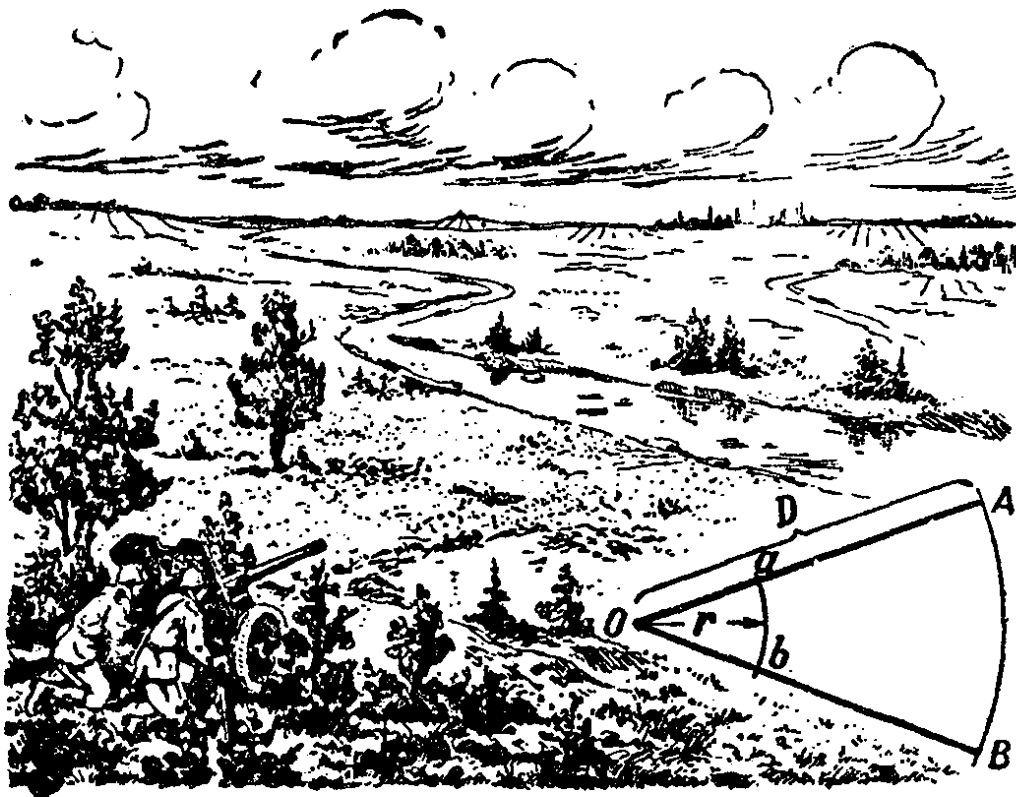
(از آنها که برای جمع آوری حشرات مورد استفاده قرار می گیرد) در کنار هم به تخته فرو شده است، فاصله هر دو سنجاق مجاور باید $\frac{1}{57}$ فاصله سوراخ صفحه طرف مقابل تا سنجاقها باشد*. ما دیگر می دانیم که فاصله هر دو سنجاق متوالی، به زاویه یک درجه دیده می شود. سنجاقها را با روش دیگری هم می توان روی تخته نصب کرد (که نتیجه دقیق تری بدست می دهد): روی دیوار دو خط موازی و به فاصله یک متر از یکدیگر رسم می کنیم و در جهت عمود بر دیوار تا فاصله ۵۷ متری عقب می رویم، از این فاصله از سوراخ صفحه دو خط موازی را در نظر می گیریم و سنجاقها را در طرف دیگر تخته چنان نصب می کنیم که هر یک از آنها یکی از دو خط موازی روی دیوار را بپوشاند.

وقتی که سنجاقها نصب شد، می توان بعضی از آنها را برداشت، تا زوایای ۲ درجه، ۳ درجه، ۵ درجه و غیره بدست آورد. روش استفاده از این زاویه یاب برای خواننده روشن است. با استفاده از این زاویه یاب می توان زاویه دید فواصل را تا دقت $\frac{1}{4}$ درجه اندازه گرفت.

(* به جای سنجاقها می توان از قابی که در داخل آن رشته نخهایی به فواصل مذکور کشیده شده است، استفاده کرد.

زاویه یاب توپچی ها

توپچی به تصادف و « کورمال » تیراندازی نمی کند .
 با اطلاع از ارتفاع هدف ، مقدار زاویه ای آنرا تا افق تعیین و
 فاصله تا آنرا محاسبه می کند ، در حالت دیگر معین می کند که لوله
 توپ را به چه زاویه ای باید بچرخاند تا آتش را از يك هدف به هدف
 دیگر انتقال دهد .



۷۰. شمای زاویه یاب توپچی

يك توپچی مسائلی از این قبیل را به سرعت و در ذهن حل می کند .
 با چه روشی ؟

به شکل ۷۰ توجه کنید . AB قوس دایره ای است به شعاع

$OA = D$ ، ab قوس دایره ای است به شعاع $oa = r$.

از تشابه در قطاع AOB و aob نتیجه می شود .

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r}$$

و یا :

$$AB = \frac{ab}{r} D$$

نسبت $\frac{ab}{r}$ به زاویه دید AOB مربوط است ، با در دست داشتن این نسبت می توان AB را با معلوم بودن D و یا D را با معلوم بودن AB معین کرد .

توپچی ها کار محاسبه را برای خود ساده کرده اند ، به این ترتیب که محیط دایره را ، به جای ۳۶۰ قسمت ، به ۶۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم می کنند ، در این صورت طول هر قسمت تقریباً 0.001 شعاع دایره می شود .

فرص کنید ، مثلاً قوس ab (شکل ۷۰) يك واحد از این تقسیمات باشد ، در این صورت طول تمام دایره $2\pi r \approx 6r$ و طول قوس ab تقریباً برابر $\frac{6r}{6000} = \frac{1}{1000}r$ می شود .

و در نتیجه :

$$AB \approx \frac{0.001r}{r} D = 0.001 D$$

یعنی برای اینکه بدانیم ، فاصله AB ، که متناظر با یکی از تقسیمات زاویه یاب است ، چقدر است ، کافی است که در عدد D ، از سمت راست دو رقم ممیز برنیم .

برای انتقال فرمانها یا نتایج ناظر ، به وسیله تلفن یا رادیوی صحرائی ، تعداد «یکهزارم» را ، مثل شماره تلفن بیان می کنند ، مثلاً : زاویه ۱۰۵

«هزارم» را می‌گویند «يك، صفر، پنج» و می‌نویسند .

۱-۰۵

زاویه ۸ «هزارم» را می‌گویند «صفر، صفر، هشت» و می‌نویسند :

۰-۰۸

حالا دیگر شما می‌توانید مسائل مربوط به توپخانه را به سادگی

حل کنید .

مسئله

يك تانك از توپخانه ضد تانك ، از جهت ارتفاع ، به زاویه ۰-۰۵ دیده می‌شود ، اگر ارتفاع تانك را ۲ متر فرض کنیم ، در چه فاصله‌ای از ضد تانك قرار گرفته است ؟

حل

۵ قسمت زاویه یاب = ۲ متر

۱ قسمت زاویه یاب = $\frac{۲}{۵}$ متر = ۰٫۴ متر

از آنجا که هر قسمت زاویه یاب به اندازه یک هزارم فاصله است ،

داریم :

$$D = ۰٫۴ \times ۱۰۰۰ = ۴۰۰ \text{ (متر)}$$

اگر فرمانده یا مرکز اکتشافی زاویه یاب نداشته باشد، می‌تواند از کف دست ، انگشتان دست و یا وسائل دیگری (که در این کتاب ذکر کرده ایم) استفاده کند . فقط «هدف» را باید با واحد «یک هزارم» (ونه درجه) بدست آورد .

در اینجا نمونه‌ای از «هدف» را با واحد «یک هزارم» برای بعضی

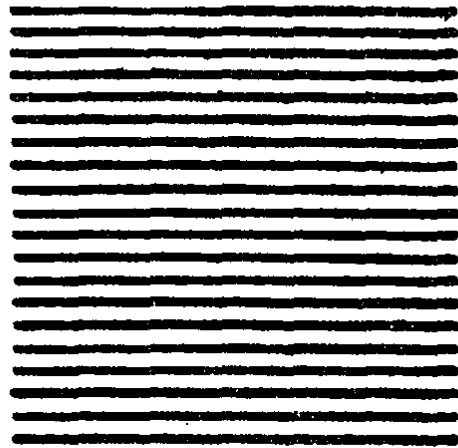
اشیاء آورده ایم :

۱-۲۰	کف دست
۰-۳۰	انگشت میانه یا انگشت اشاره
۰-۱۲	مدادگرد (ضخامت)
۰-۷۵	طول کبریت
۰-۰۳	عرض کبریت

دقت دید

بر اساس مفهوم مقدار زاویه‌ای اشیاء، شما می‌توانید بفهمید که تیز بینی شما چگونه است و حتی بهمین وسیله اندازه‌گیری را انجام دهید.

روی صفحه کاغذ، ۲۰ خط سیاه مساوی به طول چوب کبریت (۵ سانتیمتر) و به عرض یک میلی متر چنان رسم کنید که یک مربع درست کنند (شکل ۷۱). این رسم را روی دیواری که کاملاً روشن باشد محکم کنید و تا آنجا از آن دور شوید که دیگر خطها از هم



۷۱ - برای اندازه‌گیری دقت دید

تمیز داده نشوند و به صورت یک زمینه خاکستری یک پارچه به نظر برسد. این فاصله را اندازه بگیرید. از آنجا می‌توانید زاویه دید خود را که تحت آن باریک‌های به عرض یک میلیمتر را از هم تشخیص می‌دهید، حساب کنید. اگر این زاویه مساوی یک دقیقه باشد، دقت دید شما طبیعی است، اگر این زاویه سه دقیقه باشد، دقت دید شما

$\frac{1}{3}$ طبیعی است و غیره

خطوط شکل ۷۱ برای چشم شما در ۲ متری بهم مخلوط می-
شوند. آیا دقت دید شما طبیعی است؟

حل

می‌دانیم که از فاصله ۵۷ میلیمتری باریکه به عرض یک میلیمتر
تحت زاویه یک درجه یعنی ۶۰ دقیقه دیده می‌شود بنابراین از فاصله
۲۰۰۰ میلیمتری با زاویه x دیده می‌شود که از رابطه زیر به دست
می‌آید:

$$x : 60 = 57 : 2000 :$$

$$x \approx 1.7'$$

دقت دید کمتر از وضع طبیعی و برابر است با

$$1 : 1.7 = 0.6 \text{ (تقریباً)}$$

زاویه حدی

حالا در این باره گفتگو می‌کنیم که اگر نواری با زاویه دید
کمتر از یک دقیقه دیده شود، وضوح و تمایز خود را، از لحاظ چشم
معمولی، از دست می‌دهد، این مطلب در مورد هر شیئی صادق است:
اگر شیئی مورد مشاهده با زاویه‌ای کمتر از یک دقیقه دیده شود، قابل
تشخیص به وسیله چشم معمولی نیست. در این حالت شیئی به نقطه‌ای^۰
تبدیل می‌شود که به زحمت قابل تشخیص است، به ذره‌ای بدون شکل

(* «خیلی کوچک برای دید» (شکسپیر)

و بدون اندازه . و این خاصیت چشم طبیعی انسان است : يك دقیقه زاویه ای ، حد متوسط دقت آنست . تحقیق در علت این امر به فیزیک و زیست‌شناسی مربوط می‌شود و ما در اینجا تنها جنبه هندسی آنرا مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

این زاویه حدی ، هم برای اجسام بزرگی که در فاصله خیلی دور باشند و هم در فواصل نزدیک برای اجسام خرد بيك اندازه صادق است . ما با چشم غیر مسلح نمی‌توانیم شکل گرد و غباری را که در هوا وجود دارد ، تشخیص بدهیم : در روشنائی اشعه خورشید ، همه به صورت نقاط كوچك هم شکل به نظر می‌آیند ، در حالیکه در واقع امر به اشکال بکلی مختلفی هستند . ما جزئیات بدن يك حشره را نمی‌توانیم از یکدیگر تمیز بدهیم ، زیرا آنها را با زاویه ای کوچکتر از يك دقیقه می‌بینیم . باز هم بهمین علت است که بدون تلسکوپ نمی‌توانیم قسمت های مختلف سطح ماه ، سیارات و سایر اجرام سماوی را به بینیم .

اگر حد دید طبیعی دورتر می‌رفت ، ما جهان دور و بر خود را به وضع دیگری می‌دیدیم . کسی که ، بجای يك دقیقه ، دارای حد دیدی مثلا ، $\frac{1}{4}$ دقیقه باشد ، اطراف خود را خیلی عمیق‌تر و دورتر از ما می‌بیند . چخوف در داستان « استپ » مزیت این تیزبینی را به نحو بسیار جالبی بیان می‌کند :

« قدرت دید او (واسیا) ، بطور حیرت‌انگیزی زیاد بود . او بخوبی می‌دید که دشت خالی قهوه‌ای رنگ ، برای او پر از زندگی و مضمون است . کافی بود که سر پا بایستد و به اطراف دور دست نگاه کند تا روباه ، خرگوش ، پرنده یا سایر حیواناتی را که دور از چشم آدمی آزادانه رفت و آمد می‌کردند ، به بیند . هر کسی که از استپ عبور کند ، می‌تواند به سادگی خرگوشی را که فرار می‌کند یا پرنده‌ای

را که پرواز می کند به بیند ، ولی هر کسی قدرت این را ندارد که حیوانات غیر اهلی را در لانه خودشان ، وقتی که فرار نمی کنند ، خود را پنهان نمی سازند و یا وحشت زده و نگران به اطراف خود نمی نگرند ، به بیند . در حالیکه واسیا می توانست روباهی که به جست و خیز مشغول است یا خرگوشی که با دست ، روی خود را می شوید ، و پرنده ای که بالهای خور را باز کرده است ، به بیند . به همین مناسبت علاوه بر دنیائی که برای همه وجود دارد ، برای واسیا ، دنیای دیگری هم وجود داشت ، دنیائی که کسی را به آن دسترسی نبود . این دنیائی بسیار زیبا و شگفت انگیز بود و وقتی که او به اطراف خود نگاه می کرد و مفتون زیبائی های پنهان طبیعت می شد . به سختی می شد ، به او غبطه نخورد .

به سختی می توان فکر کرد که برای يك چنین تحول شگفت انگیز ،

تنها کافی است که حد دید آدمی از يك دقیقه به $\frac{1}{4}$ دقیقه یا نزدیک به آن تبدیل شود

رمز عمل جادوئی میکروسکوپها و تلسکوپها هم در همین است . کار اینگونه وسائل اینست که مسیر اشعه نوری که از شیئی منتشر می شود ، تغییر می دهند ، بطوریکه با زاویه بزرگتری به چشم برسند و در نتیجه شیئی مورد نظر با زاویه دید بزرگتر در مقابل چشم ما قرار گیرد . وقتی که می گویند میکروسکوپ یا تلسکوپ ۱۰۰ بار بزرگتر نشان می دهد ، به این معنی است که به کمک آنها اشیاء را با زاویه ای که ۱۰۰ بار بزرگتر از زاویه دید آنها با چشم غیر مسلح است ، می بینیم . در اینصورت جزئیاتی که از چشم عادی در حد دید معمولی پنهان است ، در مقابل چشم ما نمایان می شود . ما قرص ماه را تحت زاویه ۳۰ دقیقه می بینیم ، اگر قطر ماه بتقریب ۳۵۰۰ کیلومتر باشد ، هر قطعه ای از ماه که قطری مساوی $\frac{۳۵۰۰}{۳۰}$ ، یعنی قریب ۱۲۰ کیلومتر ، داشته باشد ، برای

چشم غیر مسلح به سختی قابل تشخیص است . در دوربینی هم ، که ۱۰۰ بار بزرگ می کند ، قطعاتی به قطر $\frac{120}{100} = 1/2$ کیلومتر و در تلسکوپی که ۱۰۰۰ بار بزرگ می کند ، قطعات به عرض ۱۲۰ متر قابل تشخیص نیست . از اینجا به این نتیجه می رسیم که اگر مثلاً در کره ماه ساختمانهایی ، از قبیل کارخانه های بزرگ و یا کشتیهای اقیانوس پیما وجود داشت ، به کمک تلسکوپهای امروزی قابل تشخیص بود .^۵

قانون زاویه حدی ، از لحاظ مشاهدات معمولی روزانه ما هم اهمیت زیادی دارد . به دلیل این خصوصیت دید ما ، تشخیص شکل واقعی هر جسمی که در فاصله ۳۴۰۰ (یعنی 60×57) برابر قطر خود ، نسبت به ما قرار گرفته باشد ، ممکن نیست ، زیرا به يك نقطه تبدیل می شود . بنابراین اگر کسی ادعا کند که با چشم خود قیافه کسی را که در چهار کیلومتری او بوده ، شناخته است ، مطمئناً دروغ می گوید مگر اینکه قدرت دید خارق العاده ای داشته باشد ، زیرا فاصله بین دو چشم ۳ سانتیمتر است و بنابراین در فاصله 3×3400 سانتیمتری (یعنی ۱۰۰ متری) تبدیل به يك نقطه می شود . توپچی ها از همین مطلب برای تخمین فاصله استفاده می کنند . طبق قانون آنها ، اگر چشمهای یکنفر را به صورت دو نقطه جداگانه ببینند ، فاصله او را کمتر از ۱۰۰ قدم (یعنی ۶۰ - ۷۰ متر) می دانند . برای ما فاصله بزرگتری بدست بدست می آید : ۱۰۰ متر : و این نشان می دهد که در حالت عمومی قدرت دید را کمی پائین تر (تا ۳۰٪) در نظر می گیرند .

(* به شرط یکنواخت بودن و شفاف بودن جو زمین . در حقیقت جو زمین نه یکنواخت است و نه کاملاً شفاف و به همین مناسبت وقتی که شیئی خیلی بزرگ شود ، تصویری در هم و تحریف شده بدست می دهد . در نتیجه برای بزرگ کردن تا حدی می توان جلو رفت و علاوه بر آن منجمین را مجبور می کند که رصدخانه های خود را در فضای روشن ارتفاعات کوههای بلند بنا کنند .

آیا شخصی که قدرت دید طبیعی دارد، می تواند با کمک دوربین خود، که سه مرتبه بزرگ می کند، سواری را از فاصله ۱۰ کیلومتری تشخیص دهد؟

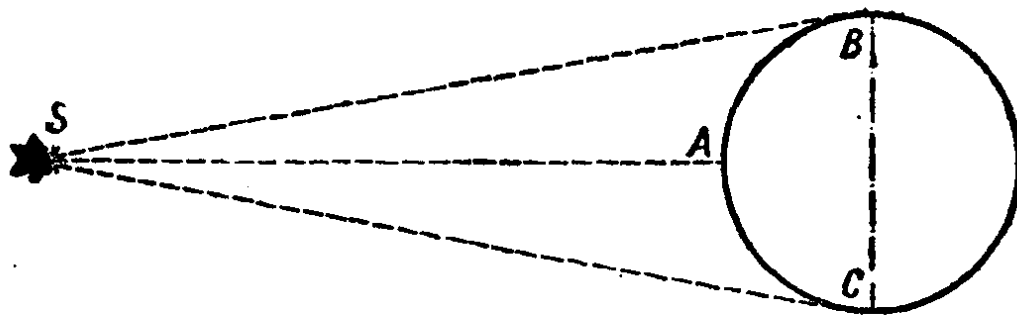
حل

ارتفاع سوار $2/2$ متر است. قیافه او برای چشم ساده در فاصله $2/2 \times 3400 \# 7$ کیلومتر بیک نقطه تبدیل می شود. با دوربین، این فاصله به ۲۱ کیلومتری می رود و بنابراین در ۱۰ کیلومتری به کمک این دوربین کاملاً قابل تشخیص است (به شرطی که هوا کاملاً شفاف باشد).

ماه و ستارگان در نزدیکی افق

هر ناظر بدون دقتی می داند که قرص ماه، وقتی که به افق نزدیک است، بطور محسوس، از وقتی که در وسط آسمان است، بزرگتر دیده می شود. اختلاف بقدری زیاد است که به سختی می توان به آن توجه نکرد. همین مطلب برای خورشید هم صحیح است: معلوم است که خورشید، وقتی که در حال غروب و یا طلوع است با اندازه های بزرگتری بنظر می رسد تا وقتی که در وسط آسمان است و مثلاً از وسط ابرها می گذرد (نگاه مستقیم به خورشید در آسمان بدون ابر برای چشم مضر است).

این خصوصیت برای ستارگان بنحو دیگری ظاهر می شود: وقتی که به افق نزدیک می شوند فاصله بین آنها زیادتر می شود. هر کسی



۷۲. چرا وقتی که خورشید به افق نزدیک است ، بنظر ناظر در فاصله بیشتری است تا وقتی که در وسط آسمان است؟

که در زمستان صورت فلکی جبار (یا در تابستان - صورت فلکی دجاجة) را در بالای آسمان و در نزدیک افق نگاه کند ، نمی تواند از اختلاف عظیم اندازه های آن در دو وضع مختلف ، دچار تعجب نشود .

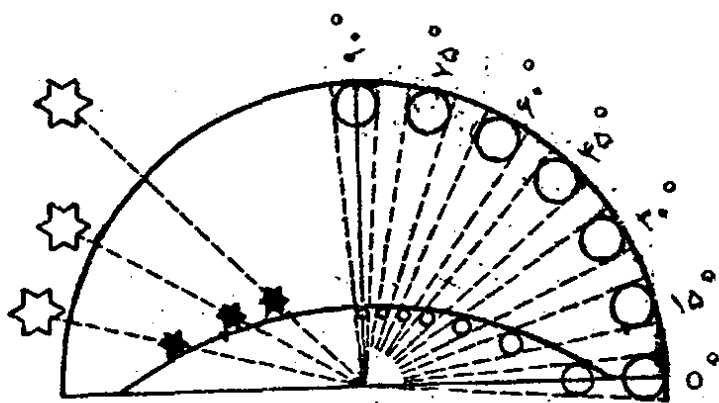
و همه این مطالب اسرار آمیزتر می شود ، وقتی که بدانیم ، جرم سماوی هنگامی که در طلوع و یا غروب خود هست ، نه تنها به ما نزدیک تر نیست ، بلکه دورتر از ما (به اندازه شعاع کره زمین) قرار گرفته است . این مطلب با توجه به شکل ۷۲ بخوبی روشن می شود: وقتی که جرم سماوی در سمت الرأس (اوج) قرار دارد ، از نقطه A دیده می شود ، و وقتی که در افق باشد ، از B یا C . پس چرا ماه ، خورشید و صور فلکی در افق بزرگتر بنظر می آیند ؟

می توان جواب داد : « این مطلب درست نیست » . این يك خطای دید است . به كمك زاویه یاب دندانهای و یا زاویه یاب دیگری ، می توان به سادگی متوجه شد که قرص ماه در هر دو حالت با يك زاویه ° ، دیده می شود ، با زاویه نیم درجه . با استفاده از زاویه یاب دندانهای و

(* اندازه گیری باوسائل دقیق تر ، نشان می دهد که قطر ظاهری ماه ، وقتی که ماه به افق نزدیک است ، حتی کوچکتر می شود و این بدان مناسبت است که انکسار نور ، قرص ماه را کمی پهن تر می کند .

یا «ژاکوب» می‌توان اطمینان حاصل کرد که فاصله زاویه‌ای بین ستارگان هم تغییر نمی‌کند و بستگی به جای صورت فلکی (در سمت الرأس باشد یا در افق) ندارد. بنابراین تغییر ظاهری که در این مورد پیدا می‌شود، مربوط به خطای دید است که بدون استثنا برای همه پیش می‌آید.

به چه ترتیبی می‌توان خطائی به این اندازه بزرگ و همگانی را توجیه کرد؟ تا آنجا که ما میدانیم، هنوز علم جواب قانع‌کننده‌ای به این سؤال نداده است، اگرچه از زمان بطلمیوس، یعنی قریب ۲۰۰۰ سال است که برای حل آن کوشش می‌شود. تصور باطلی که در این زمینه بوجود می‌آید مربوط به اینست که طاق آسمان بنظر ما به صورت



نیمکره کامل به مفهوم هندسی خود نیست، بلکه قطعه‌ای از کره است که ارتفاع آن دو تا سه مرتبه از شعاع قاعده‌اش

کوچکتر است. و این ۷۳. اثر کشیده بودن طاق آسمان در اندازه ستارگان بمناسبت آنست که برای

وضع عادی سر و چشم، فواصلی در جهت افقی و یا نزدیک به آن، در مقایسه با فواصل عمودی راحت‌تر تخمین زده می‌شود: در جهت افقی، اشیاء را با «نگاه مستقیم» می‌بینیم، در حالیکه در موارد دیگر باید چشمها را بطرف بالا و یا بطرف پائین برگرداند. اگر وقتی که به پشت دراز کشیده‌ایم، ماه را نگاه کنیم، وقتی که در اوج (سمت الرأس) باشد،

بزرگتر از وقتی که نزدیک افق است، بنظر می آید^۵. این مسئله در مقابل روانشناسان و زیست شناسان وجود دارد که چرا اندازه ظاهری اشیاء به وضع و جهت چشمهای ما قرار دارد .

اما ، اینکه کشیده بودن طاق آسمان ، چه ارتباطی با اندازه ستارگان در مواضع مختلف آن دارد ، از طرحتی که در شکل ۷۳ داده ایم ، کاملاً روشن می شود . قرص ماه ، همیشه در طاق آسمان با زاویه نیم درجه دیده می شود ، چه در افق (یعنی در ارتفاع صفر درجه) باشد و چه در اوج (یعنی ارتفاع ۹۰ درجه) . ولی چشم ما همیشه ما را در یک فاصله احساس نمی کند : وقتی که ماه در اوج است ، خیلی نزدیکتر بنظر می رسد تا وقتی که در افق قرار گرفته باشد و بهمین مناسبت اندازه آن یکنواخت نیست : اگر دایره ای داخل یک زاویه باشد ، هرچه به رأس نزدیکتر باشد ؛ کوچکتر است . در قسمت چپ این تصویر نشان داده شده است که چرا باین مناسبت ، فاصله بین ستارگان ، وقتی که به افق نزدیک می شوند ، بیشتر می شود : فاصله زاویه ای بین آنها غیر یکنواخت بنظر می رسد .

در اینجا جنبه دیگری هم برای بررسی وجود دارد . وقتی که قرص بزرگ شده ماه را نزدیک افق می بینید . آیا می توانید ، ولویک

(* تعبیری که برای این پدیده در اینجا ذکر شده است ، به وسیله مدیر تصحیح کتاب و از چاپ هفتم کتاب به بعد آمده است) این ترجمه از روی چاپ دهم کتاب است . در چاپهای قبلی ، پرلمان توضیح این پدیده را به این ترتیب داده بود که دلیل بزرگتر بودن ماه در نزدیکی افق آنست که در اینحالت ما آنرا در کنار چیزهایی می بینیم که خیلی دور از ما هستند ، در حالیکه در وسط آسمان خالی ، آنرا تنهایی بینیم . ولی وقتی که ماه در افق دریا (جایی که آشیائی وجود ندارد) دیده می شود ، باز هم همین تصور نادرست بما دست می دهد و بنا بر این توضیح مزبور نمی تواند قانع کننده باشد .

خط یا طرح جدید، علاوه بر آنچه که موقع اوج قرص ماه دیده می شود به بینید؟ نه! ولی مگر در مقابل شما قرص بزرگتری قرار نگرفته است، پس چرا جزئیات جدیدی دیده نمی شود؟ برای اینکه، در اینجا بزرگ شدن قرص ماه از نوع بزرگ شدن با دور بین نیست: اینجا زاویه دید بزرگ نمی شود و فقط با بزرگتر شدن این زاویه است که ما می توانیم جزئیات جدیدی را تشخیص بدهیم، هر نوع «بزرگتر شدن» دیگر تنهایی خطای ساده دید است و نمی تواند هیچگونه مورد استفاده ای داشته باشد.^۵

سایه ماه و سایه بالون

تا اندازه ای غیر مترقبه است، اگر بخواهیم زاویه دید را برای محاسبه طول سایه ای که از یک جسم در فضا افتاده است مورد استفاده قرار دهیم. مثلاً سایه ماه در فضای کیهانی به شکل مخروطی است که همیشه ماه را همراهی می کند.

طول سایه ماه چقدر امتداد دارد؟

برای اینکه طول سایه ماه را بتقریب محاسبه کنیم، لزومی ندارد از مثلثهای متشابه و نسبتهای مساوی استفاده کنیم (که در آن به اندازه های قطر خورشید و ماه و فاصله بین خورشید تا ماه احتیاج است). محاسبه را می توان با روشی کاملاً ساده انجام داد. فرض کنید چشم شما در انتهای مخروط سایه ماه یعنی در رأس این مخروط، قرار گرفته باشد و از آنجا به ماه نگاه کنید. چه چیزی خواهید دید؟ دایره سیاه ماه که روی خورشید را پوشانده است. ضمناً زاویه دید که تحت آن قرص

(* مطالبی از این قبیل را می توانید در کتاب «سرگرمیهای فیزیک» ،

که از همین مؤلف است، به بینید.

ماه (یا خورشید) دیده می‌شود، در اینحالت مساوی نیم‌درجه است. ولی ما میدانیم که اگر جسمی با زاویه نیم‌درجه دیده شود به اندازه $114 = 2 \times 57$ برابر قطر خود از ناظر دور است. یعنی رأس مخروط سایه ماه ۱۱۴ برابر قطر ماه از آن دور است. از آنجا طول سایه ماه چنین است:

$$(کیلومتر) \quad 3500 \times 114 \approx 400000$$

یعنی طول سایه ماه بزرگتر از فاصله متوسط زمین تا ماه است؛ بهمین مناسبت است که کسوف کامل می‌تواند اتفاق بیفتد (برای نقطه‌ای از سطح زمین که در این سایه غرق شده است). از آنجا نتیجه می‌شود، محاسبه‌ای که هم اکنون انجام دادیم متناقض با واقعیت نیست.

وقتی که از زمین، ماه و خورشید را تحت یک زاویه نیم‌درجه می‌بینیم، رأس مخروط سایه ماه روی سطح زمین است؛ در اینصورت طولی را که برای سایه ماه محاسبه کردیم، بتقریب برابر با فاصله زمین تا ماه در آن لحظه است.

به سادگی می‌توان طول سایه زمین را هم محاسبه کرد، بشرطی که توجه کنیم که زاویه رأس این مخروط هم مساوی نیم‌درجه است؛ چون قطر زمین تقریباً چهار برابر قطر ماه است، طول سایه زمین هم چهار برابر طول سایه ماه می‌شود.

با همین روش می‌توان طول تقریبی سایه اشیاء کوچکتر را هم در فضا محاسبه کرد. مثلاً به بینیم ارتفاع سایه مخروطی شکلی که یک بالن در فضا به وجود می‌آورد چقدر است (وقتی که بالن به صورت کره باشد). چون قطر کره بالن مساوی ۳۶ متر است، طول سایه آن چنین می‌شود (در اینجا هم زاویه رأس مخروط سایه را نیم‌درجه گرفته‌ایم):

(متر) $۳۶ \times ۱۱۴ \neq ۴۱۰۰$

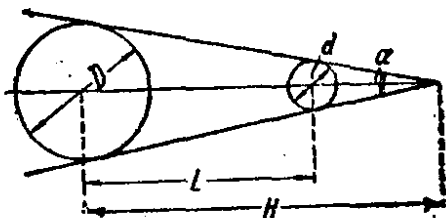
و یا قریب ۴ کیلو متر

در تمام این موارد صحبت بر سر سایه کامل است، نه نیم سایه^۵.

فاصله ابر تا زمین

مسلماً وقتی برای اولین بار در عمق آسمان روشن، نوار طولانی و پرپیچ و خم سفید رنگ را دیده‌اید دچار تعجب شده‌اید. ولی حالا دیگر، بدون تردید، می‌دانید که این نوار ابری «دستخطی» از هواپیماست که در مسیر خود در فضا «به یادگار» گذاشته است. در هوایی که به اندازه کافی برودت، رطوبت و تراکم وجود

(* برای زاویه کوچک α (که در اینجا مورد مطالعه است)، یعنی زاویه



رأس سایه مخروطی شکل اجسام در فضا مقدار تقریبی را تحقیق می‌کنیم: زاویه α بر حسب رادیان برابر است با $\frac{D-d}{L}$ ، که در آن D قطر خورشید، d قطر جسم و L فاصله بین خورشید تا جسم است (شکل را به بینید).

وقتی که d نسبت به D خیلی کوچک باشد، جسم به رأس مخروط نزدیک است و اختلاف L با H ، ارتفاع مخروط کامل، خیلی کم می‌شود. اگر از d صرف نظر و L را به H تبدیل کنیم، می‌شود:

$$\alpha \neq \frac{D}{H}$$

اگر فرض کنیم که رأس مخروط سایه روی سطح زمین باشد:

$$D \neq ۱/۴ \times ۱۰^۶ \text{ و } H \neq ۱۵۰ \times ۱۰^۶$$

و از آنجا: (درجه) $\neq ۳۰$ (رادیان) $\neq ۰/۰۰۹$ α می‌شود

(یادداشت هیئت تحریریه)

داشته باشد ، به سادگی مه به وجود می آید .
 وقتی که هواپیما پرواز می کند ، بطور مداوم ذرات کوچکی ،
 که موتور هواپیما تولید می کند ، از خود بیرون می ریزد . همین ذرات
 نقاطی را به وجود می آورند که در اطراف آنها تکائف بخار آب بالا
 می رود و باعث تشکیل ابر می شود .
 اگر ارتفاع این ابر را ، قبل از آنکه از بین برود ، معین کنیم ،
 می توان مثلا فهمید که خلبان شجاع در هواپیمای خود تا چه ارتفاعی بالا
 رفته است ؟

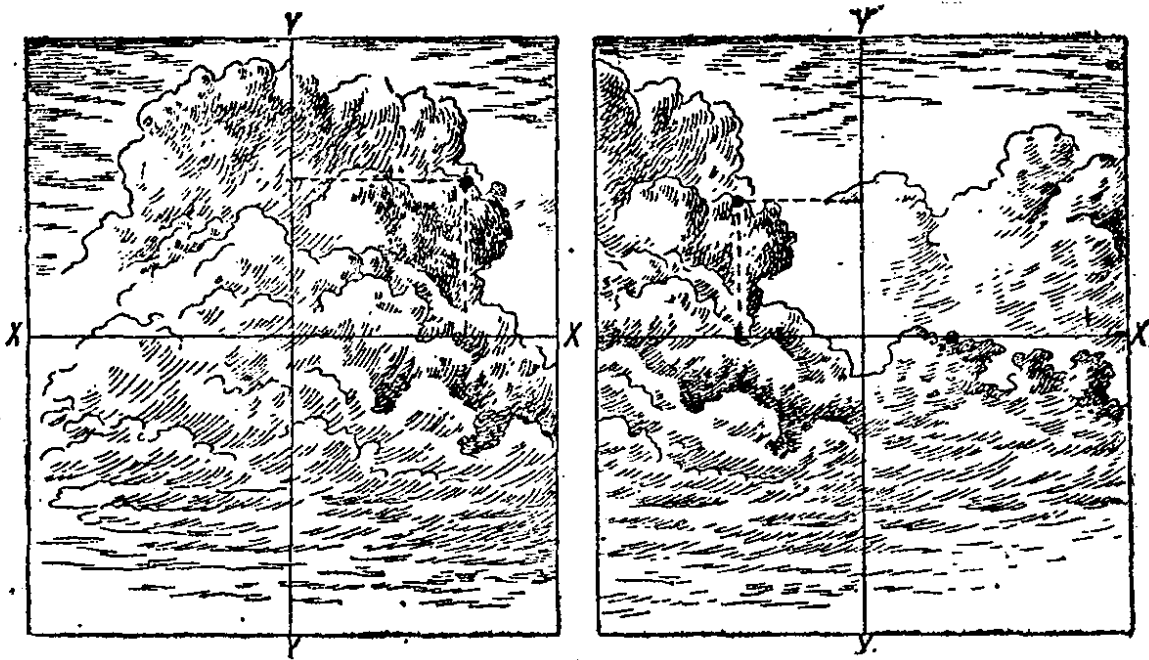
مسئله

ارتفاع ابر را چگونه می توان معین کرده ، حتی وقتی که بالای
 سر ما قرار نگرفته باشد ؟

حل

برای تعیین ارتفاعات بلند باید دوربین عکاسی را به کمک گرفت
 که البته تا اندازه ای مشکل است . ولی در دوران ما ، هم کاملا عمومی
 شده و هم مورد علاقه فراوان جوانان است .
 برای این منظور به دو دوربین ، با فواصل کانونی مساوی ،
 احتیاج دارید (فاصله کانونی را معمولا روی دوربین نوشته اند) .
 دوربینها را باید در ارتفاعات کم و بیش مختلفی نسبت بهم مستقر
 کرد .

برای این منظور در دشت از سه پایه و در شهر از بلندیهای پشت
 بام می توان استفاده کرد . فاصله بین بلندیها را باید چنان انتخاب کرد



۷۴. طرحی از دو عکس ابر

که هر ناظر بتواند دیگری را مستقیماً و یا با دوربین به بیند. این فاصله را می‌توان اندازه گرفت و یا از روی نقشه محل تعیین کرد. دوربینها را باید طوری قرار داد که محورهای بصری آنها موازی باشد. می‌توان، مثلاً آنها را بطرف سمت الرأس میزان کرد.

وقتی که ابر مورد نظر در منطقه دید دوربین قرار گرفت، یکی از دو ناظر علامتی به دیگری می‌دهد (مثلاً با حرکت پرچم) و با این علامت هر دو در يك لحظه عکس را می‌گیرند.

روی عکسهائی که بدین ترتیب بدست می‌آیند، و باید با اندازه های مساوی چاپ شده باشند، خطوط راست XX و YY را رسم می‌کنیم بطوریکه اوساط کناره‌های متقابل را در عکس بهم وصل کرده باشند (شکل ۷۴).

سپس نقطه مشخصی از ابر را در هر يك از عکسها نشانه می‌گذاریم و فاصله آنها را تا دو خط XX و YY بدست می‌آوریم. این

فواصل را با حروف x_1 و y_1 ، برای یکی از عکسها ، و x_2 و y_2 ، برای عکس دیگر ، نشان می‌دهیم . (فاصله x_i تا YY و y_i فاصله تا XX) .

اگر نقاط نشان گذاشته شده در روی عکسها ، در دو طرف خط YY واقع باشند (مثل شکل ۷۴) ، ارتفاع H ابر از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$H = \frac{F}{x_1 + x_2} b;$$

که در آن b عبارتست از فاصله دو دوربین و F فاصله کانونی هر یک از دوربینهاست .

و اگر نقاط مفروض در یک طرف خط راست YY واقع باشند ، ارتفاع ابر از این رابطه بدست می‌آید :

$$H = \frac{F}{x_1 - x_2} b.$$

y_1 و y_2 برای محاسبه ارتفاع ابر بکار نمی‌آید ، ولی از مقایسه آنها می‌توان صحت طرح را تحقیق کرد . در عمل این دو عدد تقریباً مساوی‌اند .

مثلاً فرض کنید ، فواصل نقاط تعیین شده از YY و XX روی صفحات عکس چنین باشند :

$$x_1 = ۳۲ \text{ میلیمتر} , \quad y_1 = ۲۹ \text{ میلیمتر} .$$

$$x_2 = ۲۳ \text{ میلیمتر} , \quad y_2 = ۲۵ \text{ میلیمتر} .$$

و فاصله کانونی $F = ۱۳۵$ میلیمتر و فاصله بین دو دوربین $b = ۹۳۷$ متر

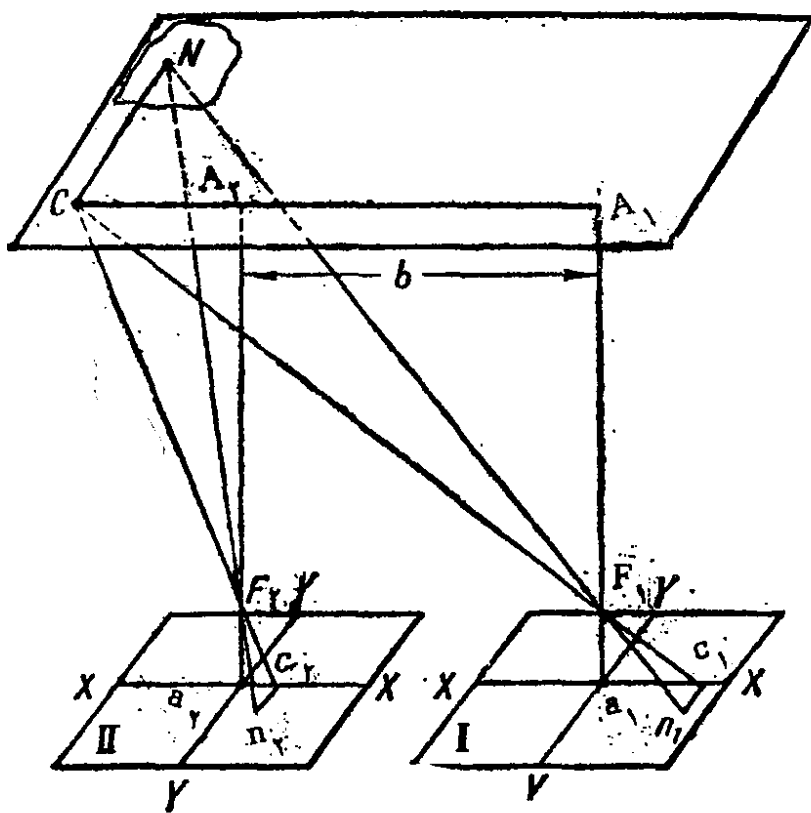
باشد.

عکسبرداری نشان می‌دهد که برای ارتفاع ابر باید رابطه زیر را بکار برد:

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 + x_2};$$

و یا:

$$H = 937 \times \frac{135}{32 + 23} \approx 2300 \text{ متر}$$



۷۵. طرح تصویر نقاط ابر روی صفحه‌های دو عکس، که در جهت سمت‌الراس برداشته شده‌اند.

(* برای شرح بیشتر، در این زمینه می‌توان به کتاب «کاربرد آنالیز ریاضی در حل مسائل عملی» تألیف ن. اف. پلاتونوف مراجعه کرد. پلاتونوف در بخش «ارتفاع ابرها» روابطی برای محاسبه H نتیجه می‌گیرد و با عکسبرداری به انواع مختلف، از ابرها، امکانات دیگری را از نظر محاسبه مطرح می‌کند و یک سلسله نتایج عملی بدست می‌آورد.

یعنی ابری که عکسبرداری شده است، در ارتفاع تقریباً $\frac{2}{3}$ کیلومتری از زمین قرار گرفته است.

اگر بخواهیم، می توان رابطه ای را که برای پیدا کردن ارتفاع ابر بکار بردیم، از طرح شکل ۷۵ بدست آورد.

شکل ۷۵ را باید بطور فضائی در نظر گرفت (تصور فضائی اشکال با مطالعه بخشی از هندسه، که به هندسه فضائی مشهور است، بدست می آید).

I و II معرف شیشه های عکاسی؛ F_1 و F_2 مراکز نوری مربوط به دستگاه عدسیهای شیئی؛ N نقطه مورد نظر ابر؛ n_1 و n_2 تصاویر نقطه N روی شیشه های عکاسی؛ $a_1 A_1$ و $a_2 A_2$ عمودهایی که از وسط هر یک از شیشه های عکاسی بر امتداد سطح ابر فرود آمده اند و بالاخره $A_1 A_2 = a_1 a_2 = b$ اندازه قاعده (فاصله دو دوربین) است.

اگر از مرکز نوری F_1 به طرف بالا، تا نقطه A_1 حرکت کنیم سپس از نقطه A_1 در امتداد قاعده تا نقطه C (که رأس زاویه قائمه $A_1 C N$ است) و بالاخره از نقطه C تا نقطه N حرکت کنیم، پاره خطهای $F_1 A_1$ ، $A_1 C$ و $C N$ در دوربین با پاره خطهای $F_2 a_1 = F_2$ (فاصله کانونی)، $a_1 c_1 = x_1$ و $c_1 n_1 = y_1$ متناسبند.

و بهمین ترتیب در مورد دوربین دوم.
از تشابه مثلثها نتیجه می شود:

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_1 F_1}{F_1} = \frac{C_1 F_1}{F_1 c_1} = \frac{C N}{y_1};$$

و همچنین:

$$\frac{A_2 C}{x_2} = \frac{A_2 F_2}{F_2} = \frac{C F_2}{F_2 c_2} = \frac{C N}{y_2}.$$

از مقایسه این نسبتها و با در نظر گرفتن تساوی واضح $A_2 F_2 = A_1 F_1$

اولاً بدست می‌آید $y_1 = y_2$ (نشانه صحت عکس برداری) و ثانیاً :

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_2 C}{x_2};$$

و از آنجا :

$$A_1 C = b \cdot \frac{x_1}{x_1 - x_2};$$

و بالاخره :

$$A_1 F_1 = b \cdot \frac{F}{x_1 - x_2} \neq H.$$

در حالتی که n_1 و n_2 (تصاویر نقطه N بر صفحه عکاسی) در دو طرف مختلف نسبت به YY باشند ، نقطه C بین نقاط A_1 و A_2 قرار می‌گیرد و $A_2 C = b - A_1 C$ می‌شود و در اینصورت داریم :

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 + x_2}.$$

این روابط تنها مربوط به موقعی است که امتداد محورهای نوری در جهت سمت الرأس باشند . اگر ابر دور از سمت الرأس باشد و در دید کامل دور بین قرار نگیرد ، می‌توانید دور بین را در وضع دیگری قرار دهید (با حفظ توازی محورهای نوری) و مثلاً در وضع افقی که ضمناً عمود بر قاعده و یا در امتداد آن واقع باشند .

برای هر وضع استقرار دور بینها ، باید شکل مربوط را رسم کنید و روابط مورد نظر را برای محاسبه ارتفاع ابر ، از آن نتیجه بگیرید .

در روز روشن ، در آسمان ابرهای نمایان و پرمانندی که در طبقات بالا قرار دارند به چشم می‌خورد . ارتفاع ابرها را دو- سه مرتبه در فاصله زمانهای کوتاه معین کنید . اگر معلوم شود که ابرها پائین

می آیند ، به معنای آنست که هوا بدتر می شود و بعد از چند ساعت باران خواهد آمد .

با عکس برداری از بالونهای هوایی هم می توان ارتفاع آنها را معین کرد .

ارتفاع برج به وسیله عکسبرداری

مسئله

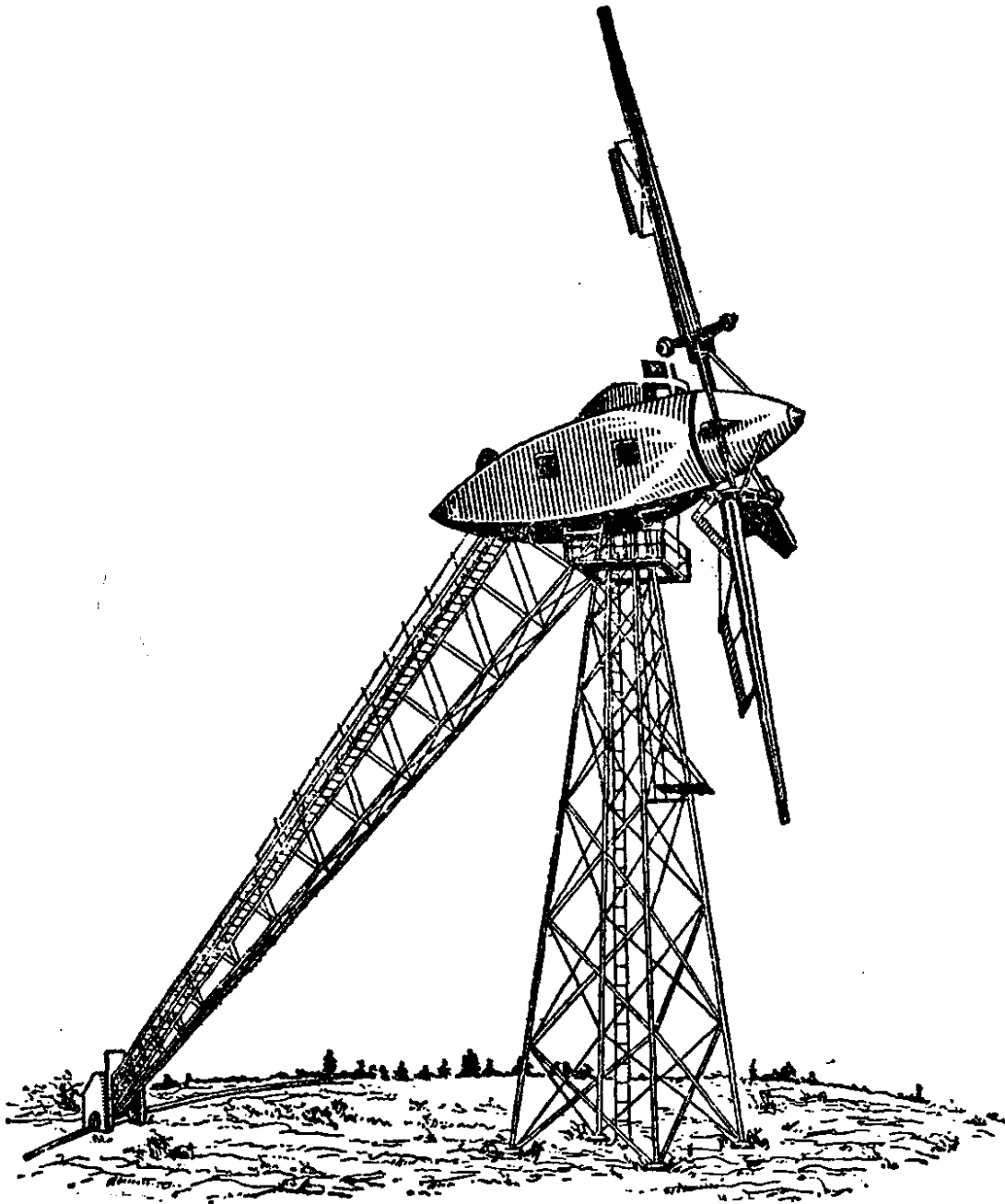
با کمک عکسبرداری نه تنها می توان ارتفاع ابر یا هواپیما را بدست آورد ، بلکه برای محاسبه ارتفاع ساختمانهای زمینی از قبیل مناره ها ، دکلها و برجها هم می تواند مورد استفاده قرار گیرد .
در شکل ۷۶ طرحی از موتوربادی که در کریمه کار گذاشته شده است ، دیده می شود . قاعده برج آن ، مربعی است که می توان طول ضلع آنرا بلافاصله اندازه گرفت : ۶ متر .
اندازه گیریهای لازم را در عکس انجام دهید و ارتفاع h تمام ساختمان موتور بادی را معین کنید .

حل

عکس برج و نمونه اصلی آن ، از لحاظ هندسی با هم متشابه اند بنابراین نسبت ارتفاع برج به ضلع قاعده ، یا قطر قاعده آن در عکس برابر است با نسبت ارتفاع برج به ضلع قاعده ، یا قطر قاعده آن در اصل . اندازه گیریها را روی تصویر انجام می دهیم : طول قطر قاعده در تصویر مساوی ۲۳ میلیمتر و ارتفاع ساختمان مساوی ۷۱ میلیمتر است . چون طول ضلع قاعده برج اصلی مساوی ۶ متر است ، پس طول

قطر قاعده چنین می شود :

$$\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} = 8,48 \text{ (متر)}$$



۷۶. موتور بادی در کریمه

و بنابراین داریم :

$$\frac{71}{23} = h = 8,48$$

که از آنجا بدست می آید :

$$h = \frac{71 \times 8/48}{23} \approx 26 \text{ (متر)}$$

روشن است که تمام عکس مورد احتیاج نیست ، بلکه تنها قسمتی از آن بدرد می‌خورد که برای اندازه‌گیریهای مورد نظر لازم است .

طرح چند مسئله برای تمرین

حالا سعی کنید با اطلاعاتی که از این فصل بدست آورده‌اید ، مسائل زیر را حل کنید :

یک مرد با قدمتوسط (۱/۷ متر) از دور با زاویه ۱۲ دقیقه دیده می‌شود ، فاصله خود را تا او پیدا کنید .

اسب سواری (۲/۲ متر) تحت زاویه ۹ دقیقه دیده می‌شود ، فاصله خود تا او بدست آورید .

یک تیر تلگراف (۸ متر) با زاویه ۲۲ دقیقه دیده می‌شود ، درچه فاصله‌ای از شما قرار گرفته است؟

فانوس دریائی به ارتفاع ۴۲ متر ، از کشتی با زاویه ۱ درجه و ۱۰ دقیقه دیده می‌شود ، کشتی درچه فاصله‌ای از فانوس دریائی قرار دارد؟

کره زمین از ماه با زاویه ۱ درجه و ۵۴ دقیقه دیده می‌شود ، فاصله بین زمین و ماه را پیدا کنید .

از فاصله ۲ کیلومتری ، ساختمانی تحت زاویه ۱۲ دقیقه دیده می‌شود ، ارتفاع ساختمان را معین کنید .

ماه از زمین با زاویه ۳۰ دقیقه دیده می‌شود . اگر فاصله زمین تاماه در این لحظه مساوی ۳۹۶۰۰۰ کیلومتر باشد ، قطر ماه را پیدا کنید .

حروف روی تخته سیاه به چه اندازه باید باشد تا دانش آموزی که روی نیمکت نشسته است، آنها را به همان روشنی حروف کتاب خود (در فاصله ۲۵ سانتیمتری چشم) ببیند؟ فاصله نیمکت تا تخته سیاه ۵ متر است.

ریز بینی ۵۰ مرتبه بزرگ می‌کند. آیا می‌توان جسمی به قطر ۰/۰۰۷ میلیمتر را با آن دید؟

اگر در ماه آدمهائی با قامت ما وجود داشته باشند، بزرگ نمائی تلسکوپ چقدر باشد تا بتوانیم آنها را از هم تشخیص دهیم؟

در هر درجه چند «هزارم» وجود دارد؟

در هر «هزارم» چند درجه وجود دارد؟

هواپیما در جهت عمود بر خط دید ما حرکت می‌کند، در ۱۰

ثانیه راهی را طی می‌کند که تحت زاویه ۳۰۰ «هزارم» دیده می‌شود.

اگر ۲۰۰۰ متر با هواپیما فاصله داشته باشیم، سرعت هواپیما را پیدا کنید.





۴

هندسه در جاده

هنر اندازه‌گیری قدمها

وقتی که برای گردش به خارج شهر رفته‌اید، در نزدیکی راه آهن و یا روی جاده شوسه، می‌توانید تمرینهای جالبی درباره هندسه انجام دهید.

قبل از همه از جاده شوسه، برای اندازه‌گیری طول قدمها و سرعت پیاده روی خود استفاده می‌کنیم. این وضع امکان اندازه‌گیری فاصله‌ها را بوسیله قدمها به وجود می‌آورد، امکانی که بعد از مختصری تمرین بسادگی حاصل می‌شود. در اینجا مطلب مهم این است که یاد بگیریم همیشه قدمهای خود را یکنواخت برداریم، یعنی به راه رفتن «موزون» عادت کنیم.

در کنار جاده شوسه، هر ۱۰۰ متر به ۱۰۰ متر سنگ سفیدی قرار داده‌اند، اگر این ۱۰۰ متر را با قدمهای «موزون» معمولی خود طی کنید، با شمردن تعداد قدمها، می‌توانید طول متوسط قدم خود را بدست آورید. این اندازه‌گیری را باید هر سال و مثلاً در هر بهار انجام داد؛ زیرا طول قدمها، بخصوص در مورد جوانها، بمقدار ثابتی باقی نمی‌ماند.

به رابطه جالبی توجه کنیم که در اثر اندازه‌گیریهای متعدد بدست آمده‌است: طول متوسط قدم يك انسان بالغ تقریباً برابر است بانصف قد او، بشرطی که قد را تا موازی چشمها بحساب بیاوریم. مثلاً، اگر قد شخصی تا چشمان او ۱ متر و ۴۰ سانتیمتر باشد، طول قدم او تقریباً ۷۰ سانتیمتر خواهد بود. مسلماً آزمایش درستی این مطلب برای شما جالب خواهد بود.

علاوه بر طول هر قدم، باید سرعت حرکت خود را هم بدانید، یعنی اینکه در هر ساعت چند کیلومتر راه می‌روید. گاهی از قاعده زیر استفاده می‌کنند: ما در هر ساعت آنقدر کیلومتر راه می‌رویم که هر سه ثانیه آنقدر قدم برداریم، مثلاً اگر در سه ثانیه چهار قدم برمی‌داریم، سرعت ما ۴ کیلومتر در ساعت است. ولی این قاعده راتنها برای طول معینی از قدمها می‌توان بکار برد که بسادگی قابل محاسبه است: طول هر قدم بر حسب متر x و تعداد قدمها را در هر ثانیه n فرض می‌کنیم، در اینصورت معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{3600}{3} \times nx = n \times 1000,$$

از آنجا $1200x = 1000$ و $x = \frac{5}{6}$ (متر) یعنی ۸۰-۸۵ سانتی متر

می‌شود. این قدم نسبتاً بلندی است و چنین قدمهایی متعلق به آدمهای

بلند قامت است . اگر قدم شما در حدود ۸۰ - ۸۵ سانتیمتر نباشد، باید سرعت حرکت خود را با قاعده دیگری پیدا کنید؛ بوسیله يك ساعت، زمانی را که طول می کشد تا فاصله بین دو نشانه را روی جاده شوسه طی کنید، محاسبه می کنید و سپس با معلوم بودن این فاصله سرعت حرکت خود را بدست می آورید .

تخمین نظری

ما می توانیم بدون استفاده از نوار اندازه گیری ، و با کمک قدمهای خود ، فواصل مختلف را اندازه بگیریم ؛ ولی چقدر جالب و مفید است که بتوانیم این فواصل را مستقیماً و بدون اندازه گیری ، با چشم تخمین بزنیم . و این مهارت تنها از راه تمرین بدست می آید . در سالهایی که در دبیرستان تحصیل می کردم ، مواقعی که با دوستان برای گردش تابستانی به خارج شهر می رفتیم ، اکثر به چنین تمرینهایی می پرداختیم . ما آنرا به صورت مسابقههایی در آورده بودیم که دقت تخمین نظری رامعین می کرد . درحالیکه راهپیمائی می کردیم، درخت و یا شیئی دیگری را که دور از ما قرار داشت نشان می کردیم و مسابقه شروع می شد .

یکی از کسانی که در بازی شرکت داشت می پرسید :

– تا این درخت چند قدم است ؟

بقیه ، هر يك عددی را که تخمین زده بود می گفت و سپس با هم شروع به شمردن قدمها می کردند تا معلوم شود کدام تخمین به حقیقت نزدیکتر است و چه کسی بازی را برده است . آنوقت نوبت اومی شد که چیزی را در نظر بگیرد و از دیگران بخواهد ، تا فاصله آنرا تخمین بزنند .

هر بار به کسی که دقیق تر تخمین زده بود، يك امتیاز داده می شد. بعد از ۱۰ بازی امتیازها را می شمردیم: هر کسی که امتیاز بیشتری داشت برنده مسابقه بود.

در دوره های اول بازی، تخمین نظری ما همراه با اشتباهات زیاد بود. ولی خیلی زود، زودتر از آنچه انتظار داشتیم، چنان در هنر تعیین فاصله به وسیله چشم ورزیده می شدیم، که خیلی کم دچار اشتباه می شدیم. فقط وقتی که اوضاع و احوال بکلی تغییر می کرد، مثلاً از دست خالی وارد در جنگل می شدیم یا از بستانی که سرسبز از بوته های کوچک بود به خیابانهای تنگ و پر گرد و خاک شهر برمی گشتیم و یا شب هنگام و در پرتو نور فریبنده ماه، دچار اشتباهات بزرگی می شدیم. ولی بتدریج یاد می گرفتیم که خود را با هر وضعی تطبیق بدهیم و با در نظر گرفتن وضع جدید، تخمین را اصلاح کنیم. بالاخره گروه در تخمین فاصله ها به چنان دقتی می رسید که همه از ادامه بازی سرباز می زدند: همه حدسها کاملاً یکنواخت و درست بود و ادامه مسابقه بهیچ طریقی جالب نمی نمود. در عوض هر کدام از ما تخمین نظری نسبتاً خوبی بدست آورده بودیم که در مسافرتهاى خارج شهر بخوبی به ما خدمت می کرد.

جالب است که تخمین نظری ارتباطی به دقت و قدرت دید ندارد. در گروه ما جوانان نزدیک بینی بودند که نه تنها در دقت تخمین با چشم، از دیگران عقب نمی ماندند، بلکه حتی در مسابقه هم پیروز می شدند. برعکس پسر بچه ای بود که دید طبیعی داشت ولی دارای قدرت تعیین فاصله به کمک چشم نبود. بعدها من درباره تعیین ارتفاع درختها هم به وسیله تخمین نظری به همین نتیجه رسیدم: وقتی که در این باره با دانش آموزان تمرین می کردیم (البته نه بطور تفریحی، بلکه برای احتیاجی که در آینده به آن داشتند)، متوجه شدم که افراد

نزدیک بین در کسب مهارت در این مورد ، بهیچوجه بدتر از دیگران نیستند . و این می تواند برای افراد نزدیک بین يك داگرمی باشد : اگر چه آنها دارای قدرت دید کامل نیستند ، ولی این استعداد را دارند که بتوانند خود را برای تخمین دقیق اندازهها ورزیده کنند .

برای تخمین نظری فواصل همیشه و در هر موقعی از سال در هر جایی که هستید می توان تمرین کرد . وقتی در خیابان شهر قدم می زنید می توانید مسائلی از تخمین نظری برای خود طرح کنید : سعی کنید حدس بزنید تا نزدیکترین تیر چراغ ، یا شئی مناسب دیگری که در نظر می گیرید ، چند قدم فاصله دارید . وقتی که هوا بد است می توانید در خیابانهای خلوت آزمایش خود را انجام دهید .

تعیین فاصلهها با تخمین نظری به کار جنگجویان دقت فوق العاده می دهد: تخمین نظری برای گروه های اکتشافی ، تیراندازها و توپچی ها لازم است . بی فایده نیست اگر با بعضی از علامتهائی که آنها در عمل برای تخمین نظری بکار می برند ، آشنا باشیم . مطلب زیر را از يك کتاب درسی توپخانه برداشته ایم :

« با کمک چشم و یا با ورزیدگی می توان تا حد زیادی فواصل را معین کرد ، اشیاء قابل رویت را از هم تمیز داد ، به دوری و نزدیکی آنها نسبت به ناظر پی برد و یا فواصلی در حدود ۱۰۰ - ۲۰۰ قدم را که برای چشم عادی است تخمین زد ، ولی هرچه شئی دورتر از ناظر قرار گرفته باشد ، کوچکتر بنظر می رسد .

« برای تعیین فواصل اشیائی که قابل رویت هستند ، باید در نظر داشت که اشیائی که روشن ترند ، یا از لحاظ رنگ خود مشخص تر از بقیه هستند ؛ اشیائی که بالاتر از دیگران قرار گرفته اند ، اشیائی که رویهم انباشته شده باشند و بطور کلی اشیاء بزرگتر ، نزدیکتر از فاصله واقع بنظر می رسند .

« می توان نشانه‌های زیر را ملاک کار قرار داد : تا فاصله ۵۰ قدم چشم و دهان افراد قابل تشخیص است؛ در ۱۰۰ قدمی، چشمها به نقاطی تبدیل می‌شوند؛ در ۲۰۰ قدمی هنوز می‌توان دکه‌ها و جزئیات لباس نظامی را تشخیص داد؛ در ۳۰۰ قدمی صورت دیده می‌شود؛ در ۴۰۰ قدمی حرکت پاها مشخص است و در ۵۰۰ قدمی رنگ لباس قابل تشخیص است.»

در این مورد، چشمی که تا حدی ورزیدگی داشته باشد برای تعیین فاصله تا ۱۰٪ ممکن است از این ویا آنطرف اشتباه کند.

بر عکس، مواردی وجود دارد که اشتباه تخمین نظری قابل توجه است. اولاً وقتی که در یک منطقه صاف و هموار قرار گرفته باشیم: در رودخانه یا دریاچه بدون موج و آرام، در بیابان ریگزار و مسطح، در جلگه سرسبزی که پوشیده از گیاهان است؛ همیشه فواصل کمتر از مقدار واقع بنظر می‌رسد؛ در اینگونه موارد معمولاً ۵۰٪ و گاهی خیلی بیشتر اشتباه پیش می‌آید. ثانیاً وقتی شیئی پشت یک بلندی قرار گرفته باشد؛ مثل بلندی مسیر راه آهن، تپه، ساختمان و غیره، بطور کلی وقتی که قسمت پائین شیئی بوسیله مانعی از نظر ما مخفی باشد، اشتباه تخمین فاصله قابل توجه است. در این مورد شیئی مورد نظر درست روی بلندی مانع، بنظر می‌رسد و نه در عقب آن و بنابراین باز هم اشتباه در جهت کمتر شدن فاصله واقعی است (شکل‌های ۷۷ و ۷۸ را ببینید).

در چنین مواردی تکیه به تخمین نظری خطرناک است و باید با روشهای دیگری، که قبلاً صحبت کرده‌ایم و یا بعداً صحبت خواهیم کرد، فواصل را تخمین زد.



۷۷. درخت از پشت تپه نزدیک بنظر می رسد

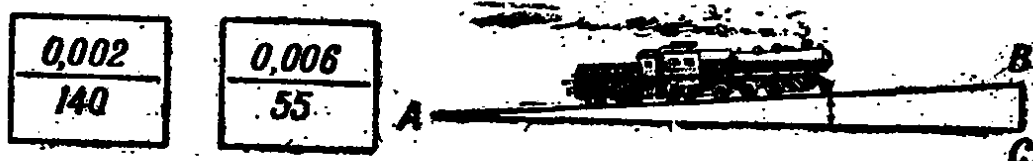


۷۸. وقتی به بالای تپه برویم ، می بینیم که هنوز
تا درخت فاصله زیادی باقی است

شیبها

در امتداد نوار راه آهن، علاوه بر ستونهای کیلومتر ، ستونهای کوتاه دیگری هم دیده می شود که برای عدد زیادی از مردم نامفهوم است و بر روی آنها ، چیزی شبیه آنچه که در شکل ۷۹ می بینید ، نوشته شده است .

اینها « علائم مربوط به شیب » هستند . مثلاً ، در اولی ، عدد $0/002$ که در بالا نوشته شده است به معنای اینست که شیب راه در اینجا (در همان جهتی که صفحه نشان می دهد) مساوی $0/002$ است: یعنی راه در هر هزار میلیمتر به اندازه ۲ میلیمتر بالاتر و یا پائین تر می رود . و عدد ۱۴۰ که در پائین نوشته شده است ، نشان می دهد که این شیب تا فاصله ۱۴۰ متری ادامه دارد و در آنجا مجدداً علامتی گذاشته شده است که شیب بعدی را نشان می دهد . علامت دوم با نوشته $\frac{0/006}{55}$ نشان می دهد که در امتداد نزدیکترین ۵۵ متر مسیر راه آهن در هر یک



۷۹. علامت های شیب

متر به اندازه ۶ میلیمتر بالا یا پائین می رود .
 با اطلاع از مفهوم شیب ، به سادگی می توانید اختلاف ارتفاع دو نقطه از مسیر را ، که در این نشانهها ذکر شده است ، محاسبه کنید .
 مثلاً در حالت اول اختلاف ارتفاع این دو نقطه مساوی $0/002 \times 140$ یعنی $0/28$ متر در حالت دوم $0/006 \times 55$ یعنی $0/33$ متر است .

همانطور که می بینید، در عمل مقدار شیب مسیر راه آهن را با درجه معین نمی کنند، ولی در صورت لزوم می توان با در دست داشتن اعدادی که روی صفحه نوشته شده، مقدار شیب را بر حسب درجه بدست آورد. اگر AB (شکل ۷۹) خط مسیر و BC اختلاف ارتفاع نقاط A و B باشد، روی صفحه کنار مسیر راه آهن، برای شیب AB نسبت به خط افقی AC ، نسبت $\frac{BC}{AB}$ داده شده است. چون زاویه A خیلی کوچک است، می توان AB و AC را شعاعهای دایره ای فرض کرد که BC قوسی از آنست^۵. در این صورت محاسبه زاویه A ، با در دست داشتن نسبت $BC:AB$ مشکل نیست. مثلاً برای شیبی که با نشانه $۰/۰۰۲$ بیان شده است به این ترتیب قضاوت می کنیم: قوسی که مساوی $\frac{۱}{۵۷}$ شعاع باشد، زاویه ای مساوی ۱ درجه تشکیل می دهد؛ قوسی که $۰/۰۰۲$ شعاع باشد. چه زاویه ای تشکیل می دهد؟ مقدار x این زاویه را از تناسب زیر بدست می آوریم:

$$x:۱ = ۰/۰۰۲ : \frac{۱}{۵۷} \Rightarrow x = ۰/۰۰۲ \times ۵۷ = ۰/۱۱^\circ$$

یعنی به تقریب مساوی ۷ دقیقه.

برای مسیر راه آهن همیشه شیبهای کم عملی و قابل اجراست

(* ممکن است که تساوی عمود AC با مایل AB ، بنظر بعضی از خوانندگان غیر قابل قبول برسد. به بینیم وقتی که مثلاً BC برابر با $۰/۰۱$ مایل AB است، اختلاف AC و AB چقدر می شود. طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$AC = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{۱۰۰}\right)^2} = \sqrt{۰/۹۹۹۹ AB^2} = ۰/۹۹۹۹۵ AB$$

اختلاف برابر $۰/۰۰۰۰۵ AB$ می شود و البته برای محاسبات تقریبی، اشتباهاتی از این قبیل مشکلی به وجود نمی آورد.

و حد شیب می تواند مساوی $0/008$ باشد. این شیب حدی بر حسب درجه $0/008 \times 57$ و یا کمتر از $\frac{1}{4}$ درجه می شود، این حداکثر مقدار شیب است. تنها در بعضی موارد استثنائی شیب مسیر راه راهن از این حد تجاوز می کند. مثلاً برای راه آهن قفقاز تا شیب $0/025$ هم وجود دارد که متناظر با زاویه ای نزدیک به $\frac{1}{4}$ درجه است.

اینگونه شیبهای ناچیز بکلی برای ما محسوس نیست. کسی که پیاده روی می کند، تنها وقتی شیب زمین زیر پای خود را حس می کند که از $\frac{1}{4}$ بیشتر باشد: این شیب به زبان درجه مساوی $\left(\frac{57}{24}\right)$ و یا قریب $2\frac{1}{4}$ درجه می شود.

اگر شما در مسیر راه آهن شروع به حرکت کنید و ضمن طی چند کیلومتر، نشانه های مربوط به شیب جاده را یادداشت کنید، می توانید حساب کنید که بطور کلی و در مجموع چقدر بالا یا پائین رفته اید، یعنی اختلاف ارتفاع نقطه شروع تا نقطه پایان حرکت را بدست آورید.

