

1. Transport Phenomena Bird - Stewart - Light foot منابع:

2. مقدمه‌ای بر پدیده‌های انتقال در مواد - گسکل

An Introduction to transport phenomena in Materials

3. Transport Phenomena in Materials Processing

Geiger - Poirer

منظور از پدیده‌های انتقال، انتقال سه بخش برآست:

1. انتقال مومنتوم (ریناویک سیالات) 2. انتقال حرارت 3. انتقال جرم

منابع دیگر: مکانیک سیالات Shames - مقدمه‌ای بر مکانیک سیالات Stroel - Waters

Heat and Mass Transfer - (white)

Incropera - (Dewitt)

مقدمه‌ای بر انتقال حرارت

چرا این سه بحث ظاهراً متفاوت را با هم بررسی می‌کنیم؟

عموماً این سه مورد انتقال با هم اتفاق می‌افتند. حداقل دو مورد با هم اتفاق می‌افتند. البته می‌توان

مسئله را ساده کرد و از سوله نمود و فقط یکی مورد داشت. هم چنین فرم کلی معادلات این سه مورد شبیه به

هم است. قوانین پایه‌ای آنها نیز مشابه است:

$$1. \tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad \text{ویسکوزیته نیوتن}$$

$$2. q_y = -k \frac{dT}{dy} \quad \text{هدایت فوری}$$

$$3. J_{Ay} = -D_A \frac{dC_A}{dy} \quad \text{دیفوزیون فیک}$$

$$Q: \frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}} \quad q = \frac{Q}{A} \quad \text{A: سطح مقطع}$$

$q$ : در واقع شار حرارت را نشان می‌دهد.  $T$ : درجه حرارت

هر سه این معادلات از سه بخش تشکیل شده‌اند:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

گویایان کسیت  $\rightarrow$   $\frac{dv_x}{dy}$   
 ضرب تناسب  $\rightarrow$   $\mu$   
 شار پدیده  $\rightarrow$   $\tau_{yx}$   
 (در این جا موافقم)



$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{ma}{A} = \frac{m \cdot v}{A \cdot t} = \frac{P}{At}$$

تعداد موجسوزم :  $\frac{P}{At}$  ، موجسوزم : P

در سیالات تنش برشی موجب انفعال می شود ولی در برخی حالات تنش های فشاری هم موجب

انفعال می شود.

شماره ی A در جهت y :  $\dot{\gamma}_{xy}$

غلظت A :  $C_A$

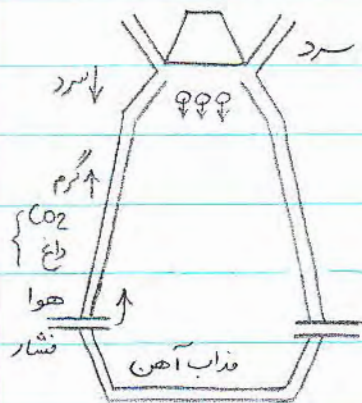
این بزرگ ها در سه معیاس برری می شوند :

1- ماکروسکوپي  $cm - m$  ← برری اولیه فیزیکی - کلی لوزن - مثال : برری کلی راکتور

2- میکروسکوپي  $micron - cm$  ← برری یک انسان حتی از کل وسیله - مثال : نجی کوچک از راکتور

3- مولکولی  $1 - 1000 \text{ nm}$  ← برری اتم ها برری اثرشان روی یکدیگر - مثال : پیدایش ضرایب تناسب.

مثال : گوره بنند (نهم ترین راکتور متالورژیکی) - در زوب آهن

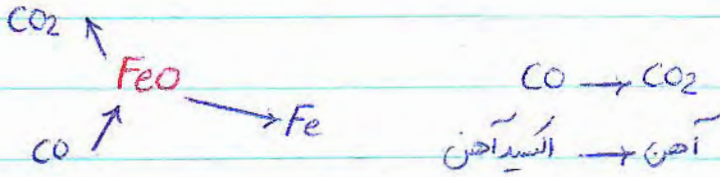


وروی : آهن و لگ (سرد)

در جهت موجسوزم مانا سبیل کار داریم

چه مقدار فشار لازم است که هوا خارج شود ؟

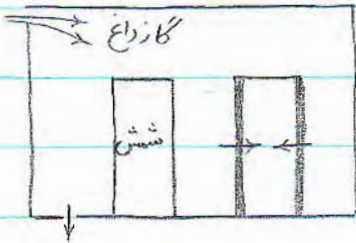
واکنش‌هایی که در طی دهن در رانکتور → انتقال حریم



Counter - Current exchange

این انتقال هم معکوس است.

مثال. گوره‌های عملیات حرارتی



\* - گازی

انتقال حرارت از گاز داغ به شش سرد

انتقال حریم: مغل (ریغوزیون) - شش‌ها دندریت دارند. در شاخه‌های دندریت

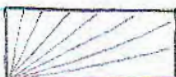
از سطح داغ به وسط شش سرد نیز انتقال حرارت داریم.

### ۱- دینامیک سیالات:

مقدور: در دینامیک سیالات حرکت سیال داریم ولی در استاتیک سیالات، سیال ساکن داریم.

استاتیک سیالات:

سیال: ماده‌ایست که اگر تنش برشی هر چند کوچک به آن وارد شود، مازادی که این تنش وجود دارد

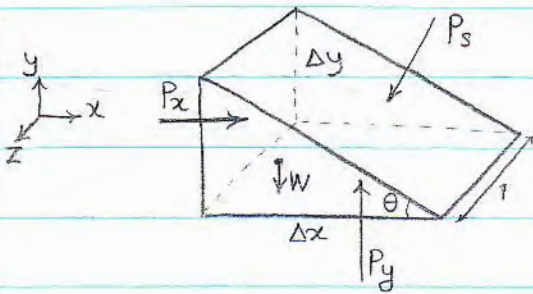


حرکت می‌کند.



بعبارت دیگر سیال متش برشی را تحمل نمی کند ولی فشار را می تواند تحمل کند. پس در استاتیկ سیالات  
مانش برشی نداریم ولی تنش فشاری داریم.

فشار در یک نقطه: یک المان حجمی در نظر می گیریم. (به شکل گوی)



$P_x$ ،  $P_y$  و  $P_s$  از جانب دیگر سیالات  
وارد می شود و  $W$  نیز وزن المان است.

شرط تعادل:  $\sum F = 0$

$$F_x = P_x \cdot \Delta y \cdot t$$

$$x: P_x \Delta y = P_s \Delta s \cdot \sin \theta$$

$$y: P_y \cdot \Delta x = P_s \cdot \Delta s \cdot \cos \theta + \rho \cdot V \cdot g$$

$$V = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}$$

$$\Delta y = \Delta s \cdot \sin \theta$$

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos \theta$$

$$\rightarrow P_x = P_s$$

$$(P_y - P_s) \Delta x = \rho g \frac{\Delta x \Delta y}{2}$$

شرایط حدی:  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

عنق را هم می توان به صفر میل داد.