مسئله

در کنار مسیر راه آهن از نقطه ای که نشانه سربالائی $\frac{0/004}{153}$

گذاشته شده است، شروع به حرکت می کنید و به ترتیب به نشانه های زیر می رسید (از چپ به راست):

سربالائی	سطح	سربالائی	سطح	سربالائی
$\frac{0/004}{210}$	$\frac{0/000}{45}$	$\frac{0/0032}{121}$	$\frac{0/000}{84}$	$\frac{0/0007}{60}$

(* در علامتهای مسیر راه آهن $0/000$ نشانه افقی بودن جاده است.)

شما گردش خود را در ابتدای نشانه بعدی تمام می کنید . چهاراهی طی کرده اید و اختلاف ارتفاع بین ابتدا و انتهای مسیر شما چقدر است ؟

حل

طول تمام راه چنین است :

$$۱۵۳ + ۶۰ + ۸۴ + ۱۲۱ + ۴۵ + ۲۱۰ = ۶۷۳ \text{ (متر)}$$

ارتفاعی که بالا رفته اید :

$$۰/۰۰۰۴ \times ۱۵۳ + ۰/۰۰۱۷ \times ۸۴ + ۰/۰۰۳۲ \times ۱۲۱ = ۱/۱۵ \text{ (متر)}$$

و ارتفاعی که پائین آمده اید :

$$۰/۰۰۰۴ \times ۲۱۰ = ۰/۸۴ \text{ (متر)}$$

یعنی در مجموع ، نسبت به نقطه شروع حرکت به اندازه :

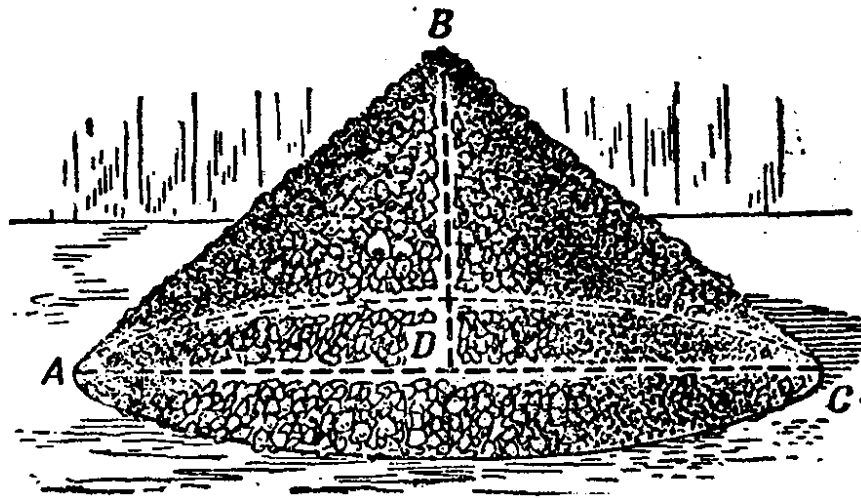
$$۱/۱۵ - ۰/۸۴ = ۰/۳۱ \text{ (متر)} = ۳۱ \text{ (سانتیمتر)}$$

بالا رفته اید .

توده شن

وجود تلهائی از خرده سنگ که در کنار جاده های شوسه وجود دارد ، موضوعی است که از نظر « هندسه » قابل طرح و بررسی است . سئوالی پیش می آید حجم توده شنی که جلو شما قرار گرفته است ، چقدر است ؟ در مقابل شما مسئله ای قرار گرفته است که حل آن برای کسانی که عادت دارند ، مشکلات ریاضی خود را تنها روی کاغذ و یا تخته سیاه کلاس برطرف کنند ، به اندازه کافی مشکل است . شما باید حجم مخروطی را بدست آورید که نه ارتفاع و نه شعاع قاعده آنرا نمی توان مستقیماً اندازه گرفت . ولی هیچ مانعی برای محاسبه اندازه های آن به طریق غیر مستقیم وجود ندارد . شعاع مخروط را می توانید با اندازه

گرفتن محیط دایره قاعده، به کمک یک نوار یا نخ، و سپس تقسیم آن بر ۶/۲۸ بدست آورید.



۸۰. مسئله‌ای درباره توده شن

محاسبه ارتفاع کمی مشکل تر است: باید طول مولد AB (شکل ۸۰) و یا آنطور که سرکارگران راه عمل می کنند، دو مولد ABC را با هم (در حالیکه نوار متر از رأس مخروط گذشته است)، اندازه گرفت و سپس با در دست داشتن قاعده مخروط، ارتفاع BD را با کمک قضیه فیثاغورت اندازه گرفت. به مثال زیر توجه کنید.

مسئله

محیط قاعده تل شنی که به شکل مخروط است مساوی $۱۲/۱$ متر و طول مولد آن $۴/۶$ متر است. حجم آنرا پیدا کنید.

(* در عمل می توان ضرب را جانشین تقسیم کرد: برای بدست آوردن قطر قاعده، محیط آنرا در $۵/۳۱۸$ و برای بدست آوردن شعاع قاعده، در $۵/۱۵۹$ ضرب می کنیم.

حل

شعاع قاعده مخروط چنین است :

$$(متر) \quad ۱/۹ \# (۶/۲۸ : ۱۲/۱) \text{ یا } ۱۲/۱ \times ۵/۱۵۹$$

و ارتفاع آن :

$$(متر) \quad ۱/۳ \# ۱/۹^۲ - ۱/۲/۳^۲$$

از آنجا حجم توده سنگ چنین می شود :

$$(مترمکعب) \quad ۱/۳ \# ۱/۳ \times ۱/۹^۲ \times ۳/۱۴ \times ۱/۳$$

حجم کوبه‌های شنی که در کنار جاده‌ها قرار دارد ، معمولا به اندازه‌های ۴/۸ ، ۲/۴ و ۱/۲ متر مکعب می باشد .

تپه افتخار

مطالعه تپه‌های مخروطی شکل شن و یا خرده سنگ ، مرا بیاد افسانه قدیمی ملتهای شرق انداخت که در داستان پوشکین بنام «شوالیه خسیس» نقل شده است :

جائی خوانده‌ام ،

که روزی شاه به جنگجویان خود

فرمان داد هر کدام يك مشت خاك بردارند و به صورت تپه در آورند ،

و تپه افتخار آماده شد ،

و شاه توانست با خوشحالی از بالای آن به اطراف بنگرد

هم به دره‌ای که پوشیده از خیمه‌های سفید بود ،

و هم به دریا ، که کشتیها در آن حرکت می کردند .

این، یکی از افسانه‌هایی است که در محتوی آن ، حتی يك ذره حقیقت هم وجود ندارد . با محاسبه هندسی می توان ثابت کرد که اگر حاکم مستبدی می خواست به این ترتیب مشغولیاتى برای خود فراهم

کند ، از نتیجهٔ حقیر و بی‌ارزش آن دچار یأس می‌شد : در مقابل او تپهٔ خاکی کوچکی قرار می‌گرفت که هیچگونه خیالبافی و اغراق‌گوئی نمی‌توانست نام «تپهٔ افتخار» افسانه‌ای را بر آن بگذارد .

به محاسبهٔ تقریبی پردازیم . این سلطان قدیمی چند جنگجو می‌توانست داشته باشد ؟ تعداد جنگجویان ارتشهای دوران گذشته ، مثل زمان ما ، زیاد نبود . ارتشی که ۱۰۰ ۰۰۰ جنگجو داشت ، فوق‌العاده و قابل ملاحظه به حساب می‌آمد . ماهم همین عدد را قبول می‌کنیم ، یعنی فرض می‌کنیم که تپه از ۱۰۰۰۰۰۰ مشت خاک درست شده باشد . شما مشت خود را از خاک پر کنید و در یک لیوان بریزید : یک مشت خاک نمی‌تواند لیوان را پر کند . فرض را بر این می‌گیریم که مشت یک جنگجوی قدیمی $\frac{1}{5}$ لیتر (دسی‌متر مکعب) حجم داشته است ، در اینصورت حجم تپه بدست می‌آید :

$$\frac{1}{5} \times 1000000 = 200000 \text{ (دسی‌متر مکعب)} = 20 \text{ (متر مکعب)}$$

یعنی تپه ، به شکل مخروطی می‌شود که حجم آن از ۲۰ متر مکعب تجاوز نمی‌کند و این ناچیزی حجم مایوس‌کننده است . محاسبه را ادامه می‌دهیم ، به بینیم ارتفاع این تپه در چه حدود است . برای این منظور باید بدانیم که زاویهٔ بین مولد مخروط با قاعدهٔ آن چقدر است . در اینجا می‌توان ، آنرا مساوی شیب طبیعی ، یعنی ۴۵ درجه ، در نظر گرفت : باشیب تندتر از آن ممکن نیست ، زیرا در اینصورت خاک فرو می‌ریزد (صحیح‌تر آنست که تپه را باشیب کمتری و مثلاً یک‌ونیم به حساب بیاوریم) . همین زاویهٔ ۴۵ درجه را قبول می‌کنیم ، در اینصورت ارتفاع مخروط مساوی با شعاع قاعدهٔ آن می‌شود و بنابراین :

$$20 = \frac{\pi x^3}{3}$$

$$\text{و از آنجا: } x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \approx 2,7 \text{ (متر)}$$

باید نیروی تصور زیادی داشت ، که يك كوپهٔ خاک ۲/۷ متری (يك برابر و نیم قد انسان) « تپهٔ افتخار » نامگذاری شود . اگر محاسبه را مثلا برای شیب ۱/۵ انجام می‌دادیم ، به نتیجهٔ باز هم حقیرتری می‌رسیدیم .

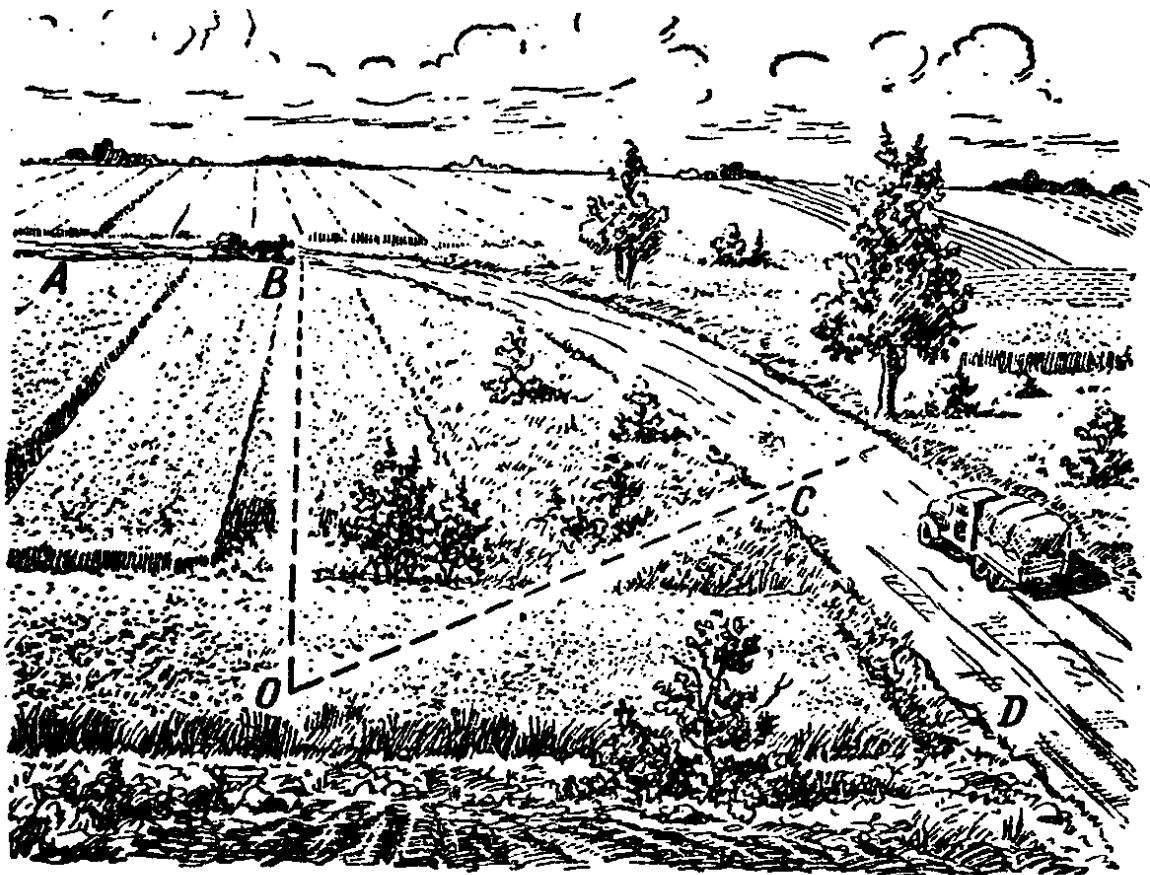
بزرگترین ارتشی که در دنیای قدیم شناخته شده، ارتش آتیلاست. مورخین تعداد جنگجویان این ارتش را به ۷۰۰ ۰۰۰ نفر تخمین می‌زنند . اگر تمام افراد این ارتش هم در ساختن این تپه شرکت می‌کردند، البته ارتفاع زیادتری بدست می‌آمد ، اما نه خیلی زیاد ، زیرا وقتی که حجم آن ۷ برابر شده باشد ، ارتفاع آن فقط $\sqrt[3]{7}$ یعنی تقریباً ۱/۹ برابر خواهد شد : چنین تپه‌ای به اندازهٔ (متر) $2,7 \times 1,9 = 5,1$ ارتفاع خواهد داشت . و بعید است که چنین ساختمان محقری می‌توانست غرور آتیلا را ارضا کند .

البته از فراز چنین ارتفاعی می‌توان « دره‌ای را که پوشیده از خیمه‌های سفید » است ، مشاهده کرده، ولی مطالعهٔ دریا به کمک چنین تپه‌ای، وقتی ممکن است که آنرا درست در کنار ساحل ساخته باشیم . در فصل ششم از امکانات شعاع دید از بالای بلندیها ، صحبت خواهیم کرد .

در پیچ جاده

نه جادهٔ شوسه و نه راه آهن هرگز یکباره نمی‌پیچند و از يك جهت به جهت دیگر به ملایمت ، و روی قوسی که شکستگی نداشته باشد ، تغییر مسیر می‌دهند . این قوس ، معمولاً قسمتی از محیط يك

دایره است که قسمتهای مستقیم جاده، بر آن مماس هستند. مثلاً در شکل ۸۱ قسمتهای مستقیم جاده، یعنی AB و CD ، چنان به قوس BC وصل شده‌اند که از لحاظ هندسی در نقاط B و C بر این قوس مماس‌اند، بنابراین AB با شعاع OB و همچنین CD با شعاع OC زاویه قائمه می‌سازند. این وضع به مناسبت اینست که راه از قسمت مستقیم به قسمت منحنی، و برعکس، به نرمی عبور کند.



۸۱ . پیچ جاده

معمولاً شعاع قسمت منحنی مسیر را خیلی بزرگ می‌گیرند که در مورد راه آهن کمتر از ۶۰۰ متر نیست و در بعضی موارد به ۱۰۰۰ و حتی ۲۰۰۰ متر می‌رسد.

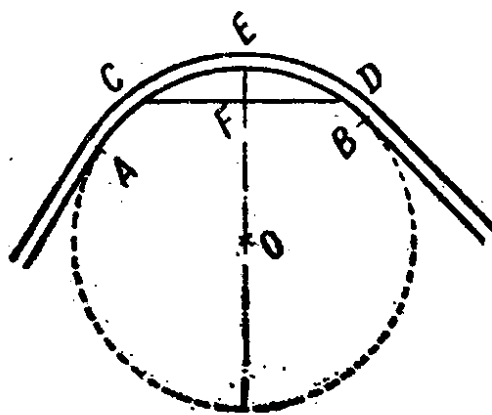
شعاع پیچ

وقتی که در نزدیکی یکی از این پیچها ایستاده‌اید، آیا می‌توانید اندازه شعاع آنرا تعیین کنید؟ این عمل به سادگی اندازه‌گیری قوسی که روی کاغذ رسم شده است، نیست. روی کاغذ خیلی آسانست: دو وتر دلخواه قوس را رسم می‌کنیم، سپس از وسط هر يك عمودی بر وترها اخراج می‌کنیم، محل تلاقی این دو عمود، مرکز قوس خواهد بود؛ فاصله این مرکز تا این نقاط قوس، شعاع مورد نظر است.

ولی، در روی زمین نمی‌توان به همین سادگی عمل کرد، زیرا مرکز پیچ در ۱ تا ۲ کیلومتری جاده قرار گرفته است و اغلب هم، به علت موانع، در دسترس نیست. البته می‌توان این ساختمان هندسی را روی نقشه انجام داد، ولی رسم پیچ روی نقشه هم کار آسانی نیست.

همه این مشکلات را به این ترتیب می‌توان برطرف کرد که بجای ساختمان هندسی به محاسبه بپردازیم. برای این منظور می‌توان از روش زیر استفاده کرد: دایره‌ای را که قوس AB از پیچ قسمتی از آن است. در نظر می‌گیریم (شکل ۸۲).

دو نقطه دلخواه C و D از قوس پیچ را بهم وصل می‌کنیم، سپس طول وتر CD و «سهم» EF (یعنی ارتفاع قطعه DEC) را اندازه می‌گیریم. با در دست داشتن این دو اندازه، می‌توانیم طول شعاع مجهول را بدون زحمت محاسبه کنیم. اگر طول وتر را a ، طول سهم آنرا h و شعاع دایره را R فرض کنیم، با توجه به اینکه قطر دایره



۸۲ محاسبه شعاع پیچ

و وتر CD یکدیگر را قطع کرده اند خواهیم داشت :

$$\frac{a^2}{4} = h(2R - h)$$

و از آنجا:

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2$$

و اندازه شعاع مجهول چنین می شود*:

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

مثلاً اگر طول سهم ۰/۵ متر و طول وتر ۴۸ متر باشد، اندازه شعاع

چنین است :

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0.5^2}{8 \times 0.5} \approx 580 \text{ (متر)}$$

اگر در این محاسبه $2R-h$ را مساوی $2R$ بگیریم، رابطه ساده تری بدست می آید، این عمل بدان مناسبت مجاز است که h در مقابل R خیلی کوچک است (R مساوی صدها متر و h در حدود یک متر است). به این ترتیب رابطه تقریبی زیر که بمراتب ساده تر است بدست می آید :

* این محاسبه را به طریق دیگری هم می توان انجام داد، مثلث COF

قائم الزاویه است و در آن $OC=R$ ، $CF=\frac{a}{2}$ ، $OF=R-h$ باشد.

طبق قضیه فیثاغورث داریم :

$$R^2 = (R-h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

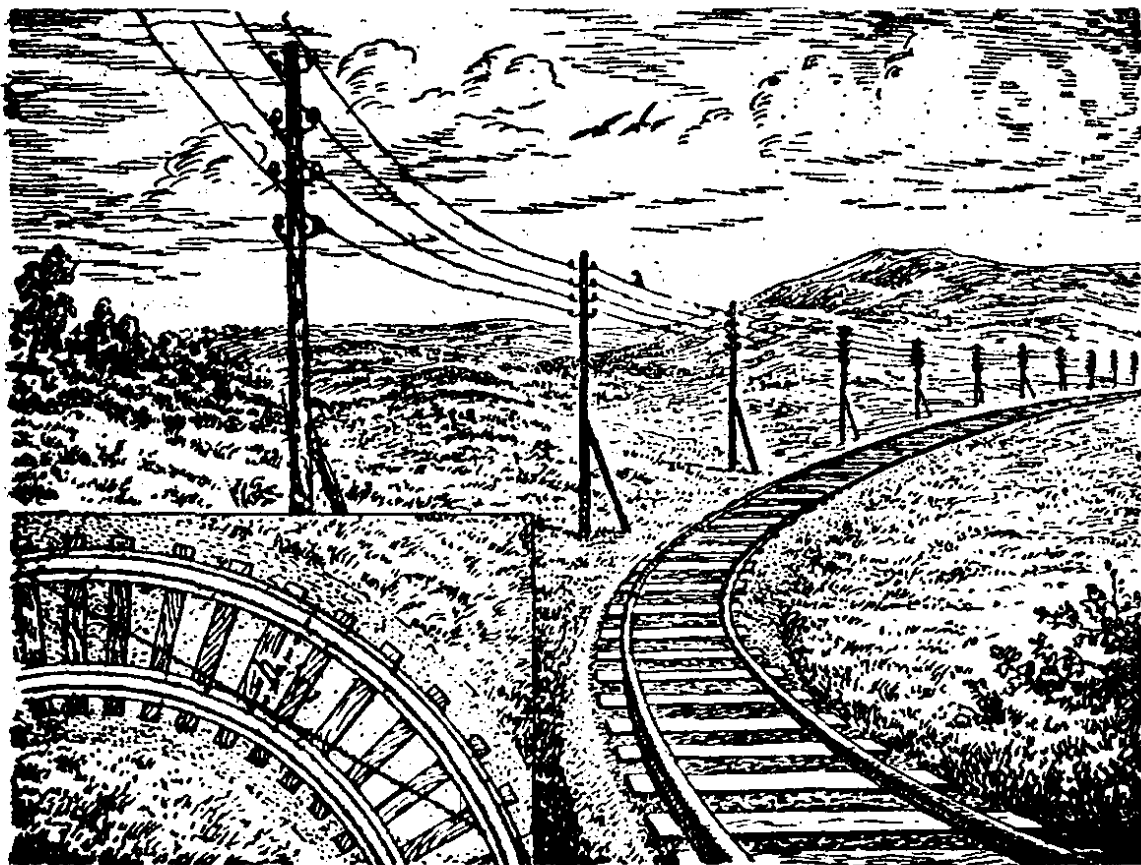
و از آنجا :

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

$$R = \frac{a^2}{\lambda h}$$

اگر این رابطه را برای مثال فوق بکار ببریم ، باز هم همان اندازه قبلی بدست می آید :

$$R = ۵۸۰$$



۸۳. محاسبه شعاع پیچ راه آهن

با در دست داشتن شعاع پیچ و توجه به اینکه مرکز دایره روی عمود منصف وتر آنست ، می توان جای تقریبی مرکز قوس هر قسمت جاده را علامتگذاری کرد .

اگر جاده ریل گذاری شده باشد ، پیدا کردن شعاع پیچ ساده تر می شود. اگر طنابی را مماس بر ریل داخلی بگیریم ، وتر قوسی از ریل خارجی بدست می آید که سهم آن مساوی عرض خط ، یعنی $۱/۵۲$ متر است (شکل ۸۳) . اگر طول وتر را در اینجا a بگیریم ، شعاع پیچ

چنین می شود :

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1/52} = \frac{a^2}{12/2}$$

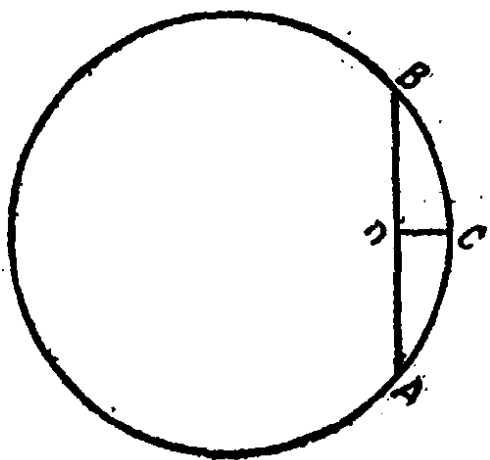
اگر a مساوی ۱۲۰ متر باشد ، شعاع پیچ مساوی ۱۲۰۰ متر می شود*.

کف اقیانوس

غیر منتظره است که از پیچ جاده ، به کف اقیانوس پردازیم ، دو موضوعی که ظاهراً بهم مربوط نیستند . ولی هندسه يك ارتباط طبیعی بین این دو زمینه مختلف به وجود می آورد .

صحبت بر سر انحنای کف اقیانوس است ، در این باره کف اقیانوس بچه شکل است : مقعر ، مسطح یا برآمده . بدون تردید ، بنظر بسیاری باور نکردنی است که ، اقیانوس ، با عمق زیادی که دارد ، نسبت به کره زمین گود نباشد ، همانطور که خواهیم دید ، کف آن نه تنها مقعر نیست ، بلکه حتی برآمده است . وقتی که اقیانوس را « چاه ویل و بی انتها » به حساب می آوریم ، فراموش می کنیم که عظمت وسعت آن صدها مرتبه بیشتر از عمق آنست ، یعنی قشر آب اقیانوس چنان تا دور دست گسترده است که نمی توان انحنای سیاره ما را ، در مورد آن ، به حساب نیاورد .

(* این طریقه برای مواردی که شعاع انحنای پیچ زیاد است ، تولید اشکال می کند ، زیرا طول وتری از ریل خارجی که بر ریل داخلی مماس باشد ، خیلی بزرگ می شود .



۸۴. آیا کف اقیانوس مسطح است؟

به عنوان مثال اقیانوس اطلس را انتخاب می کنیم . عرض این اقیانوس در نزدیکی استوا تقریباً یک ششم محیط کره است . اگر دایره شکل ۸۴ را خط استوا فرض می کنیم ، قوس ACB سطح آرام آب اقیانوس اطلس خواهد بود . اگر کف این اقیانوس مسطح باشد ،

عمق آن مساوی CD ، سهم قوس ACB ، خواهد بود . با توجه به اینکه قوس AB مساوی $\frac{1}{6}$ محیط دایره است ، وتر AB مساوی ضلع شش ضلعی محاط در دایره خواهد بود (و بنابراین مساوی شعاع R از دایره است) و می توانیم CD را از رابطه ای که در مورد پیچ جاده ها بکار می بردیم ، محاسبه کنیم :

$$R = \frac{a^2}{8h} \Rightarrow h = \frac{a^2}{8R}$$

چون $a = R$ است ، خواهیم داشت :

$$h = \frac{R}{8}$$

که در آن R مساوی ۶۴۰۰ کیلومتر است و بدست می آید

$$h = ۸۰۰ \text{ (کیلو متر)}$$

به این ترتیب ، برای اینکه کف اقیانوس اطلس مسطح باشد ، باید حد اکثر عمق آن به ۸۰۰ کیلو متر برسد ، ولی در حقیقت ، این عمق به ۱۰ کیلو متر هم نمی رسد . نتیجه مستقیمی که از اینجا بدست می آید اینست که این اقیانوس ، در شکل کلی خود محدب است ، تنها نسبت به تحدب سطح آرام خود کم و بیش خمیدگی دارد . همین مطلب برای سایر اقیانوسها هم صحیح است : عمق این

اقیانوسها روی سطح زمین به اندازه‌ای است که تقریباً شکل کلی کره زمین را تغییر نمی‌دهد.

رابطه‌ای که برای محاسبه پیچ جاده‌ها بکار بردیم ثابت می‌کند

که هرچه وسعت انبار آب زیادتر باشد، کف آن محدب‌تر است.

باتوجه به رابطه $h = \frac{a^2}{8R}$ ، بلافاصله نتیجه می‌شود که زیاد شدن عرض

a از اقیانوس یا دریا (برای اینکه کف مسطح داشته باشد)، باید عمق

h بسرعت زیاد شود، به نسبت مجذور a . ولی وقتی که وسعت آب

زیاد می‌شود، هرگز عمق آب به این نسبت تصاعدی زیاد نمی‌شود.

اگر مثلاً عرض اقیانوسی ۱۰۰ برابر عرض یک دریا باشد، هرگز عمق

آن 100×100 یعنی ۱۰۰۰۰ برابر نمی‌شود. بنابراین کف آبهای کم-

وسعت، در مقایسه با اقیانوسها، به سطح نزدیکتر است. کف دریای سیاه

بین کریمه و آسیای صغیر، نه تنها مثل کف اقیانوسها محدب نیست،

بلکه مسطح هم نیست؛ کف این دریا کم و بیش مقعر است. سطح آب

این دریا قوسی نزدیک به ۲ درجه است (دقیق‌تر: $\frac{1}{170}$ محیط زمین).

عمق دریای سیاه نسبتاً یکنواخت و مساوی $2/2$ کیلو متر است. برای

این قوس، اگر می‌خواست کف مسطحی داشته باشد، می‌بایستی حد

اکثر عمق چنین باشد:

$$R = \frac{40000^2}{170^2 \times 8} = 1/1 \text{ (کیلومتر)}$$

یعنی کف دریای سیاه به اندازه $(2/2 - 1/1)$ کیلومتر پائین‌تر

از سواحل دو طرف خود می‌باشد و بنابراین مقعر است نه محدب.

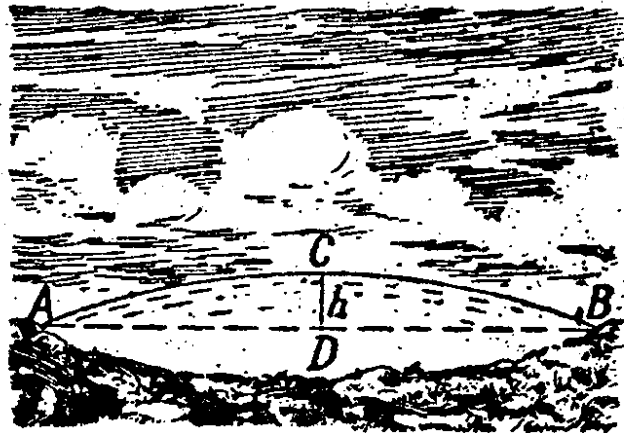
آیا کوههای آب وجود دارد؟

رابطه‌ای که قبلاً درباره محاسبه شعاع انحنای جاده ذکر کردیم،

می تواند به این سؤال جواب بدهد .

مسئله قبل هم جواب ما را آماده کرده است . کوههای آبی ، نه از لحاظ فیزیکی ، بلکه به معنای هندسی این کلمه وجود دارد . نه تنها دریاها بلکه دریاچه ها هم ، هر یک نوعی کوه آبی هستند . وقتی

که شما در ساحل دریاچه ای ایستاده باشید ، آبی که بین شما و ساحل مقابل است ، بر آمدگی دارد و هر چه عرض دریاچه بیشتر باشد ، ارتفاع آن نیز بیشتر است . این ارتفاع را می توان محاسبه کرد :



۸۵ . « کوه آب »

از رابطه $R = \frac{a^2}{8h}$ مقدار سهم

$h = \frac{a^2}{8R}$ بدست می آید ؛ در اینجا a عبارتست از فاصله مستقیم بین دو ساحل که می توان برابر با عرض دریاچه در نظر گرفت (قوس-وتر) اگر این عرض را ۱۰۰ کیلومتر فرض کنیم ، ارتفاع « کوه » آب چنین می شود :

$$h = \frac{10000}{8 \times 6400} \approx 200 \text{ (متر)}$$

می بینید که کوه آب ، ارتفاع قابل ملاحظه ای دارد !

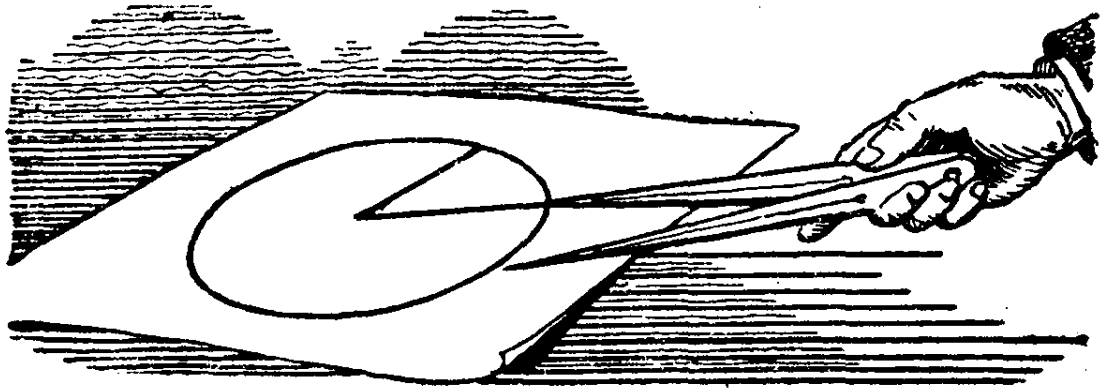
حتی دریاچه کوچکی که ۱۰ کیلومتر عرض داشته باشد ، رأس بر آمدگی آب آن نسبت به خط راستی که دو ساحل را بهم می پیوندد ۲ متر ارتفاع دارد ، یعنی بیشتر از قد انسان .

آیا نام « کوه » را که به این بر آمدگیهای آبی گذاشتیم ، صحیح است ؟ از لحاظ فیزیکی ، نه ؛ زیرا این بر آمدگی نسبت به سطح افقی نیست ، بلکه بر آن منطبق است . اشتباه است اگر گمان کنیم که خط

راست AB (شکل ۸۵) خط افقی است (به تصور شخصی که در نقطه A ایستاده است) و قوس ACB روی آن برآمده است. در اینجا خط افقی ACB است (نه AB) که بر سطح آب آرام منطبق است. خط ADB نسبت به افق خمیدگی دارد: AD با تمایل به طرف «پائین» به زیر سطح زمین می‌رود، تا نقطه D که عمیق‌ترین نقطه این خط است، سپس دوباره «بطرف بالا» می‌آید و در نقطه B از زیر زمین (یا آب) خارج می‌شود. اگر در امتداد خط راست AB لوله‌ای کار گذاشته باشیم، گلوله‌ای که در ابتدای این لوله و در نقطه A قرار دهیم، در آنجا متوقف نمی‌ماند بلکه (با فرض صاف بودن جدار داخلی لوله) بطرف نقطه D حرکت می‌کند و از آنجا، با سرعتی که کسب کرده است، تا نقطه B جلو می‌رود؛ سپس، بدون اینکه در اینجا متوقف شود، بطرف D برمی‌گردد و خود را به نقطه A می‌رساند، دوباره از آنجا برمی‌گردد و غیره. اگر گلوله و لوله را واقعاً صاف فرض کنیم (و از مقاومت هوا بگذریم) این حرکت نوسانی تا ابد ادامه خواهد داشت.

به این ترتیب، اگر چه بنظر می‌رسد (شکل ۸۵) که ACB کوه است، به معنای فیزیکی کلمه، هموار است. تنها به مفهوم هندسی می‌توان گفت که در اینجا یک کوه آبی وجود دارد.





۵

مثلثات سیار

بدون رابطه و بدون جدول

محاسبه سینوس

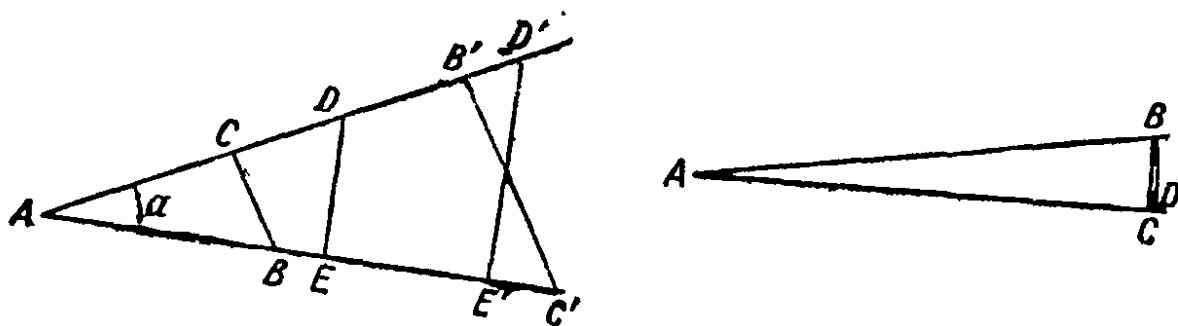
در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان اضلاع يك مثلث را با تقریب ۲٪ و زوایای آنرا با تقریب ۱ درجه ، تنها با استفاده از مفهوم سینوس و بدون مراجعه به جدول و روابط مثلثاتی ، محاسبه نمود. این مثلثات ساده شده ، می‌تواند در گردشهای به‌خارج شهر ، وقتی که جدول به‌مراه نداریم و روابط را هم فراموش کرده‌ایم ، مورد استفاده قرار گیرد . رویینسون هم در جزیرهٔ خودش می‌توانست بخوبی از چنین مثلثاتی استفاده کند .

به این ترتیب، فرض را بر این می‌گیریم که شما مثلثات نمیدانید

و یا اینکه آنرا بکلی فراموش کرده‌اید. از آشنائی بایک مفهوم شروع می‌کنیم. سینوس یک زاویه حاده چیست؟ اگر از نقطه‌ای واقع بر یک ضلع این زاویه، عمودی بر ضلع دیگر آن فرود آوریم، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که بدست می‌آید، سینوس زاویه حاده برابر است با نسبت ضلع روبروی به این زاویه بر وتر. مثلاً سینوس زاویه α (شکل ۸۶) برابر است با $\frac{BC}{AB}$ یا $\frac{ED}{AD}$ یا $\frac{D'E'}{AD'}$ یا $\frac{B'C'}{AC'}$. با توجه به تشابه مثلثهائی که در اینجا بدست آمده است، به سادگی معلوم می‌شود که همه این نسبتها با هم برابرند.

سینوس زوایای مختلف از ۱ درجه تا ۹۰ درجه چه مقدار است؟ و چگونه می‌توان بدون در دست داشتن جدول آنها را دانست؟ خیلی ساده است: باید خودمان جدولی برای سینوسها تشکیل دهیم. ما هم حالا همین کار را می‌کنیم.

اول به زوایائی می‌پردازیم که سینوس آنها را با کمک هندسه می‌دانیم. قبل از همه زاویه ۹۰ درجه است که سینوس آن برابر است با ۱. سپس زاویه ۴۵ درجه، که سینوس آن به سادگی و با کمک قضیه فیثاغورث بدست می‌آید: این مقدار برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی ۰/۷۰۷ است.



بالاخره سینوس ۳۰ درجه را هم می‌دانیم زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ، ضلع روبروی به زاویه ۳۰ درجه برابر با نصف وتر است و بنابراین سینوس زاویه ۳۰ درجه مساوی $\frac{1}{2}$ می‌شود .

به این ترتیب ، سینوس (و یا آنطور که راحت‌تر است \sin) سه زاویه را می‌دانیم :

$$\sin 30^\circ = 0.5,$$

$$\sin 45^\circ = 0.707,$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

ولی ، این اطلاع برای حل مسائل هندسی کافی نیست و باید سینوس همه زوایای بینابین را ، و لااقل درجه به درجه ، بدانیم .

در مورد زوایای خیلی کوچک ، می‌توان برای محاسبه سینوس بجای نسبت ضلع روبرو وتر ، نسبت قوس رابر شعاع حساب کرد ، بدون اینکه دچار اشتباه زیادی شده باشیم ، از شکل ۸۶ (سمت راست)

دیده می‌شود که اختلاف بین نسبت $\frac{BC}{AB}$ و نسبت $\frac{\widehat{BD}}{AB}$ خیلی کم است و نسبت اخیر هم به سادگی محاسبه می‌شود . مثلاً برای زاویه ۱ درجه

قوس $BD = \frac{2\pi R}{360}$ است ، که در آن $\pi = 3.14159\dots$ است و

بنابراین $\sin 1^\circ$ را می‌توان چنین دانست :

$$\frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0.0175$$

و به همین ترتیب می‌توان بدست آورد :

$$\sin 2^\circ = 0.0349$$

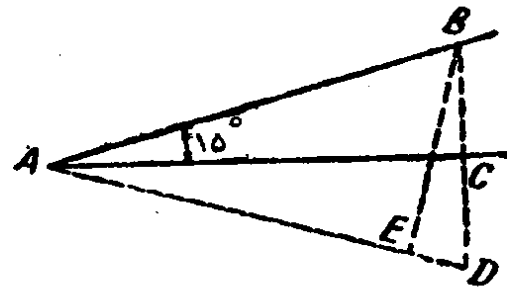
$$\sin 3^\circ = 0.0524$$

$$\sin 4^\circ = 0.0698$$

$$\sin 5^\circ = 0.0873$$

حالا باید به بینیم که چگونه می توان این جدول را ، بدون اینکه دچار خطای زیادی شویم ، ادامه دهیم . اگر سینوس ۳۰ درجه را باروش فوق محاسبه کنیم ، عدد ۰/۵۲۴ را بجای ۰/۵۰۰ بدست می آوریم که در رقم دوم اعشار با هم اختلاف دارند و خطای حاصل برابر $\frac{24}{500}$ یعنی قریب ۵٪ خواهد بود و این بیش از اندازه زیاد است و هرچقدر که احتیاجی به دقت زیاد نداشته باشیم ، نمی تواند بکار رود . برای اینکه بتوانیم مرزی برای روش فوق پیدا کنیم ، سینوس زاویه ۱۵ درجه را

بدقت محاسبه می کنیم . برای این منظور از روش زیر ، که از لحاظ ساختمان هندسی مشکل نیست ، استفاده می کنیم (شکل ۸۷) .



$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB}$$

فرض کنید

۰.۸۷ $\sin 15^\circ$ را چگونه محاسبه کنیم؟ باشد . BC را به اندازه خودش

تا نقطه D امتداد می دهیم و سپس D

را به A وصل می کنیم ، در اینصورت دو مثلث مساوی ABC و ADC و زاویه BAD مساوی ۳۰ درجه بدست می آید . عمود BE را بر AD فرود می آوریم ؛ مثلث قائم الزاویه BAE با زاویه ۳۰ درجه (زاویه

BAE) بدست می آید و بنابراین $BE = \frac{AB}{2}$ می شود . سپس AE را

از مثلث ABE طبق قضیه فیثاغورث بدست می آوریم :

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2,$$

$$AE = \frac{AB}{2} \sqrt{3} = 0,866AB.$$

و از آنجا داریم :

$$ED = AD - AE = AB - 0,866AB = 0,134AB$$

حالا در مثلث BED طول BD را محاسبه می کنیم :

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0,134AB)^2 = 0,268AB^2,$$

$$BD = \sqrt{0,268AB^2} = 0,518AB.$$

نصف BD یعنی BC مساوی 0,259AB می شود، یعنی داریم:

$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{259AB}{AB} = 0,259$$

اگر به سه رقم اعشارا کتفا کرده باشیم، این عدد، همان عددی است که در جدولها برای $\sin 15^\circ$ ضبط شده است. حالا اگر مقدار $\sin 15^\circ$ را با روشی که قبلا ذکر کرده ایم محاسبه کنیم به عدد 0,262 می رسیم : با مقایسه دو عدد

$$0,259 \text{ و } 0,262$$

می بینیم که اگر هر دو را در دو رقم اعشار گرد کنیم، بدست می آید:

$$0,26 \text{ و } 0,26$$

یعنی دو مقدار مساوی. خطای حاصل از تبدیل مقدار دقیق تر

0,259 به 0,26 مساوی $\frac{1}{1000}$ یعنی قریب 0,4% است. این مقدار

خطا برای محاسبات عادی مانعی ندارد و بنابراین می توانیم سینوس زوایای از 1 تا 15 درجه را طبق روش تقریبی که ذکر کردیم محاسبه کنیم. برای زوایای بین 15 درجه و 30 درجه می توانیم از تناسب استفاده کنیم. به این ترتیب استدلال می کنیم که اختلاف بین $\sin 30^\circ$ و $\sin 15^\circ$ برابر است با $0,50 - 0,26 = 0,24$. یعنی می توان فرض کرد که با

اضافه شدن يك درجه به زاویه، سینوس آن به اندازه $\frac{1}{15}$ این اختلاف

یعنی به اندازه $\frac{0,24}{15} = 0,016$ زیاد می شود. در واقع چنین نیست و

سینوس يك زاویه متناسب با خود زاویه بزرگ نمی شود. اختلافی که در این مورد پیش می آید، تنها مربوط به رقم سوم اعشار است، که ما در محاسبات تقریبی خود از آن می گذریم. به این ترتیب با اضافه کردن ۰/۰۱۶ به سینوس ۱۵ درجه، بطور متوالی، سینوس زوایای ۱۶، ۱۷، ۱۸ درجه و غیره را بدست می آوریم:

$$\sin 16^\circ = 0,26 + 0,016 = 0,28,$$

$$\sin 17^\circ = 0,26 + 0,032 = 0,29,$$

$$\sin 18^\circ = 0,26 + 0,048 = 0,31,$$

.....

$$\sin 25^\circ = 0,26 + 0,16 = 0,42, \dots$$

همه این سینوسها برای دو رقم اول اعشار صحیح و بنابراین برای دقتی که ما لازم داریم کافی هستند: اختلاف این مقادیر، با مقادیر واقعی سینوسها، کمتر از نصف واحد رقم بعدی است. بهمین ترتیب می توان سینوس زوایای بین ۳۰ درجه و ۴۵ درجه را محاسبه نمود، داریم:

$$\sin 45 - \sin 30^\circ = 0,707 - 0,5 = 0,207$$

با تقسیم این اختلاف بر ۱۵ به عدد ۰/۰۱۴ می رسیم. اگر این مقدار را مرتباً به سینوس ۳۰ درجه اضافه کنیم، بدست می آید:

$$\sin 31^\circ = 0,5 + 0,014 = 0,51,$$

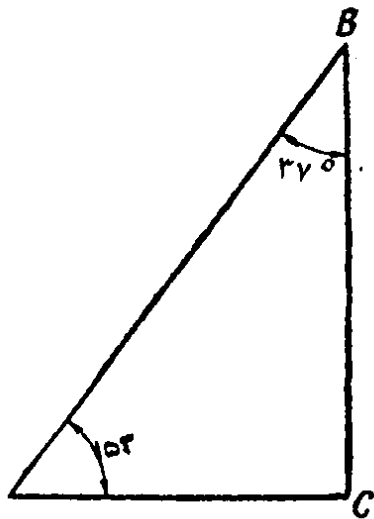
$$\sin 32^\circ = 0,5 + 0,028 = 0,52,$$

.....

$$\sin 40^\circ = 0,5 + 0,14 = 0,64, \dots$$

حالا باید به سینوس زوایای حاد بزرگتر از ۴۵ درجه پردازیم. برای این منظور می توان از قضیه فیثاغورث استفاده کرد. فرض کنیم که بخواهیم سینوس زاویه ۵۳ درجه یعنی نسبت $\frac{BC}{AB}$ را محاسبه کنیم

(شکل ۸۸) . چون زاویه $B = 37^\circ$ است ، می توان سینوس آنرا به طریق قبل محاسبه کرد :



$$0,5 + 7 + 0,014 = 0,6$$

از طرف دیگر می دانیم: $\sin B = \frac{AC}{AB}$

بنابراین :

$$\frac{AC}{AB} = 0,6 \Rightarrow AC = 0,6 AB$$

یا در دست داشتن AC می توان به سادگی BC را محاسبه نمود. این پاره خط مساویست با :

۸۸ . برای محاسبه سینوس زوایای بزرگتر از ۴۵ درجه .

$$\begin{aligned} \sqrt{AB^2 - AC^2} &= \sqrt{AB^2 - (0,6AB)^2} = \\ &= AB\sqrt{1 - 0,36} = 0,8AB . \end{aligned}$$

محاسبه بطور کلی مشکل نیست تنها باید به طریقه جذر گرفتن آشنا بود .

جذر گرفتن

روشی که در دوره جبر برای محاسبه جذریك عدد وجود دارد ، به سادگی فراموش می شود . ولی بدون آن هم می توان عمل کرد . در اینجا از يك روش قدیمی مربوط به جذر گرفتن یاد می کنیم . فرض کنید که بخواهیم $\sqrt{13}$ را محاسبه کنیم . این عدد بین دو عدد ۳ و ۴ واقع است و بنابراین از ۳ بیشتر است . اضافه آنرا نسبت به ۳ مساوی x می گیریم ، داریم :

$$\sqrt{13} = 3 + x \Rightarrow 13 = 9 + 6x + x^2$$

مجذور عدد کوچکتر از واحد x ، کسر کوچکی است و بنابراین

در تقریب اول می توان از آن صرف نظر کرد ، بدست می آید :

$$۱۳ = ۹ + ۶x \Rightarrow ۶x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} = ۰٫۶۷$$

یعنی مقدار تقریبی $\sqrt{۱۳}$ مساوی $۰٫۶۷$ است . اگر بخواهیم مقدار جذر را دقیق تر بدست آوریم ، می نویسیم :

$$\sqrt{۱۳} = ۳\frac{۲}{۳} + y ,$$

که در آن مقدار y کسر کوچکی است که می تواند مثبت یا منفی باشد . از آنجا بدست می آید :

$$۱۳ = \frac{۱۲۱}{۹} + \frac{۲۲}{۳}y + y^2$$

با حذف y^2 ، مقدار y مساوی $-\frac{۲}{۳۳} = -۰٫۰۶$ می شود و

بنابراین در تقریب دوم داریم :

$$\sqrt{۱۳} = ۳٫۶۷ - ۰٫۰۶ = ۳٫۶۱$$

تقریب سوم را هم به همین طریق می توان بدست آورد و ...
و اگر $\sqrt{۱۳}$ را به طریقی که برای جذر گرفتن در کتابهای جبر دیده ایم ، محاسبه کنیم ، حاصل آن تا $۰٫۰۱$ تقریب مساوی $۳٫۶۱$ خواهد شد .

محاسبه زاویه از روی سینوس آن

به این ترتیب ما می توانیم سینوس هر زاویه دلخواه را از صفر تا ۹۰ درجه تا دو رقم اعشار محاسبه کنیم . دیگر وجود يك جدول آماده برای ما ضرورت ندارد و هر وقت که لازم بدانیم ، می توانیم آنرا درست کنیم .

ولی برای حل مسائل مربوط به مثلثات ، باید امکان عمل عکس

را هم داشته باشیم، یعنی با در دست داشتن سینوس يك زاویه ، بتوانیم خود زاویه را محاسبه کنیم ، این عمل مشکل نیست . فرض کنید بخواهیم زاویه‌ای را بدست آوریم که سینوس آن مساوی $0/38$ باشد . چون سینوس این زاویه از $0/5$ کوچکتر است ، خود زاویه کوچکتر از 30 درجه خواهد بود ، ولی این زاویه از 15 درجه بزرگتر است ، زیرا $\sin 15^\circ$ ، همانطور که می‌دانیم، مساوی $0/26$ است. برای اینکه این زاویه را ، که در فاصله 15 درجه و 30 درجه واقع است ، پیدا کنیم، به همان روش تناسب متوسل می‌شویم :

$$0/38 - 0/26 = 0/12,$$

$$\frac{0/12}{0/016} = 7/5^\circ,$$

$$15^\circ + 7/5^\circ = 22/5^\circ,$$

بتابراین زاویه مورد نظر تقریباً مساوی $22/5$ درجه است .

مثال دیگر : زاویه‌ای را پیدا کنید که سینوس آن مساوی $0/62$

باشد :

$$0/62 - 0/50 = 0/12,$$

$$\frac{0/12}{0/014} = 8/6^\circ,$$

$$30^\circ + 8/6^\circ = 38/6^\circ$$

یعنی زاویه مزبور به تقریب مساوی $38/6^\circ$ ($38^\circ 36'$) می‌باشد .

وبالآخره مثال سوم: زاویه‌ای را پیدا کنید که سینوس آن مساوی

$0/91$ باشد .

چون سینوس مفروض بین $0/71$ و 1 است ، زاویه مجهول در

فاصله 45 درجه و 90 درجه خواهد بود. در شکل 89 ، اگر $BA = 1$

باشد ، BC سینوس زاویه A است . با در دست داشتن BC می‌توان

به سادگی سینوس زاویه B را بدست آورد :

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0,91^2 =$$

$$= 1 - 0,83 = 0,17$$

$$AC = \sqrt{0,17} = 0,42$$

حالا به محاسبه مقدار زاویه B ، که

سینوس آن مساوی 0,42 است ، می پردازیم

و از آنجا می توانیم به سادگی زاویه A را که

مساوی $A - 90^\circ$ می باشد ، حساب کنیم .

چون 0,42 بین دو عدد 0,26 و 0,5 قرار

دارد ، زاویه B بین 15 و 30 درجه خواهد

بود و به این ترتیب بدست می آید :

$$0,42 - 0,26 = 0,16,$$

$$\frac{0,16}{0,016} = 10^\circ$$

$$B = 15^\circ + 10^\circ = 25^\circ$$

و بنابراین زاویه A مساوی $B - 90^\circ$ یعنی $65(90 - 25)$ درجه

خواهد بود .

حالا دیگر ما کاملاً آماده ایم که مسائل مثلثات را به طور تقریبی

حل کنیم ، زیرا می توانیم با در دست داشتن زاویه ، سینوس آن و

برعکس با در دست داشتن سینوس يك زاویه ، خود زاویه را با تقریبی

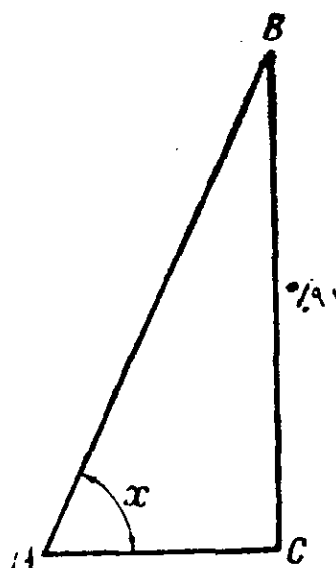
که برای محاسبات معمولی لازم است ، محاسبه کنیم .

ولی آیا برای این منظور تنها سینوس کافی است ؟ آیا واقعاً

بقیه توابع مثلثاتی مثل کسینوس ، تانژانت و غیره لازم نیست ؟ با چند

نمونه نشان خواهیم داد که برای مثلثات ساده شده ما همین سینوس

به تنهایی کفایت می کند .



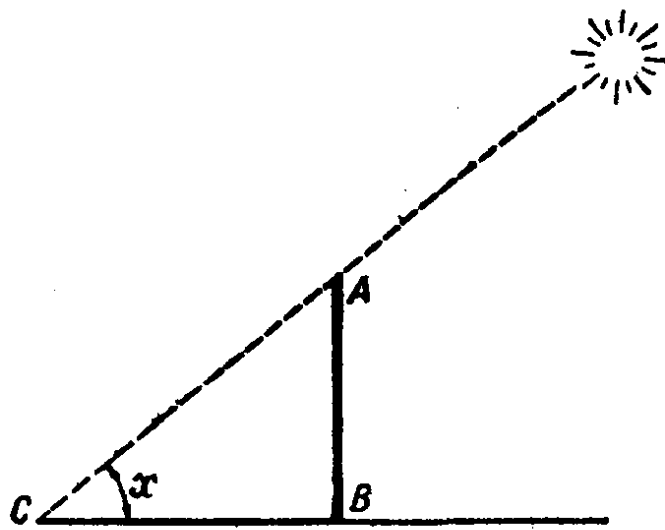
۸۹ . محاسبه زاویه
حاده وقتی که سینوس
آن معلوم باشد .

ارتفاع خورشید

مسئله

سایه BC (شکل ۹۰) از چوب عمودی AB به ارتفاع ۴/۲ متر ، مساوی ۶/۵ متر شده است . در این لحظه ارتفاع خورشید نسبت به سطح افق ، یعنی مقدار زاویه C ، چقدر است ؟

حل



۹۰ . تعیین ارتفاع خورشید نسبت به افق

به سادگی معلوم می شود که سینوس زاویه C برابر است

با نسبت $\frac{AB}{AC}$ از طرف

دیگر داریم :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{4/2^2 + 6/5^2} = \\ &= 7/74 \end{aligned}$$

و بنابراین سینوس

مورد نظر برابر است با $0/55 = \frac{4/2}{6/5}$. اگر به طریقی که قبلاً یاد

کردیم . زاویه C را جستجو کنیم ، جواب ۳۳ درجه بدست می آید . ارتفاع خورشید با تقریب ۰/۵ درجه مساوی ۳۳ درجه است .

فاصله تا جزیره

مسئله

در حالیکه با دوستان خود در ساحل رودخانه ای قدم می زنید ،

متوجه جزیره A (شکل ۹۱) می شوید و می خواهید فاصله آنرا تا نقطه B در ساحل پیدا کنید. برای این منظور با کمک قطب نما اندازه زاویه ABN (زاویه بین امتداد شمالی جنوبی SN - با امتداد AB) را تعیین می کنید. سپس فاصله BC و اندازه زاویه NBC (بین امتداد BC و SN) را بدست می آورید. سپس همین عمل را در نقطه C برای خط CA انجام می دهید. فرض می کنیم مقادیر زیر را بدست آورده باشید:

امتداد AB با جهت شمال SN به اندازه ۵۲ درجه به طرف شرق متمایل است.

امتداد BC نسبت به جهت شمال SN به اندازه ۱۱۰ درجه به طرف شرق متمایل دارد.

امتداد CA نسبت به جهت شمال SN به اندازه ۲۷ درجه به طرف غرب متمایل دارد.

طول BC مساوی ۱۸۷ متر است.

با این معلومات چگونه می توان طول BA را محاسبه کرد؟

حل

در مثلث ABC طول ضلع BC معلوم است، ضمناً داریم:

$$\angle ABC = 110^\circ - 52^\circ = 58^\circ;$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 110^\circ - 27^\circ = 43^\circ$$

در این مثلث (شکل ۹۱ - سمت راست). ارتفاع BD را رسم

می کنیم. داریم

$$\sin C = \sin 43^\circ = \frac{BD}{187}$$

اگر $\sin 43^\circ$ را با روشی که می دانیم محاسبه کنیم، عدد ۰/۶۸

را بدست می آوریم ، یعنی :

$$BD = 187 \times 0,68 = 127$$



۹۱ فاصله تا جزیره را چگونه محاسبه کنیم :

حالا در مثلث ABD ، ضلع مجاور به زاویه قائمه یعنی BD ، زاویه $A = 180^\circ - (58^\circ + 43^\circ) = 79^\circ$ و زاویه ABD که مساوی $11^\circ = 90^\circ - 79^\circ$ می باشد ، معلوم است . سینوس ۱۱ درجه را هم می توانیم محاسبه کنیم : $0,19$. بنابراین $\frac{AD}{AB} = 0,19$ می شود . از طرف دیگر ، طبق قضیه فیثاغورث داریم :

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

اگر $0,19AB$ را بجای AD قرار دهیم و BD را مساوی ۱۲۷ بگیریم ، داریم :

$$AB^2 = 127^2 + (0,19AB)^2,$$

و از آنجا $AB \neq 129$ بدست می آید .

به این ترتیب فاصله مجهول تا جزیره تقریباً مساوی ۱۲۹ متر

است .

اگر به فاصله AC هم احتیاج باشد ، می توان آنرا هم به سادگی

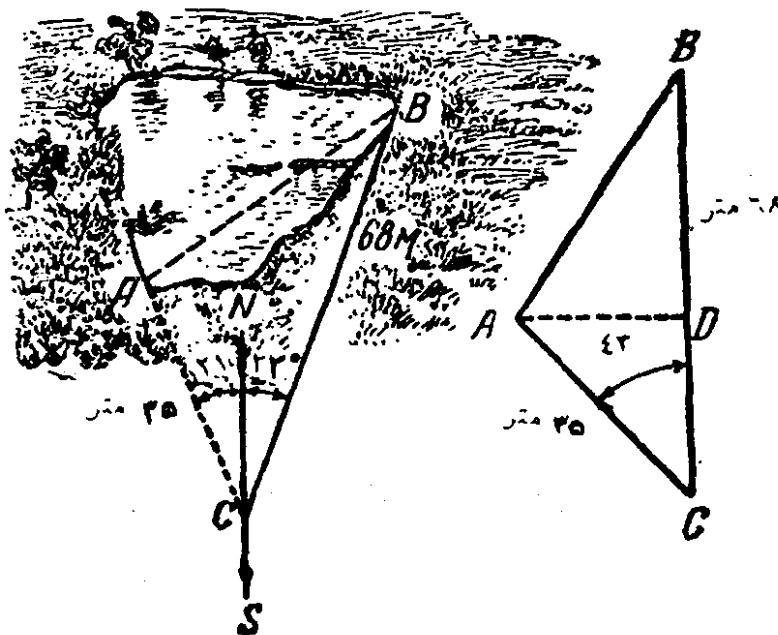
عرض دریاچه

مسئله

برای تعیین AB ، عرض دریاچه (شکل ۹۲) ، با کمک قطب نما زاویه انحراف CA را به طرف غرب مساوی ۲۱ درجه و انحراف CB را به طرف شرق مساوی ۲۲ درجه پیدا کرده اید . طول CB مساوی ۶۸ متر و طول CA مساوی ۳۵ متر شده است . با این مفروضات عرض دریاچه را بدست آورید .

حل

در مثلث ABC اندازه زاویه ۴۳ درجه و طول اضلاعی که این زاویه را ساخته اند، ۶۸ متر و ۳۵ متر ، می دانیم . ارتفاع AD را رسم



۹۲. محاسبه عرض دریاچه

می کنیم (شکل ۹۲ - سمت راست) ؛ داریم : $\sin ۴۳^\circ = \frac{AD}{AC}$. حالا

$\sin 43^\circ$ را مستقیماً محاسبه می‌کنیم، می‌شود 0.68 یعنی $\frac{AD}{AC} = 0.68$ می‌شود و داریم:

$$AD = 0.68 \times 35 = 24$$

سپس CD را محاسبه می‌کنیم:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649 \Rightarrow CD = 25.5$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25.5 = 42.5$$

حالا در مثلث ABD داریم:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 = 24^2 + 42.5^2 = 2380;$$

$$AB \neq 49$$

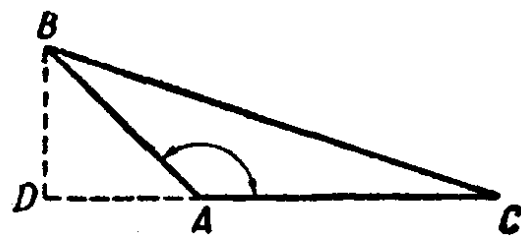
به این ترتیب عرض مجهول دریاچه تقریباً مساوی 49 متر است. اگر در مثلث ABC مقدار دو زاویه دیگر هم مورد احتیاج باشد، پس از محاسبه $AB = 49$ ، چنین عمل می‌کنیم:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0.49 \Rightarrow B = 29^\circ$$

زاویه سوم A را می‌توان با توجه به اینکه مجموع زوایای یک مثلث مسای 180 درجه است، محاسبه نمود:

$$A = 180^\circ - (29^\circ + 43^\circ) = 108^\circ$$

ممکن است حالتی پیش آید، که وقتی دو ضلع و زاویه بین از مثلثی معلوم است، زاویه معلوم منفرجه باشد، مثلاً فرض می‌کنیم در مثلث ABC (شکل



۹۳. حل مثلث منفرجه الزاویه

(۹۳)، زاویه منفرجه A و دو ضلع مجاور آن AB و AC معلوم باشد، برای محاسبه بقیه اجزاء مثلث چنین عمل می‌کنیم: ارتفاع BD از مثلث BDA رسم می‌کنیم و BD و AD را از مثلث BDA بدست می‌آوریم

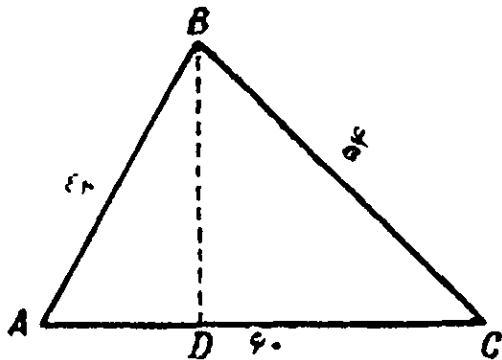
سپس با در دست داشتن $DA + AC$ ، طول BC و از آنجا $\sin C$ را از روی نسبت $\frac{BD}{BC}$ محاسبه می کنیم .

قطعه زمینی به شکل مثلث

مسئله

با قدمهای خود ، اضلاع يك قطعه زمین مثلث شکل را اندازه گرفته ایم ، بترتیب ۴۳ ، ۶۰ و ۵۴ قدم شده است . زوایای این مثلث را بدست آورید .

حل



۹۴ . زوایای این مثلث را پیدا کنید :
(۱) با کمک محاسبه . (۲) با کمک نقاله

این بفرنج ترین حالت حل مثلث است: معلوم بودن سه ضلع آن . ولی حتی در این مورد هم بجز سینوس ، به رابطه دیگری احتیاج نداریم .

ارتفاع BD (شکل ۹۴) ، وارد بر ضلع بزرگتر را رسم می کنیم ، داریم :

$$BD^2 = 43^2 - AD^2 ; BD^2 = 54^2 - DC^2$$

و از آنجا :

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2 \Rightarrow DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070$$

از طرف دیگر داریم :

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60(DC - AD)$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$60(DC - AD) = 1070 \Rightarrow DC - AD = 17/8$$

و از دو معادلهٔ زیر ، اندازه DC بدست می‌آید :

$$\begin{cases} DC - AD = 17/8 \\ DC + AD = 60 \end{cases} \Rightarrow DC = 38/9$$

حالا ارتفاع BD به سادگی محاسبه می‌شود :

$$BD = \sqrt{54^2 - 38/9^2} = 37/4$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37/4}{43} = 0,187 \Rightarrow A \neq 60^\circ$$

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37/4}{54} = 0,169 \Rightarrow C \neq 44^\circ$$

و زاویهٔ سوم :

$$B = 180^\circ - (A + C) = 76^\circ$$

اگر در این حالت زوایای مثلث را با کمک جدول و امکانات دیگر مثلثات، بدست می‌آوریم ؛ البته زوایای دقیق‌تر و بر حسب درجه و دقیقه بیان می‌شد . ولی آن جوابها هم با اشتباهاتی همراه است ، زیرا وقتی که اضلاع مثلث را با کمک قدم اندازه می‌گیریم ، اشتباهی که کمتر از ۲ تا ۳٪ نیست پیدا می‌کنیم . بنابراین اگر نخواهیم خودمان را گول بزنیم ، باید مقادیری را که برای زوایا بدست آورده‌ایم به اصطلاح «گرد» کنیم و با تقریب یک درجه بنویسیم . ولی در اینصورت بهمان جوابهایی می‌رسیم که ما در اینجا با روش ساده خود به آن رسیدیم . استفاده از مثلثات ساده شدهٔ ما ، در اینجا عملی‌تر و راحت‌تر است .

تعیین اندازه يك زاویه ، بدون هر اندازه گیری

برای اندازه گیری يك زاویه در روی زمین تنها به قطب نما و یا حتی انگشتان خود و قوطی کبریت احتیاج داریم . ولی ممکن است که بخواهیم اندازه زاویه ای را که روی کاغذ و یا نقشه رسم شده است . بدست آوریم .

واضح است که اگر نقاله در دسترس باشد ، مسئله به سادگی حل می شود . ولی اگر نقاله ای موجود نباشد ؟ در این حالت هم ، کسی که هندسه می داند ، نباید ناامید شود و دست روی دست بگذارد .
به بینیم مسئله زیر را چگونه حل کنیم ؟

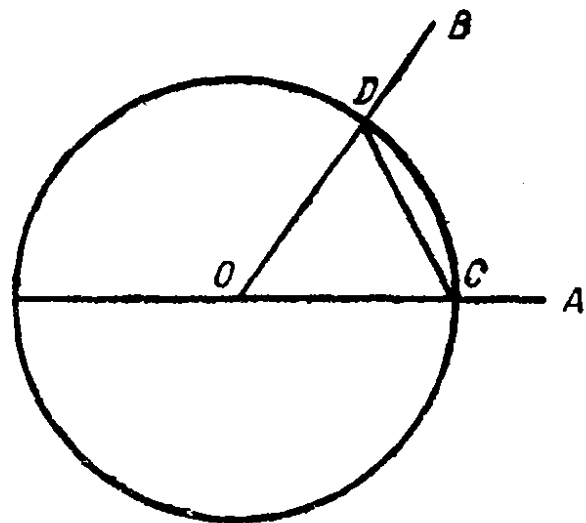
مسئله

زاویه AOB (شکل ۹۵) کوچکتر از ۱۸۰ درجه داده شده است .
می خواهیم مقدار آنرا بدون اندازه گیری معین کنیم .

حل

می توانیم از نقطه ای واقع بر ضلع BO عمودی بر ضلع AO فرود آوریم و در مثلث قائم الزاویه ای که بدست می آید ، اضلاع مجاور به زاویه قائمه و وتر را اندازه بگیریم ، با کمک آنها سینوس زاویه و سپس از روی سینوس ، مقدار خود زاویه را پیدا کنیم . ولی این راه حل مسئله ، با شرایطی که داشتیم (بدون هیچگونه اندازه گیری) متناقض است .

به مرکز O و به شعاع دلخواه
 يك دایره کامل رسم می کنیم .
 C و D ، نقاط تلاقی این دایره را
 با اضلاع زاویه ، بهم وصل می کنیم .
 حالا از نقطه C با کمک
 پرگار ، به اندازه وتر CD بطور
 متوالی و در یک جهت روی دایره
 جدا می کنیم ، تا زمانی که سوزن
 پرگار دوباره روی C قرار گیرد .



۹۵ . اندازه زاویه AOB را چگونه
 می توان تنها به کمک پرگار بدست آورد؟

باید این حساب را نگه داشته باشیم که چند بار دایره را دور
 زده ایم و چند بار وتر CD را منتقل کرده ایم .

فرض می کنیم n مرتبه دایره را دور زده باشیم و در این مدت S
 مرتبه وتر CD را پشت سرهم جدا کرده باشیم . در این صورت مقدار
 زاویه مجهول چنین است :

$$\hat{AOB} = \frac{360^\circ n}{S}$$

در حقیقت ، اگر فرض کنیم ، زاویه مفروض x درجه باشد ، اگر
 وتر CD به اندازه S مرتبه جابجا شده باشد ، تمام مسیری طی شده به وسیله
 پرگار مساوی $S \cdot x^\circ$ می باشد ، از طرف دیگر چون n مرتبه دور دایره
 را طی کرده ایم ، همین مسیر مساوی $360^\circ n$ می شود و بنابراین داریم :

$$x^\circ \cdot S = 360^\circ n$$

واز آنجا :

$$x^\circ = \frac{360^\circ n}{S}$$

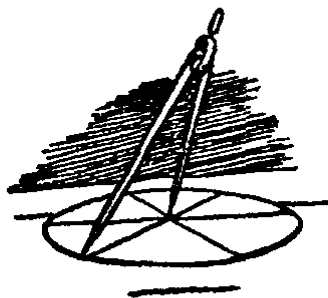
برای زاویه ای که در شکل ۹۵ رسم شده است ، $n=3$ و

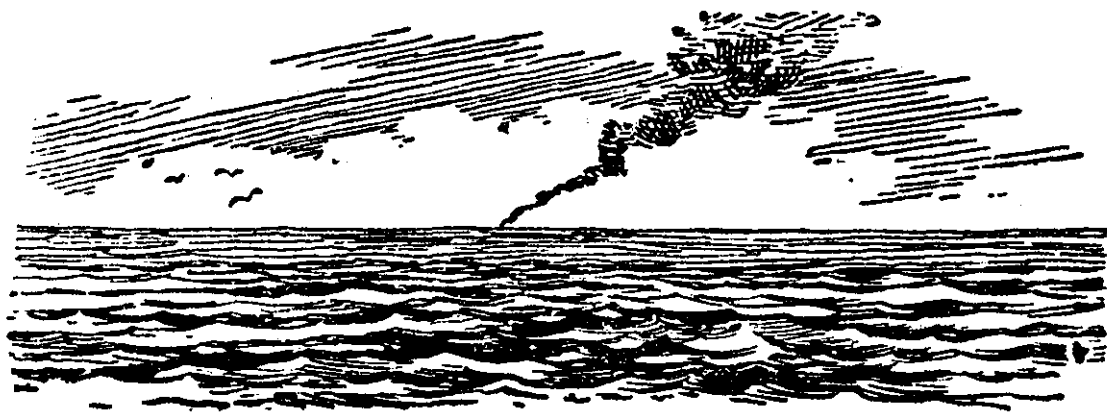
$S = 20$ است (تحقیق کنید!) و بنابراین زاویه AOB مساوی 54 درجه می شود.