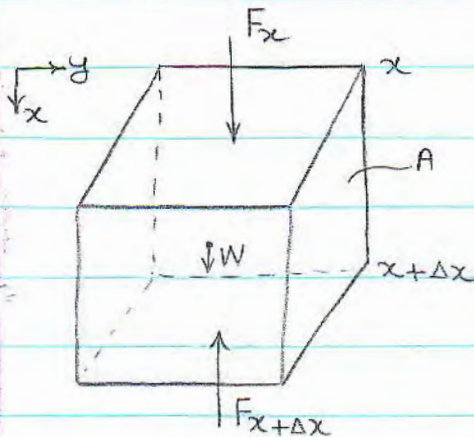
$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta y \rightarrow 0$$

$$\rightarrow P_y = P_s \Rightarrow P_x = P_y = P_s$$

نتیجی تم: فشار در هر جهتی برای یک نقطه با هم برابر است.

## تغییرات فشار در سیال ساکن

یک المان حجمی برای سیال در نظر می‌گیریم:



در راستای  $y$ ، برآیند نیرو باید صفر باشد (بجای می‌ماند)

طرفین سطح در جهت  $y$ ، اختلاف نیرو نداریم.

در غیر این صورت سیال جاری می‌شود.

$$P_x \cdot A + A \Delta x \rho g = P_{x+\Delta x} A \rightarrow \frac{P_{x+\Delta x} - P_x}{\Delta x} = \rho g$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{dP}{dx} = \rho g \rightarrow \int_{P_0}^P dP = \int_{x_0}^x \rho g dx$$

$$\rightarrow \Delta P = P - P_0 = \rho g (x - x_0) = \rho g x \quad x_0 = 0$$

$\Delta P$ : فشار مطلق

$\Delta P$ : فشار نسبی

$$PV = nRT$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

برای گازها:

$$\rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{n}{m} RT = \frac{RT}{M} \rightarrow \rho = \frac{PM}{RT}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dx} = \rho g = \frac{PMg}{RT} \rightarrow \int \frac{dP}{P} = - \int g \frac{M}{RT} dx$$

$$\rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = - \frac{Mgx}{RT} \rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgx}{RT}\right)$$

علامت منفی در لیل جهت انتخابی محور  $x$  است.

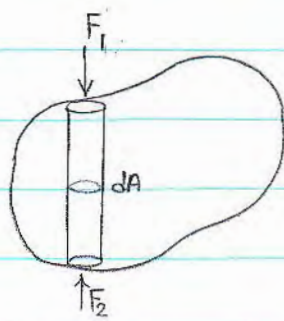


## Buoyancy Force

## نیروی شناوری (ارشمیدسی)

از طرف سیال نیروی معادل حجم جسم شناور روی سیال از پایین به بالا وارد می شود.

درواقع مستقل از وزن جسم می باشد. یک البان از جسم شناور در نظریه بگیریم:



تنش برشی نداریم چون استاتیکی است.

$$dF_B = P_{x_2} dA - P_{x_1} dA = (P_{x_2} - P_{x_1}) dA$$

$$= \rho g (x_2 - x_1) dA$$

$$\rightarrow F_B = \rho g \int (x_2 - x_1) dA \quad \text{فرض: دانسیته ثابت است (مایعات)}$$

برای گازها نیز در اختلاف ارتفاع کم، دانسیته تقریباً ثابت است.

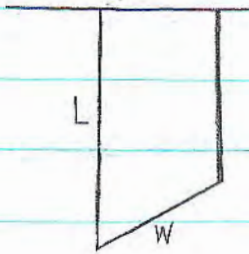
$$\rightarrow F_B = \rho g V \quad \text{حجم جامد } \rho: \text{ چگالی سیال}$$

تذکر: این نیرو به جرم بستگی ندارد.

\* بحث مرکز فشار مطالعه شود.

**مثال:** صفحه با ضخامت ناچیز در داخل سیال فرو رفته است. فشار وارد بر سطح صفحه در هر

طرف را بدست آورید. و نشان دهید که فشار وارد بر ورق برابر با فشار اعمالی بر مرکز ثقل است.



سطح سیال

تذکره: فشار در نقطه به جهت بستگی ندارد.

در مرکز ثقل، فشار  $\rho g \frac{L}{2}$  است.

### انتقال مومنوم (دینامیک سیالات):

$$P = mV$$

تغییر جرم به ادامه حرکت در مسیر خودش را مومنوم گویند.



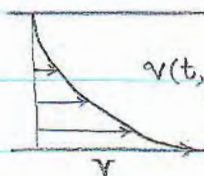
مومنوم نیز مانند انرژی غنا ناپذیر است. یعنی نه بوجود می آید و نه از بین می رود. بجای تعادل

مومنوم وجود دارد. پس در سیستم ها، از موازنه مومنوم استفاده می کنیم.

### قانون ویسکوزیته نیوتن:

آزمایش: صفحه پائینی را با سرعت  $V$  حرکت می دهیم (در زمان صفر) در  $t=0$ ، فقط لایه

متصل به صفحه حرکت می کند و بعد دیگر لایه ها. در نتیجه تنش برشی در سیال ایجاد می گردد. لایه ها



در نهایت به سرعت  $V$  می رسند:

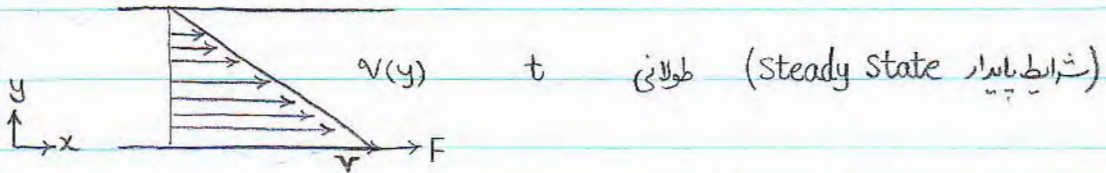
کوچک  $t$ :

$t < 0$  ساکن  $t = 0$  شروع حرکت



لایه ای که بلافاصله به جامدی متصل است، سرعت جامد را پیدا می کند. در این آزمایش

صفحه پائینی با هر سرعتی حرکت کند، لایه ای متصل به صفحه بالایی، سرعت صفر دارد.



در اینجا سرعت تابعی از زمان نیست.

سطح صفحه:  $A$  نیرویی که به صفحه پائینی وارد می شود:  $F$

$$F \propto A \frac{V}{Y} \rightarrow \frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

$\mu$ : ضریب تناسب  
فرم ریفرانسیتی:  $\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$

توسط نیروی  $F$ ، مومنتوم از صفحه جامد به سیال وارد می شود. این انتقال در جهت  $y$  انجام

می شود. سرعت از پائین به بالا کم می شود یعنی  $\frac{dv_x}{dy} < 0$  است ولی  $\tau_{yx} > 0$  است.

همین دلیل علامت منفی لحاظ می شود. اندیس اول: جهت انتقال مومنتوم  $\tau_{yx}$   
// دوم: جهت سرعت

عامل انتقال انرژی گرمایی، اختلاف دماست. از دمای زیاد به دمای کمتر.

عامل انتقال مومنتوم، اختلاف سرعت است. از سرعت بیشتر به سرعت کمتر. این

مکانیزم، مکانیزم مولکولی می باشد.

سیالاتی که از رابطه ویسکوزیته نیوتن تبعیت می کنند، سیالات نیوتنی نام دارند. گازها سیال

نیوتنی هستند. اما مایعات همگی سیال نیوتنی نیستند. سرابرها، مواد خمیری و سوسپانسیون ها

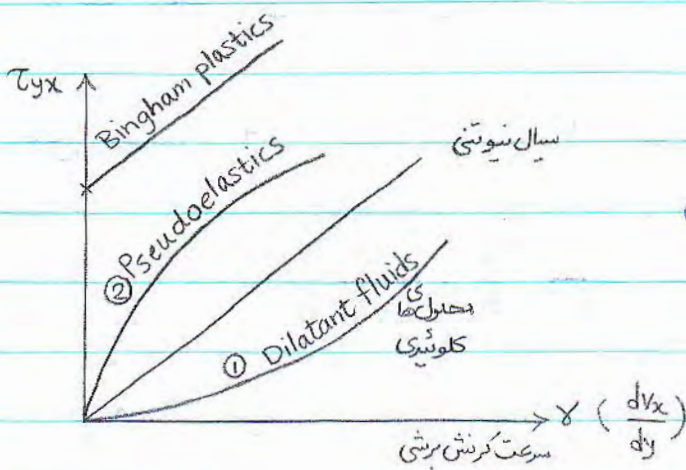
جز سیالات غیر نیوتنی هستند.

برای سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی:

Bingham plastics در واقع دارای نوعی

تنش تسلیم هستند و بعد رفتار سیال

نیوتنی دارند.



Pseudoelastics : با افزایش سرعت کرنش برشی، دشل می شوند.

Oswald:  $\tau_{yx} = k \dot{\gamma}^n$        $n > 1$  ①       $n < 1$  ②

$n = 1$  : سیال نیوتنی

دینامسیون و ویسکوزیته:

$$\mu: \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} = \frac{Pa}{\frac{m}{s.m}} = Pa.s \quad \text{or} \quad kg.m^{-1}.s^{-1} \quad (SI)$$

$$\mu: \frac{dyn}{cm^2} . s = \text{poise} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ cp} = 1 \text{ m Pa.s} \quad (CGS)$$



ویسکوزیته کیسنا تیک :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ذرواق نفوذ موستوم توسط مکانیزم مولکولی راشان می دهد .

$$\nu : \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \text{دیناسیون} :$$

تمام کیفیت هائیکه واحد یا دیناسیون  $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  دارند، نوعی (دیفوزیون) ویانوعی نفوذ راشان می دهد .

$$\text{آب } (20^\circ\text{C}) : \mu = 1 \text{ cp} \quad \nu = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\text{آب } (80^\circ\text{C}) : \mu = 0.4 \text{ cp} \quad \nu = 0.4 \text{ cm}^2/\text{s}$$

با افزایش سیالیت ، ویسکوزیته کمتر می شود . ویسکوزیته هم وابسته به دماست .

$$\text{هوا } (20^\circ\text{C}) : \mu = 0.018 \text{ cp} \quad \nu = 15 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

$$\text{هوا } (80^\circ\text{C}) : \mu = 0.021 \text{ cp} \quad \nu = 20 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

برای گارها ،  $\nu$  زیادتر از مایعات است زیرا  $\rho$  برای گارها کم است . هم چنین رفتار  $\mu$  و  $\nu$

باز برای گارها و مایعات فرقی می کند .

$$\text{Hg } (20^\circ\text{C}) : \mu = 1.55 \text{ cp}$$

$$\text{Fe (مایع)} : \mu \cong 7 \quad \nu \cong 1 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{شبهه به رفتار آب}$$

ویسکوزیته‌ی سرشاره‌ها ، بعضی از روغن‌ها و مایعات پلیمری ،  $\mu$  بین 100 poise - 1

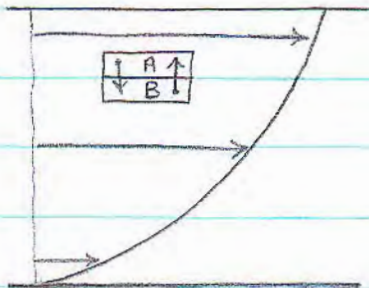
تغییر می‌کند. برای  $H_2SO_4$  (اسید سولفوریک) ،  $\mu$  بین 1 p - 0.1 تغییر می‌کند.

برای نمک‌های مذاب ، فلزات سنگین ( $Pb, Zn, \dots$ ) ، فلزات واسطه ، آب ، بنزین ، استون

فلزات قلیائی در  $20^\circ C$  ،  $\mu$  بین 0.1 p - 0.01 تغییر می‌کند.

ویسکوزیته‌ی گازها :

نک گرا دیان سرعت برای سیال در نظری می‌گیریم.



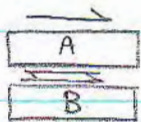
$$v_A > v_B$$

دو لایه A و B که سرعت‌های متفاوتی دارند

در نظری می‌گیریم. اتم‌ها ممکن است بین لایه‌ها

متقلّب بشوند و با برخورد این اتم وارد شده به

لایه‌ی جدید به اتم‌های این لایه ، هوشوم متقلّب می‌شود. لایه‌ی A با اعمال تنش برشی در جهت



جهت جریان  $\rightarrow$

حرکت لایه‌ی B ، سعی دارد سرعت لایه‌ی B را زیاد کند.

افزایش دما ، انتقال اتم‌ها بین لایه‌ها را ساده‌تر می‌کند.

برای مایعات این طور نیست و برای مایعات مایه‌ای بین مولکولی فیز داریم



\* در حالت کلی، هدف از انتقال موستوم، انتقال حرارت و ... برقراری حالت تعادل و از بین بردن اختلاف است. در مطلب قبلی، این اختلاف توسط نیروهای برشی ایجاد شده بین لایه‌ها، رفع می‌شود.

ویسکوزیته‌ی گازها با استفاده از تئوری جنبشی گازها:

اتم‌ها را بصورت گره‌های صلب در نظر می‌گیریم و قانون بقای موستوم را نیز در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض می‌کنیم نیروهای بین مولکولی واقعی وجود ندارد. (این اتفاق در فشارهای کم رخ می‌دهد) فرض ساده‌شونده‌ی دیگر، دمای زیاد است. برخورد بین اتم‌ها بصورت انعطافی است.

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$$

سرعت متوسط اتم‌ها

$m$ : جرم اتم  
 $k$ : ثابت بولتزمن  
 $T$ : دمای مطلق

$\lambda$ : فاصله آزاد متوسط (mean free path)  
 $n$ : غلظت اتمی

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

متوسط فاصله‌ی بین هر دو برخورد

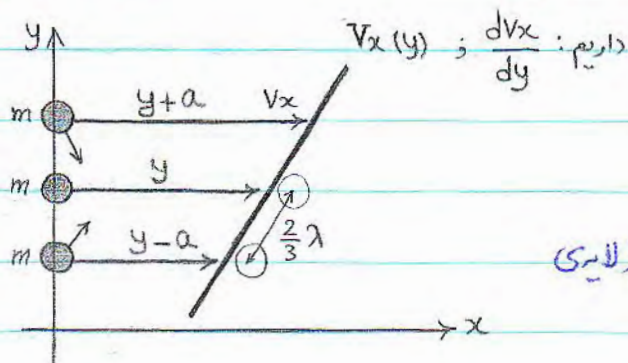
$d$ : قطرانم - بزرگی است که هر چه  $d$  و  $n$  بیشتر باشد،  $\lambda$  کمتری شود.

$$Z = \frac{1}{4} n \bar{u}$$

$Z$ : شار اتمی = تعداد اتم‌ها شونده در واحد زمان

یا عبور

از سطح اتمی عبور می‌کند.