اگر پرگار در دسترس نباشد، می توان قطعه ای چوب کبریت و یا نوار کوچک کاغذ مساوی وتر CD جدا کرد و نقش پرگار را به آن سپرد.

مسئله

با روشی که در مسئله قبل ذکر کردیم، اندازه زوایای مثلث شکل ۹۴ را بدست آورید.





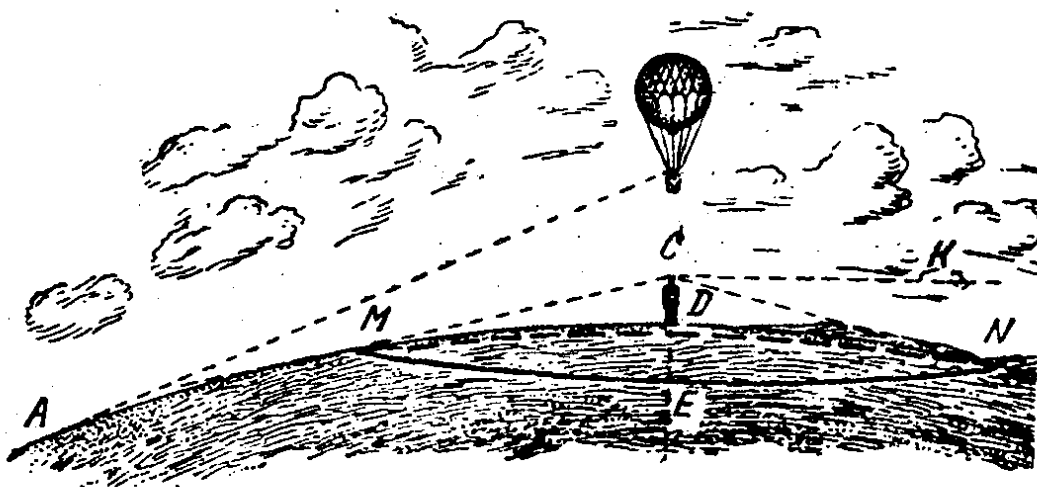
٦

زمین و آسمان کجا بهم می‌رسند؟

افق

وقتی که در يك دشت هموار ، به اطراف نگاه کنید ، خود را در مرکز دایره‌ای می‌بینید که محیط آن قسمت مرئی زمین را نسبت به شما محدود می‌کند . این افق است . به خط افق نمی‌توان دسترسی پیدا کرد : وقتی که بطرف آن حرکت کنید ، از شما دور می‌شود . ولی با وجودی که غیر قابل دسترس است ، در واقع وجود دارد و يك خطای چشم ، یا يك سراب ، نیست . برای هر نقطه‌ای که ناظر ایستاده باشد ، حد معینی از سطح زمین دیده می‌شود و فاصله تا این حد را هم می‌توان محاسبه نمود . برای اینکه بتوانید ارتباط هندسه را با افق

پیش خود مجسم کنید ، به شکل ۹۶ ، که قسمتی از کره زمین را نشان می دهد ، مراجعه کنید . در نقطه C چشم ناظر قرار گرفته است که به فاصله CD از سطح زمین است . چنین ناظری ، اگر در دشت هموار باشد ، تا چه فاصله ای از خود را می بینید ؟ واضح است که تا نقاط M و N : جایی که شعاع دید بر سطح زمین مماس شده است : نقاط دورتر زمین در زیر شعاع دید چشم قرار گرفته اند . این نقاط M و N (و بقیه نقاطی که روی محیط دایره MEN قرار گرفته اند) حد دید سطح زمین را معین می کنند ، یعنی خط افق را تشکیل می دهند . بنظر می رسد که در طول این خط آسمان به زمین تکیه داده است ، زیرا در این نقاط آسمان و اشیاء زمینی باهم و در یکجا دیده می شوند .



۹۶. افق

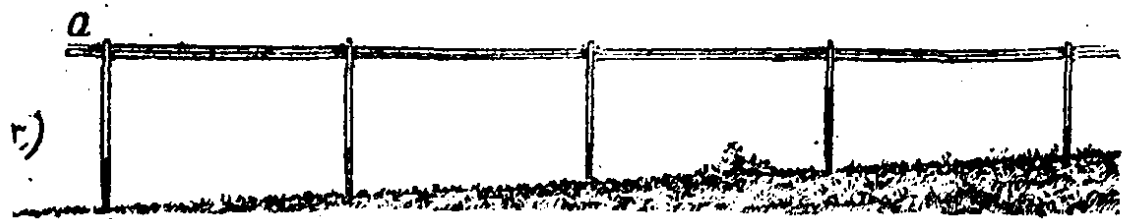
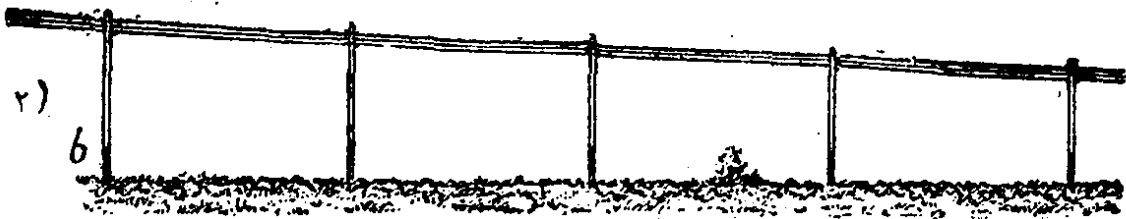
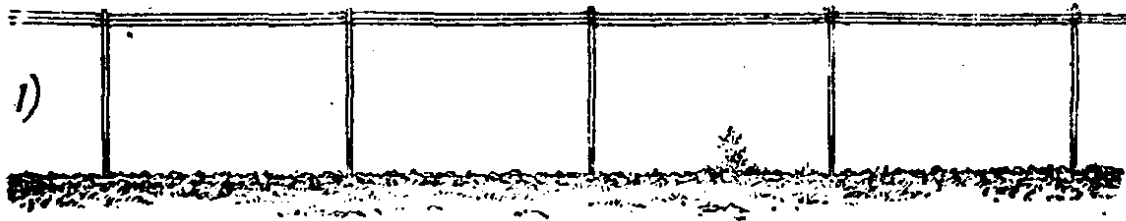
ممکن است بنظر برسد که شکل ۹۶ ، حقیقت کامل را منعکس نمی کند : زیرا خط افق در همان سطح چشم ناظر واقع شده است ، در حالیکه روی شکل ، دایره افق بطور روشن در زیر ناظر قرار گرفته است . در حقیقت همیشه بنظر می رسد که خط افق با چشم ما در یک سطح قرار دارد و حتی وقتی که به نقطه مرتفع تر برویم ، خط افق همراه ما بالا می آید . ولی این خطای باصره است و در واقع ، خط افق

همیشه زیر چشم ، همانطور که در شکل ۹۶ دیده می شود ، قرار دارد. ولی زاویه ای که خطوط مستقیم CN و CM با خط راست CK- عمود بر شعاع زمین در نقطه C- تشکیل می دهند (این زاویه را «انخفاض افق» گویند) ، همیشه کوچک است و اندازه گیری آن بدون وسایل لازم ، ممکن نیست .

به چگونگی جالب دیگری هم توجه می کنیم . گفتیم که با بالا رفتن ناظر از سطح زمین ، مثلاً بوسیله هواپیما یا بالن ، خط افق در سطح چشم بنظر می رسد ، یعنی مثل اینکه همراه ناظر بالا می آید . اگر به اندازه کافی اوج گرفته شود ، چنین بنظر می رسد که زمین پایین تر از خط افق قرار گرفته است ، به عبارت دیگر زمین به شکل کاسه ای در می آید که لبه آن همان خط افق است . این مطلب را اعداد آن پو در نوشته پرتنز خود بنام «ماجراهای هانس» خیلی خوب تشریح کرده است :

«علاوه بر این (هوانورد قهرمان نقل می کند) بنظر می رسد که سطح کره زمین فرو رفته است . در حالیکه انتظار من این بود که ضمن بالا رفتن ، کره زمین را ، به شکل واقعی خود ، یعنی برآمده ، به بینم : من فقط از راه تفکر توانستم این پدیده را برای خودم حل کنم . خط قائمی که از بالن من به زمین می رسد ، یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای بود که قاعده آن عبارت بود از خطی که پای این عمود را به افق وصل می کرد و وتر این مثلث ، خطی که از افق به بالن من می رسید . ولی ارتفاع من نسبت به منطقه دید خیلی کم بود ؛ به عبارت دیگر قاعده و وتر مثلث قائم الزاویه مذکور ، نسبت به ضلع قائم آن ، آنقدر بزرگ بودند که می شد آنها را تقریباً موازی یکدیگر فرض کرد . بنابراین هر نقطه ای که زیر بالن قرار گرفته باشد ، پایین تر از

سطح افق بنظر می‌رسد. پدیده گود بودن از اینجا ناشی می‌شود. و این وضع تا زمانی وجود دارد که قاعده و وتر مثلث موازی بنظر برسند».

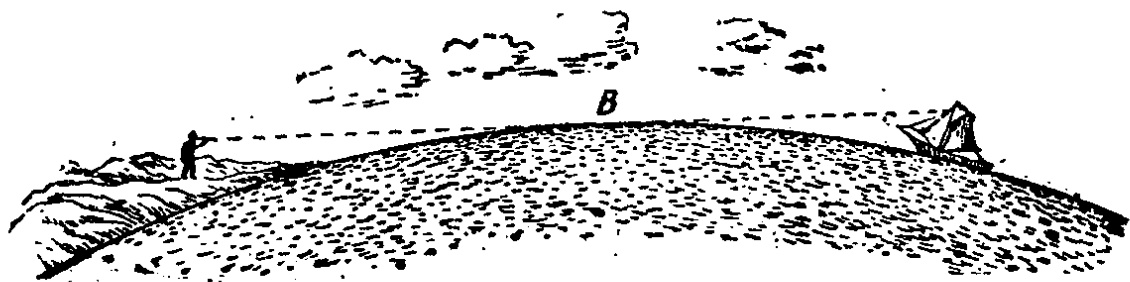


۹۷. وقتی که به ردیف تیرهای تلگراف نگاه می‌کنیم: آنها را چگونه می‌بینیم؟

برای تکمیل این توضیح به مثال زیر می‌پردازیم. یک ردیف تیر تلگراف، که روی یک خط راست قرار گرفته‌اند، در نظر بگیرید (شکل ۹۷). برای چشمی که در نقطه b ، در سطح پایه‌های تیرها، قرار گرفته باشد، به وضع شکل ۲ دیده می‌شود. ولی برای چشمی که در نقطه a در امتداد رأس تیرها نگاه کند به وضع شکل ۳ بنظر می‌آید یعنی بنظر می‌رسد که زمین از سطح افق بالاتر آمده است.

کشتی در افق

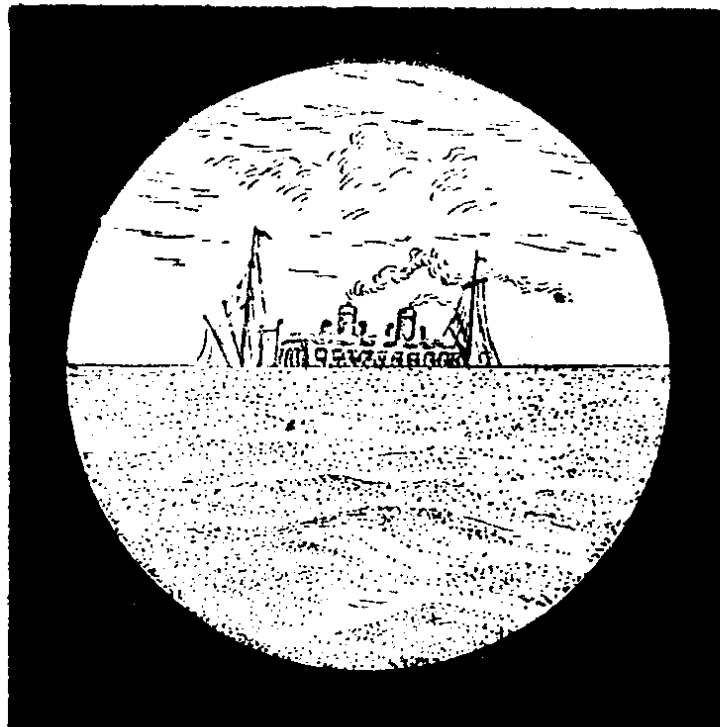
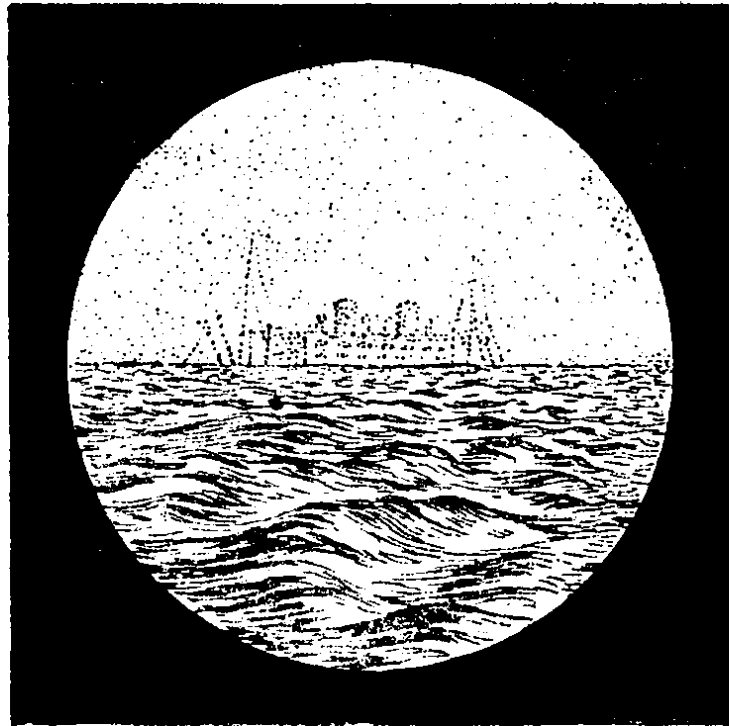
وقتی که از ساحل دریا و یا دریاچه بزرگ به کشتی که از زیر افق ظاهر می‌شود، نگاه کنیم؛ کشتی را در همان نقطه‌ای که در واقع هست نمی‌بینیم (شکل ۹۸)، بلکه خیلی نزدیک به نقطه B (جایی که دید ما بر دریای محدب مماس است) بنظر می‌رسد، برای ناظری که بدون چشم مسلح نگاه می‌کند، خیلی دشوار است که خود را از این تصور غلط نجات دهد، که کشتی در نقطه B قرار گرفته است و از افق هم دور نیست (با آنچه که در فصل چهارم گفتیم - اثر تپه یا بلندی روی قضاوت ما درباره فاصله - مقایسه کنید).



۹۸. کشتی زیر افق

ولی با کمک دوربین این اختلاف فاصله کشتی، خیلی روشن‌تر درک می‌شود. روشنی اشیاء نزدیک و دور در دوربین یکنواخت نیست. اگر دوربین برای دور تنظیم شده باشد، اشیاء نزدیک پهن شده بنظر می‌آیند و برعکس، اگر برای اشیاء نزدیک تنظیم شده باشد، دور را مه‌آلود و مبهم نشان می‌دهد. بنابراین اگر دوربین را بطرف آبی که در افق است منظم کنیم، بطوریکه سطح آبرو روشن نشان بدهد، اگر کشتی با خطوطی مبهم و پخش شده دیده شود، به این معنی است که نسبت به ناظر در فاصله دورتری قرار گرفته است (شکل ۹۹ - بالا) و برعکس اگر در اینحال دوربین را چنان تنظیم کنیم که کشتی را

(درحالیکه نیمی از آن پشت افق مخفی شده است) به روشنی به بینیم، متوجه می‌شویم که سطح آب افق، روشنی قبلی خود را از دست می‌دهد، مثل اینکه درابر فرورفته است (شکل ۹۹ - پائین).

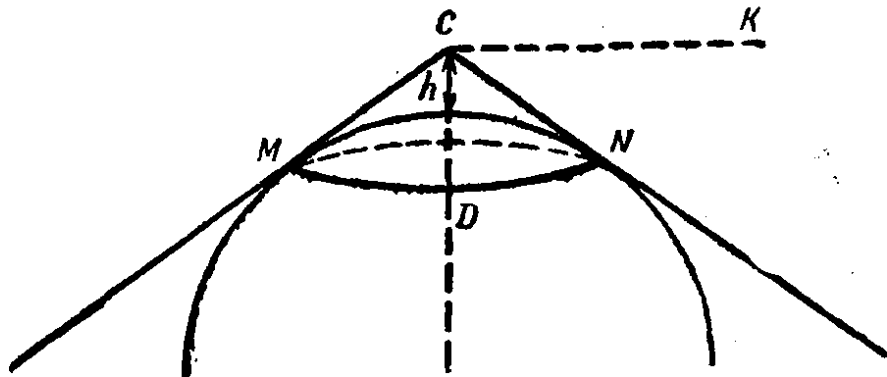


۹۹. کشتی که در افق ظاهر شده، از پشت دوربین

دوری افق

خط افق درجه فاصله‌ای از ناظر قرار گرفته است ، به عبارت دیگر : شعاع دایره‌ای از سطح هموار زمین که ما خود را در مرکز آن می‌بینیم ، چقدر است ؟ بادر دست داشتن ارتفاع ناظر ، چگونه فاصله او را تا افق می‌توان محاسبه کرد ؟

مسئله منجر به محاسبه طول قطعه خط CN (شکل ۱۰۰) می‌شود ، که امتداد خطی است که از چشم ناظر بر سطح زمین مماس شده است . همانطور که از هندسه می‌دانیم ، مجذور این مماس برابر است با حاصلضرب قطعات کوچک و بزرگ قاطعی که از مرکز گذشته است ، یعنی h و $h + 2R$ (شعاع کره زمین است) . چون ارتفاع چشم



۱۰۰. محاسبه فاصله افق

ناظر از سطح زمین ، معمولاً نسبت به قطر کره زمین ($2R$) ناچیز است ، و مثلاً برای بالنی که خیلی بالا رفته باشد قریب $1/500$ قطر است ، می‌توان $h + 2R$ را همان $2R$ گرفت و در اینصورت رابطه ساده‌تر می‌شود :

$$CN^2 = h \cdot 2R.$$

بنابراین فاصله تا افق را می توان از رابطه ساده زیر بدست آورد :

$$\text{دوری افق} = \sqrt{2Rh}$$

که در آن R ، شعاع کره زمین (قریب ۶۴۰۰ کیلومتر*) و h ، ارتفاع چشم ناظر از سطح زمین است .

از طرف دیگر، چون $80 = \sqrt{6400}$ می باشد ، رابطه را می توان

به صورت زیر نوشت :

$$\text{دوری افق} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h}$$

که در آن باید h را بر حسب کیلومتر بیان کرد .

این ، يك محاسبه ساده و خالص هندسی است . اگر بخواهیم این اندازه گیری را با در نظر گرفتن عوامل فیزیکی که در بعد افق اثر می گذارند ، دقیق تر کنیم ، باید به «انکسار جوی» توجه داشته باشیم ،

انکسار، یعنی شکستن اشعه نور در جو ، فاصله تا افق را تقریباً $\frac{1}{15}$ (۶٪)

افزایش می دهد . این عدد - ۶٪ - مقدار متوسط تقریبی است .

دوری افق با توجه به بسیاری شرایط دیگر زیاد و یا کم می شود . مهمترین

شرایط چنین اند :

شرایط کم کننده	شرایط افزایش دهنده
با پائین آمدن فشار جو ،	با بالا رفتن فشار جو ،
در ارتفاعات ،	در نزدیکی سطح زمین ،
در هوای گرم ،	در هوای سرد ،
در روز ،	هنگام صبح و عصر ،
در هوای خشک ،	در هوای مرطوب ،
بالای خشکی .	بالای دریا .

مسئله

کسی که در دشت همواری ایستاده است ، چه فاصله ای از زمین را

می بیند ؟

(* دقیق تر ۶۳۷۱ کیلومتر .

حل

چشم انسان بالغ را در $1/6$ متری یا $0/0016$ کیلومتری زمین به حساب می آوریم ، داریم :

$$(کیلومتر) \quad 4/52 = \sqrt{113/0/0016} = \text{دوری افق}$$

همانطور که قبلا گفتیم ، جو زمین افق را به اندازه 6% دورتر می برد ، برای اینکه این عامل را هم به حساب بیاوریم ، باید $4/52$ کیلومتر را در $1/06$ ضرب کنیم ، بدست می آید :

$$(کیلومتر) \quad 4/8 \neq 4/52 \times 1/06$$

به این ترتیب ، شخصی که با قد متوسط باشد ، نمی تواند دورتر از $4/8$ کیلومتر را به بیند . قطر دایره دید $9/6$ کیلومتر و مساحت آن 72 کیلومتر مربع می شود . و این خیلی کمتر از آنست که معمولا در تصور افراد درباره منطقه دید وجود دارد .

مسئله

اگر شخصی روی قایق خود در دریا ایستاده باشد ، تاچه فاصله ای را می بیند ؟

حل

اگر ارتفاع چشم کسی را که در قایق ایستاده است ، نسبت به سطح آرام آب 1 متر یا $0/001$ کیلومتر بگیریم ، فاصله او تا افق چنین است :

$$(کیلومتر) \quad 3/8 = \sqrt{113/0/001}$$

و یا با در نظر گرفتن انکسار جوی قریب $3/8$ کیلومتر ، از اشیائی که

دورتر قرار گرفته باشند ، فقط قسمتهای بالای آنها دیده می‌شود و قسمت پائین آنها زیر افق پنهان است .

وقتی که چشم در سطح پائین تر قرار گیرد ، افق تنگ‌تر می‌شود :
 مثلا برای ارتفاع نیم متری افق در $\frac{1}{4}$ کیلومتری قرار می‌گیرد .
 برعکس ، وقتی که از نقطه بلندتری نظارت کنیم (مثلا ازدکل کشتی)
 فاصله تا افق زیادتر می‌شود : مثلا برای ارتفاع ۴ متری افق در ۷
 کیلومتری قرار می‌گیرد .

مسئله

هوانوردی که در بلندترین ارتفاع خود (یعنی در ارتفاع ۲۲ کیلومتری) قرار گرفته است، چه وسعتی از زمین را در اطراف خود می‌بیند ؟

حل

چون بالن در ارتفاع ۲۲ کیلومتری قرار گرفته است ، فاصله تا افق برای آن چنین است :

$$113\sqrt{22} = 530 \text{ (کیلومتر)}$$

و با به حساب آوردن انکسار ۵۶۰ کیلومتر .

مسئله

هوانورد چه ارتفاعی بالا برود که بتواند تا ۵ کیلومتری اطراف

خود را ببیند ؟

حل

از رابطه دوری افق ، در این حالت به معادله زیر می‌رسیم :

$$50 = \sqrt{2Rh}$$

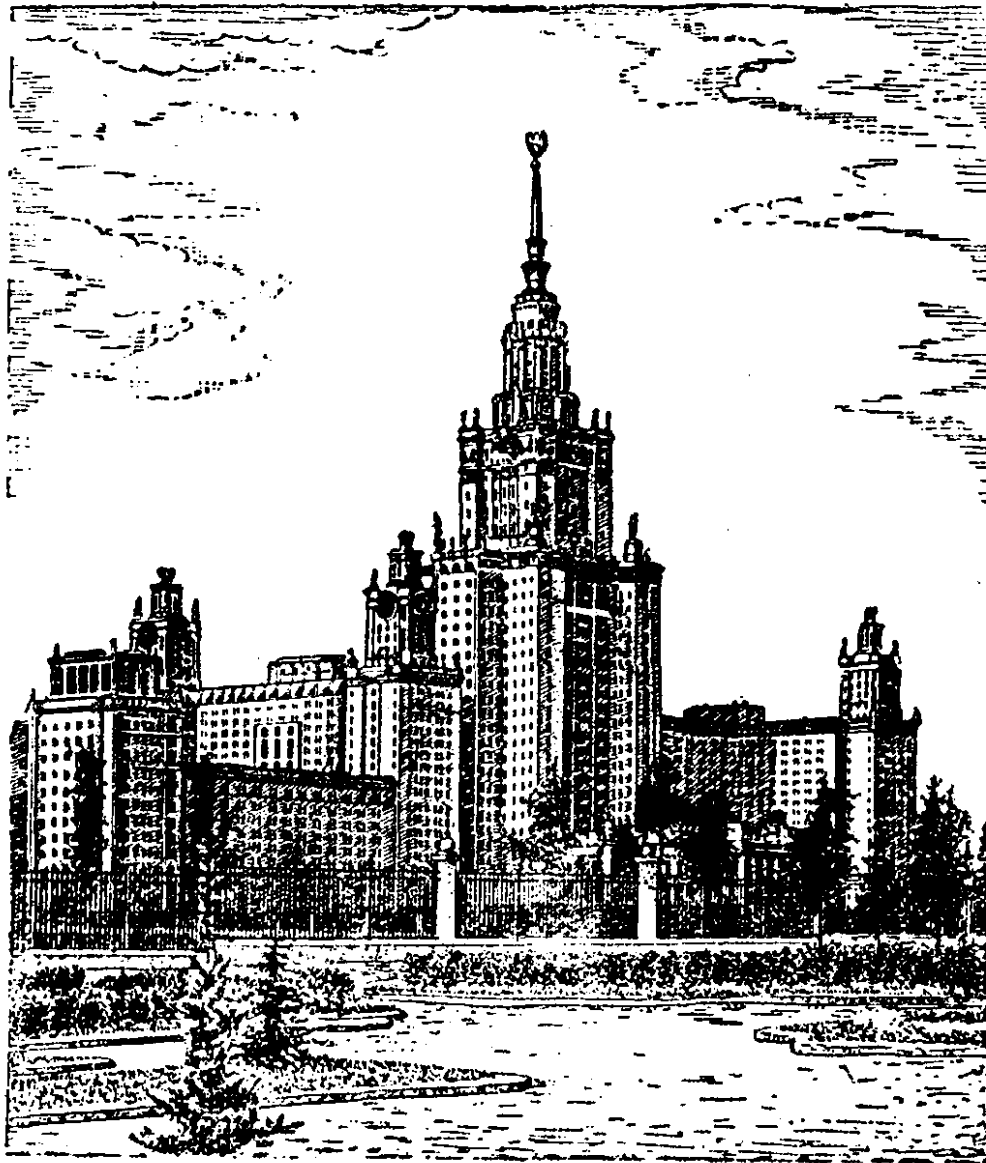
و از آنجا :

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12800} = 0,2 \text{ (کیلومتر)}$$

یعنی باید تا ارتفاع ۲۰۰ متری بالا برود .

برای اینکه محاسبه دقیق‌تر باشد ، باید ۶٪ را از ۵۰ کیلومتر

کم کنیم ، ۴۷ کیلومتر بدست می‌آید و از آنجا :



$$h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12800} = 0,17 \text{ (کیلومتر)} = 170 \text{ (متر)}$$

در مرتفع‌ترین نقطه کوه لنین در مسکو، ساختمان سی و دو طبقه دانشگاه برپا شده است (شکل ۱۰۱) که بزرگترین مرکز تحصیلی و علمی در جهان است.

این ساختمان در ۲۴۲ متری سطح آب رودخانه مسکو قرار دارد (ارتفاع طبقه سی و دوم آن).

بنابر این از پنجره طبقه بالای دانشگاه چشم اندازی به شعاع بیش از ۵۵ کیلومتر وجود دارد.

برج گویگول

مسئله

این مطلب هم جالب که: آیا ارتفاع سریع‌تر زیاد می‌شود یا دوری افق؟ بسیاری تصور می‌کنند که با بالا رفتن ناظر، افق با سرعت غیر عادی وسیع می‌شود. ضمناً گویگول هم همینطور فکر می‌کرد. او در مقاله «درباره معماری زمان ما» چنین می‌نویسد:

«برجهای عظیم و بلند برای شهر ضروری است... ما معمولاً به ارتفاعاتی محدود شده‌ایم که امکان می‌دهد تنها یک شهر را ببینیم، ضمناً برای پایتخت لازم است که لااقل صدوپنجاه ورست* از اطراف را ببینیم و برای این منظور می‌توان تنها یک یا دو طبقه اضافی به وجود آورد تا همه چیز تغییر کند. فاصله چشم انداز آدمی بطور فوق‌العاده و تصاعدی نسبت به ارتفاع زیاد می‌شود».

حقیقت امر چگونه است؟

(* هر ورست ۱/۰۶۶۸ کیلومتر است، ۱۵۶ ورست ۱۶۰ کیلومتر می‌شود.)

حل

کافی است به رابطه:

$$\text{دوری افق} = \sqrt{2Rh}$$

مراجعه کنیم، تا نادرستی این حکم که: «وسعت دید» با بالا رفتن ناظر خیلی سریع رشد می‌کند، روشن شود. برعکس، دوری افق خیلی کندتر از ارتفاع زیاد می‌شود: فاصله تا افق متناسب با جذر ارتفاع است. وقتی که ارتفاع را ۱۰۰ برابر کنیم، افق تنها ۱۰ برابر دور می‌شود. وقتی که ارتفاع را ۱۰۰۰ برابر بیشتر کنیم، افق ۳۱ مرتبه دورتر می‌شود. بنابراین اشتباه است اگر گمان کنیم که «تنها يك يا دو طبقه اضافی، همه چیز را تغییر می‌دهد». وقتی که به يك ساختمان ۸ طبقه، ۲ طبقه اضافه کنیم، افق به اندازه $\sqrt{\frac{10}{8}}$ عقب می‌رود، یعنی ۱/۱ مرتبه دور می‌شود: تنها ۱۰٪. و چنین اضافه‌ای خیلی کم محسوس است.

اما درباره برجی که از فراز آن بتوان «لا اقل صدوپنجاه ورست» یعنی ۱۶۰ کیلومتر را دید، فکری کاملاً غیر واقعی است. البته گوگول شك نداشت که این برج باید خیلی بزرگ باشد.

در حقیقت از معادله

$$160 = \sqrt{2Rh}$$

بدست می‌آید:

$$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25600}{12800} = 2 \text{ (کیلومتر)}$$

و این ارتفاع يك كوه بزرگ است. حتی بلندترین ساختمان دولتی ۳۲ طبقه مسکو، که میله طلائی بالای آن ۲۸۰ متر از پایه ساختمان

ارتفاع دارد، ۷ بار از طرح برج گوگول پائین تر است.

تپه پوشکین

پوشکین هم دچار همین اشتباه شده است، وقتی که در کتاب «شوالیه خسیس»، از افق دوری صحبت می کند که از بالای «تپه افتخار» به چشم می خورد:

و شاه توانست با خوشحالی از بالای آن به اطراف بنکرد
هم به دره ای که پوشیده از خیمه های سفید بود
و هم به دریا، که کشتیها در آن حرکت می کردند...

ماقبلاً دیدیم که ارتفاع این «تپه افتخار» چقدر می توانست باشد:
حتی ارتش آتیلا هم نمی توانست به این طریق تپه ای بلندتر از ۵ متر
به وجود آورد. حالا می توانیم حساب کنیم، اگر کسی بر بالای چنین
تپه ای باشد، تا چه فاصله ای را می تواند ببیند.

چشم چنین آدمی در $\frac{1}{4} + 5$ یعنی $5\frac{1}{4}$ متری زمین قرار گرفته
است و بنابراین تا فاصله:

$$\sqrt{2 \times 6400 \times 0,0065} \approx 9 \text{ (کیلومتر)}$$

۹ کیلومتری اطراف خود را می بینید و این فقط ۴ کیلو متر بیشتر از
موقعی است که شخص تنها روی پای خود ایستاده است.

خطوط آهن کجا بهم می رسند؟

مسلماً بارها دیده اید که خطوط موازی راه آهن، هرچه دورتر
بروند، بهم نزدیک تر می شوند. اما آیا اتفاق افتاده است که به بینید،

در جایی بالاخره دو خط آهن بهم رسیده باشند؟ آیا چنین پیش آمدی ممکن است؟ حالا دیگر شما می‌توانید با اطلاعاتی که دارید از عهده حل این مسئله بر آید.

حل

بخاطر بیاوریم که هر شیئی . برای چشم طبیعی ، وقتی که تحت زاویه يك دقیقه دیده شود ، یعنی وقتی که در فاصله‌ای مساوی ۳۴۰۰ برابر قطر خود واقع باشد ، به صورت يك نقطه دیده می‌شود . فاصله بین دو خط راه آهن ۱/۵۲ متر است . یعنی برای اینکه فاصله بین دو خط به يك نقطه تبدیل شود ، باید در فاصله $۱/۵۲ \times ۳۴۰۰$ متری یا ۵/۲ کیلومتری قرار گیرد . بنابراین اگر ما بتوانیم از فاصله ۵/۲ کیلومتری به خطوط آهن نگاه کنیم ، آنرا به صورت يك نقطه خواهیم دید . ولی در دشت هموار ، افق نزدیک‌تر از ۵/۲ کیلومتری یعنی در ۴/۸ کیلومتری واقع است . به این ترتیب انسانی که با قامت معمولی باشد ، نمی‌تواند در دشت هموار ، نقطه تلاقی دو خط راه آهن را ببیند ، باید یکی از شرایط زیر وجود داشته باشد تا چنین امکانی بدست آید :

(۱) وقتی که قدرت دید ناظر پائین باشد و برای او اشیائی بيك نقطه تبدیل شوند که زاویه دید آنها از يك دقیقه بیشتر باشد ؛

(۲) وقتی مسیر راه آهن افقی نباشد ؛

(۳) وقتی که چشم ناظر بالاتر از قد معمولی باشد :

$$\frac{۵/۲^۲}{۲R} = \frac{۲۷}{۱۲۸۰۰} = ۰/۰۰۲۱ \text{ (کیلومتر)}$$

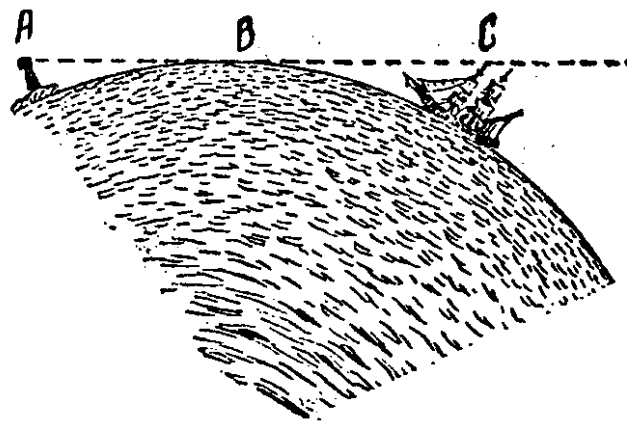
یعنی در ۲۱۰ سانتیمتری زمین قرار گرفته باشد .

در ساحل دریا، چراغ دریائی را در ۴۰ متری بالای سطح آب نصب کرده‌اند.

برای کشتی که به ساحل نزدیک می‌شود، از چه فاصله‌ای این چراغ دیده می‌شود، به شرطی که دیده‌بانی کشتی در ۱۰ متری بالای سطح آب قرار گرفته باشد.

حل

از شکل ۱۰۲ معلوم است که مسئله منجر به محاسبه طول قطعه خط AC می‌شود که از دو قسمت AB و BC تشکیل شده است.



۱۰۲. چراغ دریائی

قطعه AB عبارتست از فاصله تا افق، با توجه به اینکه چراغ در ۴۰ متری زمین است و BC فاصله افق برای ناظری است که در ارتفاع ۱۰ متری است. بنابراین فاصله مجهول چنین می‌شود:

$$۱۱۳\sqrt{۰٫۰۴} + ۱۱۳\sqrt{۰٫۰۱} = ۱۱۳(۰٫۲ + ۰٫۱) = ۳۴ \text{ (کیلومتر)}$$

مسئله

دیده‌بان این کشتی، چه قسمتی از چراغ دریائی را از فاصله ۳۰ متری می‌بیند؟

حل

شکل ۱۰۲ راه حل مسئله را نشان می‌دهد: ابتدا باید فاصله

BC را محاسبه کنیم ، سپس آنچه را که بدست می آید از طول کلی AC ، یعنی ۳۰ کیلومتر ، کم کنیم : تا فاصله AB معلوم شود . با در دست داشتن AB می توان ارتفاعی را حساب کرد که افق آن به اندازه AB باشد . این محاسبات را انجام می دهیم :

$$BC = 113 / 0,01 = 11,3 \text{ (کیلومتر)}$$

$$30 - 11,3 = 18,7 \text{ (کیلومتر)}$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{18,7^2}{2R} = \frac{350}{12800} = 0,027 \text{ (کیلومتر)}$$

یعنی از فاصله ۳۰ کیلومتری ۲۷ متر از ارتفاع چراغ دیده نمی شود و بقیه ۱۳ متر آن دیده می شود .

برق

مسئله

بالای سر شما در ارتفاع ۱/۵ کیلومتری در آسمان ، برقی می درخشد ، تا چه فاصله ای از شما باز هم می توان برق را دید ؟

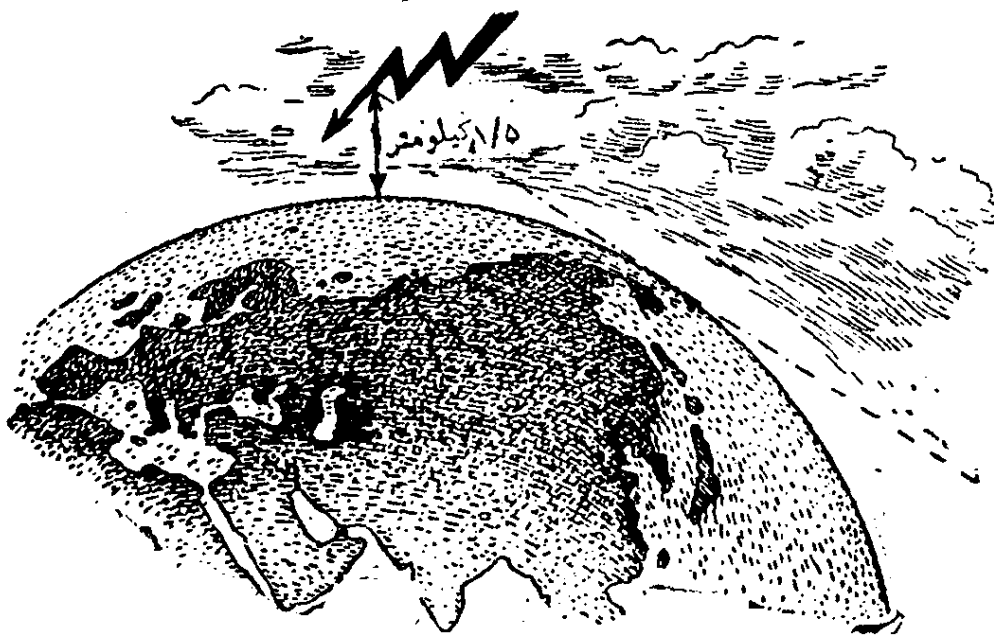
حل

باید دوری افق را برای ارتفاع ۱/۵ کیلومتر محاسبه کرد (شکل ۱۰۳) . این فاصله چنین است :

$$113 / 1,5 = 138 \text{ (کیلومتر)}$$

یعنی اگر زمین هموار باشد ، کسی که روی سطح زمین و در فاصله ۱۳۸ کیلومتری شما خوابیده باشد ، می تواند درخشش برق را ببیند (و اگر ۶٪ انکسار را به حساب آوریم ، در ۱۴۶ کیلومتری) . در نقطه ای که در فاصله ۱۴۶ کیلومتری قرار گرفته است ، برق در سطح

افق دیده می شود و چون در این فاصله صدای رعد به گوش نمی رسد، ناظری



۱۰۳. مسئله ای درباره برق

که در آنجا باشد ، برق را بدون رعد می بیند .

کشتی بادی

مسئله

در ساحل دریاچه یا رودخانه ایستاده اید و به کشتی بادی که دور از شما در آب است نگاه می کنید . می دانید که دکل کشتی ۶ متر از سطح آب بالاتر است . در چه فاصله ای از شما ، کشتی شروع به پایین رفتن در آب می کند (یعنی پشت افق می رود) و در چه فاصله ای بکلی مخفی می شود ؟

حل

کشتی در نقطه B (شکل ۹۸) ، یعنی در فاصله افق (که برای

شخصی با قامت متوسط $۴/۸$ کیلومتر است) شروع به پنهان شدن در زیر افق می کند . وقتی این کشتی بکلی مخفی می شود که فاصله آن از نقطه B چنین باشد :

$$۱۱۳\sqrt{۰/۰۰۰۶} = ۸/۷ \text{ (کیلومتر)}$$

و بنابراین ، برای اینکه کشتی از نظر شما که در ساحل ایستاده اید ، بکلی پنهان شود ، باید به اندازه :

$$۴/۸ + ۸/۷ = ۱۳/۵ \text{ (کیلومتر)}$$

از ساحل فاصله داشته باشد .

افق در ماه

مسئله

محاسباتی که تا کنون انجام دادیم ، همه مربوط به کره زمین بود . اگر در کره دیگری و مثلاً در یکی از دشتهای هموار ماه باشیم ، در دوری افق چه تغییری پیدا می شود ؟

حل

مسئله با همان رابطه قبلی حل می شود: دوری افق برابر است با $\sqrt{۲Rh}$ ، منتهی در اینجا $۲R$ عبارتست از قطر کره ماه (به جای قطر کره زمین در محاسبات قبلی) . چون قطر کره ماه برابر است با ۳۵۰۰ کیلومتر ، برای ناظری که چشمش در $۱/۵$ متری سطح ماه باشد ، داریم :

$$\text{دوری افق (کیلومتر)} = \sqrt{۳۵۰۰ \times ۰/۰۰۱۵} = ۲/۳$$

در ماه ، ما می توانیم تا فاصله $\frac{۱}{۳}$ کیلومتری خود را به بینیم .

اگر بایک دوربین به ماه نگاه کنیم ، در آن تعداد زیادی کوههای حلقوی شکل می بینیم که نظیر آنها در زمین وجود ندارد . یکی از بزرگترین این کوهها «آتشفشان کوپرنیک» است که قطر بیرونی آن ۱۲۴ کیلومتر و قطر داخلی آن ۹۰ کیلومتر است . مرتفعترین نقاط این موج حلقوی از سطح داخلی آن ۱۵۰۰ متر ارتفاع دارد . اگر شما در مرکز این حلقه ایستاده باشید ، آیا می توانید این موج حلقوی را به بینید ؟

حل

برای اینکه به این سؤال پاسخ دهیم ، باید دوری افق را برای قله موج ، یعنی برای ۱/۵ کیلومتر محاسبه کنیم . این فاصله برای ماه چنین است :

$$\sqrt{3500 \times 1/5} = 73 \text{ (کیلومتر)}$$

اگر به این فاصله ، دوری افق را برای یک انسان با قامت متوسط اضافه کنیم ، فاصله ای بدست می آید ، که از آنجا موج حلقوی برای ناظر پشت افق پنهان می شود :

$$73 + 2/3 \neq 75 \text{ (کیلومتر)}$$

و چون مرکز موج به اندازه ۴۵ کیلومتر از آن فاصله دارد ، می توان موج حلقوی را از مرکز آن کاملاً دید .

در مشتری

مسئله

دوری افق در مشتری چقدر است ؟ می دانیم که قطر مشتری ۱۱

برابر قطر زمین است .

حل

اگر در کره مشتری سطح صاف و سختی وجود داشته باشد و شخصی در آنجا ایستاده باشد می تواند تا فاصله ای برابر :

$$\sqrt{11 \times 12800 \times 0.0016} = 14.4 \text{ (کیلومتر)}$$

را به بیند .

چند تمرین

فاصله تافق رابرای دور بین زیر دریائی که به اندازه ۳۰ سانتیمتر از سطح آرام آب بالا آمده است محاسبه کنید .

بالن، تاچه ارتفاعی بالابروود تا هر دو ساحل دریاچه ای را که ۲۱۰ کیلومتر طول دارد به بیند .

بین مسکو و لنینگراد، تاچه ارتفاعی در هواپیما بالابرویم تا بتوانیم در یک زمان هر دو شهر را به بینیم ؟ فاصله بین مسکو و لنینگراد ۶۴۰ کیلومتر است .





۷

هندسهٔ روبینسونها (چند صفحه از ژول ورن)

هندسهٔ آسمان پر ستاره

لبریز از ستاره : بهنهای باز، که آنرا نهایتی نیست : نه به عمق آن می‌توان دست یافت و نه ستاره‌هایش را شمرد .
— لومونوسوف

زمانی بود که مؤلف این کتاب خودش را برای يك آیندهٔ غیر عادی آماده می‌کرد : می‌خواست، بجای کسی باشد که کشتی غرق شده خود را از دست داده است . بطور خلاصه فکر می‌کردم که نقش روبینسون را به عهده بگیرم . اگر این امر اتفاق می‌افتاد ، کتاب حاضر می‌توانست خیلی جالب‌تر از آنچه هست تنظیم شود و یا ممکن بود که اصلانوشته نشود . شرایطی پیش نیامد که روبینسون بشوم و حالاهم

از این بابت متأسف نیستم. ولی در جوانی به نقش خود به عنوان روبینسون جدی باور داشتم و با حرارت زیاد خود را برای آن آماده می‌کردم. زیرا برای اینکه آدم حتی یک روبینسون عادی هم باشد، باید اطلاعات و مهارتهائی داشته باشد که برای سایر حرفه‌ها لزومی پیدا نمی‌کند.

وقتی که یکنفر پس از غرق کشتی به یک جزیره غیر مسکونی می‌افتد، برای اولین بار چه می‌کند؟ روشن است که به تعیین موقعیت جغرافیائی محل سکناى اجباری خود، یعنی طول و عرض آن، می‌پردازد. ولی با کمال تأسف در اکثر سرگذشت‌های قدیمی و یا جدید روبینسون، در این باره با اختصار فوق‌العاده‌ای صحبت شده است. در چاپ کامل «روبینسون کروزوی» اصلی، در این مورد تنها یک سطر وجود دارد که آنهم داخل پرانتز گذاشته شده است:

«در عرض جغرافیائی که جزیره من بود (یعنی طبق حساب من در $22^{\circ} 9'$ شمال استوا)».

این اختصار تأسف آور، برای من که در حال جمع‌آوری اطلاعاتی برای آینده خیال‌انگیز خود بودم، ناامید کننده بود. من خود را آماده می‌کردم تا از کسوت مردی که تنها در یک جزیره متروک زندگی می‌کند. بیرون بیایم، که با مطالعه «جزیره اسرار آمیز» ژول ورن، این راز گشوده شد.

من تصمیم ندارم که خوانندگان این کتاب را برای روبینسون شدن آماده کنم، ولی بی‌فایده نمی‌بینم که در اینجا از روش‌های ساده‌ای که برای تعیین عرض جغرافیائی وجود دارد، گفتگو کنم. آشنائی با این روش‌ها تنها مورد استفاده کسی که در یک جزیره بی‌نام و نشان افتاده است، نیست. بسیاری از نقاط مسکونی وجود دارد که روی نقشه‌ها مشخص نشده‌اند (و مگر همیشه نقشه حاضر و آماده‌ای برای ما

وجود دارد؟) و به این ترتیب مسئله تعیین عرض جغرافیائی می‌تواند برای بسیاری از خواننده‌های ما مفید باشد. حالانمی‌توانیم، مثل زمان لرمانتوف، با قطعیت بگوئیم که حتی:

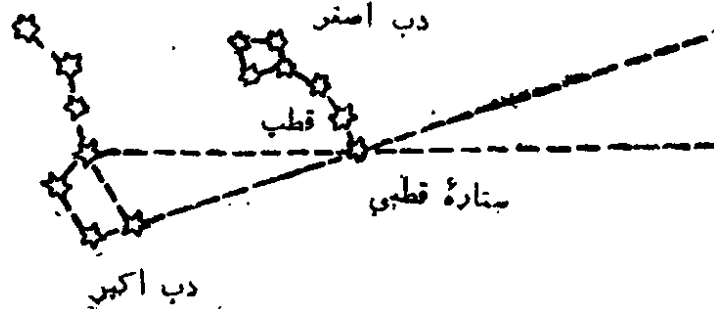
در نقشه‌های عمومی، برای تامبوو
هرگز علامتی نخواهند گذاشت،

ولی در نقشه‌های عمومی که در زمان ما هم وجود دارد، بسیاری از جاها و دهات مشخص نشده است. لزومی ندارد که دچار غرق کشتی بشویم و به نقش روبینسون در آییم، قبل از آن کوشش کنیم موقعیت جغرافیائی محل سکونت خود را تعیین نمائیم.

تعیین عرض جغرافیائی اساساً مشکل نیست. اگر در يك شب روشن پرستاره به آسمان نگاه کنید، متوجه می‌شوید که ستارگان به آرامی محیط دایره غیرافقی را دور می‌زنند، به عبارت دیگر تمامی گنبد آسمان دور يك محور فرضی حرکت می‌کند. در نیمکره شمالی ما، ستاره‌ای دارای این حرکت نیست و ساکن بنظر می‌رسد که بر امتداد این محور فرضی قرار گرفته باشد. این «قطب شمال» نزدیک به ستاره روشن، در انتهای دم دب اصغر قرار دارد و به ستاره قطبی معروف است. با پیدا کردن این ستاره در آسمان، توانسته‌ایم جای قطب شمال جهان را پیدا کنیم. جستجوی ستاره قطبی هم کار مشکلی نیست، ابتدا مجموعه دب اکبر را، که همه می‌شناسند، پیدایم کنیم: اگر ساق بیرونی ذوزنقه دب اکبر را، آنطور که در شکل ۱۰۴ دیده می‌شود، تقریباً به اندازه طول تمام این مجموعه امتداد دهیم، به ستاره قطبی می‌رسیم.

این یکی از نقاط کره سماوی است که شناختن آن برای تعیین عرض جغرافیائی لازم است. نقطه دوم «سمت الرأس» است، یعنی نقطه‌ای که در آسمان درست بالای سر شما قرار دارد. به عبارت دیگر

سمت الرأس عبارتست نقطه تلاقی آسمان با شعاع فرضی از کره زمین که از محل شما گذشته است : اگر قوسی را که در آسمان بین سمت



۱۰۴. جستجوی ستاره قطبی

الرأس و ستاره قطبی قرارداد بر حسب درجه بدست آورید ، در حقیقت فاصله بین موقعیت خودتان را تا قطب زمین بدست آورده‌اید . اگر سمت الرأس شما با ستاره قطبی ۳۰ درجه فاصله داشته باشد ، شما به اندازه ۳۰ درجه از قطب زمین فاصله دارید ، یعنی در ۶۰ درجه شمال خط استوا ، یا به عبارت دیگر ، در مدار ۶۰ درجه شمالی قرار گرفته‌اید .

بنابراین برای تعیین عرض جغرافیائی هر محل باید ابتدا ، «فاصله سمت الرأسی» ستاره قطبی را بر حسب درجه (واجزاء آن) اندازه بگیریم ، سپس کافی است که این فاصله را از ۹۰ درجه کم کنیم تا عرض جغرافیائی بدست آید. در عمل می‌توان به طریق دیگری عمل کرد. چون قوس بین سمت الرأس و افق مساوی ۹۰ درجه است ، با کم کردن فاصله سمت الرأسی قطب شمال از ۹۰ درجه ، همان طول قوس سماوی که بین ستاره قطبی و افق است ، یا به عبارت دیگر «ارتفاع» ستاره قطبی نسبت به افق ، بدست می‌آید. بنابراین عرض جغرافیائی هر محل برابر است با ارتفاع ستاره قطبی نسبت به افق آن محل .

حالا دیگر شما می‌دانید که برای تعیین عرض جغرافیائی چه باید کرد. منتظر يك شب روشن می‌مانید، سپس ستاره قطبی را روی آسمان پیدامی‌کنید و ارتفاع زاویه‌ای آنرا تا افق بدست می‌آورید؛ عرض جائی که شما هستید پیدا می‌شود. اگر بخواهید در کار خود دقت داشته باشید، باید توجه کنید که ستاره قطبی کاملاً بر قطب جهان منطبق نیست و به اندازه $\frac{1}{4}$ درجه از آن فاصله دارد. بنابراین ستاره قطبی کاملاً بی حرکت نیست: این ستاره دور قطب سماوی روی دایره کوچکی حرکت می‌کند و از آن، در بالا یا پائین، سمت راست یا سمت چپ، به اندازه $\frac{1}{4}$ درجه فاصله دارد. ارتفاع ستاره قطبی را در بالاترین و پائین‌ترین وضع خود (یا به اصطلاح منجمین در اوج و حضیض) و سپس ارتفاع واسطه عددی آنها را بدست آورید. این مقدار واقعی ارتفاع قطب و بنابراین عرض مجهول محل شما خواهد بود.

به همین مناسبت هیچ لازم نیست که حتماً ستاره قطبی را انتخاب کنید: می‌توان هر ستاره دلخواهی را که غروب نمی‌کند (یعنی در زیر افق پنهان نمی‌شود) اختیار کرد و ارتفاع آنرا در دو وضع مختلف نسبت به افق بدست آورد و سپس حد متوسط این دو ارتفاع را محاسبه کرد. نتیجه این محاسبه، ارتفاع قطب نسبت به افق یعنی عرض جغرافیائی محل خواهد بود. ولی برای این منظور باید بتوان لحظات اوج و حضیض ستاره انتخاب شده را پیدا کرد که کار نسبتاً دشواری است، بخصوص اینکه اغلب در جریان يك شب نمی‌توان موفق به مشاهده هر دو وضع شد. به همین دلیل است که برای اندازه‌گیری تقریبی مناسب‌تر است که کار را با ستاره قطبی شروع کنیم و از فاصله جزئی آن تا قطب صرف نظر نماییم.

تا اینجا ما خود را در نیمکره شمالی زمین فرض کردیم . اگر در نیمکره جنوبی باشیم چگونه باید عمل کرد ؟ راه عمل کاملاً شبیه قبل است ، تنها با این تفاوت که در اینجا باید ارتفاع قطب جنوب جهان را اندازه گرفت . متأسفانه در نزدیکی قطب جنوب ستاره روشنی ، شبیه ستاره قطبی نیمکره شمالی ، وجود ندارد . صلیب جنوبی معروف ، از قطب جنوب خیلی دور است و اگر بخواهیم از ستاره های این مجموعه برای تعیین عرض جغرافیائی استفاده کنیم ، باید مقدار متوسط اوج و حضیض آنها را بدست آوریم .

قهرمان داستان ژول ورن برای تعیین موقعیت «جزیره اسرار آمیز» خود از همین مجموعه ستارگان زیبای آسمان جنوبی استفاده می کند . قسمتی از داستان شامل همه این تشریفات است . به بینیم این روبینسون جدید چگونه بدون در دست داشتن هیچ وسیله ای توانست مشکل خود را حل کند .

عرض جزیره اسرار آمیز

« ساعت ۸ بعد از ظهر بود . ماه طلوع نکرده بود ، ولی افق با رنگ ملایم نقره ای مات ، برق می زد و می شد آنرا طلوع ماه نامید . در آسمان ، ستاره های نیمکره جنوبی و در میان آنها ستارگان صلیب جنوبی می درخشید . مهندس سمیت مدتی به این مجموعه نگاه کرد . بعد از کمی تأمل گفت :

« - هربرت ، حالا ۱۵ آوریل است ؟

« جوان جواب داد :

« - بله

« - اگر اشتباه نکنم ، فردا یکی از چهار روز سال است که زمان حقیقی با زمان متوسط برابر است : فردا درست موقع ظهر با ساعت ما ، خورشید از نصف النهار عبور می کند* . اگر هوا مساعد باشد ، می توانم طول جغرافیائی جزیره را به تقریب معین کنم .
 » - بدون وسیله ؟

« - بله ، شب روشنی است و بنابراین همین حالا هم می توانم عرض جغرافیائی جزیره را پیدا کنم ، ارتفاع ستارگان صلیب جنوبی ، یعنی ارتفاع قطب جنوب را از افق بدست می آورم و فردا موقع ظهر طول جغرافیائی جزیره را تعیین می کنم .

« اگر مهندس سکستان^{۵۵} داشت ، می توانست فاصله زاویه‌ای اشیاء را به کمک انعکاس اشعه نور با دقت اندازه بگیرد و مسئله مورد علاقه خود را بدون زحمت حل کند . در این عصر ارتفاع قطب را بدست می آورد و فردای آن روز لحظه‌ای را که خورشید از نصف النهار عبور می کرد ، معین می نمود ؛ در اینصورت مختصات جغرافیائی جزیره یعنی طول و عرض آن بدست می آمد . ولی مهندس سکستان نداشت و می بایستی بدون آن کار کند .

« مهندس وارد غار شد . در پرتو نور خرمن آتش دو صفحه مستطیل شکل تراشید و آنها را در يك انتها ، مثل پرگار بهم وصل

(* ساعت‌های ما دقیقاً منطبق بر ساعت‌های خورشیدی نیست ؛ بین «زمان حقیقی خورشیدی» و «زمان متوسط» (که به وسیله ساعت‌های ما نشان داده می شود) ، اختلافی وجود دارد . این اختلاف تنها در چهار روز از سال مساوی صفر می شود ، ۱۶ آوریل ، ۱۴ ژوئن ، اول سپتامبر و ۲۴ دسامبر (به ترتیب مطابق با ۲۷ فروردین ، ۲۴ خرداد ، ۱۵ شهریور و سوم دی) .

(** سکستان اسباب ساده‌ای است که به وسیله آن با استفاده از انعکاس نور بر يك آینه دوار ، فاصله زاویه‌ای دوشیئی را اندازه می گیرند (مترجم)

کرد ، بطوریکه شاخه‌های آن بتواند از هم دور شود . برای لولا از خار سخت درخت اقاچیا استفاده کرد که از میان خورده چوبهای کنار آتش پیدا کرده بود .

« وقتی که وسیله آماده شد ، مهندس دوباره به ساحل برگشت . می‌خواست ارتفاع قطب را از افق ، یعنی از سطح دریا اندازه بگیرد . برای مشاهدات خود روی سکوی بلندی که چشم‌انداز وسیع‌تری داشت قرار گرفت ، ضمناً می‌بایست به ارتفاع این سکو از سطح دریا هم توجه داشته باشد ولی اندازه‌گیری اخیر را می‌شد برای روز دیگری باقی گذاشت که به سادگی و با کمک هندسهٔ مقدماتی انجام می‌گرفت .

« افق ، که از زیر و به وسیلهٔ نخستین اشعهٔ ماه روشن شده بود ، کاملاً نمایان و همهٔ امکانات برای مشاهده فراهم بود . مجموعهٔ ستارگان صلیب جنوبی بشکل معکوس در آسمان می‌درخشید: ستارهٔ آلفا در قاعدهٔ این مجموعه و کاملاً نزدیک به قطب جنوب بود .

« این ستاره‌ها به اندازهٔ ستارهٔ قطبی ، در شمال ، به قطب نزدیک نیستند . ستارهٔ آلفا ۲۷ درجه با قطب فاصله دارد ، مهندس این مطلب را می‌دانست و در محاسبهٔ خود آنرا بحساب آورد . او منتظر لحظهٔ عبور ستاره از نصف‌النهار بود زیرا این امر انجام عملیات او را ساده‌تر می‌کرد .

« سمیت یکی از شاخه‌های پرگار چوبی را به طرف افق و شاخهٔ دیگر آنرا به طرف ستارهٔ آلفای صلیب میزان کرد ، فاصلهٔ زاویه‌ای دو شاخه ، ارتفاع زاویه‌ای ستاره را نسبت به افق معین می‌کرد . برای اینکه این زاویه بطور قابل اطمینانی ثابت بماند ، سمیت تختهٔ سومی انتخاب کرد و با کمک خارهای اقاچیا به شاخه‌های پرگار متصل کرد ، بطوریکه شکل آن بدون تغییر بماند .

« حالاً می‌بایست زاویه‌ای را که ناظر از سطح دریاداشت تعیین کرد ، برای این منظور لازم بود که ارتفاع صخره انداز گرفته شود * . اندازه زاویه همان ارتفاع ستاره آلفای صلیب و بنا بر این ارتفاع قطب از افق و در نتیجه عرض جغرافیائی جزیره بود ، زیرا عرض جغرافیائی هر نقطه‌ای از کره زمین برابر است با ارتفاع قطب نسبت به افق آن محل . این محاسبه برای فردا گذاشته شد» .

خواننده این کتاب ، اگر به مبحث اول مراجعه کند ، راهی را که برای اندازه‌گیری ارتفاع صخره لازم است ، پیدامی‌کند . ما هم این قسمت از داستان را رها می‌کنیم و به دنباله کارهای مهندس می‌پردازیم :

« مهندس پرگاری را که دیشب ساخته بود و با کمک آن فاصله زاویه‌ای بین ستاره آلفای صلیب جنوبی را تا افق بدست آورده بود ، برداشت . با دقت اندازه این زاویه را ، با کمک دایره‌ای که به ۳۶۰ قسمت کرده بود ، بدست آورد و فهمید که مساوی ۱۰ درجه است . از آنجا ارتفاع قطب را نسبت به افق ، با اضافه کردن ۲۷ درجه که فاصله زاویه‌ای ستاره از قطب است ، بدست آورد : این زاویه مساوی ۳۷ درجه شد . سمیت متوجه شد که جزیره لینکلن در ۳۷ درجه عرض جنوبی ، و یا با در نظر گرفتن اشتباهات ممکن ، بین مدارات ۳۵ درجه و ۴۰ درجه واقع است .

(* از آنجا که مهندس برای اندازه‌گیری خود ، بجای کنار دریا ، از بالای يك صخره استفاده کرده است ، خط راستی که از چشم ناظر به افق می‌رسد ، کاملاً بر خط عمود بر شعاع زمین منطبق نیست و با آن زاویه‌ای می‌سازد . ولی این زاویه بقدری كوچك است که برای اینگونه موارد می‌توان از آن صرف‌نظر کرد (برای ارتفاع ۱۰۰ متری به اندازه يك سوم درجه است) . باین مناسبت سمیت ، و یا در حقیقت ژول ورن ، احتیاجی به چنین محاسبه‌ای نداشت .

«حالا لازم بود که طول جغرافیائی جزیره را پیدا کند. مهندس آنرا هم محاسبه کرد: در همان روز، موقع ظهر، وقتی که خورشید از نصف النهار جزیره عبور می کرد».

تعیین طول جغرافیائی

«اما مهندس چگونه می توانست لحظه عبور خورشید را از نصف النهار جزیره، بدون دردست داشتن هیچ وسیله ای، تعیین کند؟ این سؤال خیلی هربرت را به خود مشغول کرده بود.

«مهندس فکر همه چیزهائی را که برای مشاهده نجومی خود لازم داشت، کرده بود. در ساحل شنی جای کاملاً تمیزی که به وسیله جزر و مد دریا هموار شده بود، انتخاب کرده بود و چوبی به طول شش پا، در این محل عمود بر این سطح در زمین محکم کرده بود.

«آنوقت هربرت فهمید که مهندس برای تعیین لحظه عبور خورشید از نصف النهار جزیره و یا به عبارت دیگر، برای تعیین ظهر محل چه نهشهای دارد. مهندس می خواست با کمک سایه چوب روی شنها، این لحظه را پیدا کند. البته، این روش کاملاً دقیق نبود، ولی با نبودن وسائل لازم، می شد بهترین نتیجه ممکن را بدست آورد.

«لحظه ای که سایه چوب کوتاهترین اندازه ممکن را دارد، ظهر محل است. کافی است که حرکت انتهای سایه را تعقیب کنیم و منتظر لحظه ای باشیم که طول سایه به کمترین اندازه خود برسد (یعنی از آن به بعد دوباره شروع به طولیل شدن کند). در اینجا سایه چوب، نقش عقربه را را روی صفحه ساعت بازی می کند.

«وقتی که طبق حساب مهندس، زمان مشاهده فرارسید، روی زانو نشست و تراشه های کوچکی را روی شن نصب کرد و کوتاه شدن

سایه‌ای را که از چوب بر زمین افتاده بود زیر نظر گرفت .

« روزنامه‌نویس (یکی از همسفران مهندس) کرومومتر را در دست خود گرفته بود و آماده برای لحظه‌ای بود که سایه حداقل طول خود را پیدا کند . از آنجا که مهندس مشاهده خود را در ۱۶ آوریل انجام داد، یعنی یکی از چهار روزی که ظهر حقیقی با ظهر متوسط یکی است ، لحظه‌ای را که روزنامه‌نویس منتظرش بود ، عبارت از زمان نصف‌النهار واشنگتن بود (محل عزیمت مسافرین) .

«خورشید به کندی حرکت می‌کرد و سایه به تدریج خود را جمع می‌کرد . بالاخره زمانی رسید که سایه شروع به بزرگ شدن کرد ، مهندس پرسید :

« - چه ساعتی است ؟

« روزنامه‌نویس جواب داد :

« - ساعت پنج و یک دقیقه .

« مشاهده تمام شد . تنهایی بایست مختصری محاسبه انجام داد .

« مشاهده نشان داد که بین نصف‌النهار واشنگتن و نصف‌النهار

جزیره لینکلن قریب به پنج ساعت اختلاف زمانی وجود دارد . یعنی وقتی که در جزیره ظهر است ، در واشنگتن ساعت پنج بعد از ظهر است . حرکت ظاهری خورشید به دور زمین در هر ۴ دقیقه یک درجه و در یک ساعت ۱۵ درجه است . اگر ۱۵ درجه را در ۵ (تعداد ساعتها) ضرب کنیم ۷۵ درجه بدست می‌آید .

« واشنگتن در نصف‌النهار $37^{\circ}11'$ غرب نصف‌النهار گرینویچ

قرار گرفته است (در امریکاهم مثل انگلستان گرینویچ را مبداء گرفته‌اند) . به این ترتیب جزیره در طول ۱۵۲ درجه غربی واقع شده است .

« اگر دقت غیر کافی مشاهده کننده را در نظر بگیریم ، می‌توان

گفت که جزیره بین مدار ۳۵ تا مدار ۴۰ عرض جنوبی و بین نصف النهار ۱۵۰ تا نصف النهار ۱۵۵ غرب گرینویچ قرار گرفته است.»

متذکر می شویم که با روشهای مختلف می توان طول جغرافیائی را محاسبه کرد که روش قهرمانان ژول ورن یکی از آنهاست (که به روش کرونومتر معروف است). به همین ترتیب راه حل های دیگری هم برای محاسبه عرض جغرافیائی به طور دقیق وجود دارد (که مثلاً برای ملوانان و در هوای نامساعد به کار می آید).



قسمت دوم

شوخی و جدی در هندسه

ریاضی و مفاهیم آن بقدری خشک و جدی
است ، که نمی توان از زمینه های جالب
و سرگرم کننده آن صرف نظر کرد .
— پاسکال



۸

هندسه در تاریکی

در عمق کشتی

از فضای آزاد دشت و دریا به عمق تنگ و تاریک يك کشتی کهنه قدیمی می‌رویم. جایی که قهرمان جوان یکی از داستانهای ماین رید توانست چنان مسئله هندسی را حل کند که، بدون تردید خوانندگان ما نه در درس ریاضی آنرا یاد گرفته‌اند و نه به آن برخورد کرده‌اند. ماین رید در داستان «پسر بچه دریا نورد» (یا «در عمق کشتی») ماجرای جوانی را نقل می‌کند که عاشق ماجراهای دریائی است (شکل ۱۰۵) و چون نمی‌تواند مخارج سفر خود را به‌پردازد، پنهانی وارد در طبقه زیرین يك کشتی ناشناس می‌شود و در آنجا ناگهان متوجه می‌شود که در تمام

دوران مسافرت دریائی راه خروج او بسته است . او در میان تودهٔ انبوهی از اثاثیه محبوس می‌شود ، ولی به يك جعبه نان خشك و يك بشكه آب برخوردار می‌کند. پسر بچهٔ عاقل می‌فهمد که با این ذخیرهٔ محدود غذا و آب باید تا حد امکان صرفه‌جو باشد و بنابراین باید سهم روزانهٔ غذا و آب خود را معین کند .

شمردن نانهای سوخاری کار مشکلی نبود ولی بدون اطلاع از ذخیرهٔ کلی ، چگونه سهم روزانهٔ آب را پیدا کند ؟ این بود مسئله‌ای که در مقابل قهرمان جوان ماین‌رید قرار داشت . به بینیم چگونه آنرا حل کرده است .

اندازه‌گیری بشکه



۱۵۰ . جوانی که بدنبال ماجرا می‌رود
(از داستان ماین‌رید) .

« باید سهم روزانهٔ آب را برای خودم معین کنم . برای این منظور باید بدانم که در بشکه چقدر آب هست و سپس آنرا به قسمت‌های لازم تقسیم کنم .

«در مدرسهٔ روستائی ضمن درس حساب، معلم ما بعضی اطلاعات مقدماتی مربوط به هندسه را به ما یاد داده بود، من به مفاهیم مکعب ، هرم ، استوانه و کره آشنا بودم و همین طور می‌دانستم که بشکه‌را می‌توان

مثل دو مخروط ناقصی دانست که از طرف قاعده بزرگتر به هم وصل شده باشند .

« برای اینکه گنجایش بشکه آب را معین کنم، می بایست ارتفاع آن (ویا در واقع نصف ارتفاع آن) را بدانم ، سپس محیط قاعده یکی از دو طرف بشکه وهم محیط دایره مقطع متوسط آن (یعنی بر آمده ترین قسمت بشکه) را معین کنم . با این اطلاعات من می توانستم با دقت تعیین کنم که محتوی بشکه چند واحد مکعب است .

« بنابراین فقط می بایست این سه مقدار را اندازه بگیرم ، و اینهم کار بسیار مشکلی بود .

« بچه ترتیب باید این اندازه گیری را انجام داد ؟

« تعیین ارتفاع بشکه مشکل نبود . بشکه در جلومن قرار داشت ؛ ولی درباره دایره ها، من نمی توانستم به آنها دسترسی پیدا کنم . قد من کوتاه تر از آن بود که به آنها دسترسی پیدا کنم ، علاوه بر آن جعبه هائی که دور و بر ریخته بود دست و پای آدم رامی گرفت .

« اشکال دیگری هم وجود داشت : من نه مقیاسی داشتم و نه نخى که با کمک آن بتوانم اندازه گیری را انجام دهم ؛ چگونه می شد ، بدون دردست داشتن هیچ وسیله ای ، مقادیر مورد احتیاج را معین کرد ؟ ولی من تصمیم گرفتم ، تا وقتی که بطور همه جانبه درباره نقشه خود فکر نکرده ام ، از آن صرف نظر نکنم .