لایه مرجع :  $y$

مقدار مومنتوم وارد شده یا خارج شده از لایه

مرجع راهی خواهیم حساب کنیم.

$$m v_x|_{y+a} = m \left( v_x|_y + \frac{2}{3} \lambda \frac{dv_x}{dy} \right)$$

$$m v_x|_{y-a} = m \left( v_x|_y - \frac{2}{3} \lambda \frac{dv_x}{dy} \right)$$

(تنش برشی = فشار مومنتوم)

$$\tau_{yx} = 2m \left[ v_x|_{y-a} - v_x|_{y+a} \right]$$

$$\rightarrow \tau_{yx} = -\frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda \frac{dv_x}{dy}$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda$$

$$\rightarrow \mu = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2}$$

$$\mu \propto T^{0.5}$$

در این رابطه، فشار وجود ندارد.



تذکره در فشارهای کم و میکوزیته‌ی گازها تابعی از فشار نمی باشد. تبدیل خطاهای ناشی از

فرض‌های ساده‌کننده  $\mu \propto T^{\alpha}$  که  $\alpha$  بین 0.6 تا 1 متغیر است.

$$* \mu = 2.67 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

M : وزن مولکولی  $\Omega_{\mu}$  : پارامتر لئونارد جونز (وابسته به دما)

$\sigma$  : قطر مشخصه‌ای که کمی با قطر واقعی فرق می‌کند. این معادله دقیقتر است و فرض‌های

ساده‌کننده ندارد.

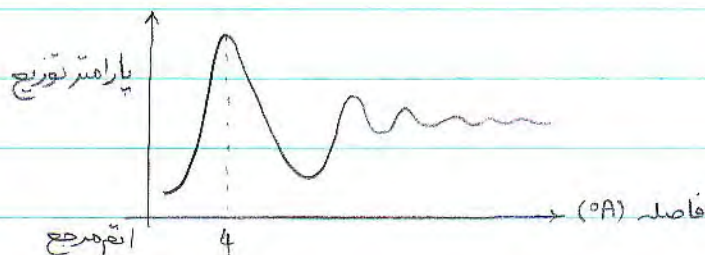
### ویسکوزیته‌ی مایعات :

برای مایعات رابطی کلی وجود ندارد. ساختار مایعات ساختاری بین گازها و جامدات

است. در جامدات هم نظم در فاصله نزدیک (short range ordering) و هم نظم در فواصل

دور (long range ordering) وجود دارد. اما در مایعات در فاصله نزدیک تا حدودی نظم (یا

فشاردهی آنها) وجود دارد.



گازها هم کاملاً بی نظم هستند.

رابطه‌ی زیر برای ویسکوزیته‌ی مایعات وجود دارد:

$$\mu = A \exp\left(\frac{\Delta G^*_{vis}}{RT}\right)$$

$\Delta G^*_{vis}$ : انرژی اکتیواسیون ویسکوزیته  
 $A$ : ثابت تجربی

نظریه‌ی حفزه (Eyring):

وجود حفزه در داخل مایعات اثبات نشده ولی نتایج خوبی دارد.

انرژی اکتیواسیون ویسکوزیته، انرژی لازم است تا یک حفزه جای یک اتم را بگیرد. به عبارتی برای

اینکه حفزه حرکت کند باید به نیروهای بین مولکولی یا اتمی غلبه کند.

$$A \approx \frac{N_0 h}{\hat{V}}$$

$N_0$ : عدد آووگادرو

$\hat{V}$ : حجم مولی

$h$ : ثابت پلانک

این رابطه برای فلزات نتیجه خوبی نمی‌دهد. برای فلزات تئوری زیر وجود دارد (چپین)

$$\Delta G^*_{vis} \approx 0.41 \Delta \hat{U}_{vap} \approx 9.4 RT_6$$

تئوری چپین (Chapman):

$$\mu^* v^{*2} = f(T^*)$$



$\mu^*$ : reduced viscosity       $V^*$ : حجم کاهش یافته

$T^*$ : دمای کاهش یافته

$$\mu^* = \frac{\mu s^2 N_0}{\sqrt{MRT}}$$

$S$ : فاصله بین انتی در صفر کلین

$$V^* = \frac{1}{nS^3}$$

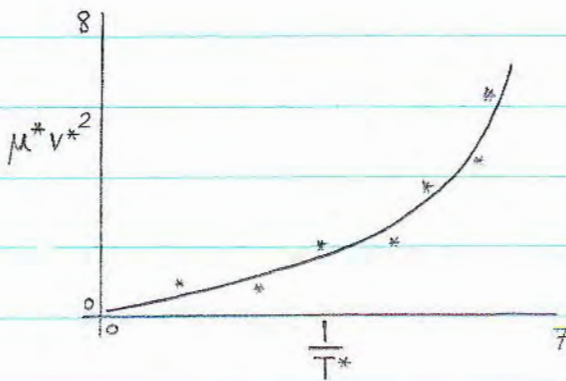
$n$ : تعداد اتم هالروا در واحد حجم

$$T^* = \frac{KT}{\epsilon}$$

$\epsilon$ : پارامتر انرژی

$$\frac{\epsilon}{K} = 5.2 T_m$$

$\mu^*$ ،  $V^*$  و  $T^*$  بدون بعد هستند.



ویسکوزیته‌ی سرباره :

سرباره ها، مذاب‌هایی هستند که فازهای اکسیدی دارند.

اکسیدهاسته دسته‌اند: اکسیدهای اسیدی - اکسیدهای قلیائی - اکسیدهای آمفوتر

اکسیدهای اسیدی معروف:  $As_2O_3$  -  $P_2O_5$  -  $SiO_2$

اکسیدهای قلیائی معروف: آهک (CaO) ، MgO ، Na<sub>2</sub>O . این اکسیدها دهنده

یون اکسیدین هستند . اما اکسیدهای اسیدی گیرنده یون اکسیدین هستند . (کپلس  $O^{-2}$  → )



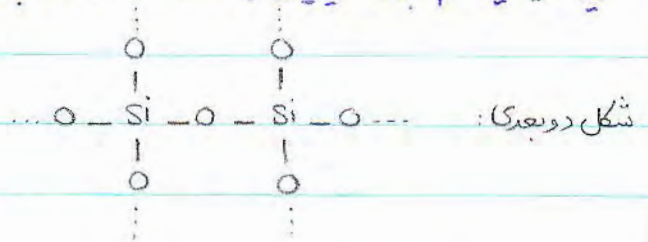
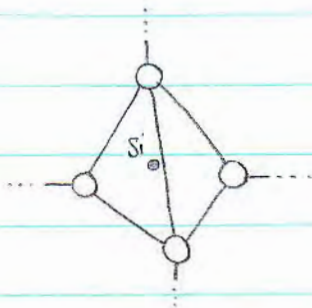
آهک‌ترهای معروف: PbO ، Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> . بنا به مصیبتی که در آن قرار می‌گیرند رفتار اسیدی

یا بازی دارند .

سرباره‌ها ، سیالیت خیلی کمی دارند .  $\mu = 1.5 \times 10^5$  Poise (T=1940°C) SiO<sub>2</sub> :

سیلیس

این سیالیت کم برای سیلیس به ساختار آن مربوط می‌شود:



در فواصل نزدیک نظم زیاد است . هم چنین پیوندهای بین Si و O نیز خیلی مستحکم است

و برای اینکه یک اتم بتواند حرکت کند ، کل شبکه می‌خواهد حرکت کند و در ضمن پیوندهای فوق‌باید

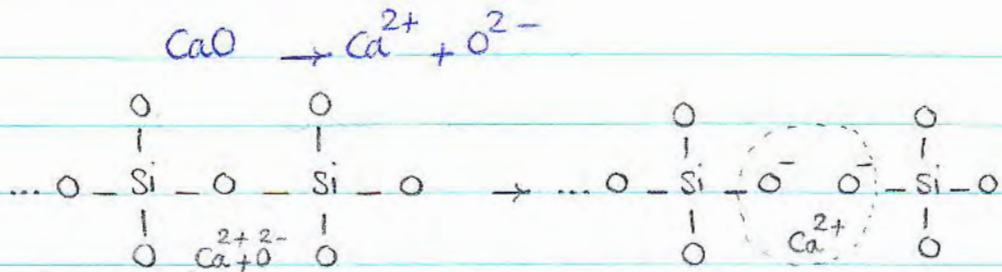
از بین بروند . این مطلب برای SiO<sub>2</sub> خاص است .

وقتی CaO وارد شبکه می‌شود ، سیالیت زیاد می‌شود و هر چه مقدار CaO بیشتر



شود، سیالیت هم زیاد می شود. زیرا  $CaO$  وقتی اضافه می شود، تجزیه

می شود. (بدلیل اختلاف شعاع اتمی و هم چنین بار بیشتر نسبت به  $Si-O$ )



$$\mu = AT \exp\left(\frac{1000 B}{T}\right) \quad \text{B: ثابت تجربی}$$

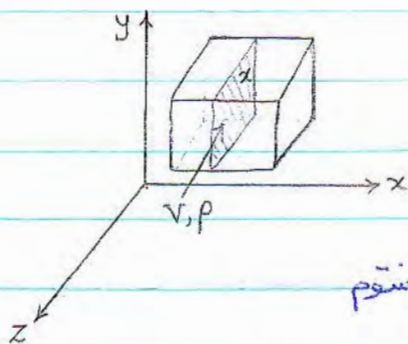
**نتیجه:** ویسکوزیته مکانیزم مولکولی است. بعبارتی انتقال مومنتوم بر اساس مکانیزم

ویسکوزیته مکانیزمی زمان بر است زیرا وابسته به حرکت اتم ها با سرعت محدود می باشد.

اما انتقال مومنتوم فقط بر این صورت نمی باشد.

**انتقال مومنتوم جابه جایی:**

سیالی با سرعت  $V$  و چگالی  $\rho$  از لمان حجمی زیر عبور می کند. در این جا کاری به حرکت مولکول ها



نداریم.

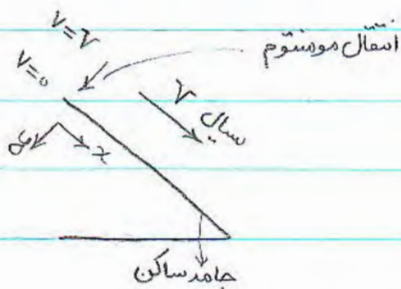
سرعت خطی  
↑

$$\text{سرعت حجمی} \times \frac{\text{مومنتوم}}{\text{حجم}} = \text{سطح} \times \frac{\text{زمان}}{\text{مومنتوم}}$$

درجهت  $x$  :  $\rho V v_x$  : شار مومنتوم جابه جایی

درجهت  $y$  :  $\rho V v_y$

$V$  : سرعت مومنتوم درجهت سرعت جابه جایی دارد.



اما برای مومنتوم مولکولی درجهت  $z$  مستقل می شود.

اما مومنتوم جابه جایی نیاز به گرادیان سرعت ندارد.

$$mV = \text{مومنتوم درجهت جابه جایی} \rightarrow \frac{\text{مومنتوم}}{\text{حجم}} = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v$$

$$\rightarrow \text{شار مومنتوم جابه جایی} = \rho \cdot v \cdot \frac{\text{حجم}}{\text{زمان} \times \text{سطح}} = \rho \cdot v \cdot v$$

↓  
سرعت خطی

$\rho \cdot v \cdot v$  : تانسور درجهت دوم است. مثل  $v_x v_x$ . در واقع  $\rho v v$  دارای 9 مؤلفه است:

$$v_{zz} \quad v_{xx} \quad v_{xy} \quad v_{yx} \quad v_{xz} \quad v_{zx} \quad v_{yz} \quad v_{zy} \quad v_{yy}$$

موازته مومنتوم (جریان آرام - لایه ای) : **Laminar flow**

در مورد جریان آرام فرض می کنیم سیال بصورت لایه های مجزا است و سیال بصورت لایه لایه حرکت

می کند و این لایه ها با هم آمیخته نمی شوند.



سرعت انباشتی موشوم = سایر نیروها + ... + سرعت موشوم خروجی - سرعت موشوم ورودی

(چون موشوم دارای بقاست) کمیت با زمان تغییر نمی کند → حالت پایدار

در شرایط steady state ، سرعت انباشتی صفر است.

$$\text{سرعت موشوم} = \frac{\text{موشوم}}{\text{زمان} \times \text{سطح}} \times \text{سطح} = \text{شار موشوم} \times \text{سطح}$$

$$\text{نیرو} = \tau \times \text{سطح}$$

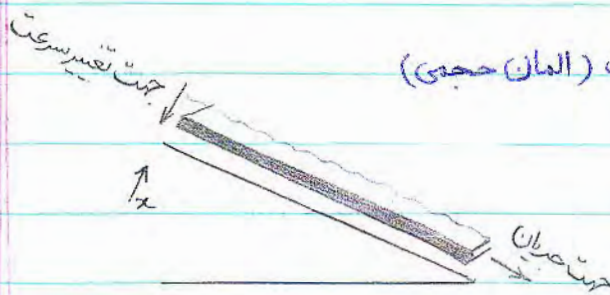
$$\Rightarrow \text{سرعت موشوم} = \text{نیرو}$$

سایر نیروها = ثقل - فشار - فشاری توانه بعنوان ورودی و خروجی هم باشد.

\* مراحل حل مسئله :

1- مشخص کردن مولفه ی سرعت و جهت تغییر جریان که بر درک فیزیکی مسئله مربوطه می شود.

2- نوشتن موازنه ی موشوم برای پوسته ی نازک (المان حجمی)



مثال - این المان باید عمود بر جهت تغییر سرعت

باشد. می توان المان مکعبی هم در نظر گرفت.

3- اعمال شرایط حده ← بدست آوردن معادله دیفرانسیل شار موشوم

4- انگرال گیری ← توزیع فشار مونتوم

5- نوشتن قانون ویسکوزیته نیوتن برای درست آوردن معادله دیفرانسیل سرعت جریان

6- انگرال گیری ← معادله سرعت

7- اعمال شرایط مرزی برای درست آوردن ثابت انگرال

هدف :

معادلات سرعت - معادلات تنش برشی - معادلات تغییرات فشار - معادلات

سرعت متوسط ، سرعت max و غیره .