خطکش اندازه گیری
(مسئله ماین رید)

« همانطور که درباره بشکه فکر می کردم که چگونه اندازه های

آنرا بطور کامل تعیین کنم، ناگهان چیزی بخاطرم رسید که مشکل مرا حل می کرد. يك چوب باریك می توانست بمن كمك كند، به شرطی که طول آن چنان باشد که بتواند از پهن ترین جای بشکه کاملاً عبور کند. اگر چوب را در بشکه داخل می کردم و تا دیوار مقابل فرو می بردم، طول قطر آنرا بدست می آوردم. کافی بود که طول چوب را سه برابر کنم تا محیط دایره بدست آید. البته این يك محاسبه دقیق نیست، ولی برای اندازه گیریهای عادی کاملاً کافی است. و چون سوراخی را که قبلاً در بشکه به وجود آورده بودم درست در قسمت پهن آن بود، وقتی که چوب را از آنجا داخل می کردم، همان قطری را بدست می آوردم که لازم داشتم.

« اما چوب را از کجا پیدا کنم؟ خیلی مشکل نبود، تصمیم گرفتم که از چوب جعبه سوخاری استفاده کنم و بلافاصله مشغول شدم، طول جعبه ۶۰ سانتیمتر بود، در حالیکه بشکه بیش از دو برابر آن عرض داشت. ولی این مطلب نمی توانست اشکالی بوجود آورد، میبایست سه تکه چوب تهیه کنم و آنها را بهم وصل نمایم تا برای طول مورد احتیاجم کافی باشد.

« چوب را در طول رگه های آن بریدم و سه قطعه چوب گرد و صاف آماده کردم. بچه ترتیب آنها را بهم وصل کنم؟ برای این منظور از بند کفشهای خود استفاده کردم که طول آنها به زحمت به يك متر می رسید. چوبها را بهم محکم کردم و به این ترتیب چوبی به اندازه کافی - قریب يك متر و نیم - بدست آوردم.

« ولی همینکه شروع به اندازه گیری کردم، به مشکل جدیدی برخوردم. معلوم شد، چوبی را که درست کرده ام نمی توان وارد

بشکه کرد : جا خیلی تنگ بود . چوب را هم نمی شد خم کرد . چون بدون تردید می شکست .

« بزودی راه حل مشکل را پیدا کردم که چگونه چوب اندازه گیری را وارد بشکه کنم : قسمت های چوب را از هم جدا کردم ، ابتدا یکی از آنها را وارد بشکه کردم و سپس قطعه چوب دوم را به انتهای آن بستم و باز به داخل بشکه هل دادم و در آخر کار قطعه چوب سوم را به آن وصل نمودم .

« چوب را در جهتی قرار دادم که درست به دیوار بشکه در نقطه مقابل سوراخ ، تکیه کند و سپس روی آن در مقابل سطح بشکه علامتی گذاشتم . با کم کردن ضخامت دیواره ، مقداری را که برای اندازه گیری لازم داشتم ، بدست آوردم .

« چوب را ، بهمان طریقی که وارد کرده بودم ، از بشکه بیرون آوردم ، ضمناً سعی کردم نقاطی را که در آنجا قسمت های جداگانه چوب بهم وصل شده بودند ، دقیقاً بخاطر بسپارم ، تا بتوانم بعداً آنها را بهمان صورتی که داخل بشکه بود ، در آورم . زیرا يك اشتباه کوچک ، ممکن بود نتیجه ای بدست بدهد که با مقدار واقع تفاوت قابل توجهی داشته باشد .

« به این ترتیب من قاعده پایین مخروط ناقص را در دست داشتم . حالا می بایست قطر ته بشکه ، یعنی قطر قاعده بالای مخروط را پیدا کنم . چوب را روی بشکه قرار دادم ، بطوریکه انتهای آن بر لبه مقابل بشکه تکیه کرده باشد و از آنجا قطر مورد نظر را اندازه گرفتم . وقتی که برای این عمل صرف کردم ، بیش از يك دقیقه نبود .

« تنها چیزی که باقی مانده بود ، ارتفاع بشکه بود . بایستی ، چوب را بطور عمودی در کنار بشکه قرار می دادم ، نمی توانستم به بینم که کجای آن به لبه بالای بشکه می رسد . من فقط می توانستم هر چیزی

را لمس کنم : ناچار بودم بادرست لبهٔ بشکه و چوب را پیدا کنم ، علاوه بر آن ممکن بود که در کنار بشکه بطور مایل قرار گرفته باشد و بنابراین مقدار ارتفاع بطور نامطمئن بدست آید .

« خوب فکر کردم و بالاخره توانستم راهی برای رفع این مشکل هم پیدا کنم . فقط دو چوب را بهم وصل کردم و چوب سوم را روی کف بالای بشکه چنان قرار دادم که در حدود ۳۰-۴۰ سانتیمتر از لبهٔ بشکه جلو آمده باشد ، سپس چوب بزرگتر را طوری در انتهای آن قرار دادم که بر آن عمود ، یعنی با ارتفاع بشکه موازی باشد . سپس روی این چوب بزرگتر درجائی که بشکه بر آمدگی بیشتری داشت ، علامت گذاشتم و به این ترتیب نصف ارتفاع بشکه ، یعنی ارتفاع یکی از مخروطهای ناقص را بدست آوردم .

« حالا دیگر همهٔ شرایط لازم برای حل مسئله را جمع کرده بودم .

کارهایی که باید انجام می‌گرفت

« بیان حجم بشکه بر حسب واحد مکعب و سپس محاسبهٔ آن بر حسب گالون^{*} ، مستلزم محاسبات ساده‌ای بود که انجام آنها بدون هیچ زحمتی انجام می‌گرفت . البته من وسائل نوشتن نداشتم ، ولی در صورت وجود هم بدرد نمی‌خورد ، زیرا در جای کاملاً تاریکی قرار گرفته بودم ، برای من اغلب پیش آمده بود که چهار عمل اصلی را بدون قلم و کاغذ و در ذهن انجام دهم ، اینجا هم با عددهای بزرگ سروکار نداشتم

(* گالون ، واحدی برای اندازه‌گیری حجم مایعات . هر گالون انگلیسی

۲۷۷ اینچ مکعب است (تقریباً $\frac{1}{4}$ لیتر) . هر گالون مساوی ۴ کوارت و هر کوارت

ومی توانستم از عهدهٔ انجام آن بر آیم .

« ولی من به مشکل جدیدی برخورددم . من ارتفاع و هر دو قاعدهٔ مخروط ناقص را با چوب اندازه گرفته بودم ، ولی مقدار عددی این مفروضات چقدر است ؟ قبل از محاسبه ، لازم بود که این مقادیر را با عدد بیان کنم .

« ولی به خاطر آمد که من در بندر قد خود را اندازه گرفته بودم که حدود چهار فوت بود . این اطلاع چگونه می توانست بمن کمک کند ؟ خیلی ساده : می توانستم چهار فوت را روی چوب علامت بگذارم و آنرا مبنای محاسبات خود قرار دهم .

« برای اینکه قد خود را روی چوب علامتگذاری کنم ، روی کف دراز کشیدم ، سپس چوب را روی خودم چنان قرار دادم که یکی از دو انتهای آن در کنار پاهایم و انتهای دیگرش روی پیشانیم باشد . با یک دست چوب را گرفتم و با دست دیگر نقطه‌ای از آنرا که مقابل فرق سر من بود ، علامتگذاری کردم .

« باز هم يك اشكال دیگر ، اگر روی چوبی که به طول ۴ فوت است ، تقسیمات کوچکتر (اینچ) وجود نداشته باشد ، نمی تواند برای اندازه گیری مورد استفاده قرار گیرد ظاهراً تقسیم ۴ فوت به ۴۸ قسمت (اینچ) و قراردادن این تقسیمات روی خط کش مشکل نیست . از لحاظ نظری انجام این عمل فوق العاده ساده است ، ولی در عمل ، بخصوص در تاریکخانه‌ای که من بودم ، آنقدرها هم ساده نبود .

« چگونه این ۴ فوت را روی چوب پیدا کنم ؟ و چگونه هر يك از نیمه‌ها را دوباره نصف کنم و بالاخره هر فوت را به ۱۲ اینچ بطور مساوی تقسیم کنم ؟

« چوبی را در حدود ۲ فوت تهیه کردم . آنرا با چوبی که روی آن ۴ فوت را علامت گذاشته بودم مقایسه کردم ، معلوم شد که دو برابر آن کمی بیشتر از ۴ فوت است . چوب را کوتاهتر کردم و یکبار دیگر آنرا با چوب ۴ فوتی مقایسه کردم ، باز هم از دو فوت بیشتر بود . عمل را تکرار کردم ، مرتبه پنجم توانستم چوبی تهیه کنم که دو برابر آن مساوی ۴ فوت باشد .

« این کار وقت زیادی از من گرفت . ولی من به اندازه کافی وقت داشتم و حتی راضی بودم که به نحوی توانسته‌ام خود را مشغول کنم . »
 « با وجود این ، راه مختصرتر کردن کار آینده را پیدا کردم ، به جای چوب از قیطان استفاده کردم که می‌شد با راحتی آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم کرد و برای این منظور ، بند کفشهای من خیلی بدرد می‌خورد . آنها را با گره محکمی بهم بستم و به کار مشغول شدم . به زودی توانستم قطعه‌ای به طول يك فوت از آن جدا کنم . تا اینجا به نصف کردن احتیاج داشتم که کاری ساده بود ، ولی کار بعدی مشکل‌تر بود . ولی من آنرا هم انجام دادم و به زودی سه قطعه ۴ اینچی بدست آوردم . حالا می‌بایست یکی از این قطعه‌ها را به دو قسمت و سپس یکی از قسمتهای بدست آمده را دوباره به دو قسمت تقسیم کنم تا طولی مساوی يك اینچ بدست آورم .

« حالا دیگر وسیله لازم را در دست داشتم که بتوانیم روی چوب تقسیمات اینچی بدست آورم ؛ با جدیت به کار مشغول شدم با واحد اندازه‌گیری خود ۴۸ علامت به فواصل يك اینچ روی چوب گذاشتم . من دیگر خط‌کشی با واحدهای يك اینچی در اختیار داشتم و می‌توانستم با کمک آن طولهای مورد نظر خود را اندازه بگیرم . بعد از این کوششها بود که دیگر توانستم مسئله خود را تا آخر حل کنم

مسئله‌ای که برای من اهمیت حیاتی داشت .

« من به سرعت به محاسبه پرداختم . دو قطر را اندازه گرفتم و مقدار متوسط آنها را بدست آوردم ، سپس مساحت دایره متناظر به این قطر را محاسبه کردم . به این ترتیب مقدار قاعده استوانه‌ای را در دست داشتم که معادل با مخروط ناقصی است که ارتفاعش مساوی ارتفاع استوانه باشد . با ضرب مساحت قاعده در ارتفاع حجم مورد نظر را بر حسب واحد مکعب بدست آوردم .

« عددی را که بدست آوردم بر حسب اینچ مکعب بود ، آنرا بر ۶۹ تقسیم کردم تا معلوم شود که بشکه چند کوارت مکعب حجم دارد . »
 « بشکه بیش از صد گالون - یا دقیقتر ۱۰۸ گالون ، گنجایش داشت » .

تحقیق درستی محاسبه

خواننده‌ای که با هندسه آشنائی داشته باشد ، بدون تردید متوجه می‌شود که طریقه محاسبه حجم دو مخروط ناقص ، آنطور که به وسیله قهرمان جوان ماین رید انجام گرفته است ، کاملاً دقیق نیست . اگر شعاع قاعده کوچکتر را r ، شعاع قاعده بزرگتر را R و ارتفاع بشکه ، یعنی دو برابر ارتفاع هر یک از دو مخروط ناقص را h بگیریم (شکل ۱۰۶) حجمی که به وسیله پسر بچه بدست آمده است ، با رابطه زیر مشخص می‌شود :

$$\pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 h = \frac{\pi h}{4} (R^2 + r^2 + 2Rr).$$

از طرف دیگر اگر به روابط هندسی مراجعه کنیم (یعنی از رابطه مربوط

به حجم مخروط ناقص استفاده کنیم) . برای حجم مورد نظر به عبارت زیر می‌رسیم :

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

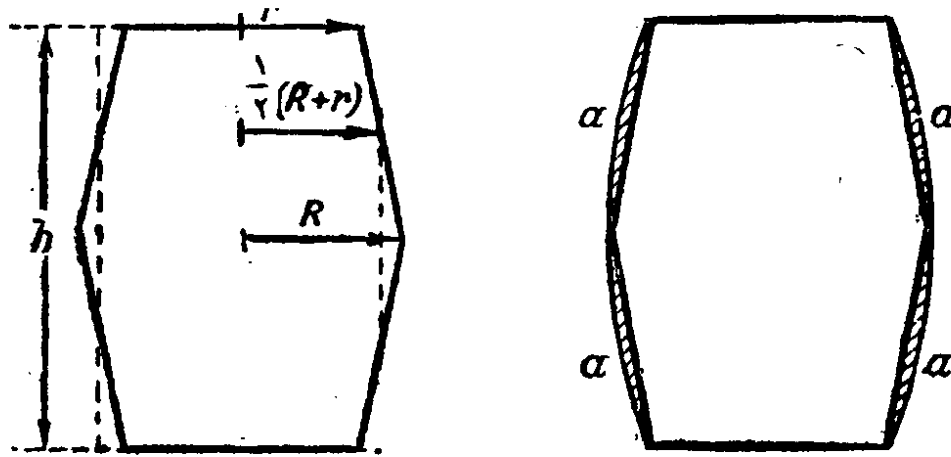
این دو رابطه یکی نیستند و به سادگی معلوم می‌شود که دومی به اندازه

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2$$

از اولی بیشتر است .

روشن است که این اختلاف دو حجم یعنی $\frac{\pi h}{12}(R-r)^2$ مقداری

است مثبت ، یعنی روش ماینرید نتیجه را کمتر از واقع بدست می‌دهد.



۱۰۶ . تحقیق درستی محاسبه

بد نیست که میزان تقریبی این اختلاف را پیدا کنیم . معمولاً

بشکه را طوری می‌سازند که قطر مقطع بزرگتر آن به اندازه $\frac{1}{5}$ خودش

از قطر قاعده بیشتر باشد ، یعنی : $R-r = \frac{R}{5}$. فرض می‌کنیم که

بشکه مربوط به داستان ماینرید هم به همین شکل باشد ، در اینصورت

می‌توان اختلاف بین حجم بدست آمده را با حجم واقعی مخروط ناقص

بدست آورد :

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

یعنی قریب $\frac{\pi R^2}{100}$ (اگر $\pi = 3$ بگیریم) . همانطور که می بینیم،

اختلاف برابر است با حجم استوانه‌ای که شعاع قاعده آن شعاع مقطع بزرگتر بشکه و ارتفاع آن يك سیصدم ارتفاع آن باشد .

ولی در این حالت بهتر است نتیجه را کمی بزرگتر بگیریم ، زیرا حجم بشکه از حجم دو مخروط ناقص بزرگتر است . همانطور که از شکل ۱۰۶ (سمت راست) دیده می شود ، با این روش اندازه گیری ، قسمتی از حجم آن ، که با حرف h نشان داده شده است (وروی شکل هاشورخورده است) ، حذف می شود .

ریاضی دان جوان ماینرید ، بدون اینکه درباره رابطه مربوط به حجم بشکه فکر کند ، به بعضی مقدمات هندسی متوسل می شود تا بتواند باروش ساده‌ای گنجایش تقریبی بشکه را بدست آورد . باید متذکر بشویم که مسئله مربوط به اندازه گیری حجم دقیق بشکه ، مسئله ساده‌ای نیست . کپلر منجم بزرگ آلمانی (قرن هفدهم) هم در این باره فکر کرده است و بین آثار ریاضی این دانشمند قسمتی به هنر اندازه گیری بشکه اختصاص دارد . راه حل ساده و دقیق این مسئله به طریق هندسی ، تا امروز هم پیدا نشده است ؛ تنها روشهایی وجود دارد که جواب را به طور کم و بیش تقریبی معین می کند . مثلاً در جنوب فرانسه از رابطه ساده زیر استفاده می کنند :

$$\text{حجم بشکه} = \frac{3}{2}hRr,$$

که از لحاظ عملی به اندازه کافی خوب است .

مطالعه این سوال هم جالب است : چرا بشکه را به شکل

استوانه‌ای می سازند که سطح جانبی آن برآمده باشد و از لحاظ اندازه گیری

تولید اشکال کند؟ آیا بهتر نیست که بشکرها به شکل استوانه کامل بسازند؟ البته چنین بشکلهای استوانه‌ای شکل را هم می‌سازید، منتهی نه با چوب، بلکه با فلز (مثلاً برای نفت). ولی چرا بشکله چوبی را برآمده درست می‌کنند؟ این شکل ساختمانی چه مزیتی دارد؟

فایده این شکل اینست که می‌توان تسمه‌ها را باروش ساده‌ای دور بشکله محکم کرد: آنها را در ابتدای بشکله می‌بندند و به طرف قسمت عریض می‌برند. در اینصورت تسمه‌ها سخت و محکم بشکله را دربر می‌گیرند و به اندازه کافی آنرا با دوام می‌کنند.

بهمین علت است که سطل، طشتک و یا ظرفهای دیگر چوبی را هم معمولاً استوانه‌ای نمی‌سازند و به شکل مخروط ناقص درمی‌آورند، در این موارد هم می‌توان به سادگی تسمه‌های حفاظ را در قستهای پهن‌تر ظرف محکم کرد (شکل ۱۰۷).

بی‌مناسبت نیست که در اینجا خواننده را با نظریوهان کپلر درباره این مطلب آشنا کنیم. این ریاضی‌دان بزرگ در فاصله کشف قوانین دوم و سوم خود درباره حرکت سیارات، توجه خود را به شکل بشکله معطوف داشت و حتی در این زمینه یک اثر صرفاً ریاضی «طریقه جدید اندازه‌گیری بشکلهای شراب» نوشته است. این اثر به این ترتیب شروع می‌شود:

بشکله شراب، به دلیل مقتضیات مصالح، ساختمان و مورد استعمال خود، شکل گردی دارد که به سطح مخروطی و استوانه‌ای نزدیک است. اگر مایعات را برای مدت طولانی در ظرفهای فلزی نگاه دارند، ظرف را دچار زنگ زدگی می‌کند؛ ظرفهای شیشه‌ای و سفالی از لحاظ اندازه کوچک و از لحاظ دوام نامطمئن‌اند؛ ظرفهای سنگی بخاطر وزن زیاد خود غیر قابل استفاده‌اند، به این ترتیب تنها می‌توان شراب را



۱۵۷. تسمه‌هایی را که به شکل حلقه درآمده‌اند، به طرف قسمت پهن‌تر بشکه می‌برند، تا آنرا محکم دربر گیرند.

در ظرفهای چوبی نگاهداری کرد. از طرف دیگر، از یک تنه درخت هم نمی‌توان ظرفهایی با گنجایش زیاد و اندازه‌های مورد لزوم تهیه کرد، و اگر هم تهیه بشود، دچار ترك خوردگی خواهند شد. بنابراین، باید بشکه‌ها را از اتصال قطعه چوبهای جدا از هم درست کرد. و برای اینکه مایع داخل ظرف از شکافهای بین قطعات مختلف آن تراوش نکند، هیچ راهی وجود ندارد بجز اینکه آنها را با فشار بهم محکم کنیم...

« اگر می شد قطعات چوب را به شکل کره بهم متصل کرد، ظرف کره‌ای شکلی که بدست می آمد، بهترین نوع ظرف بود. ولی چون اتصال چوبها به شکل کره ممکن نیست، به جای آن استوانه را انتخاب کرده اند. ولی این استوانه هم نمی تواند کامل و منظم باشد، زیرا تسمه های اتصالی ضعیف خواهند شد و نمی توان آنها را به اندازه کافی محکم کرد، به همین مناسبت شکل بشکه را متمایل به مخروط می سازند، بطوریکه از شکم آن به دو طرف کمی تنگ تر شده باشد. این شکل بشکه ضمناً برای به حرکت در آوردن آن و برای حمل و نقل آن به وسیله گاری کار را ساده تر می کند: چون از دو نیمه مشابه و با قاعده های مشترک تشکیل شده است، از لحاظ حمل و نقل با صرفه و از لحاظ دید خوشنما است»^{۳۵}

مسافرت شبانه مارک تواین

حضور ذهن پسر بچه ماین رید، با توجه به اوضاع و احوال غم-انگیزی که داشت، باعث تعجب است. در چنان جای تاریکی که او قرار داشت، بسیاری از مردم حتی نمی توانند موقعیت درست خود را تا حدی درک کنند، چه رسد به اینکه برای این منظور به اندازه گیری و محاسبه هم پردازند. آموزنده بودن داستان ماین رید وقتی روشن می شود که آنرا با نوشته فکاهی نویسنده مشهور هم وطن او مارک تواین مقایسه کنیم، وقتی که قهرمان او بدون هدف و بدون درک موقعیت در اطاق

(*) نباید گمان کرد که اثر کیپلر درباره اندازه گیری بشکه، از لحاظ ریاضی بی ارزش است و نایفه معروف در ساعات بیکاری و به عنوان تفریح به آن پرداخته است. برعکس، این یک کار عمیق و جدی بوده است که برای نخستین بار مقادیر بی نهایت کوچک را وارد هندسه می کند و چیزی جز مقدمات محاسبات انتگرالی نیست. بشکه شراب و مسئله اقتصادی اندازه گیری گنجایش آن برای کیپلر دستاویزی بود تا باز هم در مورد مطالب جدید ریاضی به طور عمیق و ثمر بخش تأمل نماید.

تاریک مهمانخانه سرگردان می شود. در این داستان بخوبی روشن شده است که چقدر مشکل است، در تاریکی تصور درستی از وضع اشیاء، حتی در یک اطاق عادی، وقتی که آنها را بخوبی نمی شناسیم، داشته باشیم. مادر زیر به اختصار این ماجرای مضحک را از «مسافرت به خارج» مارک تواین می آوریم.

«من بیدار شدم و احساس تشنگی کردم. فکری خیال انگیز به سرم زد: لباسم را بپوشم، به باغ بروم و در کنار فواره، آبی به سر و صورتم بزنم و روح خود را تازه کنم.

» به آرامی بلند شدم و به جستجوی وسائلم پرداختم. یکی از جورابهارا پیدا کردم. دومی کجاست؟ هیچ تصویری در این باره نداشتم. با احتیاط از تخت پائین آمدم و کورمال اطراف را گشتم، ولی موفق نشدم. کمی آنطرف تر را جستجو کردم، هر چه پیدامی کردم رویهم می ریختم. به تدریج دورتر می شدم ولی لنگ جوراب پیدا نشد، تا اینکه به مبل برخورددم. وقتی که خوابیده بودم، اطراف من مبل زیادی نبود؛ ولی حالا اطاق پر از مبل شده بود؛ بخصوص صندلی مثل اینکه همه جاها را پر کرده بود. مگر در این لحظه، دو خانواده دیگر در اینجا سکونت نداشتند؟ من در تاریکی حتی یکی از این صندلیها را هم نمی دیدم، ولی مرتباً سرم به آنها برخورد می کرد.

«بالاخره صرف نظر کردم، آخر بدون یک جوراب هم می توانم زندگی کنم. بلند شدم و به طرف در، آنطور که گمان می کردم، ایستادم ولی ناگهان تصویر تاریخودم را در آینه دیدم.

» روشن بود که راه را گم کرده بودم و هیچ تصویری هم از موقعیت

خود نداشتم. اگر در اطاق فقط يك آینه بود، می توانست راهنمایی برای جهت یابی من باشد، ولی دو آینه در اطاق بود و از لحاظ ایجاد اشکال دو تا با هزار تا فرقی نداشت.

« خواستم از طریق دیوار خود را به در برسانم. تلاش جدید خود را شروع کردم - و قاب عکس بزمین افتاد. قاب بزرگ نبود، ولی مثل يك پانورامای کامل سروصدا کرد. هاریس (که همسایه من در اطاق بود و روی تخت دیگری خوابیده بود) تکان نخورد، ولی من احساس کردم که اگر به رویه خود ادامه دهم، بدون تردید بیدار خواهد شد. به بررسی راه حل دیگری پرداختم. می خواستم دوباره میز گرد را پیدا کنم - تا حالا چندبار پهلوی این میز رسیده بودم - و با هدایت آن خودم را به تخت خوابم برسانم، اگر تخت خواب را پیدا می کردم لاقلاً می توانستم تشنگی کشنده خودم را تسکین دهم. بهتر از همه این بود که روی دستها و زانوهایم قرار گیرم و چهار دست و پا به جلو به خزم، من این طریقه را بارها آزمایش کردم و به آن خیلی اعتماد داشتم.

« بالاخره موفق شدم میرزا پیدا کنم - سرم به آن خورد - البته سروصدای زیادی نکرد. دوباره ایستادم و شروع به راه رفتن کردم، منتهی دستهای خود را به جلو دراز کردم، و با انگشتانم به جستجو پرداختم. صندلی را یافتم، سپس دیوار را، يك صندلی دیگر، سپس کاناپه، چوب دستی خودم، باز هم يك کاناپه. و این برای من عجیب بود؛ من بخوبی می دانستم که در اطاق فقط يك کاناپه وجود داشت. درباره روی صندلی افتادم و صدای جدیدی بلند شد. بعد دوباره به يك ردیف صندلی برخوردم.

« یکبار به چیزی به فکر رسیدم که قاعدتاً می بایستی خیلی قبل از آن متوجه شده باشم: میز گرد بود و بنابراین نمی توانست به عنوان

نقطه‌ای برای جهت دادن به مسیر من کمک کند . در فضای بین صندلیها و کاناپه‌ها با حدس جلو می‌رفتم ، ولی وضع برایم کاملاً نا آشنا بود ، ناگهان شمعدان از سر بخاری به زمین افتاد . بعد از شمعدان چراغ را انداختم و بعد از چراغ ، تنگ آب با صدای وحشتناکی به زمین افتاد .

« باخودم فکر کردم : آهان عزیز ، بالاخره ترا پیدا کردم !

« هاریس فریاد زد - دزد ! آی دزد !

« سرو صدا و فریاد همه اهل خانه را بیدار کرد و صاحبخانه ،

مهمانان و مستخدمین با چراغ و فانوس آمدند .

« من به اطراف خود نگاه کردم . معلوم شد که پهلوی تخت هاریس

ایستاده‌ام . فقط يك کاناپه پهلوی دیوار بود ، صندلی هم یکی بیشتر نبود و من ، مثل يك سیاره ، به دور آن چرخیده بودم و مثل يك ستاره دنباله‌دار مرتباً به آن برخورد کرده بودم و درست نیمی از شب را به این کار مشغول بوده‌ام .

« و من با قدمهای خود توانسته بودم در این مدت ۴۷ میل راه

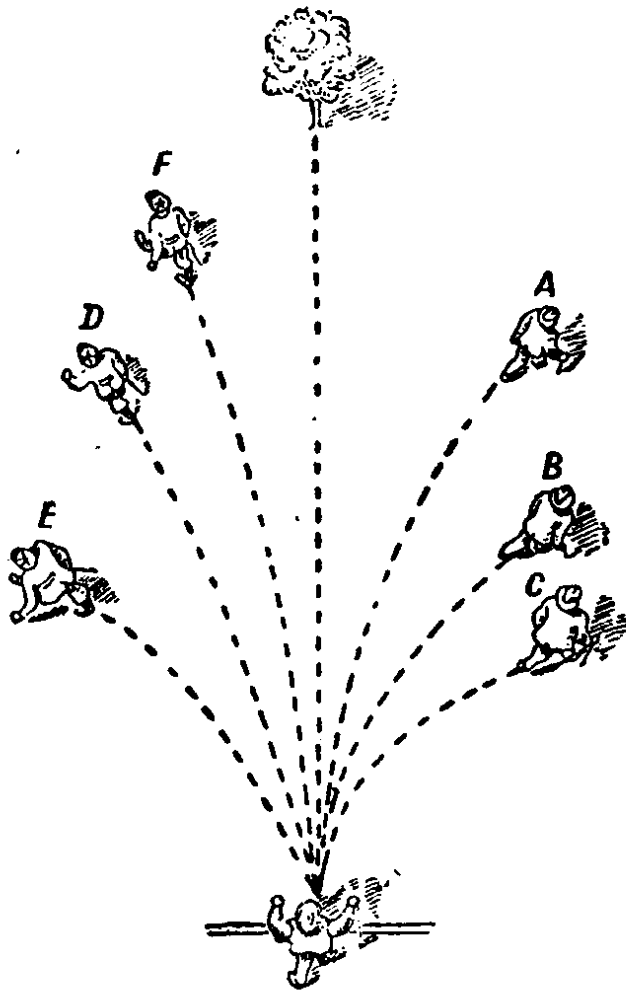
بروم » .

مطلب اخیر به هر حسابی اغراق آمیز است : در جریان چند ساعت

نمی‌توان ۴۷ میل را با پای پیاده طی کرد ، ولی بقیه تفصیلات داستان کاملاً مقرون به حقیقت است و بخوبی اشکالات مضحکی را که معمولاً در يك اطاق تاریک و نا آشنا برای ما پیش می‌آید ، معرفی می‌کند . به خصوص حالا می‌توان روش کار و حضور ذهن حیرت آور قهرمان جوان ماینرید را ارزش‌یابی کرد ، که نه تنها در تاریکی مطلق توانست خود را توجیه کند ، بلکه در چنین شرایطی حتی مسئله مشکل ریاضی را هم حل کرد .

چرخش مرموز

بهمناسبت سرگردانی تواین در اطاق تاريك ، ازپديدهٔ مرموزی یاد می کنیم که برای همهٔ کسانی که با چشم بسته راه می روند ، پیش می آید : چنین فردی نمی تواند به طور مستقیم حرکت کند ، حتما جهت راگم می کند و با حرکت خود قوسی رسم می کند ، درحالیکه خودش گمان می کند که روی خط راست به جلو می رود (شکل ۱۰۸) .



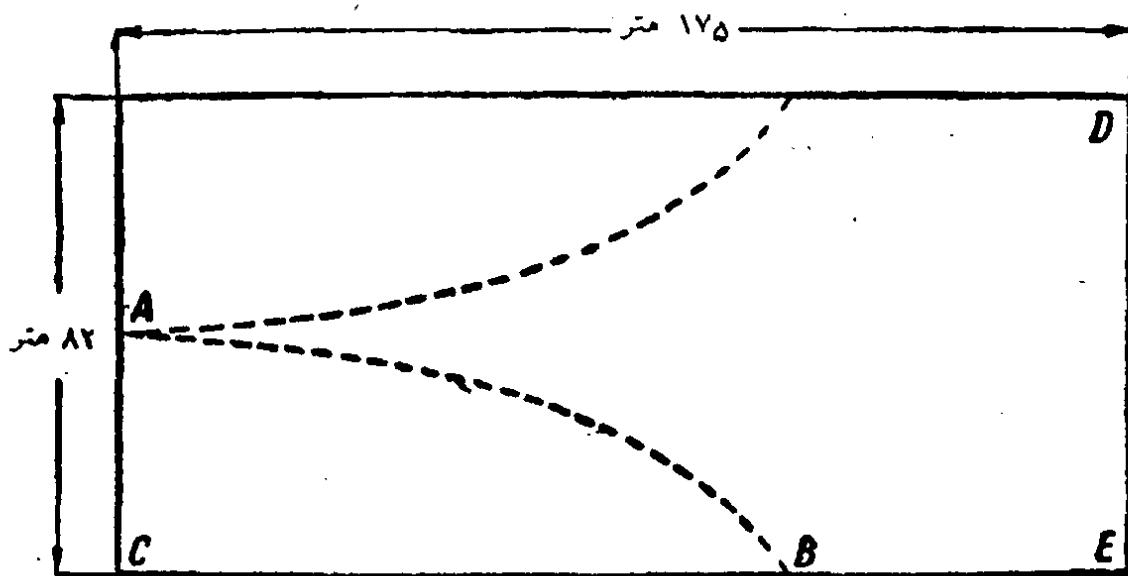
۱۰۸. حرکت با چشمهای بسته

از قدیم این مطلب را متذکر شده اند که اگر مسافرین بیابانها یا دشتهای وسیع ، در کولایک یا هوای مه آلود ، و به طور کلی در تمام مواردی که نتوان جهت یابی کرد ، بدون قطب نما باشند ، راه راست راگم می کنند و به روی قوسی از دایره حرکت خواهند کرد و پس از مدتی بهمان جای اولی خود بر خواهند گشت . شعاع دایره ای که ، در این موارد آدم پیاده در مسیر آن خواهند رفت قریب ۶۰ تا ۱۰۰

متر است و هرچه سرعت او بیشتر باشد ، شعاع دایره کوچکتر می شود ، یعنی قوس دایره زودتر بسته می شود .

در این باره آزمایشهای خاصی برای مطالعه انحراف افراد از خط مستقیم به مسیر دایره‌ای انجام داده‌اند . این نمونه‌ای از این آزمایشهاست که به وسیله‌ای . سپیرین قهرمان اتحاد شوروی گزارش داده شده است: « در فرودگاه صاف و زمردین ، صد نفر از خلبانان آینده صاف کشیده بودند . چشمهای همه آنها را بستند و دستور داده شد که به طور مستقیم به طرف جلو حرکت کنند . افراد براه افتادند . . . ابتدا به طور مستقیم می‌رفتند ، سپس بعضی به طرف است و بقیه به طرف چپ تغییر جهت دادند و به تدریج روی دایره‌هایی قرار گرفتند که به جای اولیه آنها منجر می‌شد .»

آزمایش مشابهی هم در میدان ماری شهر ونیز انجام گرفته است چشمهای عده‌ای را بستند و آنها را در يك انتهای میدان ، درست روبروی کلیسا ، قرار دادند و از آنها خواستند که حرکت کنند . با وجودی که می‌بایستی فقط ۱۷۵ متر پیش بروند ، هیچیک از افراد مورد آزمایش به نمای عمارت (که ۸۲ متر عرض داشت) نرسیدند . همه آنها به این و یا



آن طرف منحرف شدند و روی يك مسير منحنی به یکی از ستونهای کنار رسیدند (شکل ۱۰۹).

خواننده‌ای که داستان ژول ورن بنام «ماجراهای کاپیتان هاتراس» را مطالعه کرده باشد، احتمالاً این مطلب را به یاد داشته باشد که مسافرین، در صحرای غیر مسکونی و پوشیده از برف به رد پای کسی برخورد می کنند:

«دکتر فریاد زد: - دوستان من، این رد پای ماست. ما در مه و طوفان راه خود را گم کرده ایم و به رد پای خودمان رسیده ایم...»

توصیف جالبی از اینگونه سرگردانی روی محیط دایره را ل. ن. تولستوی در داستان «کارفرما و کارگر» خود به ما داده است:

«واسیلی آندره ایچ، اسب را به طرفی راند، که معلوم نبود بچه علت گمان می کرد جنگل و کلبه‌ای وجود دارد. برف چشمهای او را کور کرده بود، باد با شدت خود، می خواست، راه را بر او ببندد، ولی او به جلو خم شده بود و بدون وقفه اسب را می تازاند.

«پنج دقیقه جلو رفت، بنظرش می آمد که مستقیم حرکت

می کند، ولی به جز سراسب و بیابان سفید هیچ چیز نمی دید.

«ناگهان يك سیاهی جلو او پیدا شد. قلبش از خوشحالی شروع

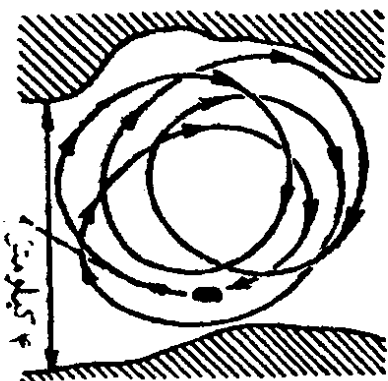
به طپش کرد و به طرف این سیاهی راند، دیگر حتی دیوار خانه‌های دهکده را هم نمی دید. ولی این سیاهی چیزی جز دیوار بین علفهای سیاه بلند نبود، و منظره این علفهای سیاه، با باد موذی و نامطبوعی که می وزید، واسیلی آندره ایچ را به لرزه در آورد، و او با عجله اسب را از حرکت بازداشت، متوجه شده بود که نزدیک شدن به علفها، در حقیقت به معنای آنست که جهت قبلی او کاملاً تغییر کرده است.

«اسب را برگرداند و دوباره حرکت کرد، دوباره در مقابل

او چیزی سیاهی زد. دوباره همان علفهای بلند. باز همان بوران خشک

وتند ، در نزدیکی جایی که اسب می‌رفت ، برف ردپائی را پوشانده بود . واسیلی آندره‌ایچ ایستاد ، خم شد و به‌دقت نگاه کرد : رد پای اسب بود که کمی پوشیده شده بود و نمی‌توانست چیز دیگری جز رد پای اسب خود او باشد ، روشن بود که او روی محیط دایره‌ای و در فضای کوچکی دور زده بود .»

گولد برکزیست‌شناس نروژی در اثری که به این مطلب اختصاص داده است (۱۸۹۶) ، یک رشته اطلاعات تخصصی را در این باره با دقت جمع‌آوری کرده است . دو نمونه از این شواهد را ذکر می‌کنیم . سه مسافر تصمیم گرفتند در یک شب برفی ، کلبه خود را ترک کنند و با عبور از دره‌ای که ۴ کیلومتر عرض داشت خود را به منزل برسانند . منزل در طرفی واقع بود که در شکل ۱۱۰ با نقطه‌چین نشان داده شده است . در راه آنها به‌طور نامحسوسی به سمت راست ، روی منحنی که با پیکان نشان داده شده است ، منحرف می‌شدند . پس از مدتی ، به حساب وقتی که راه رفته بودند ، گمان می‌کردند که به مقصد رسیده‌اند ، ولی در حقیقت به همان جای اول خود

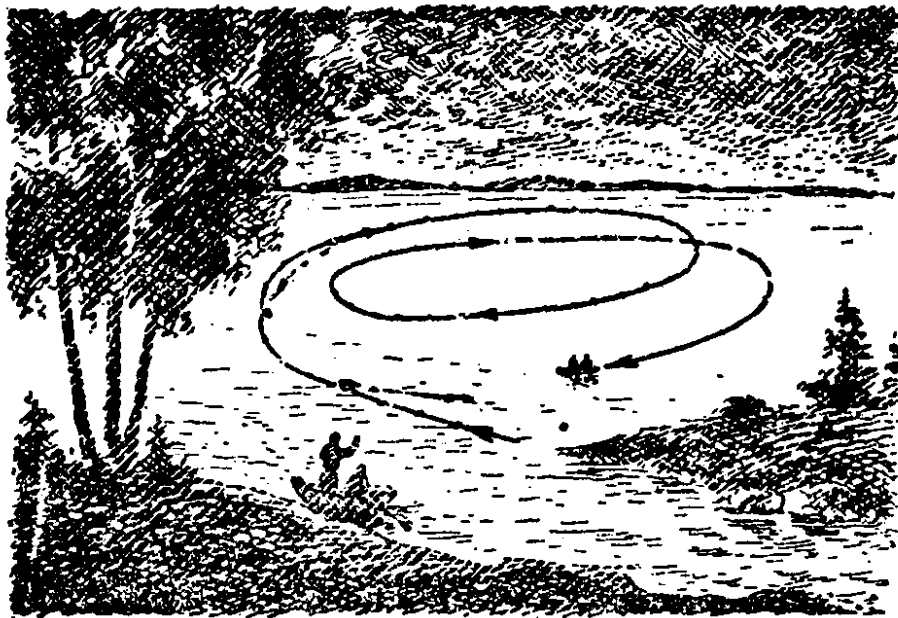


۱۱۰ . طرح آوارگی سه مسافر

(کلبه مبدأ حرکت) رسیده بودند ، دوباره تصمیم به حرکت گرفتند ، ولی باز هم با شدت بیشتری منحرف شدند و به همان جای اول خود رسیدند . و به همین ترتیب برای بار سوم و چهارم هم تکرار شد . با ناامیدی برای پنجمین

دفعه اقدام کردند ، ولی نتیجه همان بود . بعد از دور پنجم ، دیگر از ادامه تجربه سر باز زدند و منتظر صبح ماندند .

از این مشکل تر پارو زدن در دریا روی خط مستقیم ، در شب تاریک بدون ستاره و یا در مه غلیظ است . به حالتی ، که یکی از انواع حالت های مشابه است ، توجه کنیم : قایق رانها تصمیم می گیرند در هوای مه آلود از تنگه ای به عرض ۴ کیلومتر عبور کنند ، دوبار به طرف ساحل مقابل حرکت می کنند ، ولی به آن نمی رسند ؛ بدون اراده محیط دو دایره را طی می کنند و در جایی که سوار شده بودند ، پیاده می شوند (شکل ۱۱۱) .



۱۱۱ . وقتی که قایق رانها بخواهند در هوای مه آلود از تنگه ای عبور کنند .

برای حیوانات هم همین وضع پیش می آید . مسافرین قطبی حکایت می کنند که در بیابانهای برفی ، حیواناتی که به سورت مه بسته شده اند ، روی محیط دایره هایی دور می زنند ، سگهایی را هم که با چشمهای بسته به آب انداخته باشند ، روی چنین دایره هایی شناسی کنند . پرندگان کور هم روی دایره پرواز کنند . حیوانی که شکارچی در تعقیب اوست و از ترس خصوصیت تعیین جهت را از دست داده است ، به جای خط مستقیم ، روی مارپیچ فرار می کند .

جانور شناسها ثابت کرده اند که قورباغه ها ، خرچنگها ، مدوزها (عروس دریائی) و حتی آمیبه های ذره بینی در يك قطره آب - همه روی دایره حرکت می کنند .

این تمایل مرموز انسان و حیوانات را نسبت به دایره چگونه می توان تعبیر کرد ؟ چرا نمی تون در تاریکی جهت مستقیم را تشخیص داد ؟

اگر سؤال را درست مطرح کنیم ، هاله ابهام آمیز آن از جلو چشم ما کنار می رود .

سؤال این نیست که چرا حیوانات روی دایره حرکت می کنند ، بلکه باید سؤال کرد که برای حرکت روی خط مستقیم چه چیزی لازم است ؟

به حرکت يك ماشین کوکی اسباب بازی توجه کنید . ماشین کوکی هم روی خط راست حرکت نمی کند ، بلکه به اینطرف و آنطرف می چرخد .

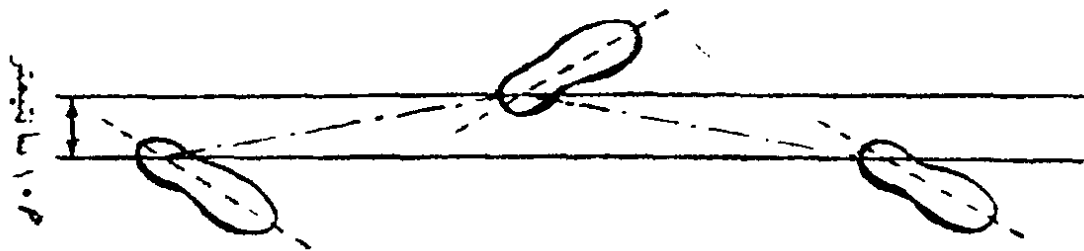
در این حرکت روی قوس ، کسی معمائی نمی بیند ؛ هر کسی حدس می زند که چرا این وضع پیش می آید . چرخهای طرف راست با چرخهای طرف چپ برابر نیست .

روشن است که موجودات زنده هم تنها در حالتی می توانند بدون کمک چشم درست روی خط راست حرکت کنند که عضلات سمت راست و چپ آنها کاملاً به طور یکنواخت کار کنند . ولی مطلب بر سر اینست که تقارن بدن انسان و حیوانات کامل نیست . در مورد اکثر مردم و حیوانات عضلات طرف راست بدن رشد بیشتری نسبت به عضلات طرف چپ دارند . طبیعی است که وقتی مسافر پیاده ، دائماً قدم راست خود را کمی بلندتر از قدم چپ بردارد ، نمی تواند مسیر مستقیم را

حفظ کند و اگر چشمهای او راهنمای راه او نباشد ، بدون تردید به طرف چپ متمایل خواهد شد . به همین ترتیب ، قایق رانی که در هوای مه آلود نتواند جهت یابی کند ، اگر دست راست او قوی تر از دست چپش باشد ، به طرف چپ متمایل می شود . این يك ضرورت هندسی است .

فرض کنیم که برای شخصی مثلاً هر قدم پای چپ يك میلیمتر بیشتر از يك قدم پای راستش باشد . در این صورت ، اگر هر پای او متناوباً هزار قدم بردارد ، پای چپ او ۱۰۰۰ میلیمتر یعنی يك متر دورتر از پای راست رفته است . و این امر روی دو خط راست موازی ممکن نیست و تنها روی محیط دودایره متحدالمرکز امکان دارد .

همچنین می توانیم ، با استفاده از نقشه حرکت روی دایره در دره برفی حساب کنیم که هر قدم پای چپ مسافرین چقدر از قدم پای راست آنها بیشتر بوده است (چون مسیر به طرف راست منحرف شده است ، واضح است که طول قدمهای پای چپ بیشتر از طول قدمهای پای راست بوده است) . فاصله بین خطوط جای پای راست و پای چپ ضمن راه رفتن تقریباً مساوی ۱۰ سانتیمتر یعنی $\frac{1}{10}$ متر است (شکل ۱۱۲) . وقتی که شخص محیط يك دایره کامل را طی می کند ، پای راست او



۱۱۲ . مسیر جای پای راست و پای چپ ضمن راه رفتن

مسافتی به طول $2\pi R$ و پای چپ او مسافتی به طول $2\pi(R + \frac{1}{10})$ را

طی می کند ، که در آن R عبارتست از شعاع دایره برحسب متر .
 اختلاف این مسافتها یعنی :

$$2\pi(R + 0,1) - 2\pi R = 2\pi \times 0,1 = 0,62 \text{ (متر)} = 620 \text{ (میلیمتر)}$$

از اختلاف طول قدمهای راست و چپ به وجود آمده است . اگر اختلاف بین طولهای این دو قدم را در تعداد قدمهای یکی از پاها ضرب کنیم ، همین اختلاف ۶۲۰ میلیمتر بدست می آید . از شکل ۱۱۰ می توان استنباط کرد که مسافرین ما دایره‌ای به قطر تقریباً $\frac{3}{5}$ کیلومتر، یعنی به محیط تقریبی ۱۰۰۰۰ متر را دور زده‌اند . اگر طول متوسط هر قدم

$$\text{را } 0,7 \text{ متر فرض کنیم، برای این مسافت به اندازه } \frac{10000}{0,7} \text{ یعنی } 14000$$

قدم برداشته شده است ، که از آن ۷۰۰۰ قدم مربوط به پای راست و ۷۰۰۰ قدم مربوط به پای چپ است . به این ترتیب می دانیم که ۷۰۰۰ قدم پای چپ به اندازه ۶۲۰ میلیمتر از ۷۰۰۰ قدم پای راست طویل تر است . بنابراین هر قدم پای چپ به اندازه $\frac{620}{7000}$ میلیمتر یا کمی کمتر از ۰,۱ میلیمتر از هر قدم پای راست بزرگتر می شود . و همین اختلاف جزئی است که چنین نتیجه عجیبی را به بار می آورد !

شعاع دایره‌ای ، که مسافر روی محیط آن سرگردان می شود ، به اختلاف طول قدمهای «راست» و «چپ» بستگی دارد و این رابطه را می توان به سادگی بدست آورد . تعداد قدمهایی که برای دور زدن

دایره‌ای لازم است (طول هر قدم ۰,۷ متر) مساوی $\frac{2\pi R}{0,7}$ است (شعاع R)

دایره است) ، که از آنها $\frac{2\pi R}{2 \times 0,7}$ قدم مربوط به پای چپ و همین اندازه

مربوط به پای راست است . اگر این عدد را در اختلاف طول قدمهای راست و چپ (که x می نامیم) ضرب کنیم ، اختلاف محیط دو دایره

متحدالمركز كه به وسیله پاهای راست و چپ طی شده است ، بدست می آید ، یعنی :

$$\frac{2\pi \times Rx}{2 \times 0,7} = 2\pi \times 0,1 \Rightarrow Rx = 0,14$$

که در آن R و x بر حسب متر بیان شده اند .

به کمک این رابطه ساده می توان شعاع دایره را با معلوم بودن اختلاف قدمها ، محاسبه کرد و برعکس . مثلاً برای کسانی که در آزمایش میدان مارک و نیز شرکت کرده بودند ، می توان مقدار شعاع بزرگترین دایره ای را که آنها طی کرده اند ، بدست آورد . چون AC (= ۴۱ متر) « سهم » هریک از این دایره ها و BC نصف وتر آنست و ضمناً BC از ۱۷۵ متر تجاوز نمی کند (شکل ۱۰۹) ، شعاع R از تساوی زیر بدست می آید :

$$BC^2 = 2R \cdot AC - AC^2$$

که با فرض $BC = 175$ بدست می آید :

$$2R = \frac{BC^2 + AC^2}{AC} = \frac{175^2 + 41^2}{41} \neq 800$$

یعنی شعاع دایره ای که در راهپیمائی میدان مارک دور زده اند به ۴۰۰ متر نمی رسد .

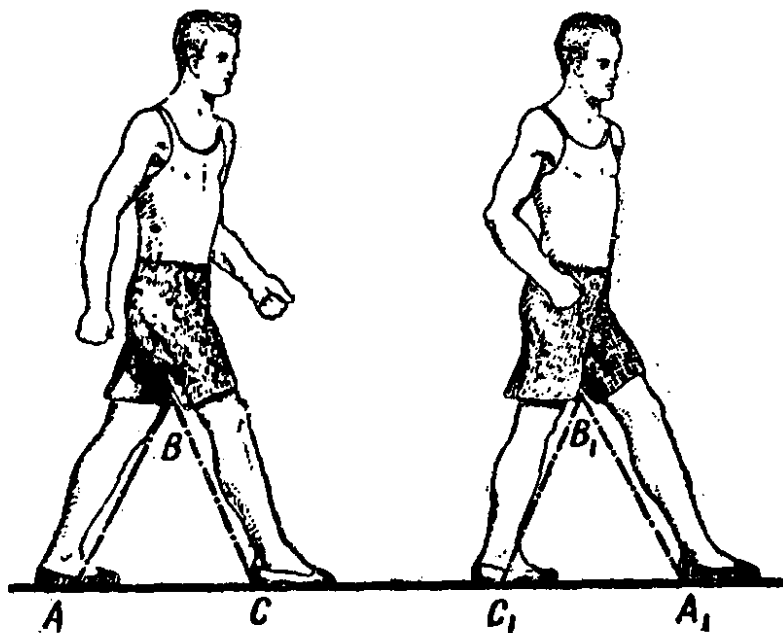
با در دست داشتن این عدد ، از رابطه قبلی $Rx = 0,14$ کمترین اختلاف بین طول قدمها محاسبه می شود :

$$400x = 0,14 \Rightarrow x = 0,35 \text{ (میلیمتر)}$$

یعنی اختلاف بین قدمهای راست و چپ شرکت کنندگان در آزمایش از ۰٫۳۵ میلیمتر کمتر نیست .

گاهی شنیده می شود ، که مسئله چرخش روی دایره ، وقتی که

با چشمهای بسته راه می‌رویم، به اختلاف پای راست و پای چپ مربوط است و چون برای اکثر مردم پای چپ بزرگتر از پای راست است، بنابراین باید ضمن راه رفتن حتماً نسبت به خط مستقیم بسمت راست متمایل



۱۱۳. اگر زاویه هر قدم، مقدار ثابتی باشد،
قدمها یکنواخت می‌شود.

شوند. این توضیح مبتنی بر يك اشتباه هندسی است. آنچه که مهم است، اختلاف قدمها است نه اختلاف پاها، در شکل ۱۱۳ دیده می‌شود که با پاهای نامساوی هم می‌توان قدمهای یکنواخت برداشت، بشرطی که با برداشتن هر قدم، زاویه بین پاها را تغییر ندهیم، یعنی طوری قدم برداریم که $\hat{B} = \hat{B}_1$ باشد. زیرا در این صورت چون $AB = A_1B_1$ و $BC = B_1C_1$ می‌باشد، مثلث ABC مساوی مثلث $A_1B_1C_1$ خواهد شد و بنابراین $AC = A_1C_1$ می‌شود. برعکس اگر طول پاهای کسی کاملاً با هم مساوی باشد، می‌تواند قدمهای متفاوت بردارد.

به همین دلیل است که اگر قدرت دست راست قایق ران بیشتر از قدرت دست چپ او باشد، قایق حتماً روی دایره‌ای که به طرف چپ شکسته می‌شود، متمایل خواهد شد، به همین ترتیب حیواناتی که قدمهای راست و چپ آنها یکنواخت نباشد و یا پرندگان که بالهای راست و چپ آنها با یک قدرت حرکت نکنند، وقتی که نتوانند با چشمهای خود جهت مستقیم را تعقیب کنند، باید روی یک دایره حرکت کنند. در این مورد هم یک اختلاف جزئی بین قدرت دستها، پاها و یا بالها کافی است.

وقتی که با این نظر به این مسئله نگاه کنیم، رمز جادویی خود را بکلی از دست می‌دهد و به صورتی کاملاً طبیعی جلوه می‌کند و بر عکس وقتی باعث تعجب می‌شود که انسان و یا حیوانی بتواند، بدون راهنمایی چشمهای خود بطور مستقیم حرکت کند، زیرا برای این منظور باید بدنی که از لحاظ هندسی کاملاً متقارن است، وجود داشته باشد، چیزی که مطلقاً غیر ممکن است. و کمترین انحراف از تقارن کامل ریاضی هم اجباراً به این نتیجه می‌رسد که حرکت روی دایره باشد. بنابراین معجزه‌ای وجود ندارد که باعث تعجب ما بشود و آنچه هست، عین قانون طبیعت است.

عدم امکان حرکت روی خط مستقیم اشکالی برای انسان ایجاد نمی‌کند: قطب‌نما، جاده و نقشه در بسیاری موارد می‌تواند او را از عواقب این نقص مصون نگه دارد.

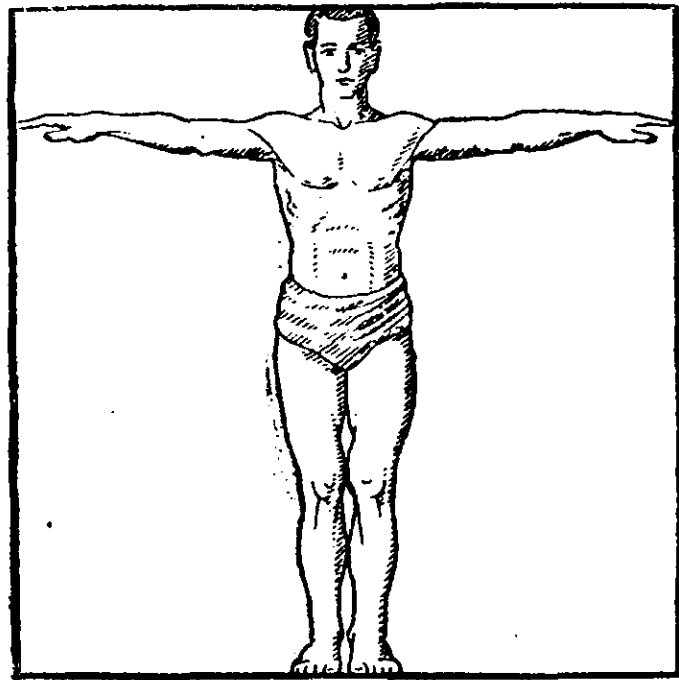
و اما برای حیوانات، مخصوصاً ساکنین بیابانها و فضای بیکران دریاها: برای آنها عدم تقارن بدن، که آنها را مجبور می‌کند بجای خط مستقیم روی دایره حرکت کنند، عامل مهمی برای زندگی است و مثل یک زنجیر نامرئی نمی‌گذارد که آنها از سرزمین اصلی و

محل تولد خود دور شوند . شیر، که جرأت می کند و به نقاط دور می رود ، اجباراً به طرف مبداء حرکت خود برمی گردد. مرغ آبی که از صخره ای پرواز می کند و روی دریای بیکران بال می زند ، نمی تواند به لانه خود برنگردد (ولی هنوز این مطلب به صورت يك معما باقی مانده است که چگونه پرندگان می توانند بطور مستقیم از قاره ها و اقیانوسها پرواز کنند عبور کنند) .

اندازه گیری با دستهای خالی

قهرمان کتاب ماین رید تنها به این مناسبت توانست مسئله هندسی خود را حل کند که قبل از مسافرت قد خود را اندازه گرفته بود و بادقت نتیجه اندازه گیری را به خاطر

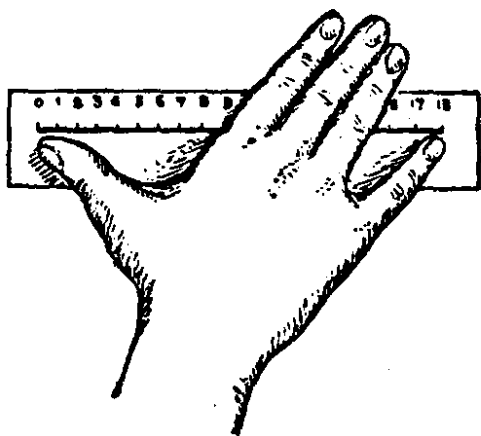
سپرده بود . خیلی خوب است که برای هر يك از ما اندازه های این «مترزنده» معلوم باشد، تا در موارد لزوم بتوانیم از آن استفاده کنیم. دانستن این مطلب هم جالب است که برای اکثر مردم قاصله بین دو انتهای دست، وقتی که به طرفین باز شده باشد ، باقد آنها برابر است



۱۱۴. قانون لئوناردو داوینچی

(شکل ۱۱۴) - قانون نقاش و دانشمند نابغه لئوناردو داوینچی - : به وسیله

این قانون خیلی راحت تر از پسر بچه‌ی ماین رید می‌توان از «مترزنده»
خود استفاده کرد ، قد متوسط يك انسان بالغ قریب $1/7$ متر یا ۱۷۰

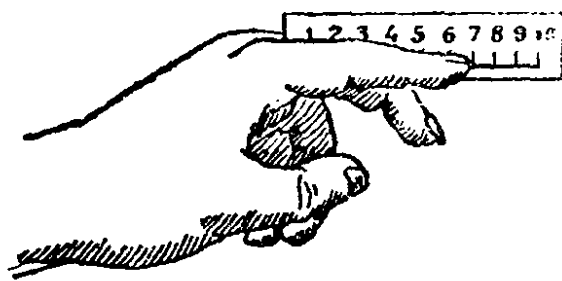


سانتیمتر است ، البته این عدد را
به سادگی می‌توان به خاطر سپرد
ولی به این مقدار متوسط نباید
اعتماد کرد : هر کس باید قد خود
و قسمتهایی مختلف دستهای خود را
اندازه بگیرد .

۱۱۵ . اندازه فاصله بین انتهای انگشتان
برای اندازه‌گیری - بدون

وسيله - فواصل كوچك ، باید طول «وجب» خود ، یعنی فاصله بین
انتهای انگشت شصت و انگشت كوچك ، را به خاطر بسپاریم (شکل ۱۱۵)

برای يك مرد بالغ این اندازه
تقریباً برابر ۱۸ سانتیمتر است -
تقریباً يك چهارم آرشین (۷۱
سانتیمتر) ، ولی برای جوانان
این اندازه كوچکتر است و تا
۲۵ سالگی به تدریج بزرگتر



۱۱۶ . اندازه‌گیری انگشت اشاره

می‌شود . برای همین منظور می‌توان اندازه انگشت اشاره را هم معین
کرد و به خاطر سپرد ، اندازه این انگشت را از دو طرف می‌توان بدست
آورد ، هم از طرف انگشت میانه (شکل ۱۱۶) و هم از طرف انگشت
شصت . همچنین باید فاصله بین انگشت اشاره و انگشت میانه را هم

بدانید (این فاصله برای افراد بالغ حدود ۱۰ سانتیمتر است) - شکل ۱۱۷ . بالاخره باید عرض انگشتان خود را هم اندازه بگیرید . عرض



۱۱۸ . اندازه گیری محیط لیوان با دست خالی



۱۱۷ . اندازه گیری فاصله بین انتهای دو انگشت

سه انگشت وسط ، وقتی که محکم بهم چسبیده باشند قریب ۵ سانتیمتر است .

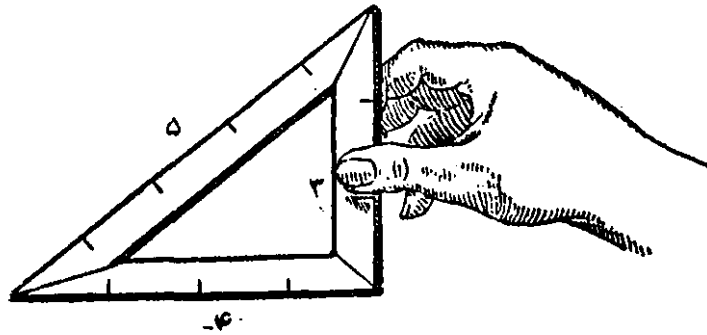
وقتی که این اطلاعات در دسترس شما باشد ، می توانید هر گونه اندازه گیری را با دست واقعاً خالی و حتی در تاریکی انجام دهید . به عنوان مثال به شکل ۱۱۸ توجه کنید : در اینجا با کمک انگشتان محیط يك لیوان اندازه گرفته می شود . اگر مقادیر متوسط را در نظر بگیریم ، محیط لیوان مساوی $۱۸ + ۵$ یعنی ۲۳ سانتیمتر می شود .

زاویه قائمه در تاریکی

مسئله

دوباره به جوان ریاضی دان ماینرید برمی گردیم و این مسئله را

طرح می‌کنیم : او چگونه باید عمل کند تا مطمئن شود که زاویه قائمه بدست آورده است ؟ « چوب بزرگتر اطوری در انتهای آن (چوبی که از روی بشکه بیرون آمده بود) قرار دادم که بر آن عمود باشد ». این

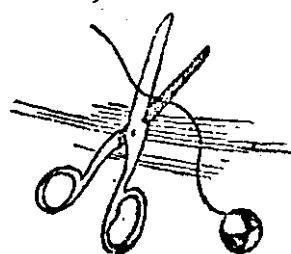


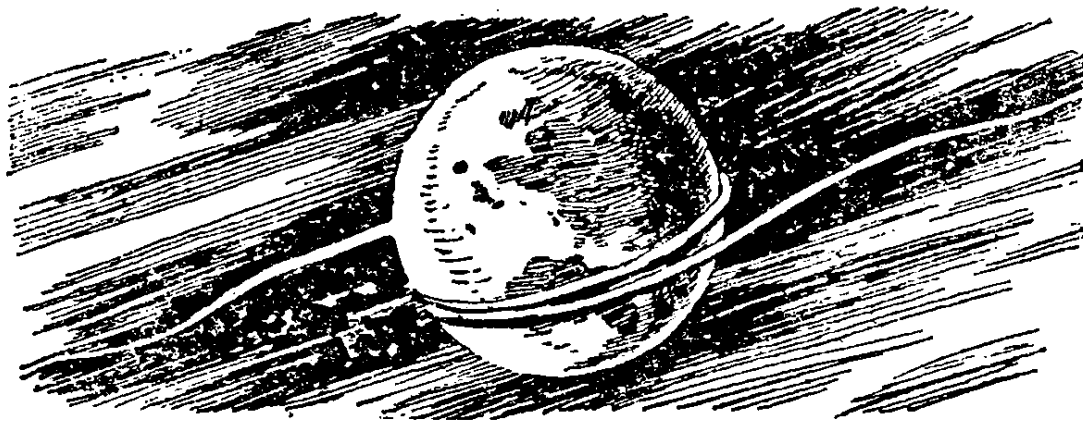
۱۱۹. ساده‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن اعدادی صحیح است.

جمله‌ایست که در داستان می‌خوانیم . انجام این عمل در تاریکی ، و تنها با اعتماد به حس لامسه ، ممکن است اشتباه بزرگی در برداشته باشد . ولی برای پسر بچه و در وضعی که او قرار داشت ، ساختن زاویه قائمه وسیله قابل اعتمادی بود . ولی چگونه ؟

حل

باید از قضیه فیثاغورث استفاده کرد و از قطعات چوب مثلثی ساخت که اضلاع آن چنان باشند که به شکل قائم‌الزاویه درآید . ساده‌تر از همه اینست که طول قطعات چوب ۳ ، ۴ و ۵ گرفته شود (شکل ۱۱۹) . این قدیمی‌ترین وسیله مصری است ، که در سرزمین اهرام هزاران سال قبل مورد استفاده قرار گرفته است . ولی حتی امروز و در زمان ما هم ساده‌ترین وسیله عملی برای ساختن زاویه قائمه است .





۹

مطالب کهنه و نو درباره دایره

هندسه عملی مصر و روم

امروزه هر شاگرد دبیرستانی، خیلی دقیق‌تر از کاهن دانشمند سرزمین قدیم اهرام یا معمار هنرمند روم بزرگ، می‌تواند با در دست داشتن قطر دایره، محیط آنرا بدست آورد. مصریهای قدیم نسبت محیط دایره بر قطر آنرا $3/16$ و رومیها $3/12$ می‌گرفتند، در حالیکه مقدار صحیح این نسبت مساوی $3/14159 \dots$ می‌باشد. ریاضی‌دانهای مصری و رومی نسبت طول محیط دایره به قطر آنرا با محاسبات دقیق هندسی، آنطور که بعدها ریاضی‌دانها به آن پرداختند، بدست نمی‌آوردند، روش آنها خیلی ساده و مبتنی بر تجربه بود. چرا آنها دچار چنین

اشتباهاتی می‌شدند؟ مگر نمی‌توانستند نخ‌ی به‌دور جسم گردی بکشند و بعد آنرا باز کنند و به‌صورت مستقیم در آورند و سپس به‌طور ساده اندازه بگیرند؟

بدون تردید آنها هم به‌همین طریق عمل کرده‌اند؛ ولی نباید انتظار داشت که این روش منجر به نتیجه دقیق و خوبی بشود. مثلاً گلدانی را در نظر بگیرید که قطر کف آن مساوی ۱۰۰ میلیمتر باشد. محیط دایره کف آن گلدان باید مساوی ۳۱۴ میلیمتر بشود. ولی در عمل، وقتی که با نخ اندازه‌گیری می‌کنید، مطمئناً عین این نتیجه را بدست نمی‌آورید و به‌سادگی در حد یک میلیمتر اشتباه می‌کنید و عدد π برای شما $3/1$ یا $3/15$ بدست می‌آید. ولی اگر در نظر داشته باشید که قطر گلدان را هم نمی‌توان کاملاً دقیق اندازه گرفت و در آنجا هم احتمالاً اشتباه یک میلیمتر وجود دارد، آنوقت متوجه می‌شوید که برای عدد π فاصله بزرگی، که بین دو عدد زیر قرار دارد، بدست می‌آید:

$$\frac{313}{101} \quad \text{و} \quad \frac{315}{99}$$

یعنی به‌صورت کسرها عشاری بین دو عدد زیر:

$$3/18 \quad \text{و} \quad 3/09$$

می‌بینید که اگر با روش مذکور به محاسبه عدد π بپردازیم، مستقیماً به عدد $3/14$ نمی‌رسیم: یکبار عدد $3/1$ بدست می‌آید، بار دیگر $3/12$ ، بار سوم $3/17$ و غیره. البته ممکن است که تصادفاً در یکی از محاسبات به $3/14$ هم برسیم، ولی از نظر کسی که محاسبه می‌کند، این عدد نسبت به عددهای دیگری که بدست آمده است، هیچگونه امتیازی ندارد.

این راه تجربی هرگز نمی تواند مقدار مطمئن قابل قبولی برای π بدست بدهد. حالا معلوم می شود که چرا دنیای قدیم مقدار واقعی نسبت محیط دایره بر قطر آنرا نمی دانست، همچنین نبوغ ارشمیدس روشن می شود که برای π از عدد $\frac{1}{7} \times 3$ استفاده می کرد.

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

در کتاب «الجبر والمقابله» ریاضی دان بزرگ ایرانی، محمد بن موسی خوارزمی، درباره محاسبه محیط دایره اینطور می خوانیم:

« بهترین راه اینست که قطر را در $\frac{1}{7} \times 3$ ضرب کنیم. این سریع ترین و ساده ترین روش است. خدای بزرگ بهتر می داند».

حالا ما می دانیم که عدد ارشمیدس $\frac{1}{7} \times 3$ نمی تواند بطور دقیق نسبت محیط دایره به قطر آنرا معلوم کند. ثابت شده است که این نسبت را نمی توان به وسیله نسبت دو عدد صحیح نشان داد. به همین مناسبت عدد π را همیشه با تقریب در نظر می گیرند، منتهی بسته به وقتی که محاسبات عملی لازم داشته باشند، این تقریب به مقدار واقع نزدیکتر و یا از آن دورتر خواهد بود. لودوئف ریاضی دان، اهل لیدن با حوصله زیاد عدد π را تا ۳۵ رقم اعشار محاسبه نمود و وصیت کرد که ارقام این عدد را بر مقبره او حک کنند.

اینست سی و پنج رقم اعشار عدد π :

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸...

در سال ۱۸۷۳ نه کی شنکس مقدار عدد π را تا ۷۰۷ رقم بعد از

اعشار انتشار داد! ولی چنین عددهای طولی، برای مقدار تقریبی π ، نه از لحاظ عملی و نه از لحاظ نظری نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و تنها می‌تواند به عنوان یک رکورد بی‌هدف و برای صرف مواقع بیکاری مورد مطالعه قرار گیرد. در سالهای ۱۹۴۶ و ۱۹۴۷ فرگوسن (دانشگاه منچستر) و بدون ارتباط با او رنچ (از واشنگتن) عدد π را تا ۸۰۸ رقم بعد از ممیز پیدا کردند و معلوم شد که محاسبهٔ شنکس از رقم ۵۲۸ به بعد اشتباه است. اگر ما بخواهیم که مثلاً طول خط استوای زمین را با دقت یک سانتیمتر محاسبه کنیم، به فرض اینکه قطر آنرا با دقت داشته باشیم، کافی است که برای عدد π تا ۹ رقم بعد از ممیز در نظر بگیریم. اگر تعداد قسمت‌ها را دو برابر کنیم (۱۸ رقم بعد از ممیز)، می‌توانیم محیط دایره‌ای به شعاع فاصلهٔ زمین تا خورشید را با اشتباه کمتر از ۰/۰۰۰۱ میلی‌متر (صدبار کمتر از قطر یک مو) حساب کنیم.*

ریاضی‌دان شوروی گراوخیلی خوب نشان داده است که حتی صد رقم اولیهٔ بعد از ممیز برای عدد π مطلقاً نمی‌تواند مورد استفاده‌ای داشته باشد. او حساب کرده است که اگر کره‌ای در نظر بگیریم که شعاع آن فاصلهٔ زمین تا شعرای یمانی یعنی عددی که بر حسب کیلومتر با ۱۳۲

* از ریاضی‌دانهای ایرانی، دقیق‌ترین محاسبهٔ عدد π متعلق به غیاث‌الدین جمشید کاشانی است (اواخر قرن چهاردهم و اوایل قرن پانزدهم میلادی). کاشانی محیط دایره را واسطهٔ عددی محیط‌های چند ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی با 3×2^n ضلع می‌گیرد. کاشانی n را مساوی ۲۸ می‌گیرد، یعنی $3 \times 2^n = 805306368$ ضلعی و برای عدد n بدست می‌آورد:

$$\pi = 3,14159265358979325$$

از ۱۷ رقمی که کاشانی برای π پیدا کرده است تنها رقم آخری آن درست نیست.