شرایط مرزی :

1- در فصل مشترک سیال و جامد ، سرعت سیال با سرعت جامد برابر است .

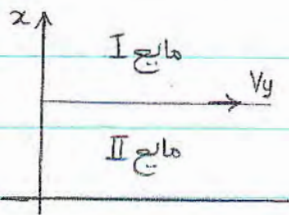
2- در فصل مشترک مایع و گاز : (وقتی سرعت گاز خیلی کم است) تنش برشی در فصل مشترک



3- در فصل مشترک مایع و مایع : اجزای سرعت همسانی در دو سیال با هم برابرند و هم چنین

اجزای تنش برشی . بعبارتی در فصل مشترک ، دو مایع نسبت به هم نمی لغزند .



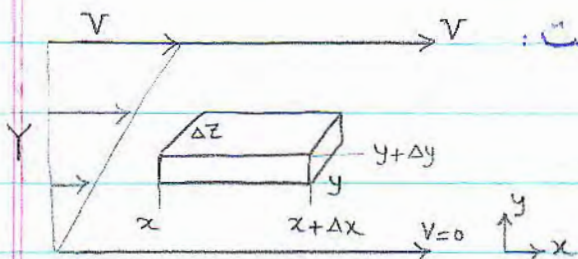


اجزای سرعت همبندی برابر  $v_y, v_z =$

نیویستنی اجزای تنش برشی  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz} =$

مثال. جریان کویتی: (شرایط پایدار) (سیال غیرقابل تراکم)

شکل مسئله مانند اثبات قانون ویسکوزیته نیوتن است:



یک المان حجمی در نظر می‌گیریم.

در جهت انتقال سرعت، در المان  $\Delta$  در نظر می‌گیریم.

در این جا حتماً  $\Delta y$  داریم.

سرعت مؤسسه ورودی

سرعت مؤسسه خروجی

$$\Delta z \cdot \Delta x \cdot \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} - \Delta z \cdot \Delta x \cdot \tau_{yx} \Big|_y$$

داریم  $v_x$

$$v_y = v_z = 0$$

فرض‌های اولیه مسئله:

$$v_x = v_x(y) \quad : \quad v_x \text{ تابعی است از } y$$

چرا تابعی از  $x$  نیست. (برهان خلف) اگر تابعی از  $x$  باشد نیویستنی در سیال ایجاد می‌شود

که تناقض با تعریف سیال دارد. هم چنین تغییرات سرعت در جهت  $x$  در صورتی است که

شرایط پایدار نباشد.

سرعت موئنتوم خروجی      سرعت موئنتوم ورودی

$$\rho v_x^2 \Big|_x \Delta y \Delta z - \rho v_x^2 \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z = 0 \quad \text{موئنتوم جابه جایی صفر است:}$$

نیروی تعلق ناشی از جریانی ندارد. ← ذی نویسیم

$$\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \rightarrow \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0 \rightarrow \tau_{yx} = C_1$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = C_1$$

$$\rightarrow \frac{dv_x}{dy} = -\frac{C_1}{\mu} \rightarrow v_x = -\frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

BCI : شرایط مرزی  $y=0 \rightarrow v_x=0$

$$y=Y \rightarrow v_x=V$$

حل برای  $C_1$  و  $C_2$ :  $v_x = \frac{V}{Y} y$        $\tau_{yx} = -\mu \frac{V}{Y}$

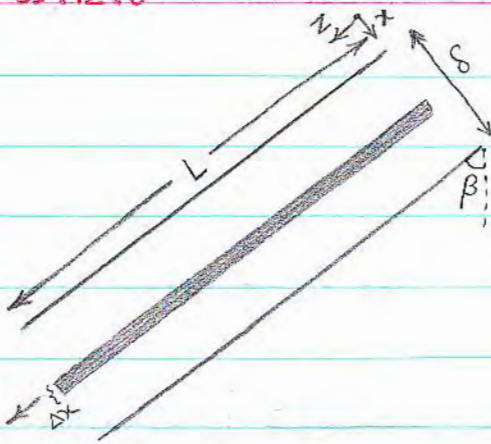
جریان مایع بصورت آرام روی سطح شیب دار:

در اینجا نیروی وزن موجب حرکت سیال می شود. چون جریان آرام است، بنابراین سیال لایه لایه است.

و در لایه در راستای شیب سطح حرکت می کند. هم چنین سیال نیوتنی است و تراکم ناپذیر و پایدار.

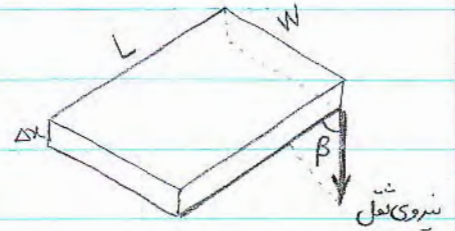
یعنی شتاب صفر است. بنابراین نیروی ویسکوز باید آنقدر بزرگ باشد که بر نیروی ثقل غلبه کند.





$$v_x = v_y = 0$$

$$v_z = v_z(x)$$



درزوی                      عرضی

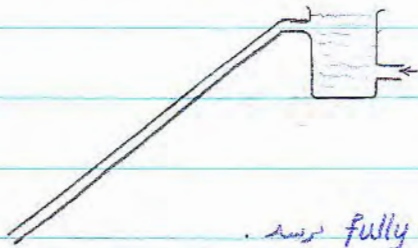
$$LW \tau_{xz} \Big|_x - LW \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x}$$

$$+ W \Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=0} - W \Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=l}$$

$$+ mg \cos \beta$$

نیروی  $mg \sin \beta$  ناشی از جریان نراری.

در اینجا در نقاط ابتدا و انتها تغییرات فشار نداریم و در هر دو نقطه فوق، فشار مساوی فشار جو است.



در ابتدای مسیر چون سرعت صفر است پس تا

مسافتی کم شتاب وجود دارد تا به شرایط fully developed flow برسد.

$$\frac{\div L \cdot W \cdot \Delta x}{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xz} \Big|_x - \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow - \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g \cos \beta = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \rho g \cos \beta \cdot x + C_1$$

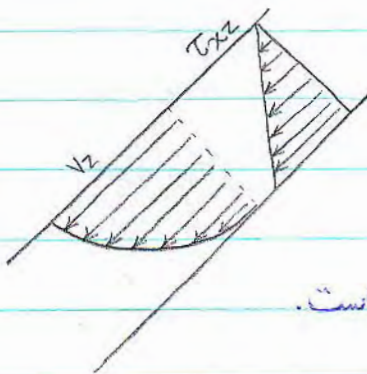
سطح بالایی جریان سیال، با گاز در ارتباط است ← تنش برشی ناچیز است.

$$x=0 \rightarrow \tau_{xz}=0 \rightarrow C_1=0$$

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g \cos \beta x$$

$$\rightarrow v_z = \frac{\rho g \cos \beta}{-2\mu} x^2 + C_2 \quad x = \delta \rightarrow v_z = 0$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} \delta^2 \quad \rightarrow v_z = \frac{\rho g \cos \beta \delta^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$



در نتیجه معادله بصورت مشخصی است.

نتیجه. جایی که تنش صفر است، سرعت

max بوده و جایی که تنش max است، سرعت صفر است.

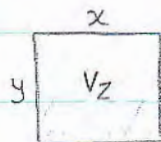
$$v_z(\max) = \frac{\rho g \cos \beta \delta^2}{2\mu}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx dy} = \frac{\rho g \cos \beta \delta^2}{3\mu} = \frac{2}{3} v_z(\max)$$

سرعت حجمی (دبی حجمی):

عبارتست از سطح مقطع در سرعت سطح. چون سرعت در داخل سطح تغییر می‌کند

$$\int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy$$



بصورت انتگرالی نوشته می‌شود:

$$\dot{W} = \rho \int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy$$

سرعت جری (دبی جری):

$$= \frac{\rho^2 g w \delta^3 \cos \beta}{3\mu}$$



عدد رینولدز:

$$Re = \frac{48 \bar{v}_z \rho}{\mu} < 20$$

این عدد نشان دهنده آرام بودن و اغتشاش سیال است. هر چه این عدد بزرگتر باشد، سیال

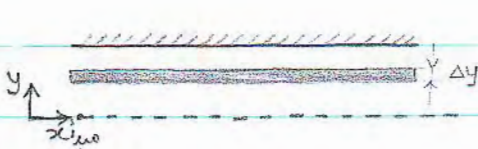
تقابل به اغتشاش دارد. اگر کوچکتر از 20 باشد، سیال جریان آرام دارد.

$$D: \text{ بعد مشخصه} = 4 \text{ برابر ضخامت در مورد سطح شیبدار} \quad Re = \frac{D V \rho}{\mu} \quad \text{رابطه کلی}$$

در حالت کلی وابسته به هندسه مسئله است

\* جریان بین دو سطح موازی:

کانال با سطح مقطع مستطیل با دو صفحه ساکن داریم. نیروی ثقل نقشه در جریان ندارد. در نتیجه



نقطه اختلاف فشار موجب حرکت می شود.  $w$ : عمق

فرض: لایه ای - پایدار - نیوتنی - تراکم ناپذیر

$$v_z = v_y = 0 \quad v_x = v_x(y) \quad \text{... کاملاً شکل یافته (fully developed flow)}$$

$$L.W. \tau_{yx}|_y - L.W. \tau_{yx}|_{y+\Delta y}$$

$$+ W \Delta y P|_{x=0} - W \Delta y P|_{x=L} = 0$$

$$\frac{\div L W \Delta y}{\Delta y \rightarrow 0} \quad \frac{d \tau_{yx}}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} \quad \rightarrow \quad \tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_i$$

85.12.6

P(28)

بنام مقارن، سرعت در وسط max است پس تنش برشی صفر است.

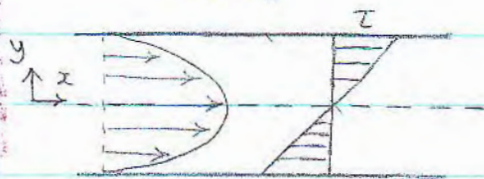
$$y=0 \rightarrow \tau_{yx}=0 \rightarrow C_1=0$$

این شرط مرزی در مراحل بعدی هم بدست می آید.

$$\Rightarrow v_x = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} y^2 + C_2 \quad y=\delta \rightarrow v_x=0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \delta^2 \quad \Rightarrow v_x = \frac{1}{2\mu} (\delta^2 - y^2) \frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$\bar{v}_x = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_x dy dz}{\int_0^w \int_0^\delta dy dz}$$

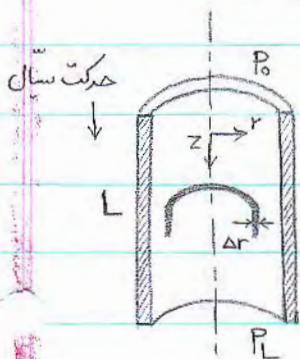


تنش برشی مثبت یا منفی است.

85.12.8

مثال - جریان در داخل لوله:

فرض: پانیاار - جریان لایه ای (بگ جفتی) - تراکم ناپذیر - سیال نیوتونی.



$$v_\theta = v_r = 0 \quad v_z = v_z(r) \quad \text{در محضات استوانه ای}$$

عوامل مؤثر در حرکت سیال: اختلاف فشار - نیروی ثقل



بسته به صورت مسئله می توان فقط یکی از این عوامل را داشت. مثلاً اگر افقی باشد، فقط

اختلاف فشار وجود دارد.

$$(2\pi r \tau_{rz})|_r \cdot L - (2\pi r \tau_{rz})|_{r+\Delta r} \cdot L + 2\pi r \Delta r P_0 - 2\pi r \Delta r P_L + \rho 2\pi r \Delta r L g = 0$$

موسوم جانبی  $(\rho V z^2)$  هم داریم اما در  $Z=L$  و  $Z=0$  باهم برابر بوده و حذف می شوند.

$$\frac{\rightarrow 2\pi L \Delta r}{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r \tau_{rz})|_{r+\Delta r} - (r \tau_{rz})|_r}{\Delta r} = \frac{r(P_0 - P_L)}{L} + \rho g = r \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right)$$

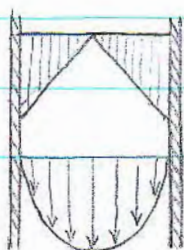
$$\int \rightarrow \tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

B.C.1:  $r=0 \rightarrow$  چون  $\tau_{rz}$  بی نهایت نمی شود  $\rightarrow C_1 = 0$   
( $\tau_{rz}$ : finite)

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left( \frac{P_0 - P_L}{2L\mu} + \frac{\rho g}{2\mu} \right) r \quad \int \rightarrow v_z = - \left( \frac{P_0 - P_L}{4L\mu} + \frac{\rho g}{4\mu} \right) r^2 + C_2$$

B.C.2:  $r=R \rightarrow v_z=0 \rightarrow C_2 = \left( \frac{P_0 - P_L}{4L\mu} + \frac{\rho g}{4\mu} \right) R^2$

$$\rightarrow v_z = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \left( \frac{R^2}{4\mu} \right) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$



$$\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g = (P_0 - P_L) \frac{1}{L}$$

$$P = P + \rho g L$$

فشار تغییر یافته  
(modified pressure)

85.12.8

P(30)

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta \rightarrow \pi R^2} = \frac{\overbrace{P_0 - P_L}^{\text{فشار تغییر یافته}}}{8\mu L} R^2 = \frac{1}{2} v_z(\text{max})$$

سرعت محلی = صورت

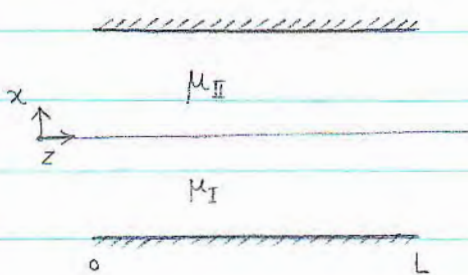
$$\dot{W} = \rho \bar{v}_z \pi R^2 = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4 \rho}{8\mu L} \quad (\text{هاگن پویزول})$$