همراه ۱۰ صفر: $10^1 \times 132$ کیلومتر ، باشد و این کره را از موجودات ذره بینی پر کنیم : بطوریکه در هر میلیمتر مکعب آن 10^1 میکروب جا بگیرد ، سپس همه این میکروبها را روی یک راست چنان قرار دهیم که فاصله بین هر دو میکروب مجاور دوباره برابر با فاصله شعرای یمانی تا زمین باشد ؛ آنوقت چنین پاره خط خیالی را به عنوان قطر دایره ای در نظر بگیریم ، می توان محیط این دایره عظیم را با انتخاب ۱۰۰ رقم

اعشار بعد از ممیز در عدد π ، با دقت میکروسکوپی یعنی تا $\frac{1}{10000000}$ میلیمتر حساب کرد . آنگو منجم فرانسوی کاملاً حق داشت که متذکر شد : « اگر نسبت محیط دایره به قطر آن ، عددی با دقت ریاضی وجود داشت ، از لحاظ دقت محاسبه نفعی عاید ما نمی شد » .

در محاسبات عادی کافی است که عدد π را با دو رقم بعد از ممیز در نظر بگیریم (۳/۱۴) و برای محاسبات دقیق تر ، چهار رقم (۳/۱۴۱۶) : رقم آخر را به جای ۵ به این مناسبت ۶ گرفته ایم که رقم بعد از آن از ۵ بزرگتر است) .

یک بیت شعر و یا یک جمله کوتاه بهتر از عدد در خاطر آدمی می ماند ، بهمین مناسبت برای بیاد داشتن ارقامی از عدد π شعرها و جمله های کوتاه درست کرده اند . در این « اشعار ریاضی » تعداد حروف هر کلمه نماینده یک رقم از عدد π در نظر گرفته می شود .

از این اشعار در زبان انگلیسی با ۱۳ کلمه وجود دارد که در نتیجه تا ۱۲ رقم بعد از ممیز را برای عدد π بدست می دهد ؛ زبان آلمانی با ۲۴ کلمه و در زبان فرانسوی با ۳ کلمه (و همچنین شعری با ۱۲۶ کلمه!) وجود دارد . بعضی از این اشعار را در اینجا نقل می کنیم :

در زبان فارسی :

گرز قدر پی کنند از تو سئوال پاسخی ده که خرمند ترا آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹

ره سرمنزل توفیق بما آموزد

۲ ۶ ۵ ۳ ۵

در زبان روسی:

Это я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни, напрасны.

در زبان انگلیسی:

See I have a rhyme assisting.
My feeble brain, its tasks oft times resisting.

در زبان آلمانی:

Wie o dies π
Macht ernstlich, so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein'

در زبان فرانسوی:

Que j'aime à faire apprendre un
nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

اشتباه جك لندن

در اینجا قطعه‌ای از داستان جك لندن به نام « کدبانوی کوچک خانه بزرگ » را نقل می‌کنیم که زمینه‌ای برای محاسبه هندسی دارد: « وسط دشت دیرک فولادی برپا بود که به‌طور عمیقی در زمین فرو رفته بود. از رأس دیرک تا کنار دشت طنابی کشیده شده بود که به‌تراکتوری محکم کرده بودند. مکانیسن‌ها اهرم را فشار دادند و موتور

شروع به کار کرد .

« ماشین حرکت کرد و روی محیط دایره‌ای که مرکز آن دیرك فولادی بود به جلو رفت .

« گراهام گفت :

« - برای اینکه کار ماشین در آخر کار تکمیل شود، باید دایره‌ای را که دور می‌زنید ، به مربع تبدیل کنید .

« - با این روشی که ما کار می‌کنیم ، قسمت عمده‌ای از دشت مربع شکل را ازدست می‌دهیم .

« گراهام شروع به محاسبه کرد و بعد متذکر شد :

« - تقریباً از هر ده آکر زمین ، سه آکر آنرا ازدست می‌دهیم .
حالا می‌خواهیم این محاسبه را آزمایش کنیم .

حل

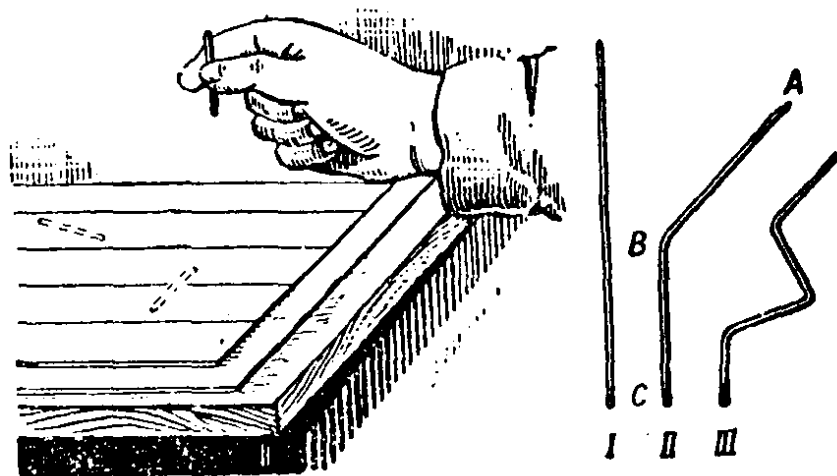
محاسبه درست نیست . کمتر از ۳/۰ زمین ازدست می‌رود . ضلع مربع را a فرض می‌کنیم ، در این صورت مساحت آن مساوی a^2 می‌شود .
قطر دایره محاطی هم مساوی a و در نتیجه مساحت آن $\frac{\pi a^2}{4}$ خواهد شد .
به این ترتیب مقدار باقیمانده زمین چنین می‌شود :

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2 \approx 0,22a^2$$

می‌بینیم که قسمت شخم نشده دشت مربع شکل ، آنطور که قهرمان داستان محاسبه می‌کند ۳۰٪ کل آنرا تشکیل نمی‌دهد ، بلکه قریب ۲۲٪ آنست .

رها کردن سوزنها

عجیبترین و در عین حال جالبترین روش پیدا کردن π را ذکر می‌کنیم. تعدادی سوزن خیاطی کوتاه (دو سانتیمتری) تهیه می‌کنیم، بهتر است نوک سوزنها را بشکنیم تا سوزنها ضخامتی یکنواخت داشته باشند. سپس روی یک صفحه کاغذ خطوط موازی باهم به فواصل دو برابر طول سوزن رسم می‌کنیم. حالا از ارتفاع دلخواهی سوزن را روی



۱۲۰ تجربه بوفون با سوزنهای رها شده

صفحه کاغذ می‌اندازیم و توجه می‌کنیم که آیا یکی از خطوط صفحه را قطع می‌کند یا نه؟ (شکل ۱۲۰ - سمت چپ). برای اینکه، وقتی که سوزن روی کاغذ می‌افتد به بالا نیفتد، بهتر است زیر آن خشک کن و یا ماهوت قرار دهیم. سوزن را به تعداد زیاد، مثلاً صدبار و یا بهتر هزار بار از بالا رها می‌کنیم و هر بار دقت می‌کنیم که آیا یکی از خطها را قطع می‌کند یا نه؟ اگر در آخر کار تعداد کل دفعاتی که سوزن را رها

(* مواردی را هم که انتهای سوزن به ابتدای خط تکیه کرده باشد، جزو حالت تقاطع به حساب می‌آوریم.)

کرده‌اید بر تعداد دفعاتی که سوزن خط را قطع کرده است، تقسیم کنیم، عدد π (البته با کم و بیش تقریب) بدست می‌آید.

مطلب را روشن کنیم. فرض کنید تعداد احتمالی مواردی که سوزن خط را قطع می‌کند مساوی k و طول سوزن مساوی ۲۰ میلیمتر باشد. در حالت تقاطع، البته باید نقطه تلاقی بر یکی از این میلیمترها واقع باشد، ولی نه هیچیک از میلیمترها و نه هیچیک از قسمتهای سوزن نسبت به بقیه امتیازی ندارد. بنابراین احتمال تلاقی هر یک از میلیمترها مساوی $\frac{k}{۲۰}$ است. برای قسمتی از سوزن که به طول ۳ میلیمتر باشد، این

احتمال مساوی $\frac{۳k}{۲۰}$ و برای قطعه ۱۱ میلیمتری آن $\frac{۱۱k}{۲۰}$ می‌باشد و غیره.

به عبارت دیگر احتمال تلاقی، با طول سوزن نسبت مستقیم دارد.

در حالتی هم که سوزن خم شده باشد، باز هم این نسبت حفظ می‌شود. فرض کنید که سوزن به شکل II خم شده باشد (شکل ۱۲۰- سمت راست)، ضمناً طول قسمت AB مساوی ۱۱ میلیمتر و طول قسمت BC مساوی ۹ میلیمتر باشد. برای قسمت AB احتمال تلاقی مساوی

$\frac{۱۱k}{۲۰}$ و برای قسمت BC مساوی $\frac{۹k}{۲۰}$ و برای تمام سوزن $\frac{۱۱k}{۲۰} + \frac{۹k}{۲۰}$

یعنی مثل سابق مساوی k می‌باشد. می‌توانیم سوزن را به شکلهای مرکب‌تری بشکنیم (شکل ۱۲۰-III)، باز هم عدد احتمال تغییر نمی‌کند.

(متذکر می‌شویم که یک سوزن خم شده ممکن است خط را در دو یا تعداد بیشتری از قسمتهای خود قطع کند، البته این تلاقیها باید ۲، ۳ و غیره به حساب بیاید، زیرا اولین نقطه تلاقی مربوط به یک قسمت سوزن است،

دومی مربوط به قسمت دیگر و غیره) .

حالا فرض کنید سوزنی را رها کنیم که به شکل دایره خم شده باشد و قطر آن مساوی فاصله بین دو خط موازی باشد (دو برابر سوزن ما) . چنین حلقه‌ای باید در هر بار یکی از خطها را در دو نقطه قطع کند (و یا بر دو خط مماس باشد- یعنی در هر حال دو نقطه تلاقی داشته باشد). اگر تعداد دفعاتی که حلقه را می‌اندازیم N فرض کنیم ، تعداد نقاط تلاقی مساوی $2N$ خواهد شد . نسبت طول محیط این حلقه به طول سوزن ما مساوی 2π است و ما دیدیم که احتمال تلاقی متناسب با طول سوزن است. بنابراین احتمال (k) تلاقی سوزن ما برابر با نسبت $2N$ به 2π یعنی مساوی $\frac{N}{\pi}$ خواهد بود و از آنجا :

$$\pi = \frac{\text{تعداد دفعاتی که سوزن را انداخته‌ایم}}{\text{تعداد دفعات تلاقی}}$$

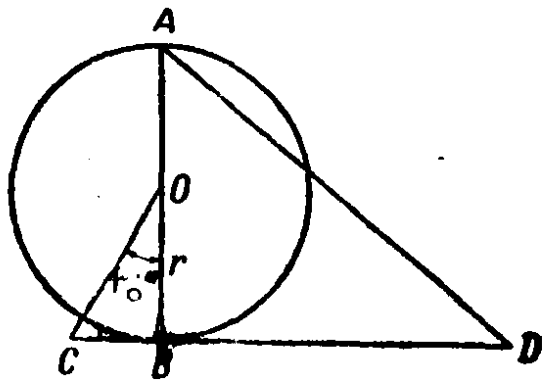
هرچه تعداد دفعات آزمایش بیشتر باشد ، مقدار عدد π دقیق‌تر بدست می‌آید . ر . ولف منجم سویسی در اواسط قرن گذشته با ۵۰۰۰ بار آزمایش ، برای عدد π به $3/159000$ رسید که ضمناً دقت آن از عددی که ارشمیدس بکار می‌برد کمتر است .

می‌بینیم که در اینجا نسبت محیط دایره به قطر آن به طریق تجربی بدست می‌آید ، منتهی خیلی جالب است که در این آزمایش نه به دایره و نه به قطر آن احتیاجی نداریم ، یعنی عدد π بدون استفاده از پرگار بدست می‌آید . کسی هم که هیچ تصویری از هندسه و حتی دایره ندارد ، می‌تواند به این طریق به عدد π دست یابد ، به شرط اینکه حوصله آزمایشهای متوالی و متعدد را در مورد انداختن سوزن داشته باشد .

تبدیل محیط دایره به خط راست

مسئله

برای بسیاری از مقاصد عملی کافی است که عدد π را مساوی $3\frac{1}{7}$ بگیریم و محیط دایره را به صورت پاره خط راست در آوریم. برای این منظور به اندازه $3\frac{1}{7}$ برابر قطر دایره را روی خط راستی جدا می کنیم (تقسیم یک پاره خط را به هفت قسمت مساوی می توان به سادگی و با دقت انجام داد). روشهای تقریبی دیگری هم در عمل و برای کارهای صنعتی به وسیله نجارها، حلبی سازها و غیره، برای مستقیم کردن محیط دایره مورد استفاده قرار می گیرد.



۱۲۱. روش هندسی مستقیم کردن

دایره به تقریب

ما در اینجا از این روشها صحبتی نخواهیم کرد و تنها به یکی از راه-حلهای ساده‌ای که منجر به نتیجه‌ای بسادقت زیاد می شود. اشاره می کنیم.

اگر بخواهیم دایره O به شعاع r را به پاره خط راست تبدیل کنیم

(شکل ۱۲۱)، قطر AB از این دایره و عمود CD بر این قطر را در نقطه B رسم می کنیم. خط OC را از مرکز دایره تحت زاویه ۳۰ درجه می کشیم، سپس از نقطه C روی خط CD به اندازه سه برابر شعاع دایره مفروض جدا می کنیم و نقطه D را که به این ترتیب بدست می آید به A وصل می کنیم: طول پاره خط AD مساوی نصف محیط دایره مفروض خواهد بود. اگر پاره خط AD را به اندازه خودش امتداد دهیم، به تقریب اندازه محیط

دایره O بدست می آید. اشتباه ما در این مورد کمتر از $0.0002r$ است. این طریقه رسم بر چه اساسی قرار دارد؟

حل

طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$CB^2 + OB^2 = OC^2$$

شعاع OB را مساوی r می گیریم و توجه می کنیم که $BC = \frac{OC}{2}$ است (در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبروی به زاویه ۳۰ درجه مساوی نصف وتر است). بدست می آید:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2 \Rightarrow CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

حالا در مثلث ABD داریم:

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3};$$

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} = \\ &= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3.14152r \end{aligned}$$

اگر این نتیجه را با موردی که π را با دقت بیشتر در نظر می گرفتیم ($\pi = 3.141593$) مقایسه کنیم، می بینیم که اختلاف آنها $0.00006r$ است. اگر با این روش، دایره ای به شعاع ۱ متر را به صورت خط مستقیم در آوریم، برای نصف محیط اشتباهی مساوی 0.00006

متر و برای محیط دایره کامل $۰/۰۰۰۱۲$ متر و یا $۰/۱۲$ میلیمتر به وجود می آورد .

تربیع دایره

ممکن نیست که خواننده این کتاب ، تا کنون چیزی درباره «تربیع دایره» نشنیده باشد ، مسئله ای که ذهن ریاضی دانها را در طول ۲۰ قرن به خود مشغول داشته بود . من حتی اطمینان دارم که در میان خوانندگان ، کسانی وجود دارند که خود حل مسئله را مورد آزمایش قرار داده اند . ولی بیشتر از آن به کسانی برخورد می کنیم که از لاینحل بودن این مسئله مشهور دچار حیرت می شوند . بسیاری عادت دارند که با لحن غریبی مرتباً تکرار کنند که مسئله تربیع دایره غیر قابل حل است ، بدون اینکه در باره ماهیت مسئله و یا دلیل لاینحل بودن آن درک روشنی داشته باشند .

در ریاضی مسائل بسیاری وجود دارد که چه از لحاظ نظری و چه از لحاظ عملی جالب تر از مسئله تربیع دایره هستند ، ولی هیچیک از آنها نتوانسته اند ، مثل این مسئله ، جنبه عام بخود بگیرند و وارد ضرب المثل ها بشوند . هم ریاضی دانهای مشهور حرفه ای وهم عده کثیری از مردم علاقمند در جریان دوهزار سال روی این مسئله کار کردند .

« تربیع دایره » - یعنی پیدا کردن مربعی که مساحت آن دقیقاً برابر با مساحت دایره مفروض باشد . در عمل اغلب به این مسئله برخورد می کنیم ، و در هر مورد خاص می توان با دقت مورد لزوم آنرا حل کرد . ولی می خواستند که این مسئله قدیمی را با دقت کامل و به وسیله ترسیم حل کنند . برای ترسیم دو امکان در دسترس است :

- ۱) رسم دایره باشعاع و مرکز مفروض ؛
 ۲) رسم خط راستی که از دو نقطه مفروض عبور کند .
 به عبارت دیگر بایه ترسیم را تنها با کمک دو وسیله رسم انجام داد: پرگار و خط کش .

در بسیاری از محافل غیرریاضی خود را به این متقاعد می کنند که اشکال اصلی مطلب برسر اینست که نسبت محیط دایره بر قطر آن (عدد مشهور π) را نمی توان با تعداد محدودی رقم بیان کرد . این استنباط به شرطی صحیح بود که لاینحل بودن مسئله، ارتباطی به این طبیعت خاص عدد π داشت . در حقیقت : تبدیل يك مستطیل به مربعی که معادل آن باشد، مسئله ای است که با دقت و به سادگی حل می شود. مسئله تریبوع دایره هم منجر به ساختن مستطیلی (با کمک خط کش و پرگار) می شود که معادل با دایره مفروض باشد. از رابطه مساحت دایره $S = \pi r^2$ و یا $S = \pi r \times r$ معلوم است که مساحت دایره برابر است با مساحت مستطیلی که یکی از اضلاع آن مساوی r و دیگری π برابر آن باشد . بنابراین مطلب به اینجا می رسد که باید پاره خطی مساوی π برابر پاره خط مفروض بسازیم . بطوریکه می دانیم عدد واقعی π نه مساوی $\frac{1}{7} \times 3$ یا $\frac{3}{14}$ و نه حتی مساوی $\frac{3}{14159}$ نیست ورشته ارقامی که این عدد را بیان می کنند تا بی نهایت ادامه دارد .

این خصوصیت عدد π ، گنگ بودن آن *، در قرن هیجدهم و

(* عددی را گنگ گویند که نتوان آنرا به صورت کسر $\frac{p}{q}$ بیان کرد (p و q

اعدادی صحیح در نظر گرفته شده اند) . عدهای گنگ در شکل اعشاری خود ، با بی نهایت رقم ، که دوره تناوبی هم در آنها پیدا نمی شود ، بیان می شوند .

بوسیله ریاضی دانان لامبرت و ژاندر، با تکیه بر آثار عمیق اولر (آکادمیسین پترزبورگ ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳)، ثابت شد. باوجود این، ریاضی دانان بعدی را از ادامه کوشش در حل مسئله باز نداشت. آنها می فهمیدند که گنگ بودن عدد π نمی تواند خود بخود دلیلی برای لاینحل بودن مسئله باشد. عددهای گنگی وجود دارند که می توان به طریق هندسی و با کمال دقت آنها را رسم کرد. مثلاً فرض کنید بخواهیم پاره خطی بسازیم که $\frac{1}{2}$ برابر پاره خط مفروض باشد. عدد $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ هم، مثل عدد π ، گنگ است. باوجود این، رسم پاره خط مورد نظر با سهولت تمام انجام می گیرد: این پاره خط برابر است با قطر مربعی که ضلع آن مساوی پاره خط مفروض باشد.

هر شاگرد دبیرستانی طریقه رسم پاره خط مساوی $a/3$ را هم می داند (ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی). حتی رسم پاره خطی مساوی عدد گنگ زیر هم، که بظاهر خیلی بغرنج بنظر می رسد، مشکل نیست:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

زیرا رسم این پاره خط منجر به رسم يك ۶۴ ضلعی منتظم می شود. همانطور که می بینیم، وجود يك عامل گنگ در يك عبارت جبری همیشه نمی تواند دلیلی بر عدم امکان رسم آن به كمك پرگار و خط کش باشد. لاینحل بودن مسئله تریبوع دایره، تنها به این مربوط نیست که π عددی گنگ است، بلکه به خصوصیت دیگری از این عدد مربوط می شود. این خصوصیت اینست که عدد π عددی غیر جبری است، یعنی نمی تواند ریشه يك معادله جبری با ضرایب گویا باشد. چنین عددی را اصطلاحاً عدد غیر جبری* گویند.

ویت ریاضی دان سده شانزده فرانسه ثابت کرد که :

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \dots$$

همین بیان π می توانست راه حل مسئله تربیع دایره را مشخص کند، به شرطی که تعداد عملیات آن محدود می بود (که در این صورت می شد آنرا به طریق هندسی رسم کرد) . ولی چون تعداد رادیکالهای این عبارت بی نهایت است ^۵ رابطه ویت هم نمی تواند گرهی از کار باز کند .

به این ترتیب ، لاینحل بودن مسئله تربیع دایره مربوط به غیر جبری بودن عدد π است ، یعنی اینکه عدد π نمی تواند ریشه یک معادله جبری یا ضرایب گویا باشد . این خصوصیت عدد π بطور دقیق در سال ۱۸۸۲ به وسیله لیندمان ریاضی دان آلمانی ثابت شد . در حقیقت ، همین ریاضی دان تنها کسی است که مسئله تربیع دایره را حل کرد، منتهی حل او جنبه منفی دارد ، یعنی ثابت کرد که رسم چنین مربعی از لحاظ هندسی ممکن نیست . بنابراین سال ۱۸۸۲ را باید پایان کوشهای فراوان ریاضی دانها در مورد حل این مسئله دانست ، ولی با کمال تأسف، زور آزمائی بی ثمر علاقمندان فراوان این مسئله ، آنها که به اندازه کافی با تاریخ مسئله آشنائی ندارند ، به پایان نرسیده است .

چنین بود برخورد با مسئله تربیع دایره از لحاظ نظری . و اما از لحاظ عملی ، بهیچوجه احتیاج به حل دقیق این مسئله نیست . البته ، خیلی مشکل است که بتوانیم بسیاری را به این حقیقت متقاعد کنیم که حل مثبت مسئله ، از لحاظ عملی ، اهمیت فوق العاده دارد و برای

(* نقاطی که در مخرج بعد از رادیکالها قرار داده ایم به معنای اینست که تعداد عوامل (رادیکالها) در مخرج بی نهایت است (قانون تشکیل این عوامل با توجه به سه عامل اول که نوشته ایم ، روشن می شود) .

احتیاجات عادی هم کافی است که وسیله تقریبی خوبی از حل این مسئله در اختیار داشته باشیم .

از زمانی که ۷-۸ رقم اولیه عدد π بطور صحیح بدست آمد ، دیگر جستجوی راه حل تربیع دایره از لحاظ عملی ، اهمیت خود را از دست داد . برای احتیاجات عملی زندگی ، کاملاً کافی است که مقدار $\pi = 3.1415926$ را بدانیم . در هیچ اندازه گیری طولی نمی توان نتیجه را با دقتی بیشتر از ۷ رقم بعد از ممیز نشان داد . بنابراین انتخاب ارقام بیشتری برای عدد π مورد استفاده ای ندارد ، یعنی محاسبه دقیق تر در این مورد به هیچ منظور عملی کمک نمی کند . وقتی که شعاع دایره را تا هفت رقم اعشار در نظر بگیریم ، حتی اگر π را با صد رقم به حساب آوریم ، محیط دایره شامل بیش از هفت رقم درست نخواهد بود . اینکه ریاضی دانان قدیمی برای پیدا کردن بیان «طولانی تر» عدد π ، زحمات زیادی را متحمل می شدند ، از لحاظ عملی معنائی ندارد و از لحاظ علمی اهمیت ناچیزی دارد و بدون تعارف ، کاری است که تنها حوصله افراد را آزمایش می کند . اگر شما مایل باشید و فراغت کافی هم داشته باشید ، می توانید ، مثلاً با استفاده از رشته بی نهایت زیر ، که به وسیله لایب نیتز پیدا شده ، حتی تا ۱۰۰۰ رقم برای عدد π بدست آورید :

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

ولی این يك تمرین عددی غیر لازمی است و بهیچوجه موقعیت مسئله معروف هندسی را تغییر نمی دهد .

آراگو ، منجم فرانسوی ، که قبلاً هم در صفحات قبل از او نام بردیم ،

(* برای چنین محاسبه ای حوصله فوق العاده زیادی لازم است ، زیرا ، مثلاً برای محاسبه يك عددشش رقمی برای π باید بدون کم و زیاد ۲۰۰۰۰۰۰ جمله از این رشته را انتخاب کرد .

درباره این موضوع چنین می نویسد :

« کسانی که به جستجوی حل مسئله تربیع دایره ادامه می دهند، به دنبال چیزی هستند که عدم امکان حل مثبت آن ثابت شده است و اگر هم به فرض محال موفق شوند و راه حل مثبتی برای آن پیدا کنند، متضمن هیچگونه فایده عملی نخواهد بود. ادامه این موضوع هیچ ارزشی ندارد و مغزهای معیوبی که به حل مسئله تربیع دایره می پردازند، هیچگونه دلیلی برای کار خود نمی توانند ارائه دهند.»

آرگو با طعنه چنین خاتمه می دهد :

« آکادمیهای همه کشورهای که در مبارزه علیه جستجو کنندگان تربیع شرکت کرده اند، متذکر می شوند که این مرض معمولاً در بهار شدت پیدا می کند.»

مثلث بینگما

یکی از راه‌حلهای تقریبی مسئله تربیع دایره را ذکر کنیم که برای احتیاجات زندگی عملی، فوق‌العاده ساده و راحت است.

این روش بر این مبناست که باید زاویه α را چنان پیدا کنیم (شکل ۱۲۲) که اگر وتر $AC = x$ با قطر AB زاویه‌ای به اندازه α بسازد، AC ضلع مربع مجهول باشد. برای اینکه اندازه این زاویه را بدست آوریم، به مثلثات متوسل می شویم :

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}$$

که در آن r شعاع دایره است. از آنجا ضلع مربع مجهول $x = 2r \cos \alpha$ و سطح این مربع $4r^2 \cos^2 \alpha$ می شود. از طرف دیگر سطح مربع باید مساوی

سطح دایره مفروض، یعنی πr^2 باشد و بنابراین باید داشته باشیم:

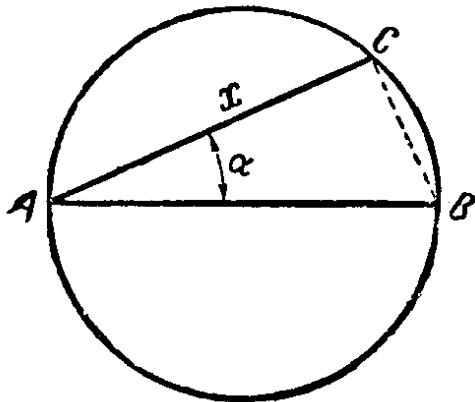
$$4r^2 \cos^2 \alpha = \pi r^2$$

واز آنجا:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = 0,886$$

و از روی جدول بدست می آید:

$$\alpha = 27^\circ 36'$$



۱۲۲. روش بینکا، مهندس روسی (۱۸۳۶).

به این ترتیب اگر دایره مفروض و تری رسم کنیم که با قطر آن زاویه ای مساوی $27^\circ 36'$ بسازد، ضلع مربعی را بدست می آوریم که مساحت آن با مساحت دایره مفروض برابر است. در عمل، کافی است مثلثی داشته باشیم که

که یکی از زوایای آن مساوی $27^\circ 36'$ و زاویه دیگرش $62^\circ 24'$ باشد. با در دست داشتن چنین مثلثی، می توان برای هر دایره مفروض، ضلع مربع معادل با آنرا بدست آورد.

برای کسانی که علاقمند به رسم چنین مثلثی هستند، به اشاره زیر اکتفا می کنیم:

چون تانژانت زاویه $27^\circ 36'$ مساوی $0,523$ یا $\frac{23}{44}$ است، اضلاع

مجاور به زاویه قائمه این مثلث به نسبت $23:44$ خواهد بود. بنابراین اگر مثلث قائم الزاویه ای بسازیم که مثلثی ضلع آن مساوی ۲۲ سانتیمتر

(* این روش ساده را بینکا، مهندس روسی در سال ۱۸۳۶ پیدا کرد؛ بهمین مناسبت مثلثی که دارای چنین زوایائی باشد، بنام کشف کننده آن «مثلث بینکا» نامیده می شود،

وضلع دیگرش $۱۱/۵$ سانتیمتر باشد ، مثلث مطلوب را بدست آورده ایم .
چنین مثلثی را هم به سادگی می توان رسم کرد .

سر یا پاها

برای یکی از قهرمانان ژولورن ، این سؤال پیش می آید که در مسافرت دور دنیا ، کدامیک از اعضای بدن او راه طولانی تری را طی می کند : سر یا کف پاهای او ؟ و این يك مسئله جالب هندسی می شود .
مسئله را به صورت زیر طرح می کنیم :

مسئله

فرض کنید که کره زمین را روی خط استوا طی کرده باشید ، ضمن این مسافرت سر شما چقدر بیشتر از کف پاهایتان راه رفته است ؟

حل

پاها راهی به اندازه $۲\pi R$ طی کرده اند (شعاع کره زمین است) .
در همان حال سر به اندازه $۲\pi(R + ۱/۷)$ پیش رفته است ($۱/۷$ متر را قد انسان گرفته ایم) . اختلاف دو فاصله چنین می شود :

$$۲\pi(R + ۱/۷) - ۲\pi R = ۲\pi \times ۱/۷ = ۱۰/۷ \text{ (متر)}$$

به این ترتیب سر به اندازه $۱۰/۷$ متر بیش از پاها طی کرده است .
نتیجه ای که بدست آمد از این جهت جالب توجه است که به شعاع کره زمین بستگی ندارد و بنابراین جواب این مسئله در زمین و مشتری و یا هر سیاره دیگری یکی خواهد بود . بطور کلی اختلاف محیط دو

دایره متحدالمرکز به شعاعهای آنها بستگی ندارد و مربوط به فاصله بین آنهاست. اگر به شعاع مدار زمین یک سانتیمتر اضافه کنیم، به محیط آن همانقدر اضافه می شود که با اضافه کردن یک سانتیمتر به شعاع یک روی صفحه کاغذ، به محیط آن اضافه می شود.

بر اساس این پارادوکس* هندسی است که مسئله زیر را در اغلب کتابهای مربوط به سرگرمیهای هندسی می بینیم.

اگر روی خط استوا، دور کره زمین سیمی بکشیم و سپس طول سیم را یک متر بزرگتر کنیم، آیا می توان موشی را از میان سیم و کره زمین عبور داد؟

معمولا جواب می دهند که این فاصله از قطر یک مو هم کمتر است: یک متر در مقابل چهل میلیون متر طول استوای زمین چه ارزشی دارد! ولی در حقیقت این فاصله چنین است:

$$\frac{100}{2\pi} = 16 \text{ (سانتیمتر)}$$

نه تنها یک موش، بلکه یک گربه بزرگ هم می تواند از این فاصله به راحتی عبور کند.

مفتولی دور خط استوا

مسئله

فرض کنید که مفتولی را دور استوای زمین محکم کشیده باشیم. اگر این مفتول یک درجه سرد بشود چه اتفاقی می افتد؟ وقتی که مفتول

(* پارادوکس به حقیقتی گفته می شود که به ظاهر غیر منطقی بنظر می رسد. در مقابل پارادوکس، سفسطه قرار دارد که مطلب نادرست را حقیقت جلوه می دهد.

سرد شود، کوتاه تر می شود، اگر فرض کنیم که به این مناسبت مفتول پاره نشود و کش پیدا نکند تا چه عمقی در خاک فرو می رود؟

حل

بنظر می رسد که چنین تغییر ناچیزی در درجه حرارت مفتول ، فقط يك درجه ، نمی تواند آنرا آنقدر کوتاه کند که در زمین فرو برود . ولی محاسبه ما را به نتیجه دیگری می رساند .

اگر مفتولی را به اندازه يك درجه سرد کنیم ، به اندازه يك صد هزارم طول خودش کوتاه تر می شود . بنابراین مفتولی که ۴۰ میلیون کیلومتر (طول استوای زمین) طول دارد ، به اندازه ۴۰۰ متر کوتاه می شود . ولی شعاع این دایره مفتولی خیلی کمتر از ۴۰۰ متر کوتاه می شود . برای اینکه بفهمیم شعاع این دایره چقدر کوچک می شود ، باید ۴۰۰ را بر ۲۸/۶ یعنی 2π تقسیم کنیم . جواب مساوی ۶۴ متر می شود . به این ترتیب ، مفتولی که تنها به اندازه يك درجه سرد شده است ، نه به میزان چند میلیمتر ، بلکه بیش از ۶۰ متر در عمق زمین فرو می ردد !

واقعیت و محاسبه

مسئله

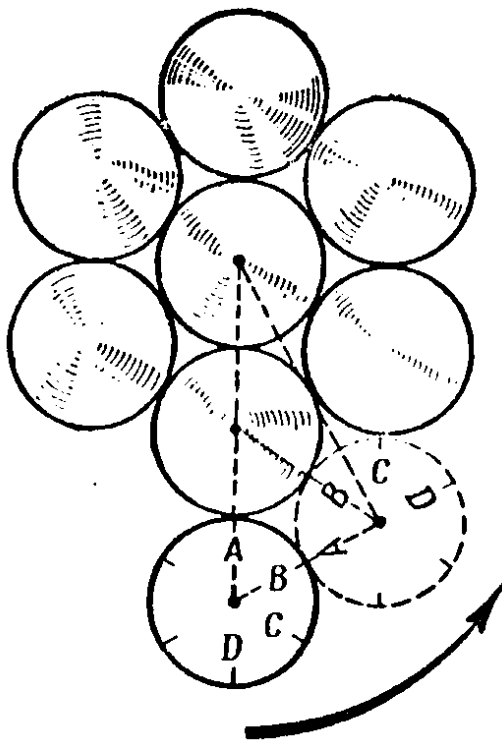
در جلو شما هشت دایره مساوی قرار دارد (شکل ۱۲۳) . هفت دایره (هاشورزده) بدون حرکت است و دایره هشتم روی آنها ، بدون اینکه بلغزد ، می غلظد . دایره هشتم چند مرتبه دور خودش بچرخد تا

یکبار دایره‌های ثابت را دور بزنند؟

البته شما می‌توانید جواب مسئله را عملاً بدست آورید: هشت سکه یکجور و مثلاً دوریالی انتخاب کنید و شبیه شکل ۱۲۳، هفت‌تای آنها را روی میز محکم کنید و سپس سکه هشتم را دور آنها بچرخانید. برای تعیین تعداد دورها، مثلاً می‌توان از جهت عددی که روی سکه حک شده است استفاده کرد. هر بار که عدد روی سکه وضع اولیه خود را پیدا کرد، خود سکه یک دور کامل دور مرکزش چرخیده است.

این آزمایش را در عمل، و نه در تصور خود، انجام دهید، می‌بینید

که سکه متحرك چهار مرتبه دور خودش می‌چرخد.



حالا کوشش می‌کنیم که جواب را به کمک استدلال و محاسبه بدست آوریم.

مثلاً معین می‌کنیم که دایره متحرك، ضمن غلطیدن خود، به چه قوسی از هر یک از دایره‌های ساکن تکیه می‌کند.

برای این منظور فرض می‌کنیم که حرکت دایره متحرك از نقطه A

(پائین‌ترین نقطه دایره‌های ساکن) شروع شود و آنقدر حرکت کند تا به اولین نقطه تماس با دایره بعدی برسد (شکل ۱۲۳

را به بینید).

۱۲۳. دایره متحرك ضمن غلطیدن دور دایره‌های ساکن چند بار دور خودش می‌چرخد؟

از روی شکل به سادگی ثابت می‌شود که قوس AB، که ضمن این حرکت پیموده شده است، مساوی ۶۰ درجه است. روی

هریک از دایره‌های ساکن ، از این قوس دو مرتبه وجود دارد و بنابراین رویهم قوسی مساوی ۱۲۰ درجه و یا $\frac{1}{3}$ محیط دایره را تشکیل می‌دهند .

به این ترتیب ، دایره متحرك، ضمن عبور از $\frac{1}{3}$ محیط هر یک از دایره‌های ساکن ، $\frac{1}{3}$ مرتبه دور خودش می‌چرخد . تعداد دایره‌های ساکن ۶ عدد است ، یعنی باید دایره متحرك به اندازه $6 \times \frac{1}{3}$ یعنی ۲ مرتبه دور خودش بچرخد .

با آنچه که در عمل بدست آوردیم اختلاف پیدا می‌کند! ولی « واقعیت را نمی‌توان تغییر داد ». اگر مشاهده چیزی غیر از نتیجه محاسبه باشد ، به این معنی است که در محاسبه اشتباهی وجود دارد . اشتباهی که در استدلال فوق وجود دارد پیدا کنید .

حل

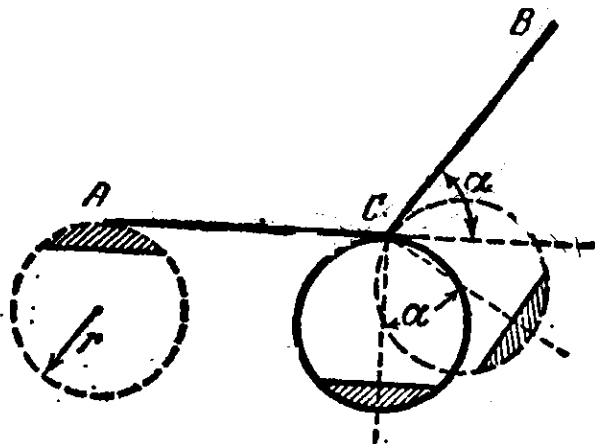
وقتی که دایره‌ای ، بدون لغزیدن ، روی یک خط راست می‌غلتد ، زمانی که به اندازه $\frac{1}{3}$ محیط خود روی خط پیش رفته باشد ، خودش هم به اندازه $\frac{1}{3}$ مرتبه دور مرکزش چرخیده است . ولی وقتی که دایره روی یک خط منحنی می‌چرخد ، این استدلال نه درست است و نه با واقعیت تطبیق می‌کند . در مسئله مورد نظر ما وقتی دایره متحرك به اندازه $\frac{1}{3}$ محیط خود جلو برود ، $\frac{2}{3}$ مرتبه (و نه $\frac{1}{3}$) دور مرکز خود می‌چرخد و چون شش قوس از این نوع داریم ، بدست می‌آید :

$$۶ \times \frac{۲}{۳} = ۴ \quad (\text{دوان})$$

این مطلب را با مشاهده هم می توان تأیید کرد .
 دایره خط چینی که در شکل ۱۲۳ وجود دارد ، وضع دایره متحرك را پس از آنکه به اندازه قوس AB (= ۶۰ درجه) از دایره ساکن (یعنی به اندازه $\frac{۱}{۶}$ محیط آن) جلورفته است ، نشان می دهد . در وضع جدید ، بالاترین نقطه دایره ، بجای نقطه A ، نقطه C می باشد ، که همانطور که به سادگی و از روی شکل دیده می شود ، متناظر با چرخش ۱۲۰ درجه این نقطه محیط دایره است ، یعنی دایره متحرك درست $\frac{۱}{۳}$ مرتبه دور خودش چرخیده است به این ترتیب حرکت به اندازه ۶۰ درجه متناظر با چرخش $\frac{۱}{۳}$ مرتبه به دور خودش خواهد بود .

بنابراین وقتی که دایره روی خط منحنی یا خط شکسته می غلطد ، تعداد دفعاتی که دور مرکز خودش می چرخد با حالتی که روی يك خط راست به غلطد ، فرق می کند .

حالا مختصری به جنبه هندسی این واقعیت عجیب می پردازیم و



۱۲۴ . وقتی که دایره روی يك خط شکسته می غلطد ، چگونه يك دور کامل دور خودش می چرخد ؟

از آن مهمتر اینکه چرا معمولاً این پدیده را نمی توان توجیه کرد . فرض کنید دایره ای به شعاع r روی خط راستی می غلطد . این دایره روی پاره خط

AB ، که طولی مساوی محیط دایره داشته باشد ($2\pi r$) ، یکبار دور خودش دوران می کند . پاره خط AB را در نقطه وسط آن C ، خم می کنیم (شکل ۱۲۴) و قطعه CB را با زاویه α نسبت به امتداد اولیه خود قرار می دهیم .

حالا ، در وضع جدید ، دایره تا نقطه C نیم دور دوران می کند و برای اینکه به وضعی در آید که در نقطه C بر CB مماس باشد ، باید دور مرکزش به اندازه زاویه α بچرخد (این دوزاویه به این علت برابرند که اضلاع آنها برهم عمود است) .

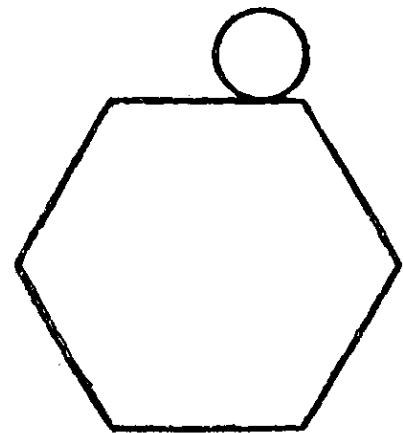
در این مورد ، بدون اینکه دایره روی پاره خط حرکت کند ، دور مرکزش چرخیده است . بنابراین دوران کامل به دور مرکز ، بستگی به شکستگی خط دارد .

چرخش اضافی نسبت به يك دور کامل برابر نسبت زاویه α به زاویه 2π یعنی $\frac{\alpha}{2\pi}$ خواهد بود . در امتداد پاره خط CD ، دایره همان

چرخش عادی را دارد و بنابراین روی خط

شکسته ACD به اندازه $1 + \frac{\alpha}{2\pi}$ دور خودش می چرخد .

حالا دیگر به سادگی می توانیم حساب کنیم که اگر دایره ای روی محیط يك شش ضلعی منتظم محذب ، بدون لغزش ، به غلطد ، چند مرتبه دور مرکز خود دوران می کند (شکل ۱۲۵) . واضح است که تعداد دورها برابر است با تعداد دورهایی که روی خط راستی مساوی محیط (یعنی مجموع اضلاع) دور مرکزش می چرخد به اضافه عددی که از



۱۲۵ . وقتی که يك دایره روی محیط يك چند ضلعی می غلطد ، چند دور بیشتر از وقتی که روی خط راستی به طول محیط حرکت کند ، دور مرکز خود دوران می کند .

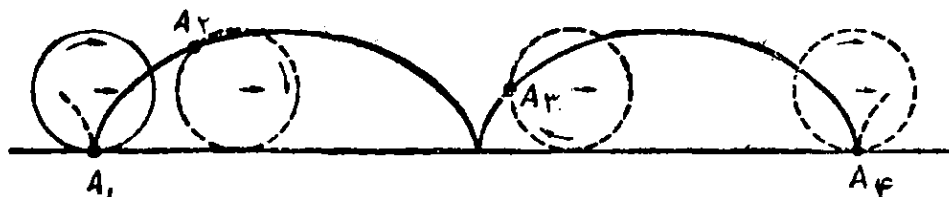
نسبت مجموع زوایای خارجی شش ضلعی بر 2π بدست می آید و چون مجموع زوایای خارجی هر چند ضلعی غیر مشخص برابر است با چهارقائمه یعنی 2π ، خواهیم داشت: $1 = \frac{2\pi}{2\pi}$.

بنابراین، در حرکت دایره روی شش ضلعی و همچنین روی هر چند ضلعی محدب، همیشه نسبت به حرکت روی پاره خط راستی که طولش مساوی محیط چند ضلعی باشد، یک حرکت دورانی بیشتر خواهیم داشت.

چون دایره را می توان چند ضلعی محدب دانت که تعداد اضلاع آن بی نهایت است (و طول هر ضلعش بی نهایت کوچک)، بنابراین آنچه را که در مورد چند ضلعی محدب گفتیم در مورد دایره هم صادق است: مثلاً اگر به مسئله اولی که مطرح کرده بودیم، برگردیم، وقتی که دایره ای روی دایره ای مساوی خودش به اندازه 120° درجه به غلطد، به اندازه $\frac{2}{3}$ محیط خود (و نه $\frac{1}{3}$) دور مرکزش چرخیده است و به این ترتیب حل مسئله دقیقاً از لحاظ هندسی روشن می شود.

دختر بچه بندباز

وقتی که دایره ای روی خطی که با آن در یک صفحه است می غلطد، هر نقطه از دایره هم روی صفحه تغییر مکان می دهد، یعنی به اصطلاح



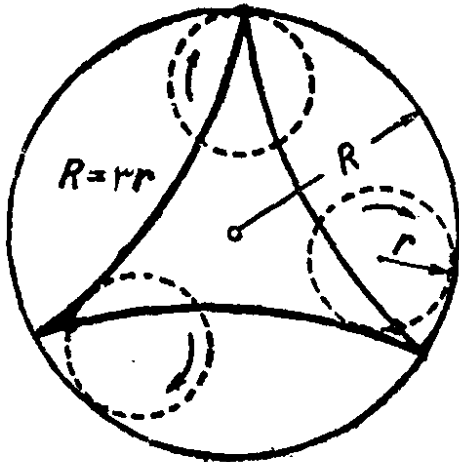
۱۲۶. سیکلوئید: مسیر نقطه A از محیط دایره ای که بدون لغزش روی خط راستی می غلطد.

دارای خط سیری است .

اگر خط سیر يك نقطه از محیط دایره را ، وقتی که روی يك خط راست یا محیط دایره‌ای می‌غلطد ، دنبال کنیم ، می‌بینیم که منحنیهای مختلفی بدست می‌آید .

بعضی از این منحنی‌ها در شکل‌های

۱۲۶ و ۱۲۷ داده شده است . سئوالی پیش می‌آید: آیا ممکن است نقطه‌ای از محیط دایره ، وقتی که در داخل يك دایره دیگر و مماس بر محیط آن می‌غلطد (شکل ۱۲۷) ، بجای خط منحنی ، يك خط راست رسم کند ؟ در نظر اول ، تصور می‌شود که این کار غیر ممکن است . ولی بخصوص چنین وضعی را من با چشمان خودم دیده‌ام و آن بازی دختر بچه‌ای روی طناب بود (شکل ۱۲۸) . شما هم می‌توانید خودتان و با سادگی

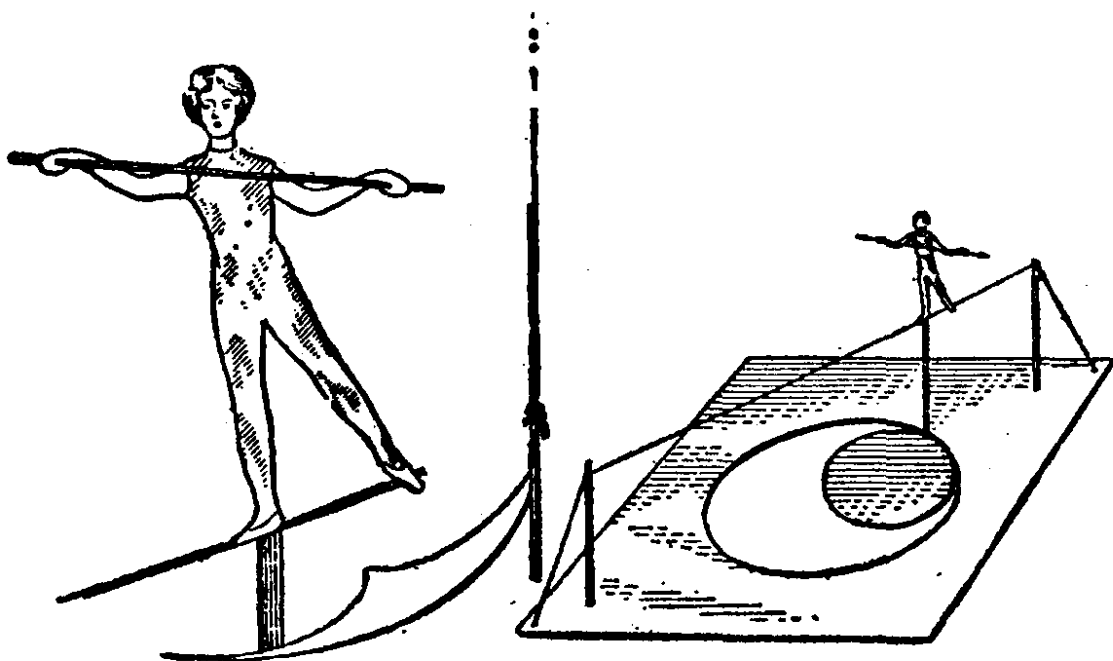


۱۲۷ . شبه‌سیکلوئید سه شاخه ، مسیر نقطه‌ای از محیط دایره ، وقتی که روی محیط و در داخل دایره‌ای به شعاع $R = 3r$ می‌غلطد

آنها تهیه کنید . روی يك صفحه از مقوای کلفت و یا از تخته ، دایره‌ای به قطر ۳۰ سانتیمتر رسم کنید ، بطوریکه قسمتی از صفحه باقی بماند و سپس یکی از قطرهای آنرا از دو طرف ادامه دهید .

روی امتداد قطر و در دو طرف آن سوزنهایی فرو کنید ، از انتهای دو سوزن نخ بگذرانید . بنحوی که بطور افقی قرار گیرد و آنرا در دو طرف روی مقوا (یا تخته) محکم کنید . دایره‌ای را که رسم کرده‌اید ببرید و پنجره‌ای در مقوا به وجود آورید و سپس يك دایره مقوایی دیگر به قطر ۱۵ سانتیمتر در آن جا بدهید ، در کناره این

دایره کوچک هم سوزنی مطابق شکل ۱۲۹ فرو کنید؛ از کاغذ ضخیم شکل دختر بچه‌ای را در آورید و بالا ک پای او را به سر سوزن محکم کنید.



۱۲۸. دختر بچه بند باز

۱۲۹. روی دایره متحرك نقاطی وجود دارد که روی خط راست حرکت می کنند.

حالا امتحان کنید که اگر دایره کوچک را روی محیط پنجره (دایره بزرگ) به غلطانید، طوریکه همیشه بر آن مماس باشد، نوک سوزن و همراه آن شکل دختر بچه گاهی به جلو و گاهی به عقب، ولی بهر حال در امتداد نخ کشیده، حرکت می کند. این مطلب را به این ترتیب هم می توان روشن کرد که نقطه واقع بر محیط دایره متحرك در امتداد قطر پنجره حرکت می کند.

پس چرا در مورد متشابه، که در شکل ۱۲۷ نشان داده شده است، نقطه واقع بر دایره متحرك بجای خط راست، يك منحنی رسم می کند (این منحنی شبه سیکلوئید نام دارد)؟ رمز مطلب در نسبت قطر دایره

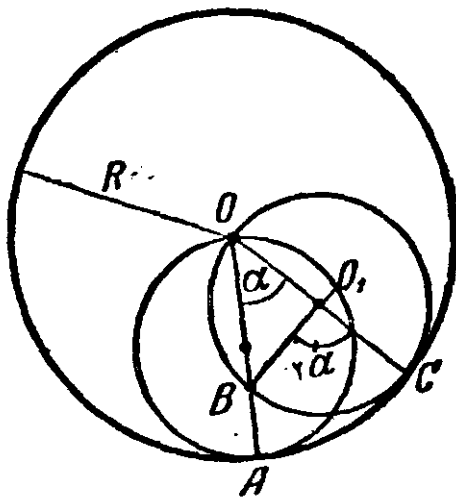
بزرگتر به دایره کوچکتر است .

مسئله

ثابت کنید که اگر دایره‌های ، در داخل دایره دیگر و مماس بر آن به غلطد ، به شرطی که شعاع دایره بزرگتر دو برابر شعاع دایره کوچکتر باشد ، هر نقطه از محیط دایره کوچکتر روی امتداد قطری از دایره بزرگتر حرکت می کند .

حل

وقتی که قطر دایره O_1 نصف قطر دایره O باشد (شکل ۱۳۰) ، در هر لحظه‌ای از حرکت دایره O_1 ، یکی از نقاط آن بر مرکز دایره O واقع می شود .



تغییر مکان نقطه A را تعقیب می کنیم .

فرض کنید دایره کوچکتر به اندازه قوس AC غلطیده باشد .

در وضع جدید دایره O_1 ، نقطه A در کجا قرار خواهد گرفت ؟

واضح است که باید نقطه

\bar{A} در وضع جدید در جایی مثل

نقطه B باشد ، بطوریکه قوسهای AC و BC از لحاظ طول باهم برابر باشند (دایره بدون لغزش می غلطد) . فرض کنیم : $OA = R$ و

$\widehat{AOC} = \alpha$ باشد ، در اینصورت $AC = R \cdot \alpha$ و بنابراین $BC = R \cdot \alpha$

۱۳۰. توضیح هندسی « دختر بچه بند باز »

می شود . از طرف دیگر چون $O_1C = \frac{R}{\rho}$ است ، زاویه BO_1C مساوی

$\frac{R \cdot \alpha}{\rho}$ یعنی 2α می شود و از آنجا زاویه BOC ، که يك زاویه محاطی

است ، برابر $\frac{2\alpha}{\rho}$ یعنی α می شود و این به معنای آنست که B روی شعاع OA قرار دارد .



یافتوتی لبووویچ چبیشف
(۱۸۲۱-۱۸۹۴)

آنچه را که اینجا درباره اسباب بازی دختر بچه بند باز گفتیم ، مقدمه ساده شده ای از تبدیل حرکت دورانی به حرکت روی خط مستقیم است .

شکل و طرح ساختمانی چنین تبدیلی حتی مورد توجه ای . ای . پولزونو ، مکانیسین اهل اورال و اولین کاشف ماشین بخار ، نیز بوده است . معمولاً این مکانیزم که نقطه ای با حرکت روی خط

مستقیم به وجود می آورد ، دارای ساختمان لولائی است .

ریاضی دان بزرگ روس چبیشف (۱۸۲۱-۱۸۹۴) مطالب زیادی در زمینه نظریه ریاضی این مکانیزم از خود باقی گذاشته است . در حقیقت ، او تنها يك ریاضی دان نبود ، بلکه يك مکانیسین مشهور هم بود .

راهی از روی قطب

البته شما پرواز معروف گروموو قهرمان اتحاد شوروی و دوستان او را از مسکو تا لوس آنجلس از طریق قطب شمال بخاطر دارید. م.م. گروموو توانست با پرواز ۲۶ ساعت و ۱۷ دقیقه خود دور کورد جهانی از پرواز بدون نشست بطور مستقیم (۱۰۲۰۰ کیلومتر) و منکسر (۱۱۵۰۰ کیلومتر) از خود بجا بگذارد.

چه تصور می کنید، آیا وقتی که هواپیمای قهرمانان از روی قطب می گذشت، همراه زمین دور محور زمین دوران می کرد یا نه؟ اغلب جوابی برای این سؤال شنیده می شود، ولی همیشه جوابها صحیح نیست. هر هواپیمائی، و منجمله هواپیمائی که از روی قطب عبور می کند، باید در گردش کره زمین شرکت داشته باشد. این وضع بدان مناسبت است که هواپیمای در حال پرواز، تنها از قسمت جامد زمین جدا شده است، ولی هنوز در آتمسفر آن قرار دارد و همراه آن در گردش زمین به دور محور خود شرکت می کند.

به این ترتیب ضمن پرواز از طریق قطب از مسکو به امریکا، هواپیما همراه با زمین، دور محور زمین چرخیده است. خط سیر این پرواز چگونه بوده است؟

برای اینکه به این سؤال جواب صحیح داده شود، باید در نظر داشت که وقتی از «حرکت يك جسم» صحبت می کنیم، به معنای اینست که موقعیت جسم مفروض نسبت به جسم دیگری تغییر می کند. سؤال درباره خط سیر و بطور کلی حرکت به شرطی معنا پیدا می کند که يك دستگاه محاسبه و یا بطور ساده يك جسم را نشان کرده باشیم (یا خود بخود معلوم باشد) که جسم مفروض نسبت به آن حرکت کند.

اگر نسبت به زمین در نظر بگیریم ، هواپیمای گروموو تقریباً در امتداد نصف النهار مسکو حرکت کرده است . نصف النهار مسکو ، مثل بقیه نصف النهارها ، همراه زمین دور محور زمین می چرخد ؛ هواپیما هم ، وقتی که روی خط نصف النهار پرواز می کند ، در این چرخش شرکت دارد، ولی شکل این خط سیر برای ناظری که روی زمین است منعکس نمی شود ، زیرا این حرکت نسبت به جسم دیگری غیر از زمین انجام می گیرد .

بنابراین ، برای ما که محکم به زمین چسبیده ایم خط سیر این پرواز قهرمانانه از طریق قطب ، قوسی از دایره عظیمه است ، به شرطی که هواپیما دقیقاً روی نصف النهار حرکت کرده باشد و ضمناً فاصله آن از مرکز زمین مقداری ثابت باقی مانده باشد .

حالا سؤال را به طریق دیگری مطرح می کنیم : ما حرکت هواپیما را نسبت به زمین در دست داریم و می دانیم که هواپیما و زمین مشترکاً دور محور زمین می چرخند ، یعنی حرکت هواپیما و زمین نسبت به جسم سومی انجام می گیرد ؛ خط سیر این پرواز برای ناظری که وابسته به این جسم سوم است ، چگونه خواهد بود؟

تا حدی این مسئله غیر عادی را ساده تر می کنیم . منطقه نزدیک قطب سیاره زمین را سطح دایره ای در نظر می گیریم که بر صفحه عمود بر محور زمین منطبق باشد . این صفحه فرضی را همان «جسم» مورد نظر می گیریم که دایره مفروض نسبت به آن دور محور زمین می چرخد ، و فرض می کنیم که يك چرخ کوچکی در امتداد یکی از قطرهای این دایره به طور یکنواخت حرکت کند : این چرخ نقش هواپیمائی را به عهده دارد که در امتداد نصف النهار از طریق قطب عبور می کند .

مسیر این چرخ روی صفحه فرضی ما چگونه است (به عبارت

دقیق‌تر مسیر نقطه‌ای از چرخ و مثلاً مرکز ثقل آن چیست؟

زمانی که طول می‌کشد تا این چرخ از یک انتهای قطر به انتهای دیگر قطر برسد به سرعت آن بستگی دارد.

سه حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) چرخ مسیر خود را در ۱۲ ساعت طی کند؛

(۲) این راه را در ۲۴ ساعت طی کند؛

(۳) و بالاخره همین راه را ۴۸ ساعته طی کند.

در تمام این حالتها دایره مفروض در ۲۴ ساعت يك دور کامل

می‌زند.

حالت اول (شکل ۱۳۱). چرخ قطر دایره را در ۱۲ ساعت طی

می‌کند. در این مدت دایره نیم‌دور می‌زند، یعنی ۱۸۰° درجه می‌چرخد

و نقاط A و A' با یکدیگر تغییر جا می‌دهند. روی شکل ۱۳۱ قطر را

به ۸ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم که چرخ از هر يك این قسمتها در

$۱/۵$ ساعت ($۸:۱۲$) عبور می‌کند. به بینیم جای چرخ پس از $۱/۵$ ساعت

بعد از شروع حرکت کجاست. اگر دایره دور خودش نمی‌چرخید،

در این مدت چرخ از نقطه A به نقطه b می‌رسید. ولی دایره هم در

این فاصله زمانی به اندازه $22/5^\circ = 8:180^\circ$ دوران می‌کند. بنابراین

نقطه b به نقطه b' تغییر جا می‌دهد. ناظری که روی دایره باشد و

همراه آن دوران کند، متوجه این جابجائی نمی‌شود و فقط تغییر محل

چرخ را از A به b می‌بیند. ولی ناظری که خارج این دایره باشد و

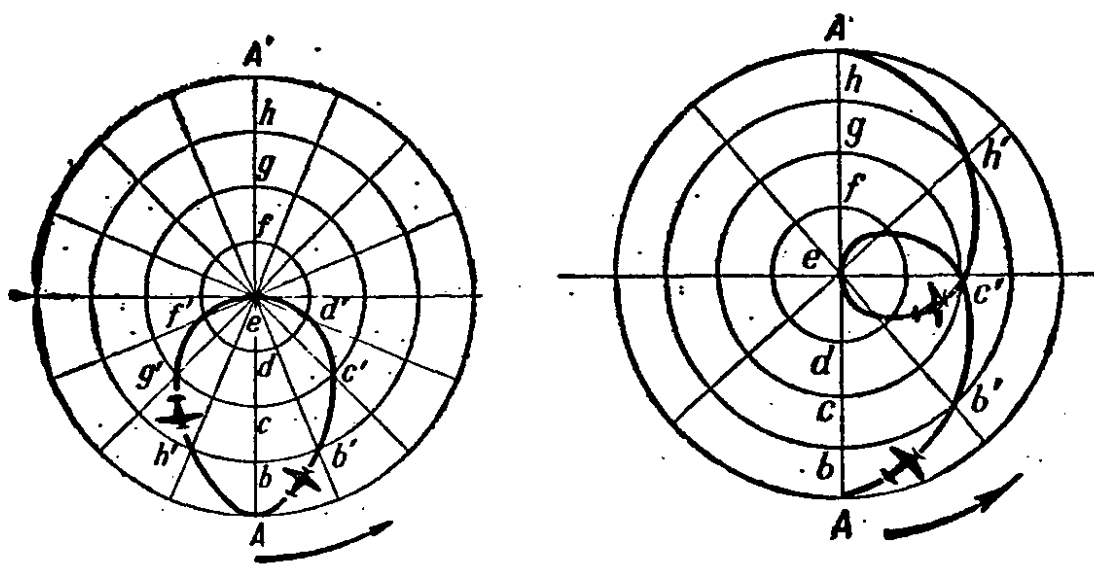
در دوران آن شرکت نکند چیز دیگری می‌بیند: برای او چرخ روی

يك خط منحنی از نقطه A به نقطه b' می‌رود. اگر این ناظر $۱/۵$

ساعت دیگر خارج از دایره باشد، می‌بیند که چرخ به نقطه c' می‌رسد.

در $۱/۵$ ساعت بعد برای این ناظر، چرخ قوس $c'd'$ را طی می‌کند و

بالاخره بعد از $1/5$ ساعت دیگر چرخ به مرکز e می‌رسد .



۱۳۱

۱۳۲

منحنی‌هایی که یک نقطه روی یک صفحه ثابت رسم می‌کند، وقتی که در دو حرکت مختلف شرکت داشته باشد .

اگر ناظری که در خارج دایره ایستاده است ، از اینجا به بعد مسیر چرخ را تعقیب کند، با تعجب مشاهده می‌کند که چرخ روی منحنی $ef'g'h'A$ پیش می‌رود و حرکت آن ، بطور غیر منتظره ، بجای اینکه بطرف نقطه متقاطع A باشد ، به طرف جایی است که حرکت را شروع کرده است .

حل این معما خیلی ساده است : بعد از شش ساعت حرکت چرخ بر نیمه دوم قطر دایره ، این نیم قطر همراه با دایره 180 درجه کامل را چرخیده است و بنابراین بر نیمه اول قطر منطبق می‌شود . وقتی که چرخ بر مرکز دایره هم قرار گیرد، همراه با آن دور مرکز می‌چرخد . روشن است که چرخ نمی‌تواند بطور کامل در مرکز دایره قرار گیرد ، بلکه تنها یک نقطه آن بر مرکز منطبق می‌شود و در این لحظه چرخ همراه با دایره دور این نقطه می‌چرخد . همین وضع هم برای هواپیما وقتی که به قطب می‌رسد ، پیش می‌آید . به این ترتیب حرکت چرخ روی

قطر دایره از يك طرف به طرف ديگر ، به چشم ناظری که خارج از دایره قرار دارد ، به شکل دیگری جلوه می کند . کسی که روی دایره ایستاده است و همراه آن دور مرکز دایره می چرخد ، این حرکت را مستقیم الخط می بیند ؛ در حالیکه اگر کسی ساکن باشد و در حرکت دایره به دور خودش شرکت نداشته باشد ، حرکت چرخ را روی يك خط منحنی ، بنحوی که در شکل ۱۳۱ نشان داده شده است (و شکل يك قطره را بخاطر می آورد) ، می بیند .

اگر فرض کنیم که شما در مرکز زمین ایستاده باشید و از آنجا به پرواز هواپیما روی صفحه فرضی عمود بر محور زمین نگاه کنید ، با این شرایط خیالی که زمین شفاف باشد و شما و صفحه در چرخش زمین شرکت نداشته باشید و پرواز هواپیما از روی قطب ۱۲ ساعت طول بکشد ، باز هم مسیر آن را به شکل همین منحنی خواهید دید .
و این مثال جالبی است از ترکیب دو حرکت مختلف .

ولی در حقیقت پرواز از طریق قطب ، از مسکو تا نقطه متقاطع آن روی همان مدار ، ۱۲ ساعت طول نکشید و بنابراین ما به بررسی یکی دیگر از مسائل مقدماتی ترکیب دو حرکت می رسمیم :

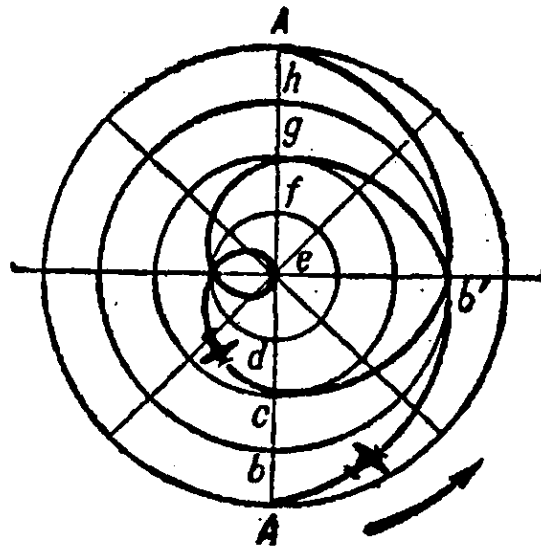
حالت دوم (شکل ۱۳۲) . چرخ ضمن ۲۴ ساعت از قطر عبور می کند . در این مدت دایره يك دور کامل دوران می کند و برای ناظری که در حرکت صفحه شرکت نداشته باشد ، مسیر حرکت چرخ به شکل منحنی که در شکل ۱۳۲ نشان داده شده است ، می باشد .

حالت سوم (شکل ۱۳۳) . دایره مثل حالت های قبل در ۲۴ ساعت يك دوران کامل می کند ، در حالیکه چرخ ، قطر دایره را از يك انتها به انتهای دیگر در ۴۸ ساعت طی می کند .

در اینحالت ، چرخ از هر $\frac{1}{8}$ قطر در $۶ = ۸:۴۸$ ساعت عبور می کند .

در جریان این ۶ ساعت ، دایره می تواند یک چهارم دور ، یعنی ۹۰ درجه بزند . بنابراین بعد از آنکه شش ساعت از ابتدای حرکت بگذرد ، چرخ روی قطر به نقطه b منتقل می شود (شکل ۱۳۳) ، ولی گردش دایره آنرا به نقطه b' منتقل می کند . وقتی که شش ساعت دیگر بگذرد ، چرخ به نقطه g می رسد و غیره . ضمن ۴۸ ساعت ، چرخ تمام قطر را طی می کند و دایره دو دور کامل می زند . نتیجه ترکیب این دو حرکت ، در نظر کسی که ساکن است ، به صورت منحنی جالبی خواهد بود که در شکل ۱۳۳ با خط کلفت تر نشان داده شده است .

موردی را که هم اکنون مورد مطالعه قرار دادیم ، ما را به شرایط حقیقی پرواز از روی قطب نزدیک می کند . م . م . گروموو فاصله از



۱۳۳ . منحنی دیگری از ترکیب دو حرکت .

مسکو تا قطب را تقریباً در ۲۴ ساعت طی کرد ؛ بنابراین ناظری که در مرکز زمین قرار گرفته است ، این قسمت از مسیر را به صورت خطی می بیند که تقریباً برنیمه اول منحنی شکل ۱۳۳ منطبق است .

اما قسمت دوم پرواز گروموو چگونه بوده است؟ قسمت دوم پرواز را در مدتی يك برابر ونیم مدت قسمت اول انجام داده است، علاوه بر آن فاصله از قطب تا لوس آنجلس هم يك برابر ونیم فاصله از مسکو تا قطب شمال می باشد، بنابراین مسیر قسمت دوم پرواز، برای ناظر بدون حرکت، منحنی است به همان شکل مسیر قسمت اول، منتهی با طولی يك برابر ونیم آن.

منحنی که به طور کلی در این پرواز بدست می آید در شکل ۱۳۴ نشان داده شده است.

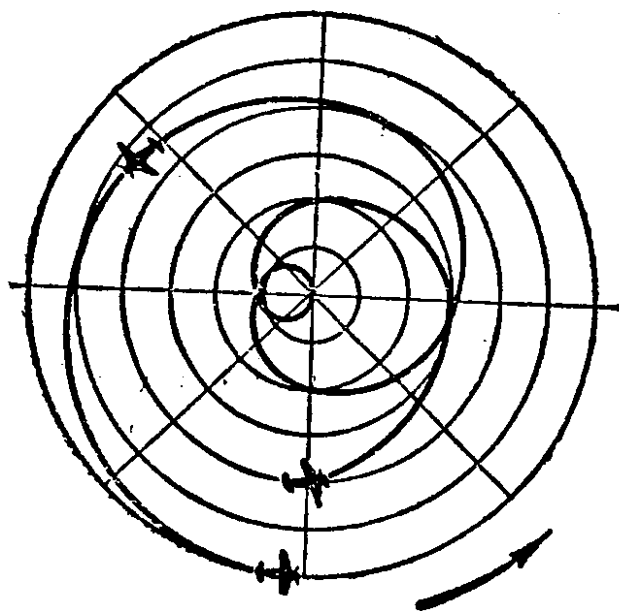
ممکن است، این وضع که نقاط شروع و پایان حرکت در شکل اینقدر بهم نزدیک اند، برای بسیاری عجیب باشد. ولی نباید از نظر دور داشت که این شکل وضع مسکو و لوس آنجلس را در يك زمان نشان نمی دهد، بلکه فاصله زمانی بین آنها $\frac{1}{4}$ شبانه روز است.

چنین است شکل تقریبی خط سیر پرواز گروموو از طریق قطب، به شرطی که ناظر خارج از محیط پرواز و مثلاً در مرکز کره زمین باشد. آیا درست است که این مسیر پیچدار طره مانند را به عنوان پرواز از طریق قطب و بدون در نظر گرفتن هیچگونه نسبیتی صحیح بدانیم؟ نه! این حرکت هم نسبی است: این مسیر نسبت به جسمی است که در دوران زمین به دور محورش حرکت نداشته باشد، در عین حال این مسیر پرواز نسبت سطح متحرك زمین است.

اگر ما بتوانیم مسیر این پرواز را از ماه یا خورشید تعقیب کنیم^۵، مسیر آن به صورت دیگری درخواهد آمد.

(* که در اینحال هم حرکت را نسبت به دستگاه مختصات وابسته به ماه یا خورشید در نظر گرفته ایم.

ماه در گردش شبانه روزی زمین شرکت ندارد ، ولی در عوض دور سیاره ما هر ماه يك بار دوران می کند . در ۶۲ ساعتی که پرواز از مسکو تا لوس آنجلس انجام می گیرد ، ماه به اندازه ۳۰ درجه دور



۱۳۴ . مسیر پرواز از مسکو تا لوس آنجلس ، به شرطی که ناظر نه در پرواز و نه در گردش زمین به دور خود شرکت نداشته باشد.

زمین دوران می کند و این نمی تواند در خط سیر پرواز ، از لحاظ ناظری که در ماه است ، اثر نداشته باشد . در شکل خط سیر هواپیما برای ناظری که از خورشید نگاه می کند ، حرکت دیگری هم دخالت دارد و آن حرکت زمین به دور خورشید است . ف. انگلس هم در «دیاکتیک طبیعت» می گوید :

حرکت مطلق جسم وجود ندارد و فقط حرکت نسبی می تواند وجود داشته باشد .

طول تسمه انتقال

وقتی که شاگردان مدرسه حرفه ای کار خود را تمام کردند ،

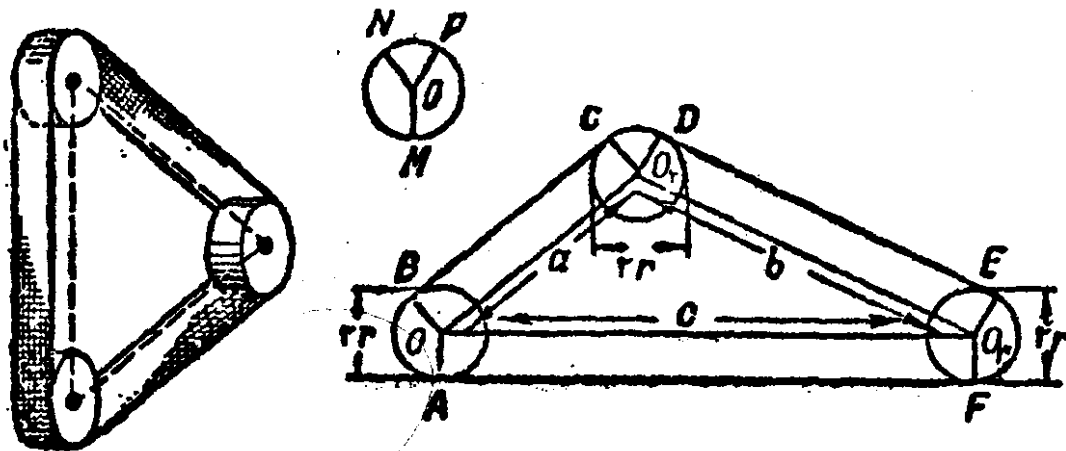
استادکار مسئله زیر را موقع خداحافظی به آنها داد تا حل کنند.

مسئله

« استادکار گفت :

« برای یکی از دستگاههای جدید کارگاه به تسمه انتقال احتیاج داریم ، منتهی بجای دو قرقره ، آنطور که معمولاً پیش می آید ، می خواهیم روی سه قرقره حرکت کند . و استادکار طرح دستگاه انتقال حرکت را به شاگردان خود نشان داد (شکل ۱۳۵) . او ادامه داد :

« هر سه قرقره هم شکل و به يك اندازه اند . اندازه اقطار و فاصله بین محورهای قرقرهها در طرح معین شده است .
« اگر این اندازهها را بدانیم وبدون اطلاع از اندازههای دیگر ، فوراً طول تسمه انتقال را معین کنید .



۱۳۵. طرح دستگاه انتقال حرکت . با در دست داشتن این اندازهها ، چگونه می توان طول تسمه انتقال را بدست آورد ؟

دانش آموزان به فکر فرو رفتند . یکی از آنها بلافاصله جواب داد :
« بنظر من ، اشکال تنها در اینجا است که روی شکل اندازه قوسهای AB ،

CD و EF ، یعنی طول قسمتهائی از تسمه که دور قرقره‌ها پیچیده است ، معین نشده است . برای تعیین طول هر يك از این قوسها باید اندازه زوایای مرکزی متناظر با آنها را دانست و بنظر من ، این اندازه‌ها را هم جز با كمك مقاله نمی‌توان بدست آورد» .

« استادکار جواب داد :

« زوایائی را هم که نام بردید ، می‌توان با توجه به مفروضاتی که در شکل معین شده است ، با كمك روابط مثلثاتی و جدول محاسبه کرد ، ولی این يك راه حل طولانی و بفرنج است . در اینجا به‌نقله هیچ احتیاجی نیست ، زیرا به‌طول قوسهای مربوطه به طور جداگانه احتیاجی نداریم و کافی است ...» .

«یکی از بچه‌ها دنبال سخن را گرفت: ... که مجموع آنها را بدست آوریم» .

« - با این ترتیب که روش کار برایتان روشن شد ، به منزل بروید و فردا جواب مسئله را برای من بیاورید» .

با توضیحات استادکار گمان می‌کنم که راه حل مسئله برای خواننده مشکل نباشد .

حل

در حقیقت طول تسمه انتقال خیلی به‌سادگی بدست می‌آید . باید به مجموع فواصل محورها ، اندازه محیط یکی از قرقره‌ها را اضافه کرد ، یعنی اگر طول تسمه را l فرض کنیم باید داشته باشیم:

$$l = a + b + c + 2\pi r$$

هر کسی می‌تواند حدس بزند که مجموع قوسهائی که تسمه انتقال در طول آنها دور قرقره‌ها پیچیده است ، باید مساوی محیط

یکی از قرقره‌ها باشد، ولی هر کسی نمی‌تواند اثبات کند. راه حل مسئله را، با توجه به مفروضات، می‌توان به طور خلاصه چنین بیان کرد:

فرض کنید BC ، DE و FA مماسهای بردایره‌ها باشند (شکل ۱۳۵). از مرکز دایره‌ها به نقاط تماس وصل می‌کنیم. چون قرقره‌ها یکنواخت هستند، شکل‌های O_1BCO_2 و O_3DEO_4 و O_5FAO_6 مستطیل‌اند و بنابراین خواهیم داشت:

$$BC + DE + FA = a + b + c$$

حالا باید ثابت کنیم که مجموع قوسهای $AB + CD + EF$ برابر طول محیط یکی از دایره‌هاست.

برای این منظور دایره O را به شعاع r رسم می‌کنیم (شکل ۱۳۵- بالا). در این دایره OM را موازی O_1A ، ON را موازی O_3D و OP را موازی O_5F رسم می‌کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\widehat{MON} = \widehat{AO_1B} ; \widehat{NOP} = \widehat{CO_3D} ; \widehat{POM} = \widehat{EO_5F}$$

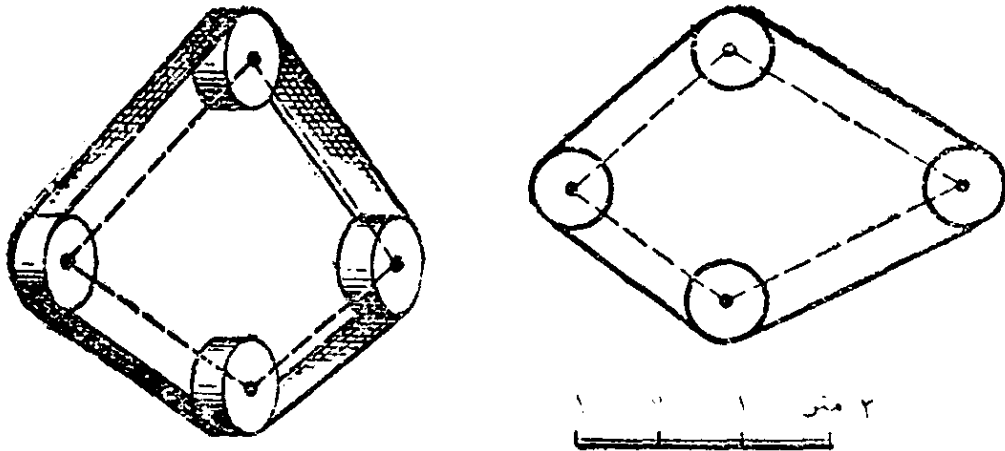
زیرا دو زاویه با اضلاع موازی، با هم برابرند. از آنجا نتیجه می‌شود:

$$AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r$$

و بنابراین طول تسمه باید $l = a + b + c + 2\pi r$ باشد. با همین روش می‌توان ثابت کرد، که نه فقط برای سه قرقره، بلکه برای هر تعداد دلخواه قرقره، طول تسمه انتقال مساوی است با مجموع فواصل محورها به اضافه طول محیط یکی از قرقره‌ها.

مسئله

در شکل ۱۳۶ طرح انتقال حرکت روی چهار قرقره داده شده است (قرقره‌های دیگر هم در فاصله آنها وجود دارد، منتهی چون در جواب مسئله تأثیری ندارد، در شکل رسم نشده‌اند). با استفاده از



۱۳۶. اندازه‌های لازم را روی شکل بدست آورید و با کمک آنها طول نوار انتقال حرکت را محاسبه کنید.

مقیاسی که در شکل داده شده است، اندازه‌های لازم را بدست آورید و طول نوار انتقال حرکت را محاسبه کنید.

کلاغ تیزهوش

در منتخبات دبیرستانی، داستان با مزه‌ای در باره «تیزهوشی کلاغ» وجود دارد. این يك داستان قدیمی است و از کلاغی روایت می‌شود که از تشنگی رنج می‌برد و کوزه‌آبی پیدا کرد. آب در کوزه کم بود و منقار کلاغ به آن نمی‌رسید، برای اینکه بتواند از آب کوزه استفاده کند، شروع به ریختن خورده سنگ در کوزه کرد. با این تدبیر

سطح آب بالا آمد و به سر کوزه رسید و کلاغ توانست تشنگی خود را تسکین دهد.

در این باره بحث نمی‌کنیم که آیا کلاغ می‌تواند به این ترتیب فکر کند و راه چاره‌ای جستجو کند یا نه. مطلب را از لحاظ هندسی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مسئله زیر برای ما قابل طرح است.

مسئله

اگر فرض کنیم که در ابتدا آب تا نیمه کوزه باشد، آیا کلاغ با روش فوق، موفق به خوردن آب می‌شود؟

حل

باید این مطلب را روشن کنیم که سطح اولیه آب در کوزه در هر ارتفاعی باشد، نمی‌توان از روش کلاغ برای بالا بردن آن استفاده کرد.

برای سهولت کار، فرض می‌کنیم که کوزه به شکل مکعب مستطیل باشد و سنگهایی را که در آن می‌اندازیم به شکل گلوله‌های مساوی و یکنواخت باشند. واضح است که تنها بشرطی آب از سطح سنگها بالا می‌آید که ذخیره اولیه آب از حجمی که در فاصله سنگها قرار دارد، بیشتر باشد: در اینصورت آب فواصل را پر می‌کند و از سطح سنگها بالاتر می‌آید. به بینیم حجم این فاصله‌ها چقدر است. برای اینکه کار محاسبه ساده‌تر بشود، بهتر آنست که گلوله‌های سنگی

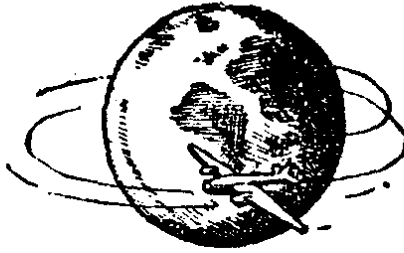
را چنان در نظر بگیریم که مرکز هر گلوله با مرکز گلوله بالایی و مرکز گلوله زیری روی یک خط راست قائم قرار گرفته باشند ، اگر قطر هر گلوله را d فرض کنیم ، حجم آن مساوی $\frac{1}{6}\pi d^3$ و حجم مکعب محیطی آن مساوی d^3 می شود . اختلاف این دو حجم یعنی $d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3$ عبارتست از قسمتی از حجم مکعب که به وسیله گلوله اشغال نشده است ، نسبت :

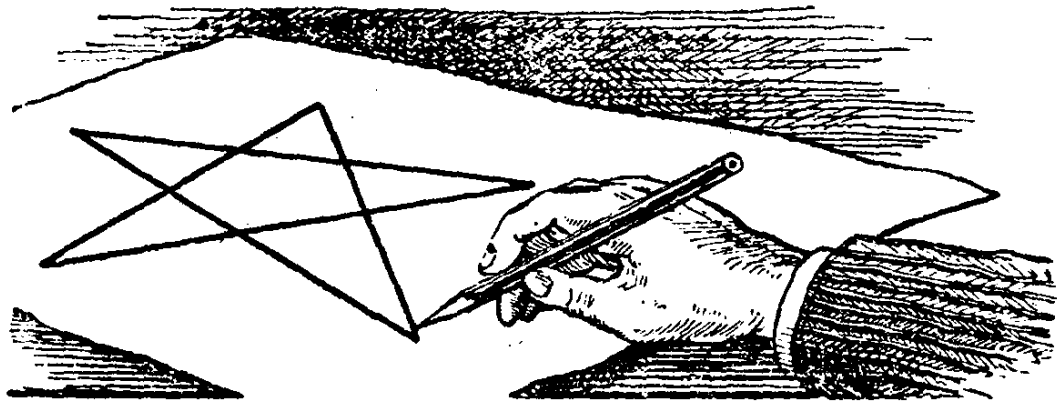
$$\frac{d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3}{d^3} = 0/48$$

به این معنی است که از هر مکعب به اندازه $0/48$ حجمش خالی می ماند . همین نسبت ، یعنی کمی کمتر از نصف ، مجموع فواصل خالی کوزه را تشکیل می دهد . اگر کوزه به شکل مکعب مستطیل و یا سنگها به شکل کره نباشد ، تغییر وضع خیلی ناچیز خواهد بود . در هر حالتی می توان نتیجه گرفت که اگر سطح اولیه آب پائین تر از نیمه کوزه باشد ، کلاغ با انداختن سنگ در آن ، موفق نمی شود سطح آب را به لبه کوزه برساند .

اگر کلاغ بتواند سنگهایی را که در کوزه می اندازد کاملاً پهلوی هم قرار دهد ، تازه آب کمی بیشتر از دو برابر ارتفاع اولیه خود را پیدا می کند . ولی کلاغ نمی تواند در این باره کاملاً موفق شود : اگر مقداری از آب را که به خورد سنگها می رود به حساب بیاوریم و همچنین در نظر بگیریم که سنگها کاملاً به هم چسبیده نیستند ، نتیجه

می‌گیریم که اگر سطح اولیه آب از نیمه کوزه پائین تر باشد، کلاغ موفق به خوردن آب نمی‌شود.



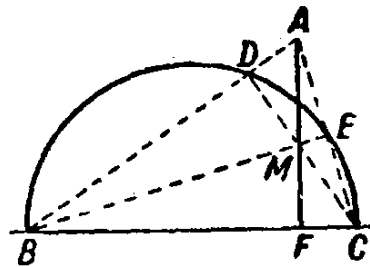
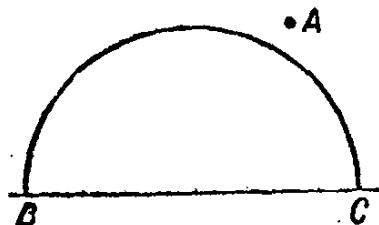


۱۰

هندسه بدون اندازه گیری و بدون محاسبه

رسم بدون پرگار

برای حل مسائل هندسی مربوط به ترسیم، معمولاً از خط کش و پرگار استفاده می‌شود. ولی خواهیم دید که گاهی می‌توان مسائلی را بدون استفاده از پرگار حل کرد، در حالی که در بدو امروزه پرگار لازم بنظر می‌رسد.



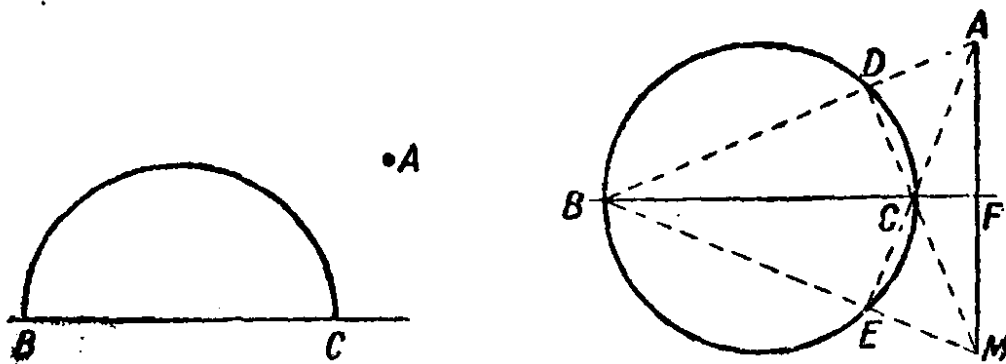
۱۳۷. رسم و حل يك مسئله هندسی (حالت اول)

مسئله

از نقطه A (شکل ۱۳۷ - سمت چپ) واقع در خارج نیمدایره، بدون استفاده از پرگار، عمودی بر قطر آن رسم کنید. مرکز نیمدایره هم مشخص نشده است.

حل

برای حل مسئله، از این خصوصیت مثلث استفاده می‌کنیم که ارتفاعات آن در یک نقطه به هم می‌رسند. نقطه A را به B و C وصل می‌کنیم تا نقاط D و E بدست آید (شکل ۱۳۷ - سمت راست). واضح است که خطوط BE و CD دو ارتفاع از مثلث ABC هستند. ارتفاع سوم، همان عمود مجهول بر BC است که از محل تلاقی دو ارتفاع دیگر، یعنی نقطه M ، می‌گذرد. اگر با کمک خط کش A را به M وصل کرده و امتداد دهیم، جواب مسئله بدست می‌آید، بدون اینکه



۱۳۸. همان مسئله در حالت دوم

احتیاجی به وجود پرگار پیدا کرده باشیم. در حالتی که خط مجهول بر امتداد خط BC عمود باشد (شکل ۱۳۸)، مسئله به شرطی حل

خواهد شد که به جای نیم‌دایره، تمام دایره را در اختیار داشته باشیم. از روی شکل ۱۳۸ معلوم است که این حالت با حالت قبل هیچ تفاوتی ندارد، جز اینکه در اینجا ارتفاعات مثلث، بجای داخل، در نقطه‌ای واقع در خارج مثلث ABC یکدیگر را قطع می‌کنند.

مرکز ثقل صفحه

مسئله

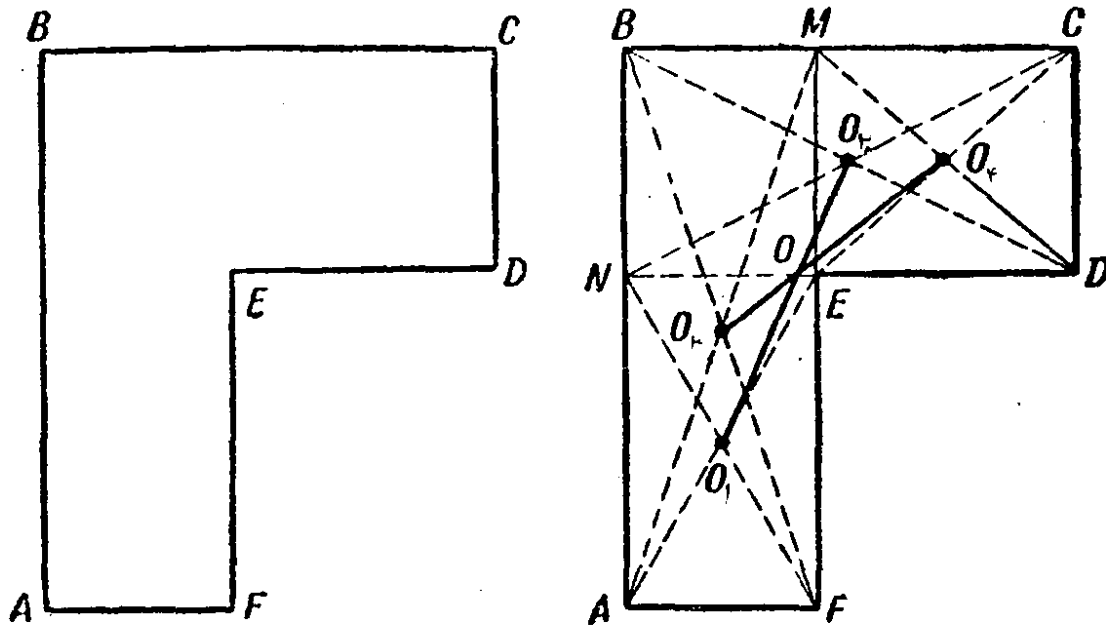
احتمالاً شما اطلاع داشته باشید که مرکز ثقل یک صفحه نازک، اگر به شکل مستطیل و یا لوزی باشد، محل تلاقی اقطار آن و اگر به شکل مثلث باشد، محل تلاقی میانه‌های آن و اگر به شکل دایره باشد، مرکز آنست.

حالا می‌خواهیم مرکز ثقل صفحه‌ای را پیدا کنیم که از اتصال دو مستطیل (مثل شکل ۱۳۹) بدست آمده باشد. فرض را بر این می‌گیریم که تنها خط‌کش در اختیار داریم و هیچ‌گونه اندازه‌گیری و یا محاسبه هم نمی‌خواهیم انجام دهیم.

حل

DE را امتداد می‌دهیم تا AB را در نقطه N قطع کند، همچنین FF را امتداد می‌دهیم تا BC را در M قطع کند (شکل ۱۴۰). ابتدا شکل را مجموعی از دو مستطیل $ANEF$ و $NBCD$ در نظر می‌گیریم. مرکز ثقل هر یک از این دو مستطیل بر محل تلاقی اقطار آنها یعنی نقاط O_1 و O_2 واقع است. بنابراین مرکز ثقل تمام شکل $ABCDEF$ بر O_1O_2

واقع است. حالا شکل مفروض را به صورت مجموعی از دو مستطیل ABMF و EMCD در نظر می گیریم. مرکز ثقل هر یک از دو مستطیل اخیر هم بر محل تلاقی اقطار آنها، یعنی O_3 و O_4 قرار دارد. در نتیجه



۱۳۹. تنها با استفاده از خط کش، مرکز ثقل این صفحه را پیدا کنید.

۱۴۰. مرکز ثقل صفحه مفروض بدست آمده است.

مرکز ثقل تمام شکل بر خط O_3O_4 واقع است. به این ترتیب مرکز ثقل شکل بر محل تلاقی O_1O_2 و O_3O_4 ، یعنی نقطه O ، قرار دارد و همه این ترسیمات هم تنها با کمک خط کش انجام می گیرد.

مسئله ناپلئون

هم اکنون از ترسیمی گفتگو کردیم که تنها با کمک یک خط کش و بدون استفاده از پرگار به انجام رسید (با این شرط که یک دایره در شکل داده شده بود). حالا به مسائلی می پردازیم که محدودیتی از جهت عکس داشته باشند: بدون استفاده از خط کش و تنها با در دست داشتن

پرگار ترسیم را انجام دهیم . یکی از این مسائل مورد علاقهٔ ناپلئون اول بود . دانشمند ایتالیائی ماسکرون هم در کتابی که در زمینهٔ این ترسیمات نوشته است، مسئلهٔ زیر را برای ریاضی‌دانان فرانسوی طرح کرده است .

مسئله

محیط دایرهٔ مفروضی را ، بدون استفاده از خط کش به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید . جای مرکز دایره معلوم است .

حل

فرض کنید که بخواهیم محیط دایرهٔ O (شکل ۱۴۱) را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم . از نقطهٔ دلخواهٔ A واقع بر محیط دایره ، سه بار به طور متوالی به اندازهٔ شعاع دایره جدا می‌کنیم : نقاط B ، C و D بدست می‌آید . به‌سادگی معلوم

است که طول وتر AC (یعنی وتر قوسی

که $\frac{1}{3}$ محیط دایره است) ، ضلع

مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی است و

بنابراین برابر است با $\frac{2}{3}r$ (شعاع

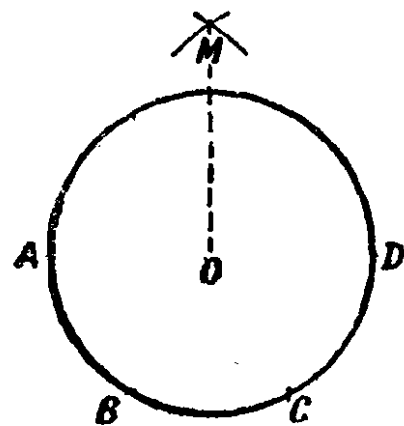
دایره است) . همچنین واضح است که

AD هم قطر دایره می‌شود . از نقاط

A و D با شعاع مساوی AC ، قوسهایی

رسم می‌کنیم، تا یکدیگر را در نقطهٔ M

قطع کنند . ثابت می‌کنیم که فاصلهٔ MO به اندازهٔ طول ضلع مربع



۱۴۱. تقسیم محیط دایره به چهار قسمت مساوی با استفاده از پرگار

محاط در این دایره است. در مثلث AMO داریم:

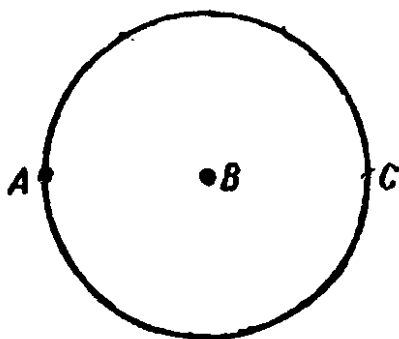
$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

یعنی MO مساوی ضلع مربع محاطی است. حالا دیگر کافی است که پرگار را به اندازه MO باز کنیم و به اندازه آن چهاربار متوالی روی دایره جدا کنیم تا رئوس چهارضلعی محاط در دایره بدست آید، یعنی محیط دایره به چهار قسمت مساوی تقسیم شود. این هم مسئله ساده دیگری از این قبیل:

مسئله

بدون استفاده از خط کش، فاصله بین دو نقطه مفروض A و B (شکل ۱۴۲) را پنج برابر (ویا به طور کلی چند برابر) کنید.

حل



۱۴۲. چگونه می توان فاصله بین دو نقطه A و B را تنها با استفاده از پرگار، n برابر کرد (n عددی است صحیح)

به مرکز B و شعاع AB دایره ای رسم می کنیم (شکل ۱۴۲). روی محیط این دایره و از نقطه A سه بار متوالی به اندازه شعاع جدا می کنیم، نقطه C بدست می آید که واضح است نقطه متقاطع A می باشد. فاصله AC دو برابر فاصله AB می باشد. با رسم دایره ای به مرکز C و شعاع BC، می توان با همین روش نقطه متقاطع B را بدست آورد و یعنی نقطه ای که فاصله آن تا نقطه A، سه برابر فاصله AB باشد و غیره.

است. در همین شکل طریقه استفاده از آن هم روشن شده است. فرض کنید که می‌خواهیم زاویه KSM را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم (شکل ۱۴۳).

وسیله را چنان قرار می‌دهیم که رأس زاویه S بر خط BD واقع شود، یکی از اضلاع زاویه از نقطه A بگذرد و ضلع دیگر بر نیم‌دایره مماس باشد. سپس خطوط SB و SO را رسم می‌کنیم، تقسیم زاویه مفروض به سه قسمت مساوی انجام می‌گیرد. برای اثبات، نقطه O مرکز نیم‌دایره را به نقطه تماس N وصل می‌کنیم. به سادگی ثابت می‌شود که مثلث ASB با مثلث SBO و مثلث SBO با مثلث OSN برابر است و از تساوی این سه مثلث نتیجه می‌شود که زوایای ASB، OSN و BSO با هم برابرند.

این طریقه تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی، یک طریقه کاملاً هندسی نیست و مناسب‌تر است که آن را یک وسیله مکانیکی بنامیم.

استفاده از ساعت برای تثلیث زاویه

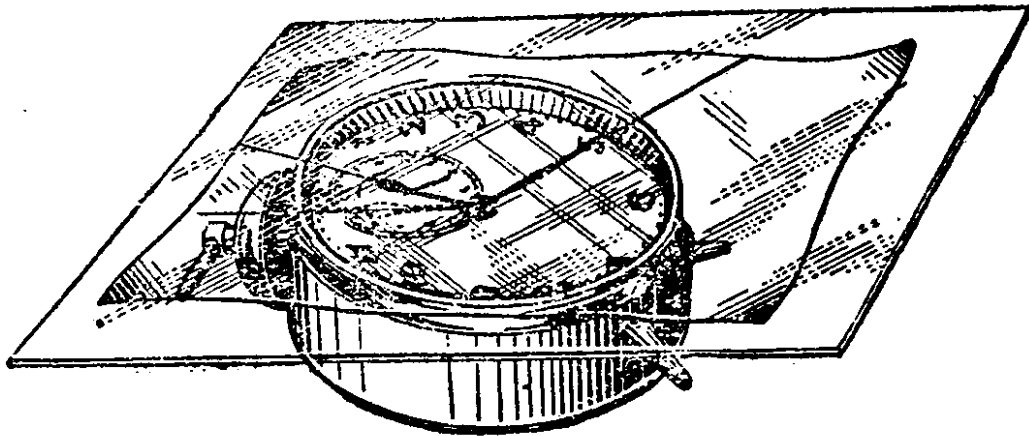
مسئله

آیا می‌توان با استفاده از خط‌کش، پرگار و ساعت، زاویه مفروضی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد؟

(* اینکه بتوان هر زاویه مفروض را به این ترتیب روی وسیله قرارداد، ناشی از خواص نقاط واقع بر نیم‌خطهایی است که زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کند؛ اگر از نقطه دلخواه O از نیم خط SO پاره خطهای $ON \perp SM$ و $OA \perp SB$ (شکل ۱۴۳) را رسم کنیم، خواهیم داشت: $AB = OB = ON$. اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

حل

بله ممکن است، زاویه را روی کاغذ شفاف رسم کنید و در لحظه‌ای که دو عقربه ساعت رویهم قرار گرفته‌اند، کاغذ را روی آن بگذارید به نحوی که رأس زاویه بر مرکز دوران عقربه‌ها و یک ضلع زاویه بر امتداد عقربه‌ها قرار گیرد (شکل ۱۴۴). وقتی که عقربه دقیقه شمار در امتداد ضلع دوم زاویه قرار گرفت، در امتداد عقربه ساعت شمار خطی رسم کنید. به این ترتیب زاویه‌ای به اندازه حرکت عقربه ساعت شمار بدست می‌آید. حالا اگر این زاویه را با کمک پرگار و خط کش دو برابر



۱۴۴. با کمک ساعت هم می‌توان زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد.

کنیم و سپس زاویه حاصل را دوباره دو برابر کنیم (طریقه دو برابر کردن زاویه را در هندسه دیده‌ایم)، $\frac{1}{3}$ زاویه مفروض بدست می‌آید. در حقیقت، وقتی که عقربه دقیقه شمار به اندازه زاویه α حرکت کند، عقربه ساعت شمار در همان مدت به اندازه $\frac{1}{12}$ آن، یعنی $\frac{\alpha}{12}$ ، حرکت خواهد کرد و بعد از آنکه این زاویه را چهار برابر کنیم،

زاویه $4 \times \frac{\alpha}{12}$ یعنی $\frac{\alpha}{3}$ بدست می آید .

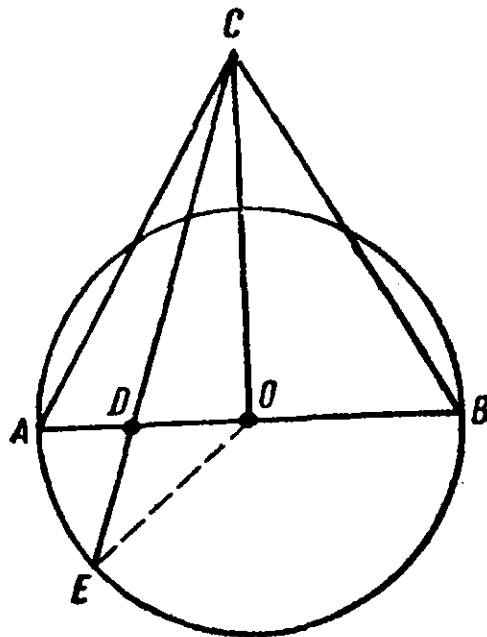
تقسیم محیط دایره

چگونه می توان روی يك صفحه ، چند ضلعی منتظمی با تعداد اضلاع دلخواه رسم کرد ؟
 این مسئله منجر به حل مسئله زیر می شود :
 محیط دایره ای را به n قسمت مساوی تقسیم کنید (n عددی است صحیح) .

واضح است که این مسئله را می توان با کمک مقاله حل کرد ، ولی این يك راه حل «به کمک چشم» است و ما می خواهیم مسئله را به طریق هندسی ، یعنی به کمک خط کش و پرگار حل کنیم .

قبلا سئوالی پیش می آید:

از لحاظ نظری محیط دایره را با کمک خط کش و پرگار به چند قسمت مساوی می توان تقسیم کرد؟ ریاضی دانها به این سئوال جواب داده اند. محیط دایره را به هر چند قسمت دلخواه نمی توان تقسیم کرد . می توان محیط دایره را به ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ...، ۲۵۷، ... قسمت مساوی تقسیم کرد .



۱۴۵ . راه حل تقریبی تقسیم محیط دایره به π قسمت مساوی

ولی به ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ... قسمت مساوی نمی توان تقسیم کرد .

اشکال دیگر در اینجا است که یک نوع روش رسم هم وجود ندارد: روشی که برای تقسیم محیط دایره به ۱۵ قسمت مساوی بکار می رود با روش تقسیم به ۱۲ قسمت فرق دارد و غیره، و همه این روشهای مختلف را هم نمی توان بخاطر سپرد .

در عمل لازم است روشی پیدا شود (هرچند تقریبی) که به کمک آن بتوان محیط دایره را به هر چند قسمت مساوی تقسیم کرد .

متأسفانه در کتابهای درسی هم هیچ توجهی به این مسئله نشده است و بهمین مناسبت در اینجا، یکی از روشهای تقریبی ولی جالب حل این مسئله را ذکر می کنیم .

مثلاً فرض کنید که بخواهیم محیط دایره مفروضی را (شکل ۱۴۵) به ۹ قسمت مساوی تقسیم کنیم . روی قطری از دایره، مثلاً AB ، مثلث متساوی الاضلاع ABC را می سازیم و روی قطر AB نقطه D را چنان اختیار می کنیم که $AD:AB=2:9$ باشد (در حالت کلی $AD:AB=2:n$) .

C را به D وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه E قطع کند . در این صورت قوس AE تقریباً مساوی $\frac{1}{9}$ محیط دایره خواهد بود (در حالت کلی $\widehat{AE} = \frac{360^\circ}{n}$) و یا وتر AE مساوی ضلع یک $\frac{1}{9}$ ضلعی (و در حالت کلی n ضلعی) منتظم محاطی خواهد بود . اشتباهی که در این مورد پیش می آید قریب $\frac{1}{8}\%$ است .

اگر رابطه بین زاویه مرکزی AOE (که با ترسیم فوق بدست

می‌آید و عدد n را بدست آوریم ، به رابطه دقیق زیر می‌رسیم :

$$tg ADE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4}$$

که برای مقادیر بزرگ n ، می‌توان آنرا به رابطه تقریبی زیر تبدیل کرد :

$$tg ADE \approx \frac{4}{3}(n^{-1} - 2n^{-2})$$

از طرف دیگر ، برای تقسیم دقیق محیط دایره به n قسمت مساوی ، باید زاویه مرکزی مساوی $\frac{360^\circ}{n}$ بسازیم . مقایسه زاویه $\frac{360^\circ}{n}$ و زاویه ADE ، مقدار اشتباه ما را ، وقتی که قوس AE را $\frac{1}{n}$ محیط دایره به حساب می‌آوریم ، معین می‌کند .

جدول زیر برای بعضی از مقادیر n بدست می‌آید :

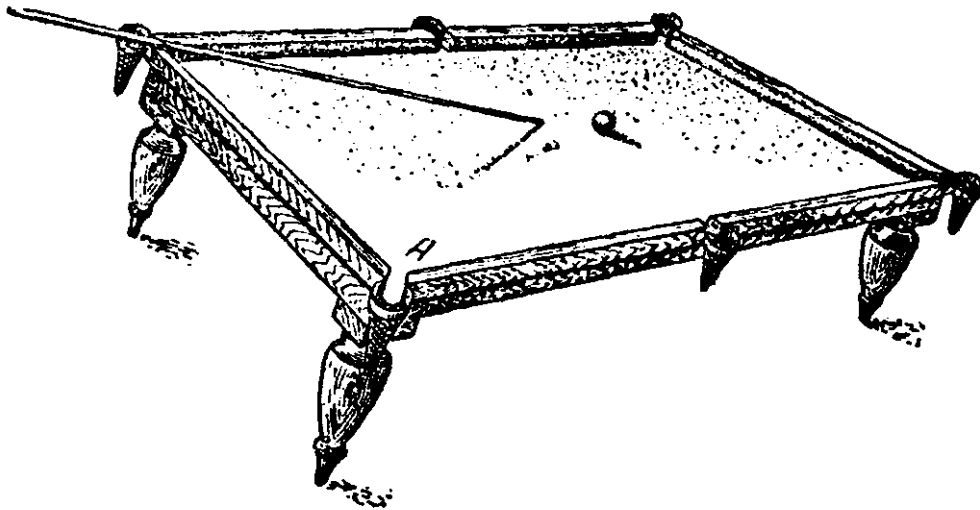
n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۱۰	۲۰	۶۰
$\frac{360^\circ}{n}$	120°	90°	72°	60°	$51^\circ 26'$	45°	36°	18°	6°
زاویه ADE	120°	90°	$71^\circ 57'$	60°	$51^\circ 31'$	$54^\circ 11'$	$36^\circ 21'$	$18^\circ 38'$	$6^\circ 26'$
مقدار خطا %	۰	۰	۰/۰۷	۰	۰/۱۷	۰/۴۱	۰/۹۷	۲/۵	۷/۲

همان طور که از جدول دیده می‌شود ، با این روش می‌توان محیط دایره را به ۵ ، ۷ ، ۸ یا ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرد . در این موارد خطای نسبی حاصل از ۰/۰۷ تا ۱ درصد است و چنین اشتباهی برای بسیاری از کارهای عملی قابل توجه نیست . با بزرگ شدن عدد n ، خطای نسبی هم زیادتر می‌شود ولی بهر حال ، این خطا برای هر مقدار دلخواه n از ۱۰٪ تجاوز نمی‌کند .

جهت ضربه

(مسئله‌ای در بارهٔ توپ بیلیارد)

برای فرستادن توپ بیلیارد به سوراخ، ضربهٔ مستقیم به آن وارد نمی‌کنند، بلکه آنرا مجبور می‌کنند که یک، دو و حتی سه بار به کنارهٔ میز برخورد کند و سپس به طرف سوراخ برود، به این ترتیب باید قبل از همه، یک مسئلهٔ هندسی را «در ذهن» حل کرد.



۱۴۶. مسئلهٔ هندسی میز بیلیارد

مهم اینست که بتوانیم «با چشم» اولین نقطه‌ای که توپ به کنار میز می‌خورد، پیدا کنیم، اگر توپ قابل ارتجاع و میز صاف باشد، بقیهٔ راه را طبق قانون انعکاس طی خواهد کرد (زاویهٔ تابش با زاویهٔ انعکاس برابر است).

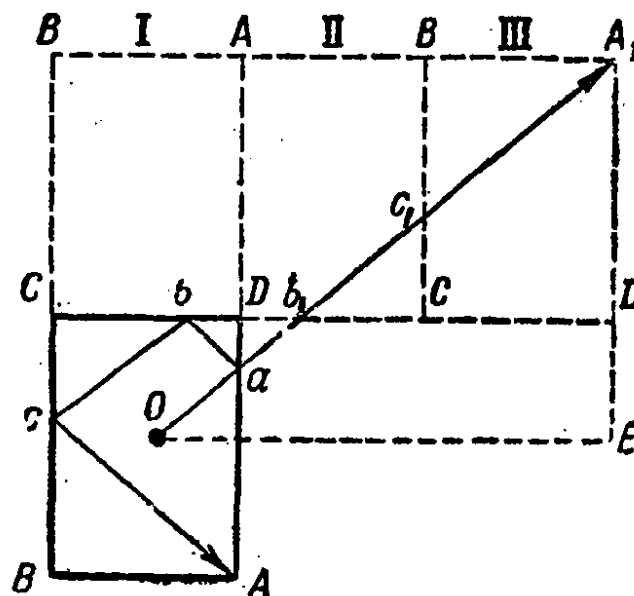
مسئله

اگر توپ بیلیارد در وسط میز باشد و شما بخواهید بعد از سه

برخورد با کناره میز به سوراخ A وارد شود ، چگونه می‌توان از هندسه برای جهت ضربه‌ای که به توپ وارد می‌کنیم ، استفاده کرد ؟ (شکل ۱۴۶) .

حل

برای اینکه جهت ضربه را پیدا کنید ، باید سه میز دیگر ، مساوی با میز بیلارد (مطابق شکل ۱۴۷) در نظر بگیرید و جهت ضربه را چنان انتخاب کنید که امتداد آن از دورترین رأس میز سوم عبور کند . فرض کنید $OabcA$ مسیر گلوله باشد . اگر میز ABCD را دور ضلع CD به اندازه ۱۸۰° درجه بچرخانیم . به وضع I قرار می‌گیرد ؛ سپس اگر میز را دور ضلع AD و یکبار دیگر دور ضلع BC به اندازه ۱۸۰° درجه بچرخانیم ، به وضع III تبدیل می‌شود . در



۱۴۷ . چگونه می‌توان مسیر ضربه به توپ بیلارد را پیدا کرد ، وقتی که بخواهیم با سه برخورد به میز وارد سوراخ شود ؟

نتیجه سوراخ A ، در جایی که با حروف A_1 نشان داده‌ایم ، واقع می‌شود .

با توجه به تساوی مثلثهای مربوطه ، به سادگی ثابت می شود :

$$ab_1 = ab : b_1c_1 = bc : c_1A_1 = cA :$$

و بنابراین طول پاره خط OA_1 مساوی طول خط شکسته $OabcA$ می شود .

به این ترتیب اگر نقطه A_1 را پیش خود تصور کنید و ضربه را در جهت OA_1 وارد کنید، توپ در مسیر خط شکسته $OabcA$ حرکت خواهد کرد و وارد سوراخ A خواهد شد .

سؤال دیگری مطرح می کنیم: با چه شرطی اضلاع OE و A_1E از مثلث قائم الزاویه A_1EO برابرند ؟

به سادگی دیده می شود که $OE = \frac{5}{2} AB$ و $A_1E = \frac{3}{2} BC$

می باشد . اگر بخواهیم $OE = A_1E$ باشد باید $\frac{5}{2} AB = \frac{3}{2} BC$ و یا $AB = \frac{3}{5} BC$ باشد .

بنابراین اگر میز بیلیارد چنان ساخته شده باشد که ضلع کوچکترش $\frac{3}{5}$ ضلع بزرگتر باشد، $OE = EA_1$ خواهد شد و در این حالت ضربه ای که باید به توپ وسط میز وارد شود ، در امتداد خطی است که با کناره میز زاویه 45° درجه می سازد .

توپ « با هوش »

هم اکنون مسئله ای را درباره توپ بیلیارد بارسم هندسی حل کردیم ؛ حالا اجازه بدهید خود توپ بیلیارد یک مسئله قدیمی جالب را حل کند . مگر چنین چیزی ممکن است ؟ البته این درست است که توپ نمی تواند فکر کند ، ولی در مواردی که باید محاسباتی انجام داد و

ضمناً معلوم است که چه اعمالی و به چه ترتیب روی عددها انجام می‌گیرد، می‌توان محاسبات مربوطه را به ماشین سپرد که هم به سرعت و هم بدون اشتباه به پایان می‌رساند.

برای این منظور وسائل زیادی : از ماشین‌های ساده حساب تا ماشین‌های بفرنج الکترونیکی ساخته‌اند.

غالباً پیش می‌آید که در مواقع بیکاری خود را به مسائلی از این قبیل مشغول می‌کنیم : اگر ظرفی با گنجایش معلوم پر از آب داشته باشیم ، با کمک دو ظرف خالی دیگر ، که گنجایش آنها هم معلوم است ، چگونه می‌توان مقدار معینی آب را از ظرف خارج کرد ؟

اینست نمونه‌ای از اینگونه مسائل :

می‌خواهیم محتوی ظرفی را که با ۱۲ لیتر آب پر شده است ، به وسیله دو ظرف خالی یکی با گنجایش ۹ لیتر و دیگری با گنجایش ۵ لیتر به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم . چگونه ؟

روشن است که برای حل این مسئله ، لازم نیست که با ظرفهای واقعی آزمایش کنیم ، بلکه کافی است « جابجائی آب » را روی کاغذ و مثلاً به شکل زیر انجام دهیم :

ظرف ۹ لیتری	۰	۷	۷	۲	۲	۰	۹	۶	۶
ظرف ۵ لیتری	۵	۵	۰	۵	۰	۲	۷	۲	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۷	۰	۵	۵	۱۰	۱۰	۱	۱	۶

در هر ستون مقدار آب داخل هر ظرف ، بعد از تغییر نوشته شده است .

در ستون اول : ظرف ۵ لیتری را پر می‌کنیم ، ظرف ۹ لیتری خالی می‌ماند (۰) و در ظرف ۱۲ لیتری ، ۷ لیتر باقی می‌ماند .

در ستون دوم: از ظرف ۱۲ لیتری، ۷ لیتر را در ظرف ۹ لیتری ریخته ایم و غیره.

در این طرح بطور کلی ۹ ستون وجود دارد، یعنی برای حل این مسئله ۹ عمل لازم است.

کوشش کنید با تغییر نوع عمل‌ها، راه حل دیگری برای این مسئله بدست آورید.

پس از مقداری کوشش و تجربه، مسلماً موفق می‌شوید؛ زیرا راه حل فوق تنها راه حل ممکن نیست و به طریقه‌های دیگری هم می‌توان به نتیجه رسید؛ ولی ممکن است راه حل شما با بیش از ۹ عمل به آخر برسد. در مورد این مسئله جالب، باید مطالب زیر روشن شود:

(۱) آیا می‌شود یک ردیف عمل چنان معین کرد که بدون توجه به گنجایش ظرف‌های مفروض قابل اجرا باشند؟

(۲) آیا می‌توان به کمک دو ظرف خالی، از ظرف سوم که پر از آب است، هر مقدار دلخواه آب برداشت، یعنی مثلاً از ظرف ۱۲ لیتری و به کمک ظرف‌های ۹ و ۵ لیتری، یک لیتر، دو لیتر، سه لیتر، چهار لیتر و غیره تا ۱۱ لیتر برداریم؟

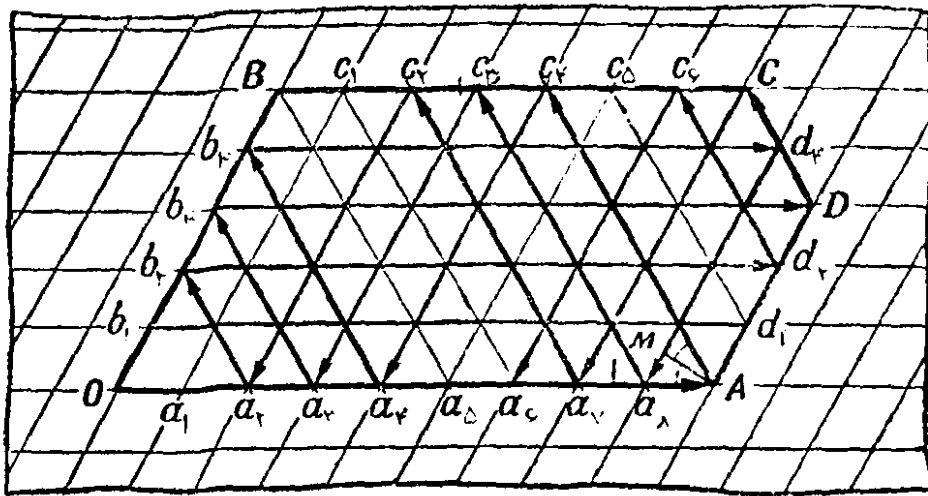
به همه این سئوالات، توپ «با هوش» جواب می‌دهد، به شرطی که برای آن «میز بیلاردی» با ساختمان مخصوص بسازیم.

روی یک ورق کاغذ، خط‌های موازی و مایل چنان رسم کنید که خانه‌های شطرنجی به شکل لوزی با زاویه حاده ۶۰ درجه به وجود آید، سپس شکل OBCDA را مطابق شکل ۱۴۸ بسازید.

این همان «میز بیلارد» است. اگر توپ بیلارد را در طول OA حرکت دهیم، پس از برخورد به کناره AD، طبق قانون «زاویه

تابش برابر است با زاویه انعکاس» $(\widehat{OAM} = \widehat{MAc\varphi})$ ، توپ در

امتداد A_4C_4 حرکت می کند (رأس یکی از لوزیهای کوچک) ، سپس



۱۴۸. طرزعمل «توپ باهوش»

بعد از برخورد در c_4 با کناره BC روی امتداد c_4a_4 به حرکت درمی آید ، و بعد به ترتیب روی خطهای a_4b_4 ، b_4d_4 ، d_4a_4 و غیره . حالا به مسئله خودمان برمی گردیم : طبق شرط مسئله سه ظرف داریم : ۹ و ۵ و ۱۲ لیتری . شکلی شبیه ۱۴۸ می سازیم ، به طوری که ضلع OA شامل ۹ خانه ، OB شامل ۵ خانه ، AD شامل سه خانه ($12 - 9 = 3$) ، و بالاخره BC شامل ۷ خانه ($12 - 5 = 7$) باشد .

متذکر می شویم که هر نقطه واقع بر اضلاع شکل ، با تعداد خانه های معینی از OA و OB جدا شده است . مثلاً فاصله نقطه c_4 تا OB چهار خانه و تا OA پنج خانه است ، از نقطه a_4 تا OB چهار خانه و تا OA صفر خانه است (زیرا a_4 روی OA واقع است) ، از نقطه d_4 تا OB هفت خانه و تا OA چهار خانه است و غیره .

بنابراین هر نقطه ای از اضلاع شکل ، که توپ بیلیارد به آنجا

(* ظرفی که پر از آب است ، همیشه بزرگترین ظرفهاست . اگر گنجایش ظرف های خالی را a و b و گنجایش ظرف پر را c فرض کنیم ، به شرطی که $c \leq a + b$ باشد ، باید « میز بیلیارد » را به شکل متوازی الاضلاعی با اضلاع

می‌رسد ، به وسیلهٔ دو عدد مشخص می‌شود .

فرض می‌کنیم که اولین عدد، یعنی تعداد خانه‌هایی که نقطه را از B) جدا می‌کند ، نمایندهٔ مقدار لیتر آب ظرف ۹ لیتری و دومین عدد ، یعنی تعداد خانه‌هایی که نقطه را از OA جدا می‌کند ، نمایندهٔ مقدار لیتر آب ظرف ۵ لیتری باشد . البته ، بقیهٔ آب ، در ظرف ۱۲ لیتری خواهد بود .

حالا دیگر همه چیز برای حل مسئله ، به کمک توپ بیلیارد ، آماده است .

توپ بیلیارد را در امتداد OA حرکت دهید و ضمن اینکه متوجه نقاط برخورد آن با کناره‌های میز هستید ، حرکت آنرا تا a_4 تعقیب کنید (شکل ۱۴۸) .

اولین نقطهٔ برخورد : $A(۰ و ۹)$ ؛ به این معنی است که پس از اولین عمل ، مقدار آب ظرفها به این صورت است :

ظرف ۹ لیتری	۹
ظرف ۵ لیتری	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۳

این عمل ممکن است .

دومین نقطهٔ برخورد : $c_4(۴ و ۵)$ ؛ به این معنی است که توپ بیلیارد ما را به عمل زیر برای جابجا کردن آب راهنمایی می‌کند:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	

و این هم عملی است .

سومین نقطهٔ برخورد : $a_4(۴ و ۰)$ ؛ توپ بیلیارد راهنمایی

می‌کند که در مرحله سوم باید ظرف ۵ لیتری را در ظرف ۱۲ لیتری خالی کرد:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	

نقطه چهارم: $b_4(0 و 4)$ ؛ نتیجه چهارمین جابجائی آب

می‌دهد:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	۰
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	۴
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	۸

نقطه پنجم: $d_4(8 و 4)$ ؛ توپ راهنمایی می‌کند که ۸ لیتر آب

را در ظرف خالی ۹ لیتری بریزیم:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	۰	۸	
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	۴	۴	
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	۸	۰	

با ادامه کار، بالاخره به جدول زیر می‌رسیم:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	۰	۸	۸	۳	۳	۰	۹	۷	۷	۲	۲	۰	۹	۶	۶
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	۴	۴	۰	۵	۰	۳	۳	۵	۰	۵	۰	۲	۲	۵	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	۸	۰	۴	۴	۹	۹	۰	۰	۵	۵	۱۰	۱۰	۱	۱	۶

به این ترتیب بعد از یک رشته عمل، با جابجا کردن آب به نتیجه

مطلوب رسیدیم: در دو ظرف، هر کدام ۶ لیتر آب وجود دارد، توپ بیلبارد مسئله را حل کرد.

اگر اجازه بدهید که توپ حرکت خود را ادامه بدهد از تمام

نقاط اضلاع (و به طور کلی تمام رئوس لوزی‌ها)، خواهد گذشت و

سپس به نقطه اولیه O برخواهد گشت . این حرکت به معنای آنست که از ظرف ۱۲ لیتری می توان از یک لیتر تا ۹ لیتر (باید مقدار بر حسب لیتر و با عدد صحیح بیان شده باشد) در ظرف ۹ لیتری و از یک تا ۵ لیتر در ظرف پنج لیتری ریخت .

ولی توپ مسئله را بد حل کرده است . ما توانستیم مسئله را در ۹ حرکت حل کنیم ؛ در حالی که توپ ، آن را در ۱۸ حرکت حل کرده است .

ولی اگر کمی دقت کنیم ، می بینیم که توپ می تواند راه حلی کوتاه تر از راه حل ما هم ، مشخص کند .

توپ را در امتداد کناره OB حرکت می دهیم (شکل ۱۴۸) و مسیر آن را تعقیب می کنیم و فرض می کنیم که طبق قانون « زاویه تابش مساوی است با زاویه انعکاس » حرکت کند . توپ روی امتداد OB تا نقطه B می رود ، در آنجا به کناره BC برخورد می کند و مسیر Ba_5 را پیش می گیرد ، سپس روی a_5c_5 و d_1b_1 و c_5d_1 و b_1a_1 و a_1c_1 و بالاخره c_1a_6 حرکت می کند .

رویه ۸ برخورد .

اگر مثل حالت قبل ، نقاط برخورد را با عدد مشخص کنیم ، به جدول زیر می رسیم :

ظرف ۹ لیتری	۰	۵	۵	۹	۰	۱	۱	۶
ظرف ۵ لیتری	۵	۰	۵	۱	۱	۰	۵	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۷	۷	۲	۲	۱۱	۱۱	۶	۶

توپ کوتاه ترین راه حل ممکنه را (در ۸ حرکت) به ما می دهد . ولی مسئله ای از این نوع ممکن است اصلا جواب نداشته باشد .

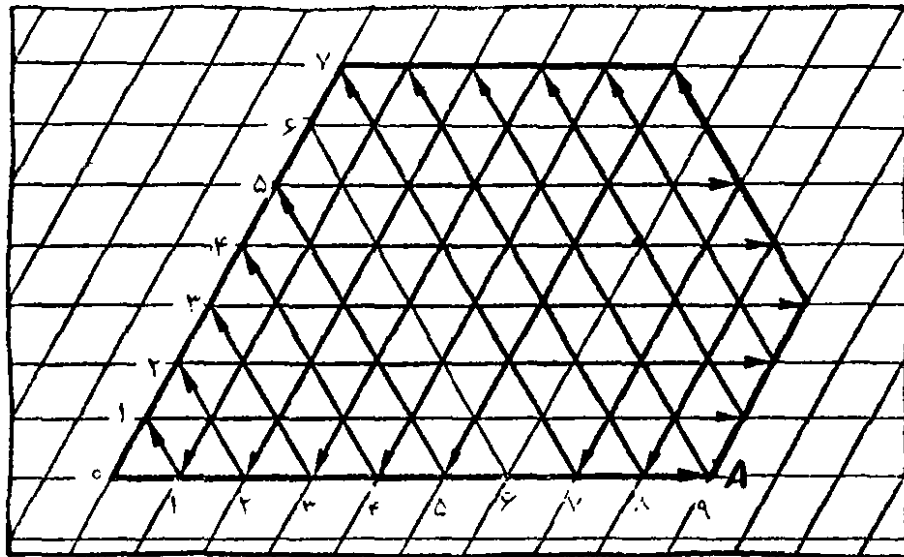
توپ چگونه این امر را نشان می‌دهد؟

خیلی ساده: در این حالت، توپ به نقطه O برمی‌گردد، بدون اینکه از نقطه مورد نظر عبور کرده باشد.

در شکل ۱۴۹ شیوه حل مسئله‌ای برای ظرف‌های ۹، ۷ و ۱۲

لیتری داده شده است:

۹ لیتری	۹	۲	۲	۰	۹	۴	۴	۰	۸	۸	۱	۱	۰	۹	۳	۳	۰	۹	۵	۵	۰	۷	۷	۰
۷ لیتری	۰	۷	۰	۲	۲	۷	۰	۴	۴	۰	۷	۰	۱	۱	۷	۰	۳	۳	۷	۰	۵	۵	۰	۷
۱۲ لیتری	۳	۳	۱۰	۱۰	۱	۱	۸	۸	۰	۴	۴	۱۱	۱۱	۲	۲	۹	۹	۰	۰	۷	۷	۰	۵	۵

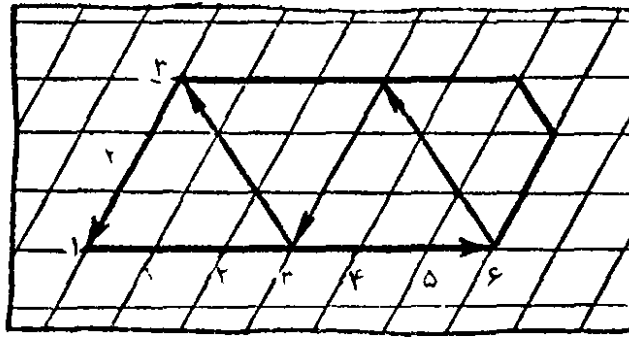


۱۴۹. حرکت توپ نشان می‌دهد که با کمک ظرف‌های ۷ لیتری و ۹ لیتری نمی‌توان آب ظرف ۱۲ لیتری را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد.

جدول نشان می‌دهد که اگر ظرف ۱۲ لیتری پر از آب باشد، با کمک ظرف‌های ۷ لیتری و ۹ لیتری، می‌توان هر مقدار دلخواه (به شرطی که بر حسب لیتر عددی صحیح باشد) از آن برداشت به جز نصف آب، یعنی ۶ لیتر را.

در شکل ۱۵۰ طرح مسئله‌ای از این نوع، برای ظرف‌های ۳، ۶ و ۸ لیتری داده شده است. توپ در اینجا، بعد از چهار بار برخورد با کناره میز به نقطه اولیه O برمی‌گردد و جدول متناظر آن چنین است:

ظرف ۶ لیتری	۶	۳	۳	۰
ظرف ۳ لیتری	۰	۳	۰	۳
ظرف ۸ لیتری	۲	۲	۵	۵



۱۵۰. طرح مسئله دیگری از این نوع

جدول نشان می‌دهد که با ظرف‌های ۶ لیتری و ۳ لیتری، نمی‌توان از ظرف ۸ لیتری چهار و یا یک لیتر جدا کرد. به این ترتیب «بیلیارد» ما با کمک توپ باهوشی که دارد، می‌تواند مثل یک ماشین حساب هر مسئله‌ای از این نوع را برای ما بدون اشتباه حل کند.

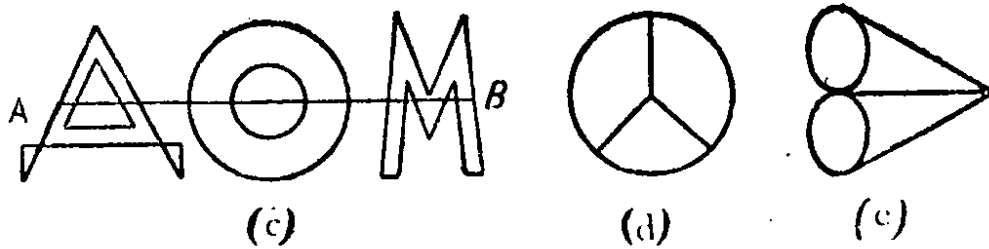
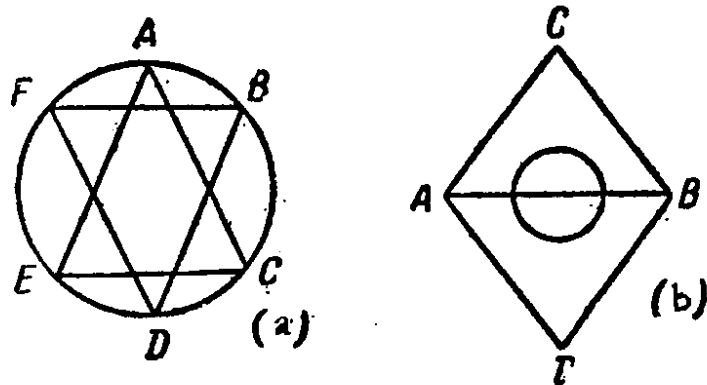
با یک حرکت قلم

مسئله

روی یک صفحه کاغذ پنج تصویر شکل ۱۵۱ را رسم کنید و سعی

کنید که هر يك از آنها را با يك حرکت قلم بکشید ، یعنی بدون اینکه قلم را از روی کاغذ بردارید و بدون اینکه از هر خط دو بار عبور کنید هر يك از آنها را رسم کنید .

بسیاری از کسانی که به حل این مسئله می پردازند ، از شکل (d) شروع می کنند ، زیرا این شکل ساده تر از سایر اشکال به نظر می رسد ، ولی هر کوششی برای رسم این شکل با يك حرکت قلم منجر به شکست می شود . آنها با ناراحتی و عدم اطمینان سراغ بقیه شکلها می روند و



۱۵۱. با يك حرکت قلم و بدون اینکه از هر خط دوبار عبور کنید ، هر يك از این شکلها را رسم کنید.

با حیرت و خوشحالی می بینند که دو شکل اول ، بدون زحمت زیاد ، با يك حرکت قلم قابل رسم هستند و حتی شکل بغرنج سوم (کلمه « ДОМ » روسی به معنای « خانه ») هم با مختصری تمرین رسم می شود . ولی برای شکل پنجم (e) ، مثل شکل (d) ، هیچ کوششی کار را به نتیجه نمی رساند .

به چه مناسبت برای يك شكل راه حلی از این بابت وجود دارد و برای شكل دیگر چنین راه حلی پیدا نمی شود؟ آیا در مورد بعضی از این شكل ها، قابلیت کشف و تیزهوشی ما کافی نیست، یا اینکه خود این مسائل اساساً قابل حل نیستند؟ آیا می شود نشانه ای پیدا کرد که از قبل بتوانیم قضاوت کنیم، آیا هر شكل مفروضی را می توان با يك حرکت قلم رسم کرد یا نه؟

حل

هر نقطه ای را که بیش از يك خط شكل، از آن عبور می کند، گره می نامیم. اگر تعداد خط هایی که از يك گره می گذرد زوج باشد، آن را گره زوج و در حالت عکس گره فرد گوئیم. در شكل (a) همه گره ها زوج هستند؛ در شكل (b) دو گره فرد وجود دارد (نقاط A و B)؛ در شكل (c) گره های فرد، همان نقاط انتهائی پاره خط AB است؛ در شكل های (d) و (e)، چهار گره فرد وجود دارد.

ابتدا به مطالعه شكل هایی می پردازیم، که در آنها همه نقاط گره ای زوج است، مثل شكل (a). مسیر خود را از نقطه دلخواهی مانند S شروع می کنیم. وقتی که مثلاً از نقطه A عبور می کنیم، دو خط رسم می شود: خطی که روی آن به A نزدیک شده ایم و دیگری خطی که روی آن از A دور می شویم، چون در مورد يك گره زوج، به تعداد خطوطی که به آن می رسند، از آن خارج می شوند، ضمن عبور از يك گره به گره دیگر، هر بار از خطوط رسم نشده دو عدد کم می شود بنابراین اساساً عبور از این گره ها ممکن است و می توان به نقطه S برگشت.

حالا فرض می کنیم به نقطه شروع حرکت برگشته باشیم و دیگر

نتوانیم از آن خارج شویم ، ولی در شکل هنوز خط رسم نشده‌ای که مثلاً از گره B عبور کرده است، باقی مانده باشد. این وضع به معنای آنست که باید خط سیر خود را عوض کنیم : یعنی وقتی که به نقطه B می‌رسیم ، قبل از اینکه از خط عبور بگذریم ، يك بار به B برگردیم و سپس راه سابق را ادامه دهیم .

مثلاً فرض کنید که در شکل a به این ترتیب عمل کنیم : ابتدا روی محیط مثلث ACE حرکت کنیم، سپس وقتی که به A برگشتیم، مسیر محیط دایره ABCDEFA (شکل ۱۵۱) را طی کنیم . در این صورت محیط مثلث BDF رسم نشده باقی می‌ماند؛ بنابراین قبل از آنکه موقع ترك مثلاً گره B ، روی قوس BC حرکت کنیم ، باید محیط مثلث BDF را به پیمائیم .

به این ترتیب ، اگر همه گره‌های شکل مفروض زوج باشند ، از هر نقطه دلخواه آن که حرکت را شروع کنیم، می‌توانیم با يك حرکت قلم تمام آن را رسم کنیم ، ضمناً در این حالت ، شکل در همان جایی بسته می‌شود که حرکت را شروع کرده بودیم .

حالا به بررسی شکلی می‌پردازیم که در آن دو گره فرد وجود دارد .

مثلاً شکل (b) دارای دو گره A و B فرد است .

این شکل را هم می‌توان با يك حرکت قلم رسم کرد .

حرکت را از گره فرد شماره ۱ شروع می‌کنیم و روی يك خط به گره فرد شماره ۲ می‌رویم ، مثلاً از A تا B روی ACB در شکل (b) .

با رسم این خط ، یکی از خطوطی را که از هر يك از گره‌های فرد

عبور می‌کرد استثنا کردیم، مثل اینکه از ابتدا نبوده است. پس از رسم این خط هر دو گره فرد به گره‌های زوج تبدیل می‌شوند و چون گره فرد دیگری روی شکل وجود ندارد، با شکلی سر و کار پیدا می‌کنیم که همه گره‌های آن زوج است؛ مثلاً در شکل (b)، پس از رسم خط ACB ، مثلث و دایره باقی می‌ماند.

قبلاً ثابت کردیم که چنین شکلی را می‌توان با یک حرکت قلم رسم کرد، بنابراین تمام شکل هم با یک حرکت قلم قابل رسم است. یک تبصره تکمیلی: وقتی که از گره فرد شماره ۱ شروع به حرکت می‌کنیم، باید راه خود را به طرف گره فرد شماره ۲ چنان انتخاب کنیم که شکلی جدا از شکل مفروض به وجود نیاید. مثلاً برای رسم شکل (b)، اگر برای عبور از گره A به گره B مسیر مستقیم AB را انتخاب کنیم، روش درستی پیش نگرفته‌ایم، زیرا در این صورت محیط دایره از بقیه شکل جدا و رسم آن غیر ممکن می‌شود.

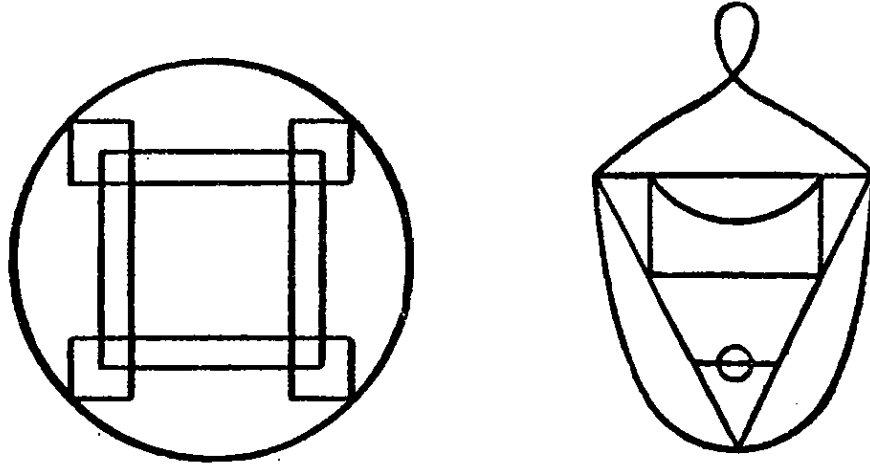
بنابراین، اگر شکل شامل دو گره فرد باشد، می‌توان با موفقیت رسم را از یک گره فرد شروع کرد و در گره فرد دوم به پایان رسم رسید. یعنی دو انتهای رسم از هم جدا است.

از اینجا به خودی خود نتیجه می‌شود که اگر تعداد گره‌های فرد یک شکل چهار باشد، آن را می‌توان با دو حرکت قلم (و نه یک حرکت) رسم کرد، مثل شکل‌های (d) و (e).

بطوری که می‌بینید، اگر طریق قضاوت درست را بیاموزیم، می‌توان خیلی چیزها را بدون صرف بی‌جهت انرژی و وقت پیش‌بینی کرد. ولی یکی از بهترین راه‌های بدست آوردن قضاوت صحیح، بخصوص آموزش هندسه است.

چه بسا که خواننده‌ای از استدلال این قسمت تا حدی احساس

خستگی بکند ، ولی در عوض به او یاد می‌دهد که چگونه استدلال کند و علاوه بر آن اطلاعات او را در زمینه‌هایی که برایش مبهم بود، زیاده‌تر می‌کند .



۱۵۲. هر يك از این دو شکل را با يك حرکت قلم رسم کنید.

شما همیشه می‌توانید ، از قبل مشخص کنید که آیا شکل مفروض را می‌توان با يك حرکت قلم رسم کرد و ضمناً در حالت امکان می‌دانید که از کدام‌گره باید حرکت را شروع کنید . علاوه بر آن حالا دیگر شما می‌توانید برای دوستان خود ، شکل‌هایی از این قبیل رسم کنید و برای حل به آنها ارائه دهید . حالا شکل‌هایی را که در اینجا (شکل ۱۵۲) رسم شده‌اند ، با يك حرکت قلم رسم کنید .

هفت پل کالنین گراد

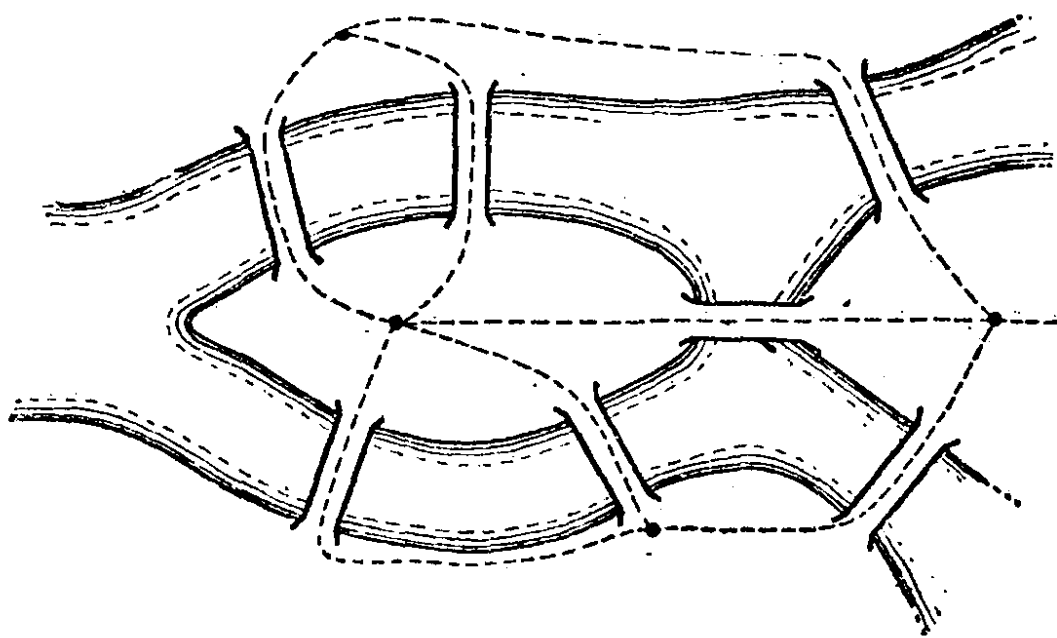
دویست سال قبل در شهر کالنین گراد^۵ هفت پل وجود داشت که سواحل رودخانه پره‌گل را بهم مربوط می‌کرد (شکل ۱۵۳) .

(* این شهر در آن زمان گنسبورگ نامیده می‌شد .

در سال ۱۷۳۶ او ابر، بزرگترین ریاضی دان زمان خود (که در آن زمان ۳۰ سال داشت) حل این مسئله را طرح کرد: آیا می توان ضمن گردش در شهر از همهٔ این هفت پل عبور کرد، بطوری که از هر يك آنها فقط يك بار بگذریم؟

به سادگی معلوم می شود که این مسئله همان مسئلهٔ رسم يك شکل با يك حرکت قلم منجر می شود.

اگر طرح مسیر عبور از پل ها را رسم کنید (خط چین ها در شکل ۱۵۳)، به یکی از شکل های سابق (شکل ۱۵۱ - e)، که دارای چهار گره فرد است، می رسیم. و دیگر شما می دانید که چنین شکلی را



۱۵۳. نمی توان از هر هفت پل طوری عبور کرد که از هر کدام آنها بیش از يك بار رد نشویم.

نمی توان با يك حرکت قلم رسم کرد و بنابراین نمی توان از هر هفت پل عبور کرد، بطوری که از هر يك آنها بیش از يك بار رد نشده باشیم. اولر در آن موقع هم این مطلب را ثابت کرد.

شوخی هندسی

بعد از آنکه شما و دوستانتان از راز رسم يك شكل با يك حرکت قلم آگاه شدید، دوستانتان را جمع کنید و به آنها اطلاع دهید که می‌توانید شکلی شامل چهارگره فرد را (و مثلاً دایره‌ای با دو قطر آن - شکل ۱۵۴) با يك حرکت قلم و بدون اینکه روی يك خط دوبار حرکت کنید، رسم کنید.



۱۵۴. شوخی هندسی

شما به خوبی می‌دانید که این عمل غیر ممکن است، ولی می‌توانید به حرف خود عمل کنید. در اینجا حیلۀ کوچکی در این باره را به شما یاد می‌دهیم.

رسم را از نقطه A روی محیط دایره شروع کنید (شکل ۱۵۴)،

وقتی که یک چهارم دایره را رسم کردید (قوس AB)، کاغذ دیگری در در نقطه B قرار دهید (و یا کاغذی را که روی آن رسم می کردید در قسمت پائین تا کنید) و با قلم خود رسم دایره را روی این کاغذ اضافی تا نقطه D (نقطه متقاطع B) ادامه دهید.

حالا کاغذ اضافی را بردارید (یا تای کاغذ را باز کنید). در کاغذ اصلی شما یک ربع دایره (قوس AB) رسم شده است و نوک قلم شما در نقطه D است (بدون اینکه قلم را از کاغذ جدا کرده باشید!) دیگر تکمیل رسم مشکل نیست: ابتدا قوس DA را رسم می کنید، سپس قطر AC ، بعد قوس CD و از آنجا قطر DB و بالاخره قوس BC را، مسیر دیگری هم از نقطه D می توانید طی کنید. آنرا پیدا کنید.

تحقیق درستی شکل

مسئله

برای اینکه معلوم شود، قطعه پارچه بریده شده، به شکل مربع هست یا نه، خیاط آن را روی قطره‌هایش تا کرده و دید که کناره‌های آن در هر حال برهم منطبق شده است. آیا این آزمایش کافی است؟

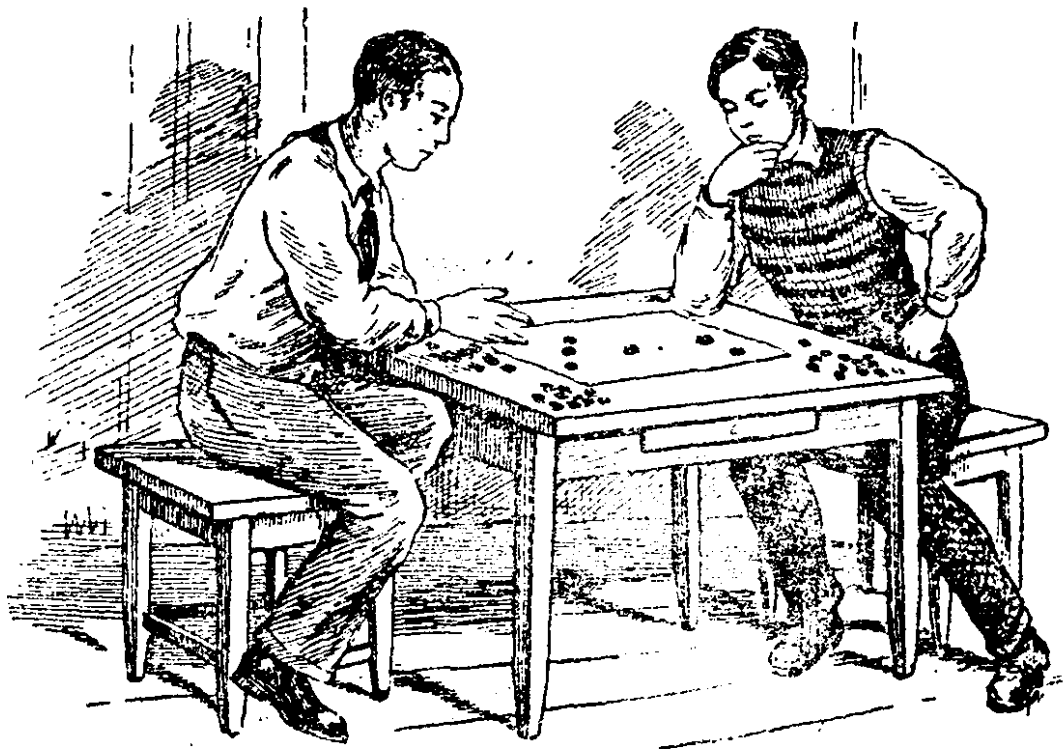
حل

این آزمایش خیاط، تنها ثابت می کند که هر چهار ضلع با هم برابر است، می دانیم که تنها مربع دارای این خاصیت نیست، بلکه

هر لوزی هم چهار ضلع مساوی دارد و لوزی تنها وقتی به مربع تبدیل می شود که زوایای آن قائمه باشد. بنابراین آزمایشی که به وسیله خیاط انجام گرفته است دلیل بر مربع بودن پارچه نیست. علاوه بر آن باید دید که آیا زوایای رأس آن قائمه هست یا نه. برای این منظور مثلاً می توان قطعه پارچه را از وسط دو ضلع روبرو تا کرد، در صورت قائمه بودن زوایا دو نیمه آن کاملاً منطبق بر یکدیگر قرار می گیرد.

بازی

برای بازی يك صفحه کاغذ مستطیل شکل و چند شکل یکنواخت متقارن، مثل مهره های دومینو یا سکه هایی که يك ارزش داشته باشد و



۱۵۵. بازی هندسی، کسی بازی را می برد که آخرین مهره را زوی صفحه قرار دهد.

و یا چند قوطی کبریت و غیره لازم است. تعداد این مهره ها باید آنقدر

باشد که بتوان با آنها صفحه کاغذ را پوشاند. برای بازی هم دو نفر لازم است، کسانی که بازی می‌کنند به نوبت مهره‌ها را در جای دلخواهی از صفحه مستطیل شکل (جائی که آزاد باشد) می‌گذارند تا وقتی که دیگر جائی برای قرار دادن مهره باقی نمانده باشد.

مهره‌هایی را که روی صفحه قرار گرفته نمی‌توان جابجا کرد. کسی برنده به حساب می‌آید که آخرین مهره را روی صفحه قرار دهد.

مسئله

بازی به چه روشی ادامه پیدا کند، تا کسی که بازی را شروع کرده است حتماً برنده شود؟

حل

کسی که بازی را شروع کرده است باید در اولین حرکت، مرکز صفحه را اشغال کند، یعنی مهره اول را چنان قرار دهد که مرکز تقارن آن حتی الامکان بر مرکز صفحه کاغذ منطبق باشد و در حرکت‌های بعدی بایست مهره خود را درست قرینه مهره بازیکن دوم قرار دهد (شکل ۱۵۵).

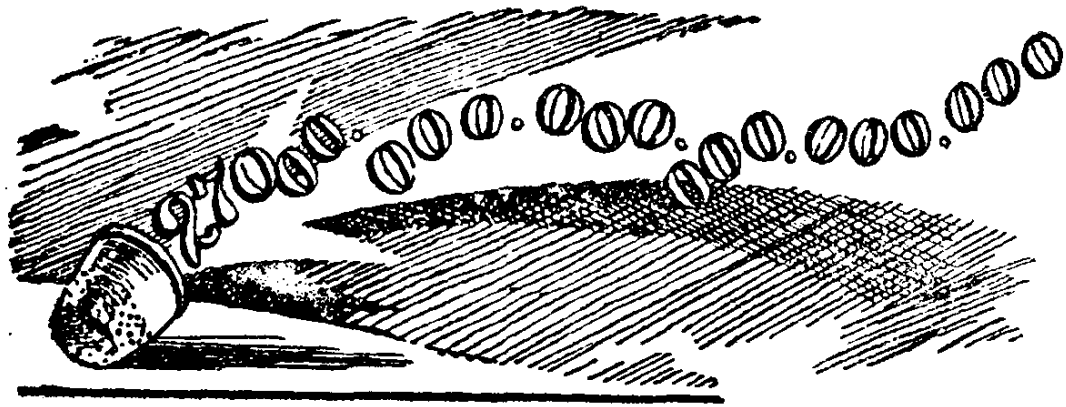
برای این منظور، کسی که بازی را شروع کرده است، باید اول جای مهره خود را پیدا کند و در این صورت برد او حتمی است.

تعبیر هندسی این روش چنین است: مستطیل دارای مرکز تقارن است، بطوری که هر خط از این مرکز عبور کند اولاً به وسیله این نقطه نصف می‌شود ثانیاً مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. بنابراین به ازاء هر نقطه یا هر سطح کوچکی از مستطیل، نقطه یا سطح

کوچک دیگری در مستطیل وجود دارد که متقارن آنست و تنها نقطه‌ای که متقارنی برای خود ندارد، خود مرکز تقارن مستطیل است. از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی بازیکن اول مرکز مستطیل را اشغال می‌کند، هر نقطه‌ای از صفحه را که رقیب او بگیرد، نقطه آزادی در سطح مستطیل باقی می‌ماند که قرینه مهره رقیب او نسبت به مرکز مستطیل است.

به این ترتیب، وقتی بازی ادامه پیدا کند، اجباراً به جایی می‌رسد که نفر دوم جای خالی برای مهره خود نمی‌بیند (زیرا در غیر اینصورت برای مهره نفر اول هم جایی باقی مانده است) و کسی برنده می‌شود که بازی را شروع کرده است.





۱۱

مقادیر کوچک و بزرگ در هندسه

۲۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

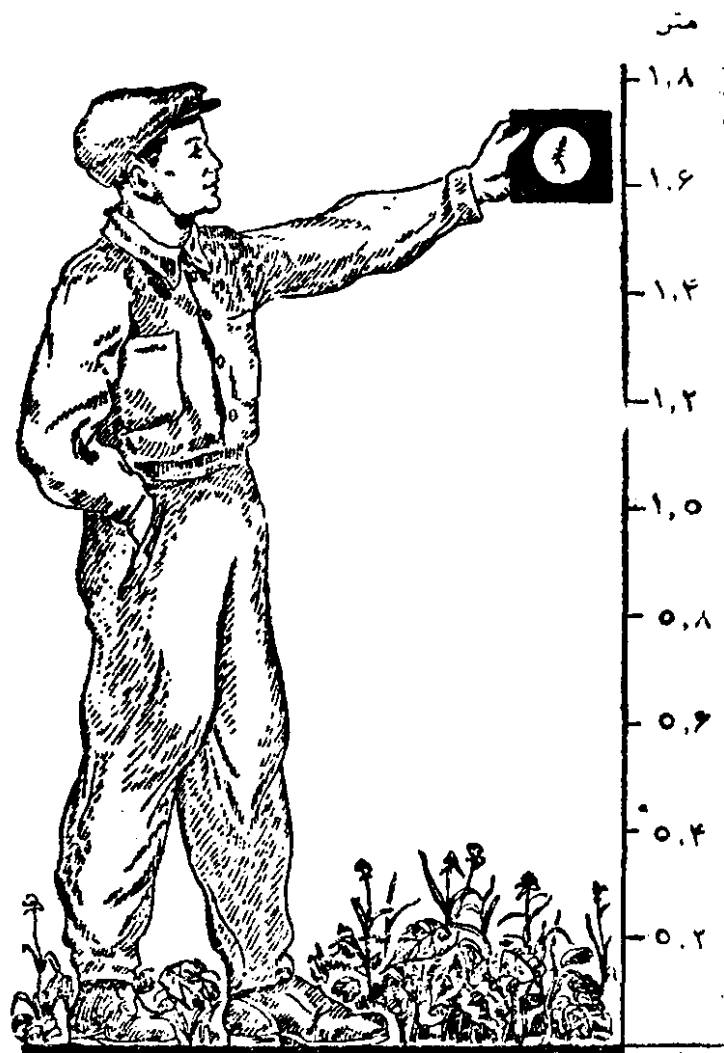
در يك انگشتانه

عدد ۲۸ همراه با ۱۸ صفر را که در عنوان این بند نوشته شده، به طرق مختلف می توان خواند، بعضی می گویند این ۲۷ تریلیون است؛ بعضی دیگر و مثلاً مأمورین دارائی آن را ۲۷ کوین تیلیون می خوانند و بالاخره بعضی هم آن را به صورت $۱۰^{۱۸} \times ۲۷$ می نویسند و می خوانند ۲۷ ضرب در ده به توان ۱۸.

چگونه ممکن است يك چنین مقدار باور نکردنی در يك انگشتانه جا بگیرد؟

صحبت بر سر ذراتی است که در هوای اطراف ما وجود دارد.

هوا هم مثل همه اجسام دیگری که در جهان وجود دارد، مجموعه‌ای از ملکولهاست. فیزیکدانها ثابت کرده‌اند که در هر سانتیمتر مکعب (یعنی تقریباً در یک انگشتانه) در حرارت صفر درجه، به اندازه $۱۰^{۱۸} \times ۲۷$ مولکول از هوای اطراف ما وجود دارد. عددی عظیم در مقابل ما وجود دارد. چگونه می‌توان تصور روشن وزنده‌ای از این عدد بدست آورد؟ یک چنین مجموعه‌ای را با چه چیزی می‌توان مقایسه کرد؟ با تعداد افراد روی زمین؟ نه! همه افراد روی زمین فقط دوهزار میلیون ($۱۰^۹ \times ۲$) نفرند، یعنی ۱۳ هزار میلیون مرتبه کمتر از مولکولهایی که در یک انگشتانه وجود دارد. اگر تمام ستارگان عالم که با قوی‌ترین



۱۵۶. جوان یک باسیل حصیه را، که ۱۰۰۰ مرتبه بزرگ شده است به دقت نگاه می‌کند.

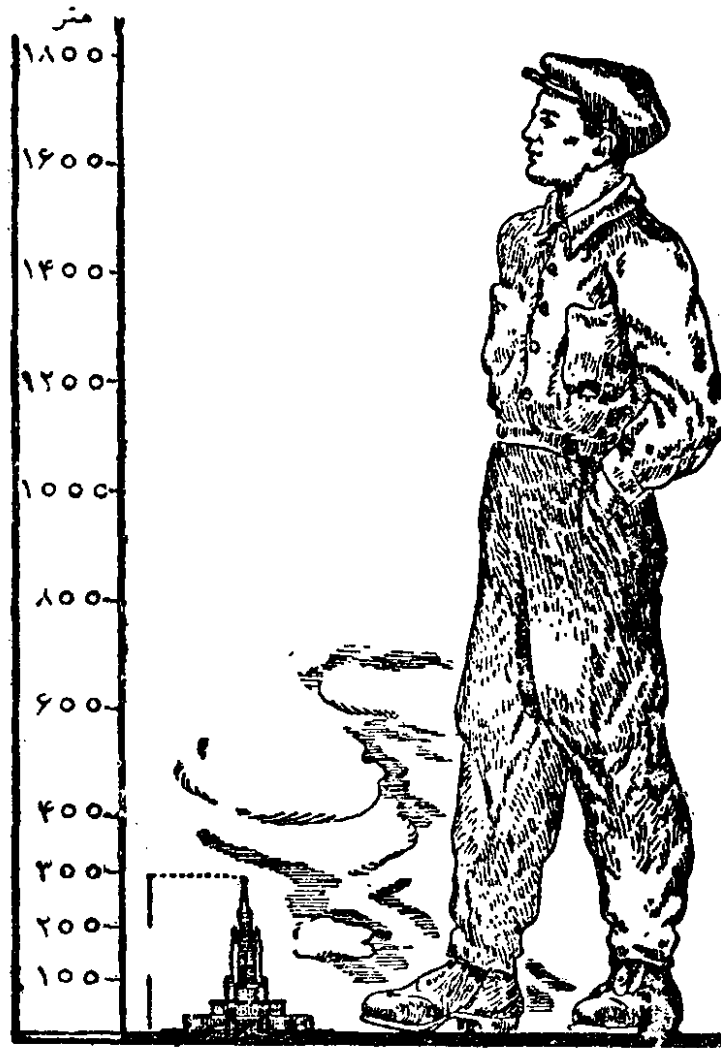
میکروسکوپها دیده می‌شوند، سیاره‌هایی از خورشید ما بودند و اگر در هر یک از این سیاره‌ها جمعیتی به اندازه کره زمین وجود داشت، در این صورت هم تعداد جمعیت مجموعه آنها مساوی مولکولهای «ساکن» در یک انگشتانه نمی‌شد، اگر شما می‌توانستید به‌طور لاینقطع مثلاً هر صد مولکول را در یک دقیقه بشمارید، برای شمردن مولکولهای داخل یک انگشتانه ۵۰۰ هزار میلیون سال وقت لازم داشتید.

ما حتی عددهای خیلی کوچکتر را هم نمی‌توانیم به‌طور روشن پیش خود مجسم کنیم.

مثلاً وقتی که به‌شما بگویند، یک میکروسکوپ ۱۰۰۰ بار بزرگ می‌کند، چه تصویری برای شما به وجود می‌آید؟ مطلب بر سربزرگی عدد هزار نیست، بلکه صحبت از هزار برابر است و در این مورد تصور ما تا جایی که لازم است پیش نمی‌رود. ما اغلب نمی‌توانیم کوچکی واقعی اشیائی را که زیر میکروسکوپ به ترتیب مشابهی بزرگ می‌شوند، درست تخمین بزنیم. اگر با کتری حصبه را ۱۰۰۰ بار بزرگ کنیم، به نظر ما به اندازه مگس کوچکی می‌آید که از فاصله معمولی دید، یعنی ۲۵ سانتی‌متر، دیده شود (شکل ۱۵۶). ولی این با کتری در واقع چقدر کوچک است؟ فرض کنید همراه با با کتری، شما هم ۱۰۰۰ مرتبه بزرگ شوید. در این صورت قد شما ۱۷۰۰ متر خواهد شد! سر شما از ابرها خواهد گذشت و مرتفع‌ترین ساختمان‌های مسکو از زانوی شما خیلی پائین‌تر خواهند بود (شکل ۱۵۷). به همان نسبت که شما از یک چنین موجود عظیم‌الجثه‌ای کوچک‌ترید، با کتری هم از مگس کوچکتر است.

حجم و فشار

ممکن است فکر کنیم که آیا واقعاً $10^{18} \times 27$ ملکول هوا برای يك انگشتهانه زیاد نیست؟ بهیچ وجه! قطر يك مولکول اکسیژن یا



۱۵۷. جوانی که ۱۰۰۰ مرتبه بزرگ شده است.

ازت $\frac{3}{100000000}$ میلی متر (یا $10^{-7} \times 3$ میلی متر) است. اگر حجم مولکول را برابر حجم مکعبی به ضلع قطر آن بگیریم، بدست می آید:

$$\left(\frac{3}{10^7}\right)^3 = \frac{27}{10^{21}} \text{ (میلی متر مکعب)}$$

تعداد مولکول‌های يك انگشتانه را $10^{18} \times 27$ گرفتیم ، یعنی حجمی را که مولکول‌های انگشتانه اشغال کرده‌اند به تقریب برابر است با :

$$\frac{27}{10^{21}} \times 27 \times 10^{18} = \frac{729}{10^3} \text{ (میلی متر مکعب)}$$

یعنی قریب يك میلی‌متر مکعب ، که فقط يك هزارم سانتی‌متر مکعب است. فاصله بین مولکول‌ها خیلی بیش از اندازه خود آنهاست و در همین فواصل است که مولکول‌ها حرکت می‌کنند. در حقیقت ، همان طور که می‌دانیم ، ذرات هوا در يك جا آرام نمی‌مانند : در حالی که مجموعه‌های کوچکی را تشکیل می‌دهند ، دائماً و با بی‌نظمی از جایی به جای دیگر حرکت می‌کنند . اکسیژن ، گاز کربنیک ، هیدروژن ، ازت و سایر گازها دارای اهمیت صنعتی هستند ، ولی برای نگهداری آنها به مقدار زیاد ، مخزن‌های عظیمی احتیاج دارند . مثلاً يك تن (۱۰۰۰ کیلوگرم) ازت در فشار معمولی به ۸۰۰ متر مکعب جا احتیاج دارد ، یعنی برای نگهداری تنها يك تن ازت خالص مخزنی با ابعاد $10 \times 10 \times 8$ متر لازم می‌شود . ولی برای نگهداری يك تن هیدروژن خالص ، مخزنی خیلی بزرگ و به گنجایش ۱۰۰۰۰ متر مکعب مورد احتیاج است .

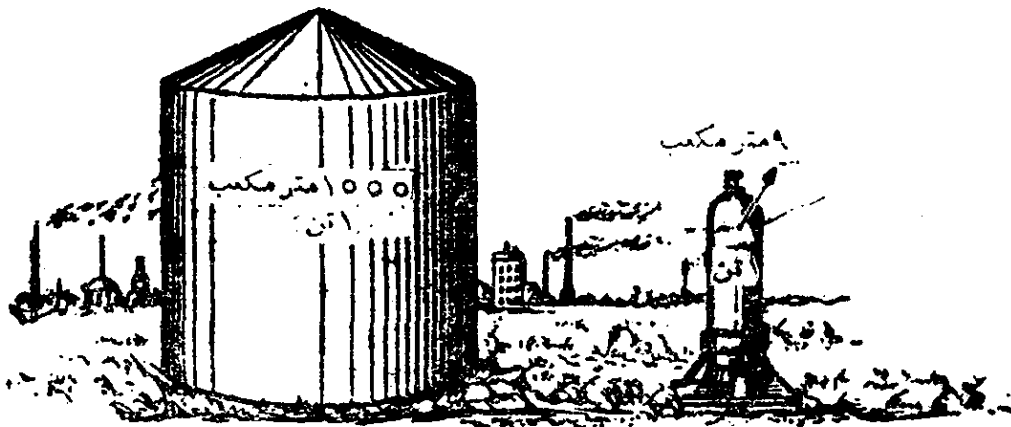
آیا نمی‌شود مولکول‌های گاز را به هم نزدیکتر کرد ؟ مهندسين همین کار را می‌کنند و با کمک فشار گازها را متراکم می‌کنند . ولی این کار ساده نیست . فراموش نکنید که هر نیروئی به گاز وارد شود ، به وسیله گاز به دیواره ظرف منتقل می‌شود. دیواره مستحکم‌ی لازم است که به وسیله فشار گاز متلاشی نشود .

صنعتگران ما ، با وسایل شیمیائی جدید ، فولادهائی ساخته‌اند که در مقابل فشارهای عظیم ، درجه حرارت بالا و فعل و انفعالات

شیمیائی گازها، به خوبی مقاومت می کنند .

حالا مهندسین ما می تواند گاز هیدرژن را ۱۱۶۳ بار متر کم کنند، بطوری که يك تن هیدرژن را، که در فشار معمولی جو ۱۰۰۰۰ متر مکعب حجم دارد، در مخزن کوچکی به حجم ۹ متر مکعب جا دهند (شکل ۱۵۸) .

فکر می کنید برای اینکه حجم هیدرژن را ۱۱۶۳ بار کم کنیم، چه فشاری باید به آن وارد کنیم؟ با توجه به این قانون فیزیک که می گوید: بهر نسبتی که بخواهیم حجم گاز کم شود، باید به همان نسبت فشار آن را زیاد کنیم، به این نتیجه می رسیم که باید فشار بر هیدرژن را ۱۱۶۳ بار زیاد کنیم. ولی آیا در واقع امر هم همین طور است؟ نه! در واقع باید هیدرژن فشاری معادل ۵۰۰۰ جو را تحمل کند، یعنی فشار را باید ۵۰۰۰ مرتبه زیاد کرد نه ۱۱۶۳ مرتبه، زیرا حجم وقتی



۱۵۸. يك تن هیدرژن در فشار يك جو (سمت چپ) و در فشار ۵۰۰۰ جو (سمت راست) (در شکل تناسب رعایت نشده است)

متناسب با عکس فشار تغییر می کند که فشار خیلی زیاد نباشد و برای فشارهای زیاد، این قانون تطبیق نمی کند. مثلاً اگر به يك تن گاز ازت فشاری معادل هزار جو وارد کنیم، حجم آن به جای ۸۰۰ متر مکعب

(که حجم آن در فشار معمولی يك جو است) ، $1/7$ متر مکعب خواهد شد ، در حالیکه اگر فشار را به ۵۰۰۰ جو برسانیم (یعنی ۵ برابر کنیم) ، حجم آن فقط تا $1/1$ متر مکعب پائین می آید .

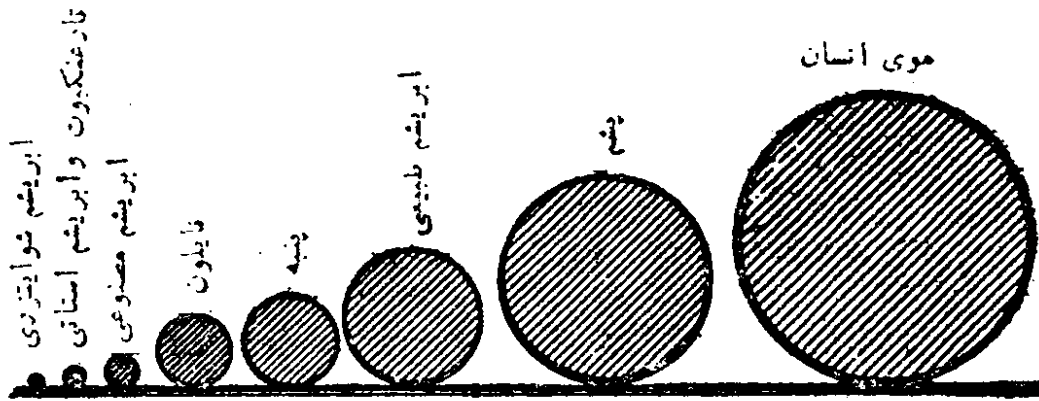
نازکتر از تار عنکبوت ، و محکمتر از فولاد

مقطع يك نخ یا يك مفتول یا حتی يك تار عنکبوت ، همه از لحاظ هندسی شکلی دارند، که اغلب به دایره نزدیک است . ضمناً قطر مقطع عرضی ، یا اگر بشود گفت ، ضخامت يك تار عنکبوت تقریباً ۵ میکرون ($\frac{5}{10000}$ میلی متر) است . آیا از تار عنکبوت نازکتر هم وجود دارد ؟ کدام هنرمند است که نازکترین « نخها » را می ریسد ؟ عنکبوت یا ، شاید ، کرم ابریشم ؟ نه ، قطر رشته ابریشم طبیعی ۱۸ میکرون است ، یعنی $3\frac{1}{2}$ مرتبه ضخیمتر از يك تار عنکبوت .

بشر از دیر باز آرزو داشته است که با مهارت خود بتواند بر هنر عنکبوت و کرم ابریشم برتری پیدا کند . افسانه قدیمی درباره يك زن یونانی وجود دارد که در آن از ریسندگی شگفت آور او صحبت می شود . او به چنان کمالی از صنعت رسیده بود که پارچه های بافت او مثل تار عنکبوت نازک ، مثل شیشه روشن و مثل هوا سبک بود . حتی الهه دانائی هم که پشتیبان صنعت گران است ، به پای او نمی رسید .

این افسانه (که همچون بسیاری از افسانه های قدیمی تخیلی است) ، در زمان ما صورت عمل یافته است . هنرمند امروز ، مهندس شیمی نام دارد که با استفاده از چوب معمولی می تواند نخ مصنوعی بسازد که به طور عجیبی محکم و فوق العاده نازک باشد . مثلاً رشته های

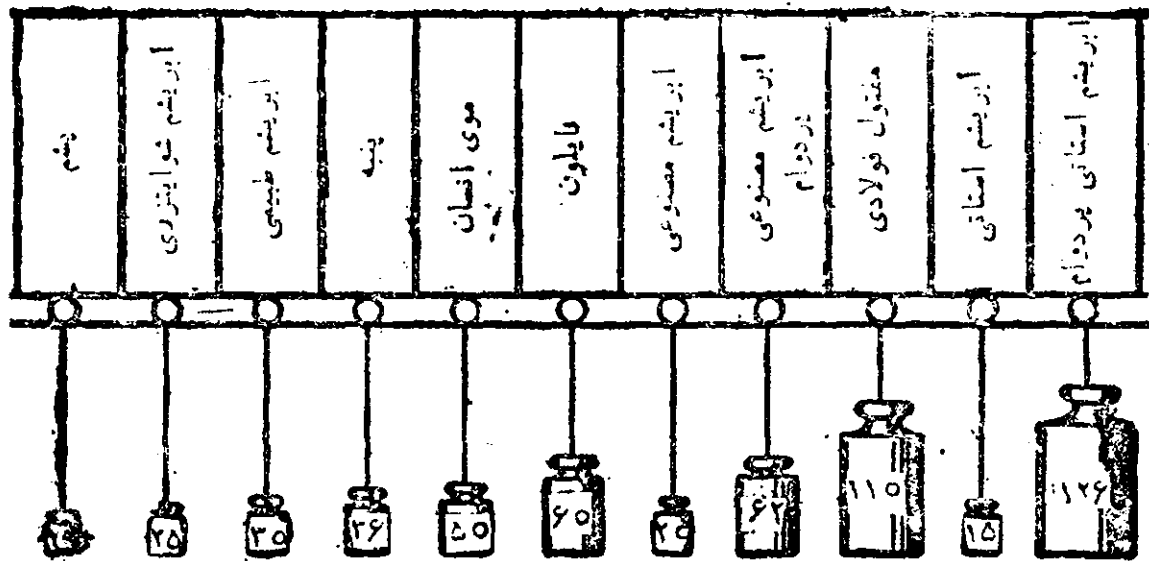
ابریشمی که با روش صنعتی شوایتزر ساخته می شود $\frac{1}{2}$ مرتبه نازکتر از تار عنكبوت هستند و از لحاظ استحکام از رشته‌های ابریشم طبیعی بدتر نیستند . هر میلی متر مربع مقطع ابریشم طبیعی تا ۳۰ کیلوگرم بار را تحمل می کند و رشته شوایتزری (مس آمونیاکی) تا ۲۵ کیلوگرم .



۱۵۹ . مقایسه ضخامت رشته‌های مختلف

روش تهیه ابریشم شوایتزری (مس آمونیاکی) هم خیلی جالب است . چوب را به سلولز تبدیل می کنند و سلولز را در محلول آمونیاک مس (محلول شوایتزر) حل می کنند . محلول را از سوراخ باریکی وارد آب می کنند ، آب جلو حل شدن را می گیرد و به این ترتیب رشته‌هایی بدست می آورند و آن را دور دستگاه مربوطه می پیچند . ضخامت رشته‌های ابریشم شوایتزر ۲ میکرون است . با ضخامت يك میکرونی هم «استاتی» نامیده می شود که باز هم نوعی ابریشم مصنوعی است . عجیب است که بعضی از ابریشم‌های استاتی از مفتول فولادی هم محکم ترند . اگر مفتول فولادی قدرت مقاومت ۱۱۰ کیلو گرم بار را بر هر میلی متر مکعب مقطع عرضی خود دارد، رشته ابریشم استاتی می تواند ۱۲۶ کیلو گرم را بر هر میلی متر مکعب مقطع خود تحمل کند .

برای همه شما روشن است که ابریشم مصنوعی، رشته‌هایی به ضخامت ۴ میکرون و مقاومت حدی ۲۰ تا ۲۶ کیلوگرم بر هر میلی-متر مربع دارد. در شکل ۱۵۹ ضخامت تار عنکبوت با موی انسان و انواع رشته‌های مصنوعی پشم و پنبه مقایسه شده است و در شکل ۱۶۰ استحکام آنها بر حسب کیلوگرم بر یک میلی‌متر مقایسه شده است. الیاف مصنوعی (و یا نام دیگر آنها: الیاف ترکیبی) یکی از کشفیات بسیار مهم صنعت جدید است که دارای اهمیت اقتصادی فوق‌العاده می‌باشند. مهندس بویانو و چنین می‌نویسد: «پنبه با کنندی رشد می‌کند و مقدار



۱۶۰. مقاومت حدی الیاف (بر حسب کیلوگرم بر یک میلی‌متر مربع مقطع عرضی)

محصول آن هم بستگی به آب و هوا و حاصلخیزی زمین دارد. سازنده ابریشم طبیعی - کرم ابریشم - امکانات خیلی محدودی دارد. او در تمام زندگی خود پيله‌ای به وجود می‌آورد که فقط ۱/۵ گرم رشته ابریشم دارد...

مقدار ابریشم صنعتی، که از یک متر مکعب چوب و از راه اعمال شیمیائی بدست می‌آید به اندازه ۳۲۰۰۰۰ پيله ابریشم یا به اندازه

پشمی که از ۳۰ گوسفند در سال بدست می آید و یا به اندازه محصول متوسط پنبه از نیم هکتار زمین است. این مقدار پنبه برای تهیه چهار هزار جفت جوراب ساق بلند زنانه و یا ۱۵۰۰ متر پارچه ابریشمی کافی است» .

دو ظرف

اگر ، ضمن گفتگو از مقادیر بزرگ و کوچک در هندسه ، به جای مقایسه عددها ، به مقایسه سطوح و احجام بپردازیم ، به نارسائی ، تصورات خود بیشتر معتقد می شویم . مسلماً هر کسی بدون تأمل جواب می دهد که ۵ کیلو گرم مر با از ۳ کیلو گرم بیشتر است ، ولی همیشه نمی توان بلافاصله تصمیم گرفت که کدامیک از دو ظرفی که روی میز است گنجایش بیشتری دارد .

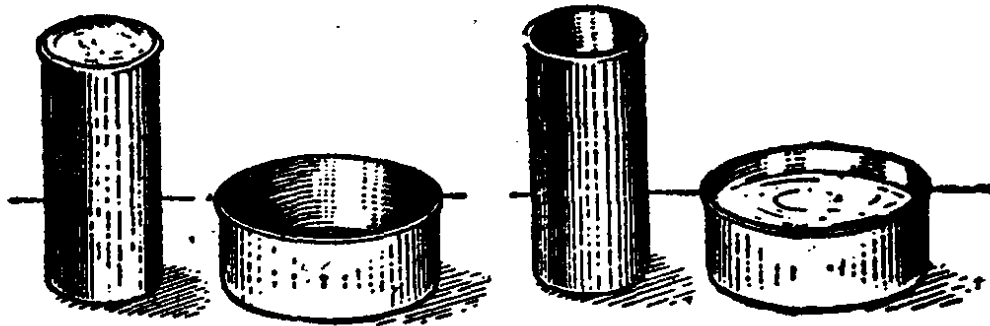
مسئله

کدامیک از دو ظرف شکل ۱۶۱ جادارتر است ، ظرف سمت راست یا ظرف سمت چپ ؟ به شرطی که ظرف سمت چپ سه برابر بلندتر و دو برابر تنگتر از ظرف سمت راست است .

حل

احتمالاً برای بسیاری غیرمنتظره باشد که ظرف بلندتر گنجایش کمتری نسبت به ظرف پهن تر دارد. ضمناً این مطلب را می توان به سادگی و با محاسبه تحقیق کرد : سطح قاعده ظرف پهن 2×2 یعنی چهار مرتبه بیشتر از ظرف تنگ و ارتفاع آن سه مرتبه کمتر از آنست .

بنابراین حجم ظرف پهن $\frac{4}{3}$ حجم ظرف دیگر است. اگر محتوی



۱۶۲. نتیجه خالی کردن ظرف بلندتر در ظرف پهن‌تر.
 ۱۶۱. کدام ظرف گنجایش بیشتری دارد؟

ظرف بلندتر را در ظرف پهن‌تر بریزیم، تنها $\frac{3}{4}$ حجم آن را اشغال می‌کند (شکل ۱۶۲).

سیگار بزرگ

مسئله

پشت ویتترین یک مغازه سیگار فروشی سیگار برگی گذاشته‌اند که ۱۵ مرتبه طویل‌تر و ۱۵ مرتبه کلفت‌تر از سیگار معمولی است. اگر برای درست کردن یک سیگار با اندازه‌های معمولی نیم گرم توتون لازم باشد، برای پر کردن سیگار نمونه‌ای که پشت ویتترین مغازه گذاشته شده است، چقدر توتون لازم است؟

حل

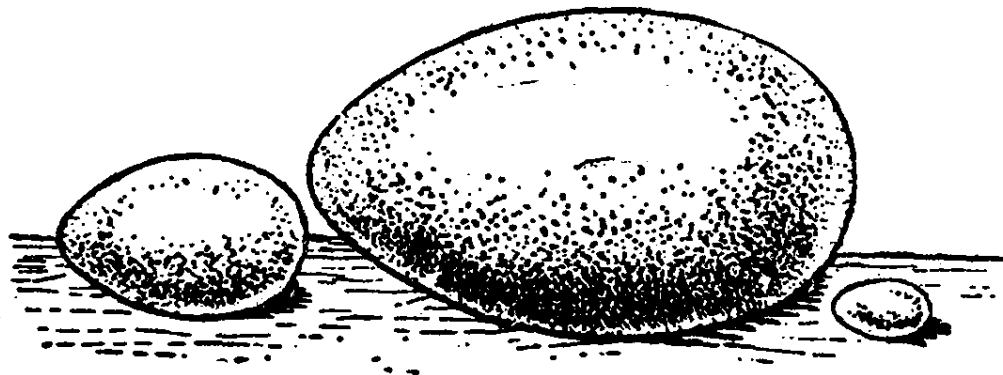
$$\frac{1}{4} \times 15 \times 15 \times 15 \approx 1700 \text{ (گرم)}$$

یعنی بیش از $1\frac{1}{4}$ کیلوگرم .

تخم شتر مرغ

مسئله

در شکل ۱۶۳ تخم مرغ (سمت راست) و تخم شتر مرغ (سمت چپ) با يك مقیاس رسم شده است (شکل وسط تخم نوعی شتر مرغ در ماداگاسکار است که در مسئله بعدی از آن صحبت خواهد شد) .



۱۶۳ ، مقایسه تخم شتر مرغ ، شتر مرغ ماداگاسکار و مرغ

به شکل نگاه کنید و بگوئید محتوی تخم شتر مرغ چقدر بیشتر از تخم مرغ است ؟ با يك نگاه سطحی ، این طور به نظر می رسد که اختلاف نباید خیلی بزرگ باشد . ولی نتیجه ای که از محاسبه صحیح هندسی بدست می آید خیلی حیرت انگیز است .

حل

با اندازه گیری مستقیم روی شکل، معلوم می شود که طول تخم شتر مرغ $2\frac{1}{2}$ برابر طول تخم مرغ است. بنابراین حجم تخم شتر مرغ به اندازه

$$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{125}{8}$$

یعنی تقریباً ۱۵ برابر حجم تخم مرغ است. بایک تخم شتر مرغ می توان یک خانواده پنج نفری را غذا داد، به شرطی که برای هر نفر به اندازه سه تخم مرغ به حساب آوریم.

تخم شتر مرغ ماده گاسگار

مسئله

در ماده گاسگار گاهی شتر مرغهای بزرگی پیدا می شود که تخمهایی به طول ۲۸ سانتی متر می گذارند (شکل ۱۶۳ - وسط). ضمناً طول تخم مرغ ۵ سانتی متر است. می خواهیم حجم تخم مرغ را با حجم تخم شتر مرغ ماده گاسگار مقایسه کنیم.

حل

حاصل ضرب $\frac{25}{8} \times \frac{25}{8} \times \frac{25}{8}$ را بدست می آوریم، تقریباً ۱۷۰ می شود می شود. یک تخم شتر مرغ ماده گاسگار به اندازه قریب

دویست تخم مرغ است! بیش از پنجاه نفر می‌توانند با این يك تخم تغذیه شوند. وزن این تخم قریب ۸ تا ۹ کیلوگرم است.

مسئله

اختلاف بین اندازه‌ها وقتی بیشتر نمایان می‌شود که تخم پرندگان آشنا تر را مقایسه کنیم. تخم قو و صعوه (که از کوچکترین و ظریفترین پرندگان است). در شکل ۱۶۴ دوره این تخم‌ها با اندازه طبیعی خود رسم شده است، نسبت حجم آنها چقدر است؟

حل

طول هر دو را اندازه می‌گیریم، ۱۲۵ و ۱۳ میلی‌متر بدست می‌آید. اگر عرض آنها را هم اندازه بگیریم، ۸۰ و ۹ میلی‌متر بدست می‌آید. به سادگی دیده می‌شود که این عددها تقریباً متناسبند، اگر تناسب زیر را تشکیل دهیم:

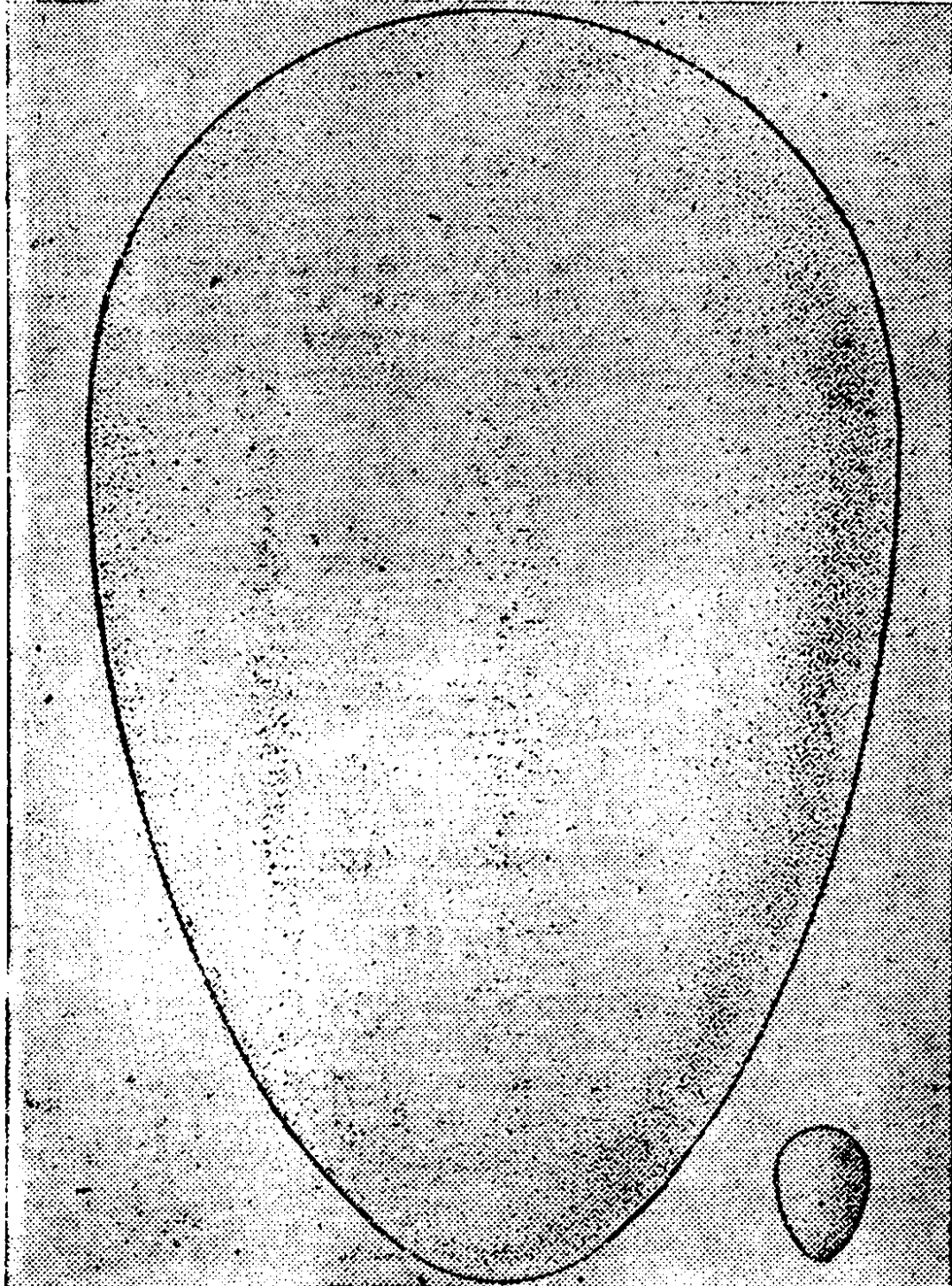
$$\frac{125}{80} = \frac{13}{9}$$

برای حاصل ضرب طرفین و حاصل ضرب وسطین آن به ترتیب ۱۱۲۵ و ۱۰۴۰ بدست می‌آید که خیلی کم اختلاف دارند.

بنابراین اگر آنها را به عنوان دو جسمی که از لحاظ هندسی متشابهند، در نظر بگیریم، اشتباه زیادی نکرده‌ایم. به این ترتیب نسبت حجم آنها چنین می‌شود:

$$\frac{10^2}{9^2} = \frac{510000}{730} = 700$$

یعنی تخم قو ۷۰۰ برابر تخم صعوه حجم دارد.



۱۶۴. تخم قو و تخم صعوه (با اندازه‌های طبیعی)، حجم یکی چند برابر حجم دیگری است؟

تعیین وزن پوست تخم پرنده ، بدون شکستن آن

مسئله

دو تخم پرنده ، هم شکل و با اندازه‌های مختلف در اختیار داریم. می‌خواهیم بدون شکستن آنها ، وزن تقریبی پوست آنها را تعیین کنیم. برای این عمل چه اندازه‌گیری، توزین و محاسبه‌ای لازم است؟ ضخامت پوست دو تخم را یکنواخت به حساب می‌آوریم.

حل

طول محور بزرگتر هر دو تخم را اندازه می‌گیریم: D و d بدست می‌آید. وزن پوست تخم اول را x و وزن پوست دومی را y می‌گیریم وزن پوست‌ها متناسب با سطح آنها ، یعنی مربع اندازه‌های خطی آنهاست. بنابراین اگر ضخامت پوستها را یکنواخت فرض کنیم، تناسب زیر را خواهیم داشت :

$$x:y = D^2:d^2$$

دو تخم را وزن می‌کنیم : عددهای P و p بدست می‌آید. وزن دو جسم متناسب با حجم‌های آنها ، یعنی متناسب با مکعب اندازه‌های خطی آنهاست ، بنابراین داریم :

$$(P-x):(p-y) = D^3:d^3$$

و به این ترتیب دو معادله بر حسب مجهولات x و y بدست می‌آید که از حل آنها خواهیم داشت :

$$x = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{d^3(D-d)} ; y = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{D^3(D-d)}$$

اندازه سکه‌های ما

وزن سکه‌ها متناسب با قیمت آنهاست ، یعنی يك سکه دوریالی دو برابر سکه يك ریالی و يك سکه ۵ ریالی ۵ برابر سکه يك ریالی وزن دارد و غیره . همین مطلب در مورد اندازه‌های آنها هم صحیح است ، چون سکه‌های يك نواخت از لحاظ هندسی با یکدیگر متشابه‌اند ، اگر قطر یکی از آنها را داشته باشیم ، می‌توانیم قطر بقیه سکه‌ها را بدست آوریم . نمونه‌هایی در این مورد ذکر می‌کنیم .

مسئله

قطر يك سکه ۵ ریالی ۲۶ میلی‌متر است . قطر سکه دو ریالی چقدر می‌شود ؟

حل

وزن و بنابراین حجم سکه دو ریالی تقریباً $\frac{2}{5}$ ، یعنی $\frac{0.4}{0.74}$ ، حجم سکه ۵ ریالی است . بنابراین نسبت اندازه‌های خطی آنها $\sqrt{\frac{0.4}{0.74}}$ یعنی تقریباً $\frac{0.74}{0.5}$ می‌شود . از آنجا سکه دو ریالی مساوی 0.74×26 یعنی تقریباً ۲۰ میلی‌متر می‌شود (درحقیقت قطر سکه‌های ۲ ریالی ۲۲ میلی‌متر است) .

سکه ده میلیون ریالی

مسئله

يك سکه خیالی ده میلیون ریالی در نظر بگیرید، که به همان شکل سکه‌های موجود باشد و وزنش هم به همان نسبت زیادتر باشد. قطر يك چنین سکه‌ای چقدر خواهد بود؟ اگر این سکه را پهلوی يك اتومبیل روی کناره خود نگه داریم، تا چند برابر ارتفاع اتومبیل خواهد بود؟

حل

آنقدرها که گمان می‌رود، اندازه‌های این سکه بزرگ نیست. قطر چنین سکه‌ای نزدیک $3/8$ متر، یعنی کمی بیش از ارتفاع يك طبقه عمارت، خواهد شد. در حقیقت حجم این سکه باید 5000000 برابر حجم سکه دو ریالی باشد و بنابراین قطر آن $\sqrt[3]{5000000}$ ، یعنی 172 برابر قطر سکه دو ریالی است.

اگر 22 میلی متر (قطر سکه دو ریالی) را در 172 ضرب کنیم تقریباً $3/8$ متر بدست می‌آید، که برای يك چنین سکه پر قیمتی خیلی زیاد نیست.

مسئله

حالا حساب کنید، اگر يك سکه دو ریالی قطری مساوی ارتفاع يك ساختمان چهار طبقه داشته باشد، چه ارزشی دارد (شکل ۱۶۵)؟



۱۶۵. این سکهٔ عظیم دو ریالی معادل چه سکه‌ای است :

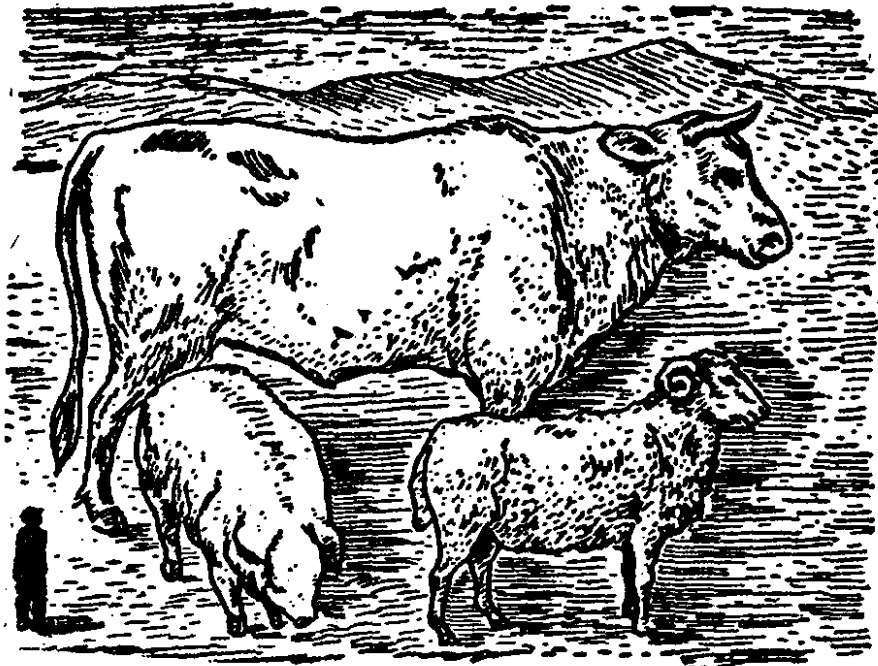
تصاویر روزنامه‌ای

با توجه به مسائلی که در اینجا ذکر کردیم ، دیگر شما یاد گرفتید که برای مقایسهٔ حجم دو جسم (که از لحاظ هندسی متشابه‌اند) چگونه از اندازه‌های خطی آنها استفاده کنید . شما دیگر تحت تأثیر تصاویر ظاهری قرار نمی‌گیرید و اشتباهی را که تصاویر روزنامه‌ای به شما تلقین می‌کنند ، برطرف می‌کنید .

مسئله

نمونه‌ای از اینگونه تصاویر را مطرح می‌کنیم . اگر مصرف گوشت

روزانه يك نفر را به طور متوسط ۴۰۰ گرم فرض کنیم ، ضمن ۶۰ سال زندگی قریب ۹ تن گوشت مصرف خواهد کرد . چون وزن يك گاو بزرگ قریب $\frac{1}{4}$ تن است ، يك نفر در جریان ۶۰ سال زندگی خود ۱۸ گاو را خورده است .



۱۶۶. يك نفر در جریان زندگی خود چقدر گوشت می خورد
(کشف اشتباه تصویر)

در شکل ۱۶۶، که از يك روزنامه انگلیسی برداشته شده است، مصرف گوشت يك نفر در جریان زندگی را به وسیله تصویر يك گاو عظیم، نسبت به انسان، نشان داده است . آیا این تصویر درست است ؟ مقیاس صحیح کدام است ؟

حل

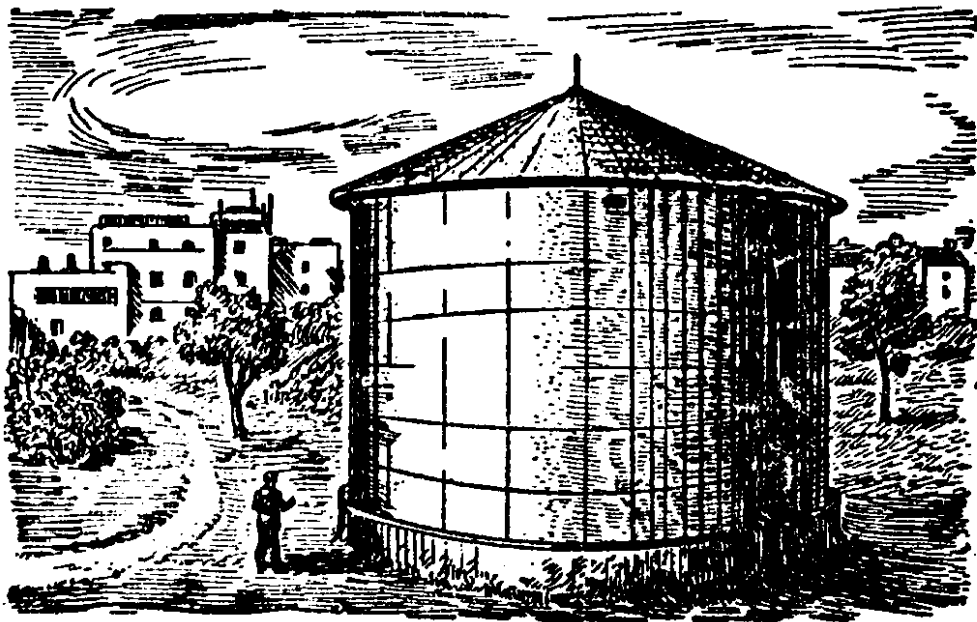
تصویر صحیح نیست . گاوی که در شکل نشان داده شده است ، هم از جهت طول و هم از جهت عرض ۱۸ بار از گاو معمولی بزرگتر

است و بنابراین حجم آن $۱۸ \times ۱۸ \times ۱۸$ یعنی ۵۸۳۲ بار بزرگتر از حجم يك گاو معمولی است. چنین گاوی را انسان به شرطی می‌تواند مصرف کند که لااقل دو هزار سال عمر کند!

تصویر صحیح گاو در این مورد باید از جهت طول و عرض $\sqrt[3]{۱۸}$ ، یعنی $۲/۶$ برابر گاو معمولی باشد، و چنین تصویری آنقدرها بزرگ نیست که بتواند بیننده را در مورد گوشت مصرفی انسان، به حیرت بیندازد.

مسئله

در شکل ۱۶۷ نمایش دیگری از این گونه موارد داده شده است.



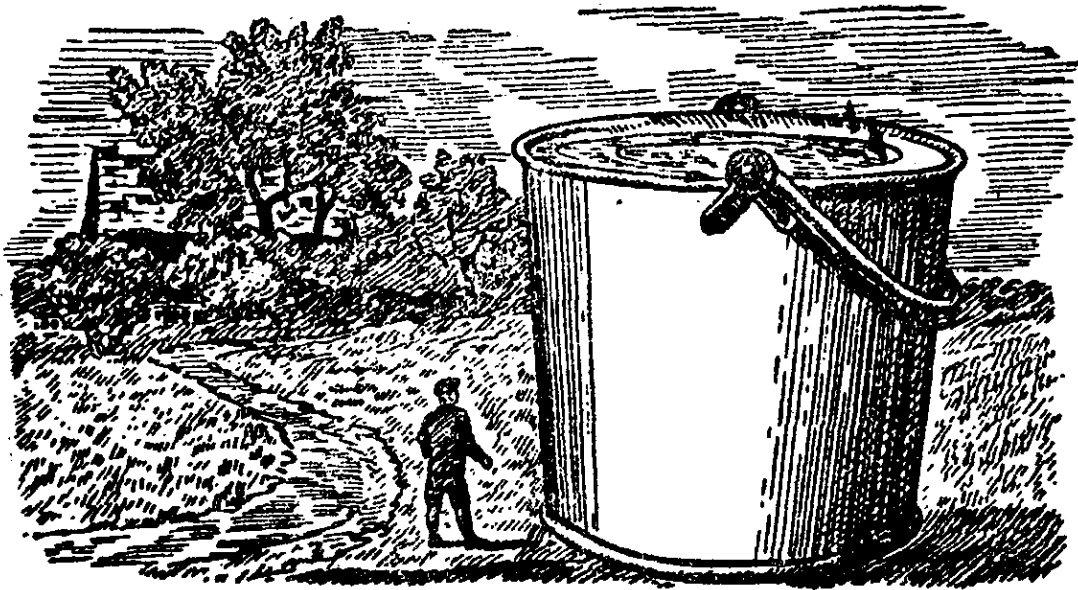
۱۶۷. انسان در جریان زندگی خود چقدر آب می‌خورد؟
(اشتباه نقاش در کجاست؟)

انسان در هر روز به طور متوسط $۱\frac{۱}{۴}$ لیتر (۷-۸ لیوان) از نوشیدنی‌های مختلف می‌خورد. در ۷۰ سال زندگی، مقدار آب مصرفی يك نفر

۴۰۰۰۰ لیتر می شود. اگر در يك سطل ۱۴ لیتر آب جا بگیرد، نقاش ظرف را به چه اندازه باید رسم کند تا ۳۳۰۰ برابر بیشتر از يك سطل باشد. او این تصویر را در شکل ۱۶۷ نشان داده است. آیا تصور نقاش درست است؟

حل

اندازه‌های مخزن شکل، خیلی اغراق آمیز است. عرض ظرفی که باید رسم شود، نسبت به يك سطل معمولی باید به اندازه $\sqrt{33000} = 181.9$ ، یعنی تقریباً ۱۸۲ مرتبه بزرگتر باشد. اگر ارتفاع و پهنای سطل معمولی را ۳۰ سانتی متر بگیریم، برای اینکه تمام آب مصرفی يك عمر انسان را ذخیره کنیم به مخزنی احتیاج داریم که ارتفاع و پهنای آن $4/5$ متر باشد. در شکل ۱۶۸ چنین ظرفی را با مقیاس صحیح نشان داده‌ایم.



۱۶۸. تصویر صحیح (شکل ۱۶۷ را ببینید)

نمونه‌هایی که ذکر کردیم، ضمناً نشان می‌دهد که نمایش عددهای بزرگ به صورت حجم اجسام، معمولاً نمی‌تواند تأثیر لازمی را که انتظار

می‌رود، داشته باشد و بدون تردید در این گونه موارد نمایش‌های ستونی بر روش‌های دیگر رجحان دارد.

وزن معمولی ما

اگر بدن تمام مردم را متشابه بگیریم (که فقط به طور متوسط درست است)، آنوقت می‌توان وزن افراد را از روی قد آن‌ها محاسبه کرد. برای این منظور مردی را که $1/65$ متر (به طور متوسط) قد دارد، 64 کیلوگرم (این مقدار وزن متوسط مرد بین ملت‌های مختلف است) و زنی را که $1/55$ متر (به طور متوسط) قد دارد، 55 کیلوگرم (وزن بدن به طور متوسط برای زن‌های ملت‌های مختلف)، به حساب می‌آوریم، نتایجی که ضمن این محاسبه بدست می‌آید، ممکن است برای بسیاری غیر منتظره باشد.

مثلاً به بینیم وزن عادی مردی که 10 سانتی متر کوتاه‌تر از حد متوسط است، چقدر می‌شود.

معمولاً این مسئله را اغلب چنین حل می‌کنند: نسبت 10 سانتی متر را به 165 سانتی متر بدست می‌آورند و سپس به همین نسبت از وزن معمولی مرد کم می‌کنند، یعنی از 64 کیلوگرم به اندازه $64 \times \frac{10}{165}$ کیلوگرم کم می‌شود و به عنوان جواب 61 کیلوگرم بدست می‌آید.

این طریقه محاسبه نادرست است.

وزن صحیح موقعی بدست می‌آید که آن را از تناسب زیر

بدست آوریم:

$$64 : x = 1/65^2 : 1/55^2$$

و از آنجا :

$$x \neq 53 \text{ (کیلوگرم)}$$

که اختلاف آن با محاسبه عادی فوق خیلی قابل توجه است :
۸ کیلوگرم :

به همین ترتیب برای وزن مردی که ۱۰ سانتی متر بلندتر از حد متوسط است ، باید تناسب زیر را تشکیل دهیم :

$$54 : x = 1/65^3 : 1/75^3$$

جواب $x = 76$ کیلوگرم می شود ، یعنی ۱۲ کیلوگرم بیشتر از حد متوسط و این افزایش خیلی بیشتر از آنچه که معمولاً گمان می رود ، می باشد .

بدون تردید ، محاسباتی از این قبیل در طب عملی و برای تعیین وزن معمولی ، برای محاسبه میزان دوا و غیره ، اهمیت فوق العاده دارد .

غول پیکر و کوتوله

نسبت بین وزنهای يك آدم غول پیکر و يك کوتوله چقدر است ؟
من حدس می زنم که برای بسیاری غیر محتمل به نظر می رسد که مثلاً غول ۵۰ مرتبه از کوتوله سنگین تر باشد . ولی محاسبه هندسی می تواند در این مورد نتیجه صحیح را بدست بدهد .

یکی از این غول پیکرهای بلند قامت ، که وجود او کاملاً تصدیق شده است ، وینکل مایر اطریشی است که ۲۷۸ سانتی متر قد داشته است ؛ دیگری کرای از اهالی آلاسکا بود با ۲۷۵ سانتی متر قد ؛ و سومی ابریک انگلیسی با ۲۶۸ سانتی متر قد و درباره او حکایت می کنند که چپق خود را با فانوس خیابان روشن می کرد .

همه آنها به اندازه يك متر کامل از آدم معمولی بلندتر بودند .
بر عکس کوتوله‌هایی تا قد ۷۵ سانتی متر ، یعنی يك متر کم‌تر از قد
معمولی دیده شده‌اند ، چه نسبتی بین حجم و وزن یکی از این غول‌ها
با حجم و وزن کوتوله‌ها وجود دارد ؟

این نسبت چنین است :

$$۲۷۵^۳:۷۵^۳ = ۱۱^۳:۳^۳ = ۴۹$$

یعنی وزن یکی از این غول‌پیکرها تقریباً ۵۰ برابر وزن کوتوله‌است .
اگر خبر مربوط به کوتاه‌ترین زن عرب به نام عقیب با قد ۳۸
سانتی‌متر و بلندترین قدها - ۳۲۰ سانتی‌متر صحیح باشد ، این نسبت
خیلی عجیب‌تر می‌شود ؛ بلند قد ترین غول‌ها هشت مرتبه بزرگ‌تر از
این کوتوله است و بنابراین ۵۹۳ مرتبه سنگین‌تر خواهد بود . خبر
صحیح‌تر مربوط به بوفون است که کوتوله‌ای با قد ۴۳ سانتی‌متر
اندازه گرفته است . این کوتوله ۴۰۵ مرتبه سبک‌تر از بلند قد ترین
آدم‌هاست .

هندسه گولیور

مؤلف «سفرهای گولیور» با احتیاط فوق‌العاده‌ای از درگیر شدن
با روابط هندسی پرهیز می‌کند . بدون تردید خواننده متوجه می‌شود
که در کشور لی‌لی‌پوت هر فوت آنها معادل يك اینچ ما و برعکس در
کشور غول‌ها هر اینچ آنها معادل يك فوت ماست ، به عبارت دیگر
در لی‌لی‌پوت همه مردم ، همه اشیاء و همه محصولات طبیعت ۱۲ مرتبه
کوچک‌تر از اندازه طبیعی و در کشور غول‌ها به همین اندازه بزرگ‌تر
از اندازه طبیعی هستند . این اولین نسبت مربوط به روابط ساده بین

آنهاست ، ولی اگر سئوالاتی از نوع زیر مطرح کنیم ، به روابط بغرنج تری برخورد می‌نمائیم .

(۱) گولیور چند برابریکی از اهالی لی‌لی پوت نهار می‌خورد؟
 (۲) گولیور برای تهیه لباس خود چند برابر یکی از ساکنین لی‌لی پوت ماهوت لازم دارد ؟

(۳) يك سيب از کشور غول‌ها چقدر وزن دارد ؟

مؤلف «سفرهای گولیور» در اکثر موارد با موفقیت از عهده حل چنین مسائلی برمی‌آید . او به درستی استدلال می‌کند که چون قد لی‌لی پوت ۱۲ مرتبه کوتاه‌تر از قد گولیور است ، بنابراین حجم بدن او $12 \times 12 \times 12$ ، یعنی ۱۷۲۸ مرتبه کمتر از حجم گولیور می‌شود و برای سیر کردن گولیور باید ۱۷۲۸ برابر غذای ایک لی‌لی پوت ، غذا فراهم کرد . و ما در «سفرها» مطلب زیر در باره نهار گولیور می‌خوانیم :

« سیصد آشپز برای من غذا تهیه می‌کردند . در اطراف خانه من کلبه‌هایی بود که در آنها آشپزی می‌کردند و آشپزها و خانواده‌های آنها در آنجا زندگی می‌کردند . وقتی که ساعت نهار می‌رسید ، ۲۰ نفر پیشخدمت را می‌گرفتم و روی میز می‌گذاشتم و ۱۰۰ نفر دیگر در پائین به خدمت مشغول می‌شدند ؛ بعضی غذا می‌آوردند ، بقیه بشکه‌های کوچک شراب را و دیگران آشامیدنی‌ها را که روی به‌چوب‌هایی آویزان کرده بودند و هر چوب را بر شانه دو نفر تکیه داده بودند . آنهایی که در بالا ایستاده بودند ، بر حسب احتیاج ، همه اینها را با کمک ریمان و قرقره بالا می‌کشیدند . . . » .

سويفت نویسنده کتاب « سفرها » مقدار پارچه‌ای را هم که برای

لباس گولیور لازم است ، درست حساب کرده است .

سطح بدن گولیور به اندازه $12 \times 12 = 144$ مرتبه بیشتر از سطح بدن يك لی پوت است و بنابراین مقدار پارچه‌ای که برای لباس او لازم است همینقدر برابر بیشتر از يك آدم اهل لی پوت می‌باشد. سویت از زبان گولیور همه اینها را به حساب می‌آورد « ۳۰۰ خیاط



۱۶۹. خیاطهای لی پوت ، اندازه‌های گولیور را معین می‌کنند .

لی پوت به کارگمارده شدند (شکل ۱۶۹) تا يك دست لباس کامل محلی برای او دوختند « (به خاطر عجله‌ای که در کار داشتند تعداد خیاطها را دو برابر گرفته بودند) .

برای سويفت بسته به احتياج ، محاسبات مشابهی تقريباً در هر صفحه ، پيش می آيد و به طور کلی همه آنها را هم به درستی انجام می دهد . همان طور که به قول شعر پوشکين در «به و گنه نين آنه گين » : «زمان با تقويم مطابق می شود» ، در «سفرهای گوليور» سويفت هم همه اندازه ها به درستی با هندسه تطبيق می کند . تنها گاهی و به خصوص وقتی که کشور غولها را توصيف می کند ، از عهده مقیاس های لازم برنيامده است و به اشتباهاتی برخورد می کنیم .

« یکبار (گوليور نقل می کند) یکی از شاهزادگان درباری مرا به باغ دعوت کرد . وقتی که من گردش کنان زیر يك درخت رسیدم ، او شاخه درخت را گرفت و آن را روی سر من تکان داد . سیب هائی که هريك به اندازه يك بشكه بود ، با سروصدای زیاد به طرف زمین ریخت یکی از آنها به پشت من خورد و مرا از پا انداخت...» .

گوليور بعد از این ضربه با سلامتی روی پا می ایستد . ولی به سادگی می توان حساب کرد که ضربه يك چنین سیبی کاملاً نابود کننده است : سیب مورد بحث ۱۷۲۸ مرتبه سنگین تر از سیب های معمولی است ، یعنی ۸۰ کیلوگرم وزن دارد و ضمناً از ارتفاعی که ۱۲ برابر ارتفاع درخت معمولی است فرو افتاده است . انرژی ضربه ای که از چنین سیبی به وجود می آید ۲۰۰۰۰۰ برابر انرژی سقوط يك سیب معمولی است و تنها می تواند با انرژی گلوله توپ مقایسه شود... .

سويفت اشتباه بزرگی هم در نیروی عضلانی غولها کرده است . در فصل اول دیدیم که قدرت حیوانات بزرگ متناسب با اندازه های آنها نیست . اگر مفروضات خیالی سويفت را در باره غولها قبول کنیم ، نیروی عضلانی آنها ۱۴۴ برابر نیروی گوليور می شود ، در حالی که وزن آنها ۱۷۲۸ برابر وزن گوليور است . اگر گوليور دارای

نیروئی باشد که بتواند باری، که تقریباً مساوی وزن خودش می باشد، بلند کند، اهالی کشور غولها در وضعی هستند که حتی از عهده حمل وزن عظیم خود هم بر نمی آیند. آنها باید در يك جا بدون حرکت دراز بکشند و از هر حرکت جالب توجهی عاجز باشند. قدرتی که سويفت برای آنها مجسم کرده است، تنها ناشی از يك اشتباه در محاسبه است.

چرا گرد و غبار و ابر در هوا شناورند؟

«برای اینکه آنها سبک تر از هوا هستند»، این يك جواب معمولی است که بسیاری به طور قطع به آن باور دارند و هیچ دلیلی برای تردید در آن نمی بینند: ولی این توضیح، با همه سادگی فریبنده خود، بکلی غلط است. گرد و غبار نه تنها سبک تر از هوا نیستند، بلکه صدها و حتی هزاران بار سنگین تر از آن هستند.

منظور از «گرد و غبار» چیست؟ قسمت های بسیار کوچکی از اجسام سنگین مختلف: ذرات سنگ و شیشه؛ تکه های کوچک زغال، چوب و فلزات؛ الیاف پارچه و غیره. آیا همه این مواد از هوا سبک ترند؟ اگر به جدول مربوط به وزن مخصوص اجسام مراجعه کنیم، به سادگی متوجه می شویم که هر يك از این مواد یا چندین برابر نسبت به آب سنگین تر و یا فقط دو - سه مرتبه از آن سبک ترند. اما آب ۸۰۰ مرتبه از هوا سنگین تر است و بنابراین گرد و غبار (اگر نگوئیم چند هزار مرتبه) لاقلاً چند صد مرتبه سنگین تر از هواست. حالا به خوبی می فهمیم که چرا علت ظاهری حرکت گرد و غبار در هوا معقول و منطقی نیست.

پس علت حقیقی این امر چیست؟ قبل از همه باید متذکر شد

که ما ، وقتی از شنا کردن گرد و غبار صحبت می کنیم ، خود پدیده را به شکل نادرستی طرح می کنیم . فقط اجسامی در هوا (یا آب) شنا می کنند که وزن آنها از وزن هوا (یا آب) هم حجمشان تجاوز نکند . ولی وزن يك ذره گرد و غبار از وزن هوای هم حجمش چندین بار بیشتر است و بنابراین نمی تواند در هوا شنا کند . گرد و غبار در هوا شنا نمی کنند ، بلکه پرواز می کنند ، یعنی به آرامی فرود می آیند ، ضمن اینکه مقاومت هوا سقوط آنها را کندتر می کند . وقتی که گرد و غبار در حال سقوط اند ، باید از بین ذرات هوا راه خود را باز کنند ، آنها را کنار بزنند و یا با خود همراه بیاورند و به هر حال هر يك از این حالت ها انرژی سقوط را کاهش می دهد . هر چه سطح جسم (یا دقیق تر سطح مقطع آن) نسبت به وزن آن بیشتر باشد ، این کاهش بیشتر می شود . وقتی که اجسام بزرگ و سنگین سقوط می کنند ، عمل کند کننده مقاومت هوا برای ما محسوس نیست ، زیرا وزن آنها خیلی بیشتر از نیروی مقاومت هواست .

به بینیم وقتی که جسم كوچك می شود ، چه پیش می آید . هندسه می تواند در این مورد به ما كمك کند . به سادگی فهمیده می شود که با کاهش حجم ، وزن جسم نسبت به سطح مقطع آن خیلی سریع تر کاهش پیدا می کند : کاهش وزن متناسب با توان سوم اندازه های خطی است ، در حالی که کاهش مقاومت متناسب با سطح ، یعنی توان دوم اندازه های خطی است .

اینکه این مطلب از لحاظ بحث ما تا چه اندازه اهمیت دارد ، با مثال زیر روشن می شود . دو کره در نظر می گیریم که از يك جنس یکی به قطر ۱۰ سانتیمتر و دیگری به قطر ۱ میلی متر باشد . نسبت اندازه های خطی این دو کره مساوی ۱۰۰ است ، زیرا ۱۰ سانتی متر ۱۰۰ مرتبه

از یک میلی متر بزرگتر است. کره کوچک 100^2 مرتبه یعنی یک میلیون مرتبه از کره بزرگ سبک تر است، ولی مقاومتی که در مقابل حرکت او از طرف هوا به وجود می آید فقط 100^2 مرتبه (یعنی ده هزار مرتبه) نسبت به کره بزرگ کاهش می یابد. واضح است که کره کوچک باید آهسته تر از کره بزرگ سقوط کند. به طور خلاصه علت این که ذرات گرد و غبار خود را در هوا حفظ می کنند، به مناسبت اندازه های کوچک آنهاست و مطلقاً به سبکتر بودن آنها از هوا مربوط نیست. یک قطره آب به شعاع 0.001 میلی متر با سرعت 0.1 میلی متر در ثانیه در هوا سقوط می کند و کافی است که در هوا جریان ضعیفی، که برای ما محسوس نیست به وجود آید تا این سقوط آرام را از بین ببرد.

به همین علت است که در جائی که رفت و آمد زیاد است، نسبت به نقاط غیر مسکونی گرد و خاک کمتر روی اشیاء می نشیند، همچنین در روز کمتر از شب (اگر چه به نظر می رسد که باید عکس آن باشد): رفت و آمد در هوا، جریان گرد بادی به وجود می آورد، در حالی که در هوای آرام و اطاق های غیر مسکونی تقریباً چنین حالتی وجود ندارد. اگر سنگ مکعب شکل به ضلع یک سانتی متر را به صورت ذرات مکعب شکلی به ضلع 0.0001 سانتی متر در آوریم، سطح کلی مجموعه کردها 100000 برابر سطح سنگ اصلی می شود و بنابراین مقاومت هوا در مقابل حرکت آنها هم ده هزار برابر خواهد شد. ذرات گرد و غبار هم اکثر به همین اندازه اند و بنابراین با افزایش مقاومت هوا، نمود سقوط به کلی تغییر می کند.

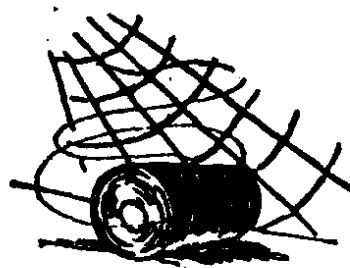
ابر هم به همین علت در هوا «شنا می کند». مدت ها است که این نظریه به ظاهر صحیح را رد کرده اند که گویا ابر عبارتست از حباب های آبی که از بخار آب پر شده اند. ابر عبارتست از تجمع مجموعه بزرگی

از قطرات بسیار ریز و متصل آب . اگر چه این قطره‌های آب ۸۰۰ بار از هوا سنگین‌ترند ، تقریباً سقوط نمی‌کنند ، یعنی با سرعتی به طرف پائین می‌آیند که تقریباً محسوس نیست . علت این وضع همان چیزی است که در مورد گرد و غبار گفتیم ، یعنی بزرگی سطح آنها نسبت به وزنشان .

ضعیف‌ترین حرکتی که هوا به طرف بالا داشته باشد ، نه تنها قادر است که سقوط ابر را متوقف کند و آنرا در سطح معینی نگه دارد ، بلکه حتی آنرا به طرف بالا می‌برد .

علت اصلی و وجودی این پدیده ، وجود هواست ؛ در خلاء هم گرد و غبار و هم ابر (اگر بتوانند وجود داشته باشند) به همان سرعت سنگ‌های بزرگ سقوط می‌کنند .

احتیاجی به ذکر این مطلب نیست که فرود آمدن آرام انسان با چتر (قریب ۵ متر در ثانیه) هم پدیده‌ای کاملاً متشابه پدیده مورد بحث ما است .





۱۲

اقتصاد هندسی

چگونه « پاخوم » زمین خرید؟
(مسئله تولستوی)

این فصل را با داستان مشهور ل. ن. تولستوی به نام « آیا مردم
به زمین زیادی نیاز دارند؟ » شروع می کنیم .

« پاخوم گفت - پس قیمتش چقدر است؟
- قیمت های ما ثابت است : ۱۰۰۰ روبل برای هر روز.
« پاخوم نفهمید.

« - این چه جور مقیاسی است - روز؟ مساوی چند دسیاتین* است؟

« - ما نمی توانیم آنرا حساب کنیم . هرچقدر که در يك روز راه بروی، همان مقدار زمین را به قیمت ۱۰۰۰ روبل به شما واگذار می کنیم .
 « پاخوم به حیرت فرورفت .

« - ولی آخر در روز از زمین زیادی می توان عبور کرد .

« پیرمرد خنده را سرداد .

« همه آنها مال تست ، فقط نکته ای وجود دارد : اگر نتوانی در روز به همان جای اولیه خود برگردی ، پولت از بین می رود .
 « پاخوم گفت : بنابراین باید توجه کنید که من از کجا عبور می کنم .

« - ما هر جا که تو انتخاب کنی می ایستیم، تو شروع به دورزدن می کنی ، بیلچه ای با خود بر میداری و هر جا که لازم بدانی چاله ای می کنی و علف ها را کنار میزنی؛ بعداً فاصله بین چاله ها را شخم خواهیم زد . به هر طریقی که مایلی دور بزنی ، فقط باید موقع غروب آفتاب در نقطه شروع حرکت خود باشی . تمام زمینی را که دور زده ای متعلق به تو خواهد بود .

« باشقیرها متفرق شدند . قرار گذاشتند فردا صبح زود جمع شوند و منتظر طلوع آفتاب بمانند» .

« در علفزار جمع شدند ، سپیده دم شروع می شد . پیرمرد به پاخوم نزدیک شد و همان طور که با دست نشان می داد ، گفت :
 « - اینها همه مال ماست ، تا آنجائی که چشمت کار می کند .

(* دسیاتین : مقیاس سطح در روسیه قدیم برابر ۱۰۹ هکتار .

هر قدر می‌خواهی انتخاب کن .

« پیر مرد کلاه از سر برداشت ، روی زمین گذاشت و گفت :

« - اینهم علامت . از اینجا حرکت کن و به همین جا هم برگرد

هر قدر از زمین را که دور بزنی مال تو خواهد بود .

« همینکه خورشید از پشت کوه سر بر آورد ، پاخوم بیلچه را

برداشت و به طرف دشت به راه افتاد .

« بعد از آنکه يك ورست رفت ، چاله‌ای کند . باز به حرکت

خود ادامه داد و در سر راه خود چاله دیگری کند .

« ۵ ورست رفت . به خورشید نگاه کرد ، دیگر موقع صبحانه

بود... پاخوم پیش خود فکر کرد: پنج ورست دیگر می‌روم ، آنوقت

به طرف چپ می‌پیچم . باز هم به طور مستقیم حرکت کرد و سپس

فکر کرد : خوب دیگر برای این ضلع کافی است، باید جهت را عوض

کنم . چاله بزرگی حفر کرد و به طرف چپ پیچید .

« پاخوم روی این ضلع هم مقدار زیادی پیش رفت ؛ بعد زاویه

دوم را ساخت و به طرف چپ پیچید . پاخوم به طرف جایی که با شقیرها

بودند، نگاه کرد . آفتاب بر آن می‌تابید و مردم روی آن دیده می‌شدند.

پیش خود فکر کرد : اضلاع را بزرگ گرفته‌ام ، باید این ضلع را

کوچکتر بگیرم . روی ضلع سوم پیش رفت . به خورشید نگاه کرد ،

دیگر در حال پائین رفتن بود . برای ضلع سوم تنها ۲ ورست انتخاب کرد.

تا جای اولش ۱۵ ورست راه بود . فکر کرد که باید به طور مستقیم خود

را برساند .

« پاخوم به سرعت چاله‌ای کند و مستقیماً به طرف تپه به راه افتاد.

« پاخوم راست به طرف تپه می‌رفت ، ولی به سختی می‌توانست

راه را ادامه دهد . احتیاج زیادی به استراحت داشت، ولی ممکن نبود،

زیرا به موقع و تا غروب آفتاب به مقصد نمی‌رسید . خورشید دیگر با افق فاصله زیادی نداشت .

« پاخوم به زحمت راه می‌رفت ، ولی بهر حال قدم به قدم جلو می‌رفت . هنوز راه نسبتاً زیادی بود ، باز هم عجله کرد ...
 « پاخوم می‌دوید ، عرق از سر و رویش می‌ریخت ، پیراهن به بدنش چسبیده بود ، دهنش خشک شده بود ، نفس او مثل کوره آهنگری بود و قلبش مثل ضربه چکش صدا می‌کرد .



۱۷۵. پاخوم با آخرین نیروی خود می‌دوید و خورشید در حال غروب کردن بود.

« پاخوم با آخرین نیروی خود می‌دوید ، خورشید هم در حال غروب بود . آهان دیگر خورشید غروب کرد (شکل ۱۷۰) .
 خورشید به افق رسیده بود ، ولی جای اولیه هم خیلی دور نبود :
 کلاه‌می که روی زمین بود و خود پیرمردی که روی زمین نشسته بود ،
 به‌خوبی دیده می‌شد .

« پاخوم به خورشید نگاه کرد ، حتی قسمتی از آن به زمین فرو رفته بود . پاخوم آخرین نیروی خود را به کار برد . نفس عمیقی کشید و به طرف تپه شروع به دویدن کرد . آهان ، اینهم کلاه . خود را به جلو انداخت و با دست‌هایش کلاه را گرفت .

« پیرمرد فریاد زد : آه جوان ! زمین زیادی بدست آوردی .
 «کارگراها جلو رفتند و خواستند او را از زمین بلند کنند ، ولی دیدند که خون از دهان پاخوم می‌ریزد . پاخوم مرده بود...»

مسئله تولستوی

از جنبهٔ ملالت آور پایان این داستان می‌گذریم و به جنبهٔ هندسی آن می‌پردازیم . آیا با معلوماتی که در این داستان داده شده ، می‌توان فهمید که چند دسیاتین زمین به پاخوم رسیده است ؟ در نظر اول ممکن است مسئله غیر قابل حل جلوه کند ، ولی می‌توان با سادگی تمام آن را حل کرد .

حل

اگر یکبار دیگر و با دقت داستان را مطالعه کنیم و تمام اطلاعات هندسی که در آن وجود دارد ، جدا کنیم و روی کاغذ بیاوریم ، می‌بینیم

که مفروضات برای حل کامل مسئله کافی هستند . حتی می توان شکل زمینی را که پاخوم تصاحب کرده است ، رسم کرد .

قبل از همه معلوم می شود که پاخوم روی محیط يك چهارضلعی حرکت کرده است . برای ضلع اول این چهارضلعی می خوانیم :
 «پنج ورست رفت ... پنج ورست دیگر هم رفت ، آنوقت به به طرف چپ پیچید...» .

یعنی اولین ضلع این چهارضلعی تقریباً مساوی ۱۰ ورست است . برای ضلع دوم ، که با ضلع اول تشکیل يك زاویه قائمه می دهد ، اطلاعی در داستان وجود ندارد .

طول ضلع سوم ، که به نوبه خود برضلع دوم عمود است ، در داستان مستقیماً معین شده است : «روی ضلع سوم فقط دو ورست پیش رفت » .

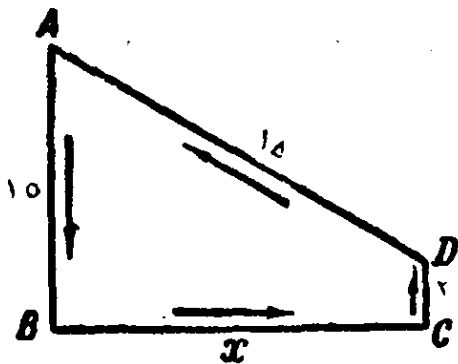
طول ضلع چهارم هم مستقیماً داده شده است : « تا جای اولیه تنها ۱۵ ورست باقی مانده بود » * .

با این مفروضات ، می توان شکل قطعه زمین متعلق به پاخوم را رسم کرد (شکل ۱۷۱) . در چهارضلعی ABCD ، که به این ترتیب بدست می آید ، ضلع AB مساوی ۱۰ ورست ، CD مساوی ۲ ورست و AD مساوی ۱۵ ورست است . ضمناً زوایای B و C هم قائمه اند ، اگر از نقطه D ، عمود DE را بر AB فرود آوریم ، به سادگی می توان طول مجهول BC را بدست آورد (شکل ۱۷۲) . در مثلث قائم الزاویه AED ، طول وتر $AD=15$ و ضلع مجاور به زاویه قائمه $AE=8$ معلوم است . از آنجا خواهیم داشت :

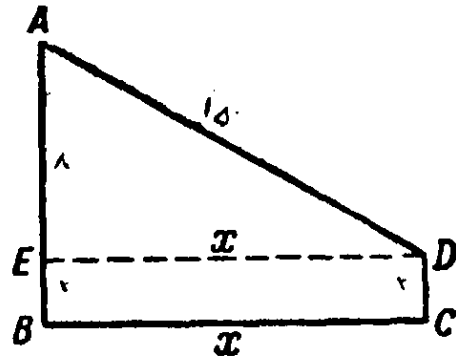
$$ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = \sqrt{161} \neq 12$$

* ولی در اینجا این مطلب نامفهوم است که چگونه پاخوم توانست ، از چنین فاصله ای ، افراد را روی تپه تشخیص بدهد .

بنابر این ضلع دوم چهارضلعی تقریباً مساوی ۱۳ ورست است. همان طور که دیده می شود ، می توان شکل مسیر پاخوم را رسم کرد و بدون تردید، وقتی که تو لستوی داستان خود را می نوشته است، طرحی شبیه شکل ۱۷۱ جلو خود داشته است .



۱۷۱. مسیر پاخوم



۱۷۲. محاسبه ضلع مجهول

حالا به سهولت می توان مساحت ذوزنقه ABCD را ، که از مستطیل EBCD و مثلث قائم الزاویه AED تشکیل شده است، محاسبه کرد . این مساحت چنین است :

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \quad (\text{ورست مربع})$$

البته اگر طبق رابطه مساحت ذوزنقه هم عمل می کردیم، به همین نتیجه می رسیدیم :

$$\frac{AB+CD}{2} \times BC = \frac{10+2}{2} \times 13 = 78 \quad (\text{ورست مربع})$$

پاخوم قطعه زمین وسیعی به مساحت ۷۸ ورست مربع و یا تقریباً

۸۰۰۰ دسیاتین در اختیار داشت . برای او هر دسیاتین به مبلغ $12\frac{1}{2}$

کوپک تمام شده بود .

ذوزنقه یا مستطیل

مسئله

پاخوم در مرگبارترین روز زندگی خود $۱۵ + ۲ + ۱۳ + ۱۰$ یعنی ۴۰ ورست راه را در طول محیط ذوزنقه طی کرد. او در شروع حرکت خود میخواست روی محیط يك مستطیل حرکت کند و به این مناسبت روی محیط ذوزنقه حرکت کرد که در محاسبه اشتباه کرده بود. توجه به این مطلب جالب است که آیا به نفع پاخوم بود که به جای مستطیل، روی محیط يك ذوزنقه حرکت می کرد، یا به ضرر او؟ در چه حالتی صاحب زمینی با مساحت حداکثر می شد؟

حل

مستطیل با محیط ۴۰ ورست را به انواع مختلف می توان ساخت و در هر مورد مساحت دیگری بدست می آید. در اینجا مساحت بعضی از این مستطیلها را معین می کنیم:

$$\text{ورست مربع } ۱۴ \times ۶ = ۸۴$$

$$۱۳ \times ۷ = ۹۱ \quad \text{د}$$

$$۱۲ \times ۸ = ۹۶ \quad \text{د}$$

$$۱۱ \times ۹ = ۹۹ \quad \text{د}$$

می بینیم که در تمام این نمونهها، مساحت حاصل از محیط ۴۰ ورست، بیش از مورد ذوزنقه بدست می آید. ولی می توان با محیط

۴۰ ورست ، مستطیلهائی ساخت که مساحت آنها از مساحت ذوزنقه کمتر باشد:

$$\text{ورست مربع } ۱۸ \times ۲ = ۳۶$$

$$۱۹ \times ۱ = ۱۹ \quad \text{»}$$

$$۱۹ \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = ۹ \frac{۳}{۴} \quad \text{»}$$

بنابراین به این سؤال مسئله ، نمی توان جواب معینی داد . با محیط مساوی محیط ذوزنقه ، مستطیلهائی وجود دارد که سطح بیشتر نسبت به ذوزنقه دارند ، مستطیلهائی هم هست که سطحشان کمتر است با وجود این می توان جواب کاملا مشخصی به این سؤال داد : در بین همه مستطیلهائی که محیط مساوی دارند ، سطح کدام يك از همه بیشتر است ؟ با مقایسه مستطیلهائی که به عنوان نمونه ذکر کردیم ، متوجه می شویم که هرچه اختلاف طول و عرض مستطیل کمتر باشد ، مساحت آن بیشتر است . بنابراین اگر طول و عرض مستطیل اختلافی نداشته باشند ، یعنی مستطیل به مربع تبدیل شود . سطح آن حداکثر مقدار ممکن خواهد بود . در این صورت مساحت آن مساوی ۱۰×۱۰ یعنی ۱۰۰ ورست مربع خواهد شد . به سادگی دیده می شود که مساحت این مربع از مساحت هر مستطیلی به محیط ۴۰ ورست بیشتر است . اگر پاخوم روی محیط چنین مربعی حرکت می کرد ، با همان مقدار راه می توانست ۲۲ ورست مربع بیشتر زمین بدست آورد .

خاصیت قابل توجه مربع

این خاصیت جالب مربع ، که در مقایسه با مستطیلهائی که محیطی مساوی محیط آن دارند ، سطح بیشتری دارد ؛ برای بسیاری روشن

نیست . به همین مناسبت این حکم را دقیقاً اثبات می کنیم .
 محیط شکل مستطیل شکلی را p می گیریم . اگر مربعی با همین
 محیط را در نظر بگیریم ، طول هر ضلع آن مساوی $\frac{p}{4}$ می شود . ثابت
 می کنیم که اگر یک ضلع این مربع را به اندازه b کوچک و ضلع
 دیگرش را به همین اندازه بزرگ کنیم ، یعنی مستطیلی به محیط مساوی
 محیط مربع بدست آوریم ، سطحی کوچکتر از سطح مربع خواهد
 داشت . به عبارت دیگر ثابت می کنیم که $\left(\frac{p}{4}\right)^2$ ، یعنی سطح مربع ،
 بزرگتر است از $\left(\frac{p}{4} - b\right)\left(\frac{p}{4} + b\right)$ سطح مستطیل . به این ترتیب
 باید صحت نامساوی زیر را ثابت کنیم :

$$\left(\frac{p}{4}\right)^2 > \left(\frac{p}{4} - b\right)\left(\frac{p}{4} + b\right)$$

سمت راست نامساوی $b^2 - \left(\frac{p}{4}\right)^2$ است و بنابراین نامساوی
 فوق به صورت زیر در می آید :

$$b^2 > 0 \Rightarrow -b^2 < 0$$

و نامساوی اخیر هم واضح است : مجذور هر عدد مثبت یا منفی بزرگتر
 از صفر است . بنابراین نامساوی اصلی هم که به نامساوی اخیر منجر
 شد ، صحیح است .

به این ترتیب بین مستطیل های با محیط مساوی ، حداکثر سطح
 متعلق به مربع است .

از اینجا ضمناً این نتیجه هم بدست می آید که از بین مستطیل های
 با مساحت مساوی ، مربع حداقل محیط را دارد . در این مورد به طریق

زیر می‌توان استدلال کرد. فرض می‌کنیم که این حکم صحیح نباشد و مستطیل A ، در حالی که سطحی مساوی سطح مربع B دارد، محیطی کوچکتر از محیط مربع داشته باشد. مربع C را چنان رسم می‌کنیم که محیطش مساوی محیط مستطیل A باشد، در این صورت سطح این مربع از سطح مستطیل A و بنابراین از سطح مربع B بیشتر خواهد بود. به چه نتیجه‌ای رسیدیم؟ مربع C محیطی کمتر از مربع B دارد، در حالی که سطح آن از سطح مربع B بیشتر است. و واضح است که این ممکن نیست: چون ضلع مربع C کوچکتر از ضلع مربع B است، باید مساحتش هم کوچکتر باشد. بنابراین نمی‌تواند مستطیل A هم سطح با مربع B وجود داشته باشد، بطوری که محیطش از محیط مربع کوچکتر باشد. به عبارت دیگر بین مستطیل‌هایی که سطح مساوی دارند، محیط مربع از همه کمتر است.

اگر پاخوم از این خاصیت مربع اطلاع داشت، می‌توانست با محاسبه صحیح نیروی خود، قطعه زمین مستطیل شکلی با حداکثر مساحت را بدست آورد. اگر فرض کنیم که او می‌توانست، بدون این که فشار زیادی به خودش وارد کند، روزی ۳۶ ورست راه برود، روی مربعی به ضلع ۹ ورست حرکت می‌کرد؛ در این صورت قطعه زمینی به مساحت ۸۱ ورست مربع بدست می‌آورد، یعنی ۳ ورست مربع بیشتر از قطعه زمینی که جان خود را بر سر آن گذاشت. برعکس اگر او تصور می‌کرد که مثلاً قطعه زمینی به مساحت ۳۶ ورست مربع برایش کافی است، می‌توانست بدون اینکه انرژی زیادی مصرف کند، روی محیط مربع به ضلع ۶ ورست حرکت کند.

قطعه زمین به شکل دیگر

ولی ، شاید برای پاخوم با صرفه تر بود ، اگر قطعه زمین را به شکل مستطیل در نظر نمی گرفت ، بلکه آن را به شکل دیگر ، مثلاً چهار ضلعی ، مثلث ، پنج ضلعی و غیره انتخاب می کرد .

این سؤال را می توان با دقت ریاضی مورد مطالعه قرار داد ؛ ولی شرح آن خواننده ما را خسته می کند و به همین مناسبت از بررسی دقیق آن می گذریم و تنها نتیجه را ذکر می کنیم :

اولاً می توان ثابت کرد که از بین همه چهار ضلعی های به محیط ثابت ، سطح مربع از همه بیشتر است . بنابراین اگر پاخوم می خواست زمینی به شکل چهارضلعی داشته باشد ، به هیچ ترتیبی سطحی بیشتر از ۱۰۰ ورست مربع بدست نمی آورد (حدا کثر قدرت او را ۴۰ ورست در روز به حساب آورده ایم) .

ثانیاً می توان ثابت کرد که سطح مربع از سطح هر مثلثی که محیطی برابر محیط مربع داشته باشد ، بیشتر است . مثلث متساوی الاضلاعی که همین محیط را داشته باشد ، به ضلع $\frac{1}{3} = \frac{40}{3}$ ورست خواهد بود و بنابراین سطح آن (طبق رابطه $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ ، S را مساحت و a را ضلع مثلث گرفتیم) چنین می شود :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{40}{3} \right)^2 \sqrt{3} = 77 \text{ (ورست مربع)}$$

یعنی حتی کمتر از مساحت دوزنقه ای که پاخوم روی محیط آن حرکت کرده است ، سپس می توان ثابت کرد (وما این مطلب را بعداً

ثابت خواهیم کرد) که از بین مثلث‌های با محیط ثابت، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از همه بیشتر است. بنابراین، وقتی که این بزرگترین مثلث‌ها، سطحی کمتر از سطح مربع دارد، سطح هر مثلث دیگری هم که با همین محیط باشد، از سطح مربع کوچکتر است.

ولی اگر سطح مربع را با سطح پنج ضلعی، شش ضلعی و غیره که با همان محیط باشند، مقایسه کنیم، دیگر حق تقدم مربع از بین می‌رود: پنج ضلعی منتظم سطح بیشتری پیدا می‌کند، شش ضلعی منتظم باز هم بیشتر و غیره. مثلاً در مورد شش ضلعی منتظم می‌توان به سادگی آزمایش کرد. وقتی که محیط شش ضلعی ۴۰ ورست باشد، ضلع آن $\frac{40}{6}$ ورست و مساحت آن (طبق رابطه $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$) چنین می‌شود:

$$(\text{ورست مربع}) = 115 - \frac{3 \left(\frac{40}{6} \right)^2 \sqrt{3}}{2}$$

اگر پاخوم برای قطعه زمین انتخابی خود، شکل شش ضلعی را در نظر می‌گرفت، به اندازه ۸۷ - ۱۱۵ یعنی ۳۷ ورست مربع زمین بیشتر بدست می‌آورد که در حقیقت از شکل مربعی آنهم ۱۵ ورست مربع بیشتر است (البته برای چنین مسیری، می‌بایست با وسیله زاویه‌یاب مجهز باشد).

مسئله

با کمک شش چوب کبریت شکلی با مساحت ماکزیمم درست کنید.

حل

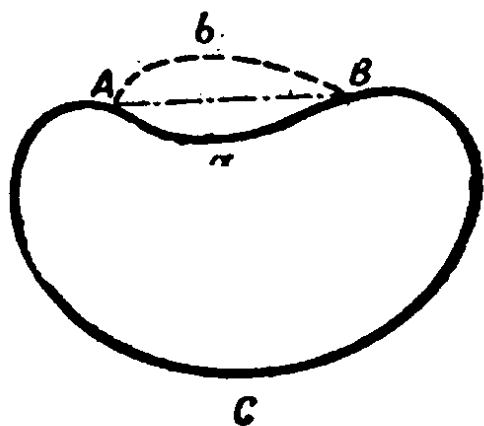
با شش چوب کبریت می‌توان انواع مختلف شکل‌ها را درست

کرد: مثلث متساوی الاضلاع، مستطیل، انواع متوازی الاضلاع، انواع پنج ضلعی های نامنظم، انواع شش ضلعی های نامنظم و بالاخره شش ضلعی منتظم. کسی که هندسه می داند، از قبل و بدون اینکه به مقایسه مساحت این اشکال بپردازد، می داند که سطح کدامیک از آنها از همه بیشتر است: شش ضلعی منتظم.

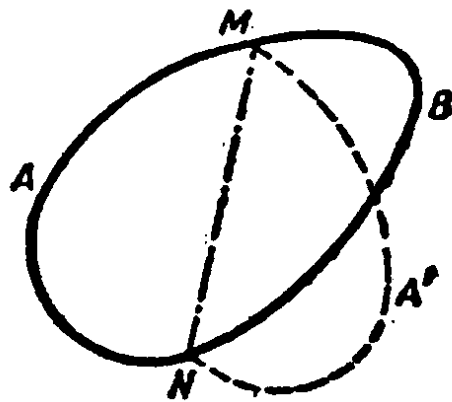
اشکال به مساحت حداکثر

می توان با دقت هندسی ثابت کرد که اگر محیط را ثابت بگیریم، هر چه تعداد اضلاع چند ضلعی منتظم بیشتر باشد، مساحت آن بیشتر است. و بنابراین حداکثر مساحت، برای محیط ثابت، متعلق به دایره است. اگر پاخوم همین ۴۰ ورست را روی محیط یک دایره می دوید، صاحب قطعه زمینی می شد که مساحت آن چنین است:

$$\pi \left(\frac{40}{2\pi} \right)^2 = 127 \text{ (ورست مربع)}$$



۱۷۳. ثابت می کنیم که شکل با حد اکثر مساحت، باید محدب باشد.



۱۷۴. اگر وتری محیط شکل محدب با مساحت ماکزیم را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، مساحت آن راهم به دو قسمت مساوی تقسیم خواهد کرد.

و مساحت بیشتر از این مقدار ، برای شکلی که محیطی مساوی ۴۰ ورست داشته باشد ، در هیچ حالتی بدست نمی آید ، خواه این شکل مستقیم الخط باشد یا منحنی الخط .

درباره این خاصیت عجیب دایره کمی بیشتر صحبت می کنیم :
دایره از هر شکل دیگری که همان محیط را داشته باشد، مساحت بیشتری را در خود جا می دهد . ممکن است بعضی از خوانندگان مایل باشند ، روش استدلال این گونه احکام را بدانند . ما اثبات این حکم را (که صحیح است اما کاملاً دقیق نیست) که متعلق به ژاکوب اشتینر است ، ذکر می کنیم . این استدلال خیلی طولانی است ، ولی می توان از قسمت های خسته کننده آن صرف نظر کرد ، بدون اینکه به فهم قسمت های بعدی لطمه ای بزند .

باید ثابت کرد که از بین اشکال مختلف با محیط مساوی ، سطح دایره از همه بیشتر است . قبل از همه ثابت می کنیم که شکل مورد نظر باید محدب باشد . این به معنای آنست که هر وتر آن باید کاملاً در داخل شکل قرار گرفته باشد شکل $AaBC$ (شکل ۱۷۳) در نظر بگیرید ، که دارای وتر خارجی AB می باشد . قرینه قوس a را نسبت وتر AB پیدا می کنیم ، قوس b بدست می آید . با این تغییر ، محیط شکل ABC تغییر نمی کند ، در حالی که واضح است که مساحت آن زیاد می شود . بنابراین شکلی از نوع $AaBC$ نمی تواند شکلی باشد که با محیط ثابت ، مساحت حداکثر را شامل شود .

به این ترتیب شکل مورد نظر حتماً محدب است . حالا می توانیم خاصیت دیگری از این شکل را ثابت کنیم : هر وتری که محیط آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کند ، مساحت آن را هم به دو قسمت مساوی تقسیم خواهد کرد . فرض کنید AMB (شکل ۱۷۴) ، شکل مورد نظر باشد و وتر

MN آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده باشد. ثابت می‌کنیم که مساحت AMN مساوی مساحت MBN است. اگر یکی از این دو قسمت مساحتی بیشتر از دیگری داشته باشد و مثلاً $AMN > MBN$ باشد، می‌توان قرینه‌ی شکل AMN را نسبت به MN بدست آورد، در این صورت شکل AMAN بدست می‌آید که سطح آن از سطح شکل اولیه AMBN بیشتر است، در حالی که محیط آنها با هم برابر است. یعنی، شکل AMBN که در آن یکی از وترها، محیط را به دو قسمت مساوی و مساحت را به دو قسمت نامساوی تقسیم می‌کند، نمی‌تواند شکل مورد نظر باشد (یعنی نمی‌تواند حداکثر مساحت را به ازاء محیط مفروض داشته باشد).

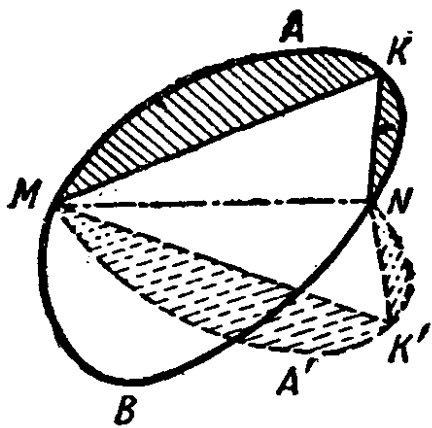
قبل از اینکه ادامه بدهیم، قضیه‌ی کمکی زیر را هم ثابت می‌کنیم: از بین مثلث‌هایی که دو ضلع ثابت دارند، مساحت مثلثی حد اکثر است که در آن زاویه بین این دو ضلع قائمه باشد. برای اینکه این قضیه را ثابت کنیم، از بیان مثلثاتی مساحت مثلث بر حسب اضلاع a و b و زاویه C استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} a b \sin C$$

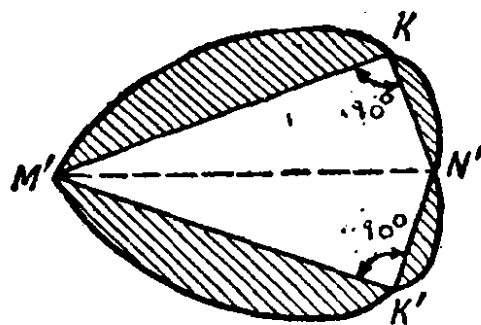
و واضح است که این عبارت وقتی به حد اکثر خود می‌رسد (با مفروض بودن اضلاع a و b) که در آن $\sin C$ حد اکثر مقدار خود، یعنی واحد، را اختیار کند. ولی زاویه‌ای که سینوس آن برابر واحد باشد، زاویه قائمه است و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

حالا می‌توانیم به مسئله اصلی پردازیم و ثابت کنیم که از بین همه اشکال با محیط ثابت، مساحت دایره حداکثر مقدار ممکن است.

برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم شکل محدب $MANBM$ ، که دایره نیست، دارای این خاصیت باشد (شکل ۱۷۵). وتر MN را چنان رسم می‌کنیم که محیط آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کند و ما می‌دانیم که در این صورت مساحت شکل هم به دو قسمت مساوی تقسیم خواهد شد. قرینه نیمه MKN را نسبت به خط MN بدست می‌آوریم $(MK'N)$.



۱۷۵. فرض می‌کنیم که شکل محدبی غیر از دایره دارای مساحت حداکثر باشد



۱۷۶. ثابت می‌کنیم که بین همه اشکال با محیط مساوی، مساحت حداکثر متعلق به دایره است.

شکل $MNK'M$ دارای محیط و مساحتی مساوی محیط و مساحت شکل اولیه $MKNM$ می‌باشد. چون قوس MKN نیم‌دایره نیست (زیرا در این صورت چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند)، روی آن می‌توان نقطه‌ای چنان پیدا کرد که از آنجا پاره خط MN با زاویه قائمه دیده نشود. این نقطه را K و قرینه آن را K' فرض می‌کنیم، یعنی زوایای K و K' قائمه نیستند. اگر اضلاع MK, KN, MK', NK' را باز کنیم، می‌توانیم ترتیبی بدسیم که زوایای بین آنها ۹۰ درجه بشود و به این ترتیب دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی بدست آوردیم. وترهای

این دو مثلث را مثل شکل ۱۷۶ روی هم قرار می‌دهیم و قطعات هاشور خورده شکل اصلی را در مجاور اضلاع آنها می‌گذاریم، شکل $M'KN'K'M'$ بدست می‌آید که محیطی مساوی شکل اصلی دارد ولی مساحتی بیشتر از آن (زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویه $M'KN'$ و $M'K'N'$ مساحت‌هایی بیشتر از مثلث‌های غیرقائم‌الزاویه MKN و MKN دارند). بنابراین یک شکل غیردایره نمی‌تواند با محیط ثابت، دارای مساحت حداکثر باشد. و تنها در مورد دایره است که نمی‌توان شکل دیگری به دست آورد که مساحت بیشتر داشته باشد.

این بود استدلال مربوط به این قضیه که بین اشکال با محیط ثابت، مساحت دایره حداکثر مقدار ممکن است.

به سادگی می‌توان صحت این مطلب را هم ثابت کرد که از بین اشکال با مساحت ثابت، محیط دایره از همه کمتر است. برای این منظور می‌توان شبیه آنچه که قبلاً در مورد مربع استدلال کردیم، انجام داد.

میخ

مسئله

کدام میخ مشکل‌تر بیرون کشیده می‌شود؛ گرد، مربعی یا مثلثی؟ به شرطی که همه به یک اندازه فرورفته باشند و سطح مقطع عرضی آنها هم برابر باشد.

حل

از اینجا شروع می‌کنیم که میخی محکم‌تر خواهد بود که به مصالح

اطراف با سطح بیشتری تماس داشته باشد. کدام يك از این میخها سطح جانبی بیشتری دارند؟ ما دیگر می‌دانیم که اگر مساحتها برابر باشند، محیط مربع کمتر از محیط مثلث و محیط دایره کمتر از محیط مربع است، اگر ضلع مربع را واحد فرض کنیم، محاسبه برای هر يك از این سه مقدار عددهای $4/53$ ، 4 و $3/55$ را بدست می‌دهد. بنابراین میخ مثلی باید محکم‌تر از دیگران باشد.

ولی اینگونه میخها را تهیه نمی‌کنند و یا لااقل موقع خرید به آنها برخورد نمی‌کنیم. شاید علت این امر آن باشد که اینگونه میخها به سادگی خم می‌شوند و می‌شکنند.

جسم با حجم حداکثر

شبهه‌خاصیتی که در مورد دایره ذکر کردیم، برای کره هم می‌توان گفت: از بین اجسام با سطح کل مساوی، حجم کره حداکثر مقدار ممکن را دارد. و برعکس از بین اجسام با حجم مساوی، کره حداقل سطح را دارد. این خصوصیت در زندگی عملی هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی که سماور بشکل کره ساخته شود، سطح کمتری نسبت به سماور استوانه‌ای و یا انواع دیگر آن، با همان گنجایش دارد، و چون يك جسم حرارت خود را تنها از طریق سطح خارجی خود از دست می‌دهد، سماور کره‌ای شکل، دیرتر از انواع دیگر آن سرد می‌شود. مثلاً مخزن میزان الحراره در حالتی که به شکل استوانه باشد (و نه کره) سریع‌تر گرم و یا سرد می‌شود (یعنی درجه حرارت محیط خود را قبول می‌کند).

به همین علت، وقتی که کره زمین (که شامل پوسته جامد و

قسمت مرکزی است) به دلایل مختلف تغییر شکلی در سطحش پیدا می‌شود، باید از حجمش کم شود، یعنی منقبض و متراکم شود: هر بار که سطح زمین از گردی خود تغییر شکل می‌دهد، مواد داخلی آن به هم فشرده‌تر می‌شوند. ممکن است همین حقیقت هندسی با زلزله‌ها و یا به‌طور کلی پدیده‌های زیرزمینی ارتباط داشته باشد، ولی در این باره بیش از همه باید زمین‌شناسان قضاوت کنند.

حاصل ضرب عوامل مساوی

مسائلی از قبیل آنچه که در اینجا حل کردیم مربوط به مطالعه جنبه اقتصادی آنهاست؛ با صرف نیروی معینی (مثلاً عبور از ۴۰ ورست راه) چگونه می‌توان بهترین و با صرفه‌ترین نتیجه را بدست آورد (بزرگترین قطعه زمین را متصرف شد)؟ به همین مناسبت عنوان این فصل را «اقتصاد هندسی» نام گذاشتیم. ولی این یک نوع ساده کردن عنوان است؛ در ریاضیات مسائلی از این قبیل نام دیگری دارند: مسائل «ماکزیمم و می‌نیمم». این مسائل به اندازه کافی چه از لحاظ موضوع و چه از لحاظ روش راه حل متنوع‌اند. بعضی از آنها تنها به کمک ریاضیات عالی حل می‌شوند، ولی بسیاری از آنها را می‌توان با اطلاعات مقدماتی ریاضی و با روشهای ساده حل کرد. در اینجا تعدادی از این گونه مسائل را از مبحث هندسه، با استفاده از خاصیت جالب «حاصل ضرب عوامل مساوی»، حل می‌کنیم.

برای حالتی که با دو عامل سروکار داشته باشیم، این خاصیت برای ما روشن است. می‌دانیم که مساحت مربع از مساحت هر مستطیلی که محیطی برابر با آن داشته باشد، بیشتر است. اگر این حکم هندسی

را به زبان حساب ترجمه کنیم ، چنین می شود: اگر بخواهیم عددی را به دو قسمت چنان تقسیم کنیم که حاصل ضرب آنها حداکثر مقدار ممکن شود، باید عدد مفروض را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، مثلاً از همه حاصل ضرب های

$$۱۳ \times ۱۷, ۱۶ \times ۱۴, ۱۲ \times ۱۸, ۱۱ \times ۱۹, \\ ۱۰ \times ۲۰, ۱۵ \times ۱۵ \text{ و } \dots$$

که حاصل جمع عوامل هر يك از آنها مساوی ۳۰ می باشد ، بزرگترین مقدار متعلق به ۱۵×۱۵ است ، حتی اگر با حاصل ضرب عددهای کسری مثل $۱۵\frac{۱}{۲} \times ۱۴\frac{۱}{۲}$ مقایسه شود .

همین حکم در مورد حاصل ضرب سه عاملی که مجموع مساوی دارند ، صادق است : حاصل ضرب آنها وقتی حداکثر مقدار ممکن می شود که این عوامل با هم برابر باشند . فرض می کنیم سه عامل x و y و z به مجموع a باشند :

$$x + y + z = a$$

x و y را غیر مساوی در نظر می گیریم . اگر به جای هر يك آنها

نصف مجموعشان ، یعنی $\frac{x+y}{۲}$ را در نظر بگیریم ، مجموع عوامل تغییر نمی کند :

$$\frac{x+y}{۲} + \frac{x+y}{۲} + z = x + y + z = a$$

ولی با توجه به حالت قبل داریم :

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)\left(\frac{x+y}{۲}\right) > xy$$

بنابراین حاصل ضرب سه عامل

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z$$

از حاصل ضرب xyz بزرگتر است :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z > xyz$$

به‌طور کلی اگر بین عوامل x و y و z لا اقل دو عامل نامساوی وجود داشته باشد، می‌توان سه عدد به مجموع $x+y+z$ پیدا کرد که حاصل ضرب آنها از xyz بیشتر باشد، وقتی که هر سه عامل با هم برابر باشند، چنین تغییری ممکن نیست. بنابراین به ازاء $x+y+z=a$ ، وقتی حاصل ضرب xyz ما کزیمم است که داشته باشیم :

$$x=y=z$$

با اطلاع از این خاصیت عوامل مساوی، می‌توان مسائل جالبی را حل کرد.

مثلث با مساحت حداکثر

مسئله

اگر مجموع اضلاع يك مثلث مقدار ثابتی باشد، آن را بچه‌شکلی باید انتخاب کنیم تا مساحت حداکثر داشته باشد؟
ما قبلاً دیدیم که این خاصیت مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع است. ولی چگونه می‌توان آن را اثبات کرد؟

حل

مساحت S مثلث بر حسب اضلاع a و b و c و محیط

به صورت زیر بیان می‌شود: $a + b + c = 2p$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

و از آنجا:

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$$

مساحت S مثلث وقتی حداکثر است که مجذور آن S^2 و یا عبارت $\frac{S^2}{p}$ (p مساوی نصف محیط و بنا بر فرض مقدار ثابتی است) حداکثر مقدار ممکن باشد. ولی چون دو طرف تساوی با هم حداکثر می‌شوند، مسئله به اینجا منجر می‌شود که به بینیم حاصل ضرب

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

در چه صورت حداکثر مقدار ممکن است. مجموع این سه عامل مقدری است ثابت:

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$$

و بنابراین حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که این عوامل با هم برابر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$p-a = p-b = p-c$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$a = b = c$$

بنابراین از بین مثلث‌های با محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سطح حداکثر است.

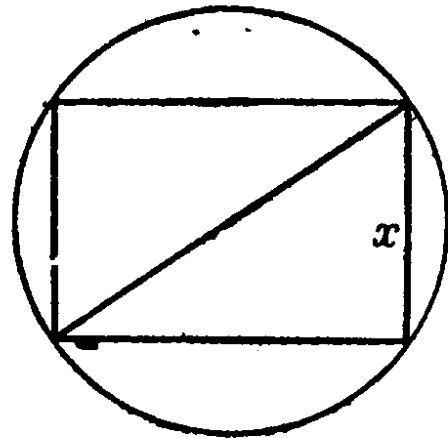
تیری با حداکثر وزن

مسئله

می‌خواهیم از یک تیر چوبی استوانه‌ای، تیر چهار گوشه با وزن حداکثر ااره کنیم؛ این کار را به چه ترتیب انجام دهیم؟

حل

روشن است که مسئله به اینجا منجر می‌شود که در یک دایره مستطیلی با سطح ما کزیمم محاط کنیم. اگرچه بعد از مطالبی که دیده‌ایم، خواننده می‌داند که این مستطیل باید به صورت مربع در آید، ولی بد نیست آنرا بدقت ثابت کنیم.



یکی از اضلاع مستطیل مجهول را x می‌گیریم (شکل ۱۷۷)، در این صورت ضلع دیگر آن مساوی

۱۷۷. چگونه تیر چهار گوشه با وزن حداکثر درست کنیم؟

$\sqrt{4R^2 - x^2}$ می‌شود، R را شعاع دایره مقطع چوب گرفته‌ایم، مساحت مستطیل چنین می‌شود:

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2} \implies S^2 = x^2(4R^2 - x^2)$$

چون مجموع عوامل x^2 و $4R^2 - x^2$ مقداری ثابت است ثابت $(x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2)$ ، بنابراین مجموع آنها S^2 وقتی ما کزیمم

است که داشته باشیم :

$$x^2 = 4R^2 - x^2 \Rightarrow x = R\sqrt{2}$$

که در این صورت مساحت S ، یعنی سطح مستطیل مجهول، هم ما کزیمم می شود .

بنابراین سطح مستطیل با مساحت حداکثر باید برابر $R\sqrt{2}$ ، یعنی ضلع مربع محاطی، باشد. تیر چهارگوش وقتی حجم حداکثر خواهد داشت که مقطع عرضی آن، مربع محاط در مقطع تیر استوانه‌ای باشد.

از مثلث مقوائی

مسئله

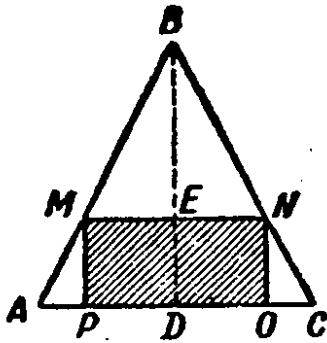
يك قطعه مقوای را به شكل مثلث در دست داریم . می‌خواهیم مستطیلی از این مثلث جدا کنیم که يك ضلعش بر قاعدهٔ مثلث منطبق باشد و مساحتش حداکثر مقدار ممکن شود .

حل

ABC را مثلث مفروض (شکل ۱۷۸) و $MNOP$ را مستطیلی که بعد از برش بدست می‌آید، در نظر می‌گیریم . از تشابه دو مثلث ABC و NBM داریم :

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM} \Rightarrow NM = \frac{BE \cdot AC}{BD}$$

اگر ضلع MN از مستطیل مجهول را BE, y یعنی فاصلهٔ این



۱۷۸. مستطیلی با مساحت
حداکثر در مثلث محاط
کنید.

ضلع از رأس مثلث را x ، قاعده AC مثلث
را a و ارتفاع آن را h بگیریم، رابطه فوق
به صورت زیر در می آید:

$$y = \frac{ax}{h}$$

و مساحت S مستطیل مطلوب $MNOP$

چنین می شود:

$$S = MN \cdot NO = MN(BD - BE) = \\ = (h - x)y = (h - x)\frac{ax}{h}$$

و بنابراین:

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)x$$

مساحت S وقتی ماکزیمم است که $\frac{Sh}{a}$ ، یعنی حاصل ضرب
عوامل $(h - x)$ و x ماکزیمم باشد. ولی مجموع این دو عامل مقداری
است ثابت:

$$(h - x) + x = h$$

بنابراین حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که با هم برابر
باشند:

$$h - x = x \implies x = \frac{h}{2}$$

باید ضلع MN از وسط ارتفاع مثلث بگذرد، یعنی خط واصل
بین اوساط دو ضلع مثلث باشد. به این ترتیب طول و عرض مستطیل
به ترتیب مساوی $\frac{a}{2}$ و $\frac{h}{2}$ می شود.

مشکل حلبی ساز

مسئله

به حلبی سازی سفارش رسید که از يك قطعه حلبی مربع شکل به ضلع ۶۰ سانتی متر جعبه‌ای با کف مربع وبدون سربسازد ، به نحوی گنجایش جعبه حداکثر مقدار ممکن باشد .



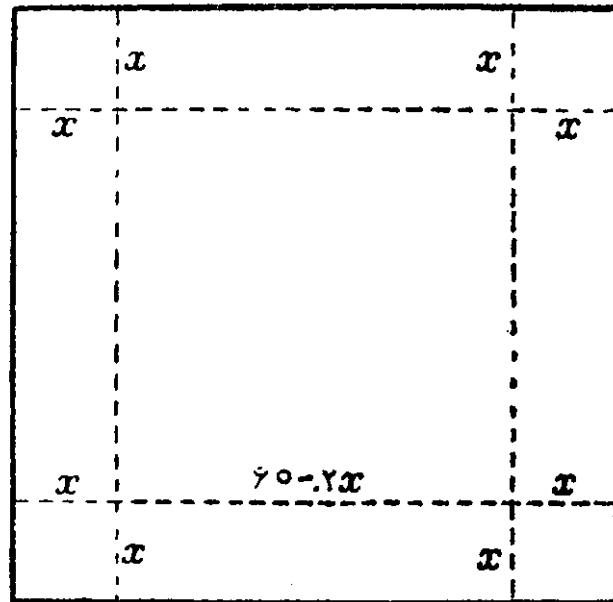
حلبی سازمدتی دربارهٔ انتخاب عرض کنارهٔ جعبه آزمایش کرد، ولی نتوانست جواب مشخصی بدست آورد (شکل ۱۷۹). آیا شما می‌توانید مشکل او را حل کنید؟

حل

عرض حاشیه‌ای را که باید تا کرد مساوی x می‌گیریم (شکل ۱۸۰)، در این صورت ضلع مربع کف جعبه مساوی $60 - 2x$ می‌شود؛ و حجم جعبه به صورت زیر درمی‌آید:

$$V = (60 - 2x)(60 - 2x)x$$

به ازاء چه مقداری از x ، این حاصل ضرب حداکثر می‌شود؟ اگر مجموع این سه عامل مقداری ثابت بود، حاصل ضرب آنها وقتی حداکثر می‌شد که با هم برابر باشند. ولی در اینجا مجموع این عوامل مقداری ثابت نیست:

$$(60 - 2x) + (60 - 2x) + x =$$


$$= 120 - 3x$$

۱۸۰. حل مسئلهٔ حلبی ساز

و با تغییر x ، تغییر می‌کند.

ولی می‌توان ترتیبی داد که مجموع این عوامل مقداری ثابت بشود: برای این منظور کافی است طرفین تساوی را ۴ ضرب کنیم، در این صورت بدست می‌آید:

$$4V = (60 - 2x)(60 - 2x)4x$$

و دیگر مجموع این عوامل مقداری ثابت است:

$$(60 - 2x) + (60 - 2x) + 4x = 120$$

بنابر این حاصل ضرب آن‌ها وقتی حداکثر می‌شود که این عوامل با هم برابر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$60 - 2x = 4x \Rightarrow x = 10$$

که به ازاء آن ۴V و در نتیجه V ماکزیمم می‌شود. به این ترتیب، جعبه مورد نظر وقتی حداکثر حجم را خواهد داشت که روی ورقه حلبی، از چهار طرف حاشیه‌ای به عرض ۱۰ سانتی‌متر به وجود آوریم. این حجم ماکزیمم مساوی $40 \times 40 \times 10$ یعنی ۱۶۰۰۰ سانتی‌متر مکعب خواهد شد. اگر حاشیه را کمتر و یا بیشتر از ۱۰ سانتی‌متر بگیریم، در هر حال گنجایش جعبه کمتر می‌شود مثلاً:

$$9 \times 42 \times 42 = 15876 \text{ (سانتی متر مکعب)}$$

$$11 \times 38 \times 38 = 15884 \text{ (سانتی متر مکعب)}$$

که در هر حال از ۱۶۰۰۰ سانتی‌متر مکعب کمتر است.

مشکل تراشکار

مسئله

تراشکاری می‌خواهد از یک مخروط، استوانه‌ای بیرون بیاورد،

* اگر مسئله را در حالت کلی و برای ورقه حلبی مربع شکل به ضلع

a حل کنیم، عرض حاشیه کناره‌ها مساوی $\frac{a}{6}$ خواهد شد، زیرا برای اینکه

حاصل ضرب $(a - 2x)(a - 2x)x$ و یا $(a - 2x)(a - 2x)4x$ حداکثر باشد،

باید داشته باشیم: $a - 2x = 4x$ و یا $x = \frac{a}{6}$.

به نحوی که مقدار تراشیده شده از مخروط، حداقل مقدار ممکن باشد (شکل ۱۸۱). تراشکار در باره شکل استوانه فکر می کرد: آیا آن



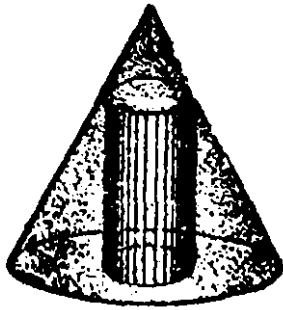
۱۸۱. مشکل تراشکار

را باریک و بلند در آورد (شکل ۱۸۲)، یا پهن و کوتاه (شکل ۱۸۳). او بالاخره نتوانست مخروطی را پیدا کند که حجم حداکثر داشته باشد، یعنی حداقل ماده مخروط تراشید بشود. شما می توانید مسئله تراشکار را حل کنید؟

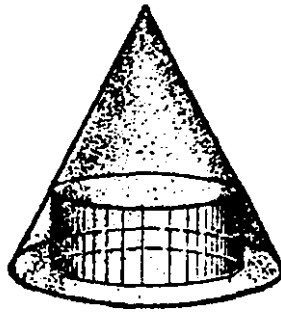
حل

مسئله را باید به طریق هندسی حل کرد. فرض کنیم ABC مقطع

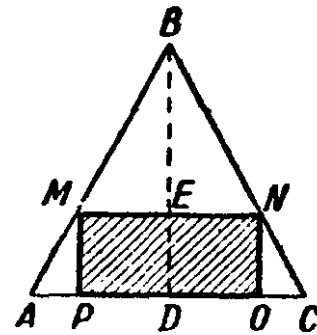
محوری مخروط (شکل ۱۸۴)، BD ارتفاع آن، که به h نشان می‌دهیم $AD = DC$ شعاع قاعده آن، که با R نشان می‌دهیم، باشد. مقطع استوانه‌ای که می‌خواهیم از این مخروط جدا کنیم، $MNOP$ خواهد



۱۸۲.



۱۸۳



۱۸۴. مقطع محوری مخروط استوانه

از مخروط می‌توان استوانه‌ای جدا کرد که بلند و باریک باشد، یا کوتاه و بلند. در چه حالتی حجم آن حداکثر است؟

بود. باید به بینیم فاصله $BE = x$ (فاصله رأس مخروط از قاعده بالای استوانه) چقدر باشد تا حجم استوانه حداکثر مقدار ممکن شود. شعاع r قاعده استوانه (ME یا PD) از تناسب زیر به سادگی بدست می‌آید:

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}$$

و از آنجا:

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{h} \Rightarrow r = \frac{Rx}{h}$$

ارتفاع ED استوانه برابر است با $h - x$. بنابراین حجم آن

چنین می‌شود:

$$V = \pi \left(\frac{Rx}{h} \right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h^2} (h - x)$$

و از آنجا :

$$\frac{Vh^2}{\pi R^2} = x^2(h-x)$$

در عبارت $\frac{Vh^2}{\pi R^2}$ ، مقادیر h ، π و R ثابت اند و تنها V متغیر است ، ما می‌خواهیم x را چنان پیدا کنیم که به ازاء آن ، V ماکزیمم باشد . ولی واضح است که وقتی V ماکزیمم باشد ، $\frac{Vh^2}{\pi R^2}$ یا $x^2(h-x)$ هم ماکزیمم خواهد بود . عبارت اخیر در چه صورت ماکزیمم می‌شود ؟ در اینجا سه عامل متغیر داریم : x ، x و $(h-x)$. اگر مجموع این متغیرها مقداری ثابت بود ، حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم می‌شد که باهم برابر باشند . با دوبرابر کردن طرفین تساوی ، می‌توان ترتیبی داد که حاصل جمع متغیرها مقداری ثابت بشود در این صورت داریم :

$$\frac{2Vh^2}{\pi R^2} = x^2(2h-2x)$$

حالا مجموع سه عامل متغیر مقداری است ثابت :

$$x+x+2h-2x=2h$$

بنابراین حاصل ضرب آنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که این عوامل با هم برابر باشند :

$$x=2h-2x \implies x=\frac{2h}{3}$$

در اینصورت مقدار $\frac{2Vh^2}{\pi R^2}$ و همراه آن V حجم استوانه حد

اکثر مقدار ممکن می‌شود .

حالا دیگر می‌دانیم که چگونه باید استوانه مورد نظر را تراشید :

قاعده بالای آن باید با رأس مخروط به اندازه $\frac{2}{3}$ ارتفاع مخروط فاصله داشته باشد .

چگونه تخته را دراز کنیم

گاهی پیش می آید که برای تهیه یک شیئی ، چه در کارگاه و چه در منزل ، اندازه های ماده اصلی که در اختیار ما هست به اندازه لازم نیست .



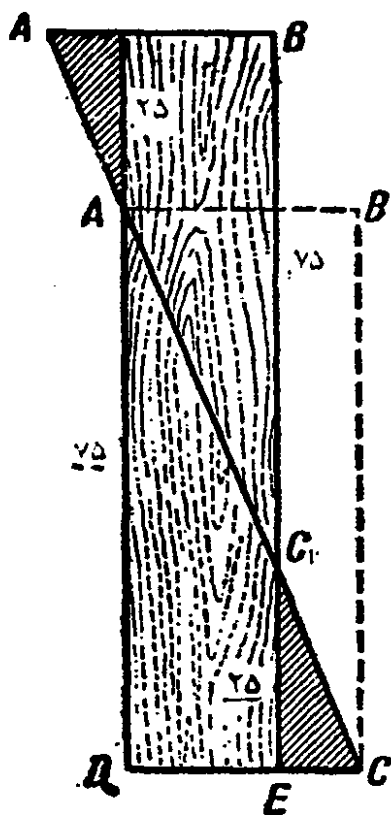
۱۸۵ . چگونه می توان یک تخته را به اندازه لازم در آورد ؟

در این صورت باید اندازه‌های شیئی را تغییر داد و آنرا برای منظور مورد نظر آماده کرد و در بسیاری موارد می‌توان به کمک هندسه، مقداری فراست و محاسبه به هدف مورد نظر رسید.

مثلا فرض کنید که می‌خواهید يك قفسه کتاب به طول يك متر و عرض ۲۰ سانتی متر بسازید، ولی اندازه تخته‌ای که در اختیار دارید با آن فرق دارد، مثلا طول آن کوتاهتر: ۷۵ سانتی متر و عرض آن بیشتر: ۳۰ سانتی متر است (شکل ۱۸۵ - سمت چپ).

چگونه باید عمل کرد؟

مثلا می‌توان به این ترتیب عمل کرد که در طول تخته يك حاشیه ۱۰ سانتی متری ببریم (قسمت نقطه چین). سپس این حاشیه را به سه قسمت مساوی ۲۵ سانتی متری تقسیم کنیم، آنوقت از وصل دو قطعه از این



قطعات به تخته اصلی، اندازه مورد نظر بدست می‌آید (شکل ۱۸۵ - پائین).

این راه حل از لحاظ تعداد عملیات مقرون به صرفه نیست (سه برش و سه اتصال) و از لحاظ استحکام هم کافی نیست (جائی که تخته‌ها به هم متصل شده‌اند، استحکام ضعیف می‌شود).

مسئله

۱۸۶. حل مسئله بزرگ کردن تخته

راه حلی برای درست کردن تخته مورد نظر پیدا کنید که در آن سه برش و تنها يك اتصال وجود داشته باشد.

حل

باید (شکل ۱۸۶) تخته ABCD را روی قطر AC ببریم و نیمه از آن را (مثلاً مثلث ABC) در امتداد قطر حرکت دهیم، تا طول مجموعه مساوی یک متر بشود. حالا دو نیمه تخته را در طول AC متصل می‌کنیم و اضافه‌های آن را (مثلث‌های هاشور خورده) می‌بریم. تخته‌ای که می‌خواهیم بدست می‌آید.

در حقیقت از تشابه دو مثلث ADC و C₁EC داریم:

$$AD : DC = C_1E : EC \Rightarrow EC = \frac{DC}{AD} \cdot C_1E$$

و یا:

$$EC = \frac{30}{75} \times 25 = 10 \text{ (سانتی متر)}$$

$$DE = DC - EC = 30 - 10 = 20 \text{ (سانتی متر)}$$

کوتاهترین راه

به عنوان پایان کار، مسئله‌ای از «ماکزیمم و می‌نیمم» را مطرح می‌کنیم که راه حل فوق‌العاده ساده‌ای از لحاظ هندسی دارد.

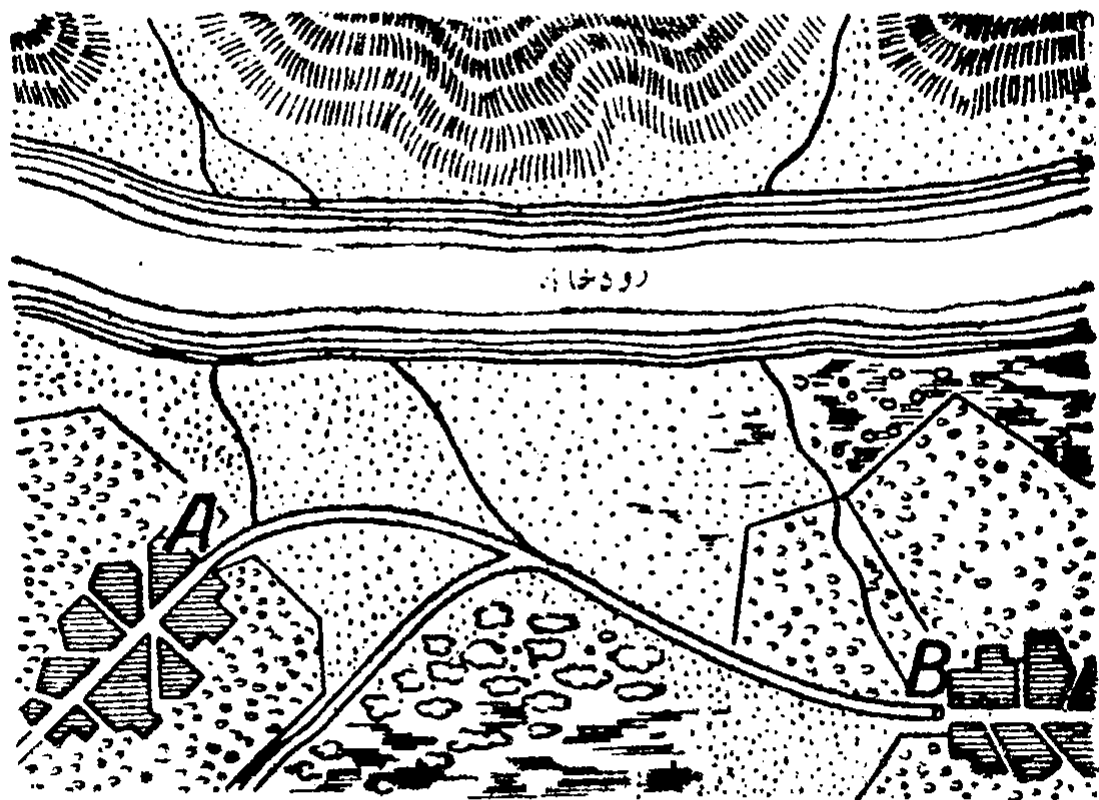
مسئله

می‌خواهیم در ساحل رودخانه برج آبی بسازیم که از آنجا به وسیله لوله، آب را به مزارع A و B برسانیم (شکل ۱۸۷). جای برج آب را در چه نقطه‌ای انتخاب کنیم تا طول مجموع لوله‌هایی که از آنجا به دو مزرعه می‌رود می‌نیمم باشد؟

حل

مسئله به اینجا منجر می شود که کوتاهترین راه از A به ساحل و از آنجا به B را جستجو کنیم .

فرض می کنیم که راه مورد نظر ACB باشد (شکل ۱۸۸) .
 شکل را روی CN تا می کنیم ، نقطه B' بدست می آید . اگر ACB



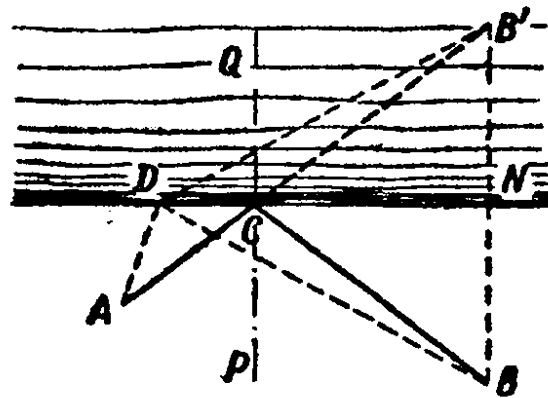
۱۸۷. مسئله ای در باره ساختن برج آب

کوتاهترین راه باشد ، چون $CB' = CB$ است ، راه ACB' باید از هر راه دیگری (مثلاً ADB') کوتاه تر باشد . بنابراین برای پیدا کردن کوتاهترین راه کافی است نقطه C ، یعنی محل تلاقی AB' را با ساحل رودخانه پیدا کنیم . در این صورت اگر از C به B وصل کنیم هر دو قسمت کوتاهترین راه از A تا B بدست می آید .

از نقطه C عمودی بر CN رسم می‌کنیم ، به سادگی معلوم می‌شود که زوایای ACP و BCP که دو قسمت کوتاه‌ترین راه با این عمود می‌سازند ، با یکدیگر برابرند :

$$\hat{ACP} = \hat{B'CP} = \hat{BCP}$$

طبق قانون انعکاس نور، وقتی که بريك آینه می‌تابد: زاویه تابش



۱۸۸. حل هندسی مسئله انتخاب کوتاه‌ترین راه.

برابر است با زاویه انعکاس . بنابراین نتیجه می‌شود که شعاع نور ، ضمن انعکاس ، مسیر خود را چنان انتخاب می‌کند که کوتاه‌ترین راه باشد. نتیجه‌ای که حتی برای هرون هندسه دان و فیزیک دان اسکندریه در دو هزار سال قبل هم روشن بوده است.







بها: ۱۵۰ ریال