مفهوم ریاضی جریان آرام در این مثال :

$$Re = \frac{D \bar{v}_z \rho}{\mu} < 2100 \quad \text{شرط آرام بودن}$$

85.12.13

جریان دو سیال نامخلوط :



همه فرض های قبلی در اینجا هم وجود دارد :

معادله جریان مانند حرکت سیال با هم به تنهایی

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{P_0 - P_L}{L} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz}^I = \frac{P_0 - P_L}{L} x + C_1^I \\ \tau_{xz}^{II} = \frac{P_0 - P_L}{L} x + C_1^{II} \end{cases} \quad \text{است}$$

$$\text{B.C.1: } x=0 \quad \tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \Rightarrow C_1^I = C_1^{II} = C_1$$

$$\tau_{xz}^{I \text{ or } II} = \frac{P_0 - P_L}{L} x + C_1 \rightarrow -\mu^I \frac{dv_z^I}{dx} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right)x + C_1$$



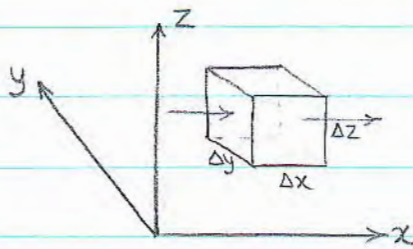
$$\rightarrow V_z^I = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu^I L} x^2 - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I \quad V_z^{II}: \text{به همین ترتیب}$$

$$\text{B.C.2: } x=0 \rightarrow V_z^I = V_z^{II}$$

$$\text{B.C.3: } x=b \rightarrow V_z^{II} = 0$$

$$\text{B.C.4: } x=-b \rightarrow V_z^I = 0$$

معادلات تغییر (برای سیستم های تک درجه و عدم واکنش شیمیایی):



قانون پیوستگی (بقای جرم):

تغییرات ورودی و خروجی = انباشتگی جرم

اولین کار نوشتن معادلات پیوستگی است:  $\rho \times \text{ریحی} = \text{سرعت جرم}$

$$\rightarrow \rho v_x|_x \Delta y \Delta z - \rho v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

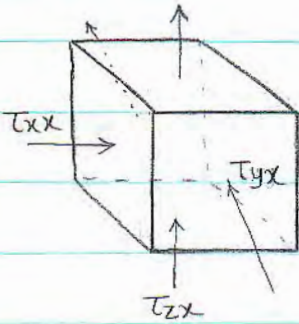
$$\xrightarrow{\div \Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$$

معادلات دیفرانسیل کامل نیست چون مثلاً  $\rho$  هم با زمان، هم با  $x$ ،  $y$  و  $z$  تغییر می کند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (\nabla: \text{divergance}) \quad \text{شکل برداری:}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{برای مایعات ثابت است:}$$

اگر تنش های برشی را هم برای همان در نظر بگیریم:



برای همان محورهای مختصات :

رابطی انباشتی مومنوم را می نویسیم : (سرعت انتقال مومنوم)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \Delta y \Delta z (\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}) + \Delta z \Delta x (\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+\Delta y}) + \dots \\ & + \Delta y \Delta z (T_{xx}|_x - T_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta z \Delta x (T_{yx}|_y - T_{yx}|_{y+\Delta y}) + \dots \\ & + \Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x + \Delta y \Delta z (P_x - P_{x+\Delta x}) = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial t} \end{aligned}$$

g نیز دارای سه مؤلفه  $g_x$  ،  $g_y$  و  $g_z$  است که در این مختصات  $g_z$  داریم.

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial t} \quad \text{آهنگ انباشتی مومنوم} :$$

در شرایط پایدار (steady state) صفر است.

آهنگ انباشتی مومنوم ، همان رابطی  $F=ma$  را می دهد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial t} &= - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right] \\ &- \left[ \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \cdot v] = - [\nabla \cdot \rho v v] - [\nabla \cdot \tau] - \nabla P + \rho g \quad \text{به شکل برداری} :$$



معادله‌ی ویسکوزیته‌ی نیوتن، حالت خاصی از معادلات زیر است:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{برای } \tau_{zz} \text{ هم به همین ترتیب.}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad \text{برای تنش های برشی:}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad \tau_{xz} \text{ هم به همین ترتیب.}$$

در زمانیکه سرعت یک بجره است، به همان قانون ویسکوزیته‌ی نیوتن می‌رسیم.

معادلات ناویر-استوکس برای حالت  $\mu$  و  $\rho$  ثابت:

در این معادلات فقط مؤلفه‌ی سرعت داریم؛ زیرا سرعت نسبت به تنش برشی عملی‌تر است:

$$\rho \left[ \frac{Dv_x}{Dt} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

(Substantial derivative) مشتق ذاتی:  $\frac{D}{Dt}$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu [\nabla^2 \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g}$$

در سرعت‌های خیلی کم نیروهای ویسکوزی بسیار بیشتر از وزن هستند. در حرکت سیال دو

نیروی اصلی وزن و نیروهای مولکولی یا ویسکوزی مؤثرند.

نیروی اصلی وزن و نیروهای مولکولی یا ویسکوزی مؤثرند.  $\frac{Dv}{Dt} = 0$

سرعت خیلی کم: حرکت خزنده (creeping)

$$\rightarrow 0 = -\nabla P + \mu [\nabla^2 v] + \rho g$$

حل مثال لوله با استفاده از این معادلات:

جریان عمودی بود یعنی در جهت  $z$  می دانستیم که  $v_r = v_\theta = 0$

$$v_z = v_z(r, z)$$

تابعیت  $v_z$  به  $r$  را هم می نویسیم:

$$\nabla \cdot v = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [v_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [v_z] = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow v_z \text{ تابعی از } z \text{ نیست.}$$

معادله ناویر - استوکس برای مؤلفه  $r$  از مختصات استوانه ای:

$$\rho \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$+ \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g$$

$$\rightarrow - \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

$$\theta \text{ برای: } \rightarrow - \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$



z برای :  $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z$

P فقط به z بستگی دارد و  $v_z$  هم فقط به r :

$\rightarrow 0 = -\frac{dP}{dz} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] + \rho g_z$

$\rightarrow \frac{dP}{dz} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = C_1$

4 تا ثابت ایجاد می شود (از انتگرال) . شرایط مرزی :

$v_z = \text{غیر بنهایت} : r=0$

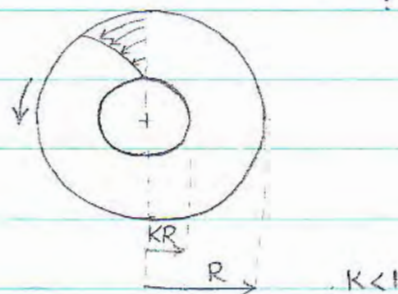
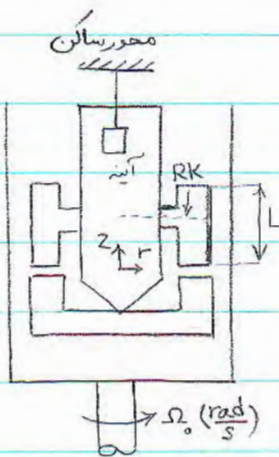
$v_z=0 : r=R$

$z=0 \rightarrow P=P_0$

$z=L : P=P_L$

$\rightarrow v_z = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$

ویسکومتر کویتی :



نصویر از بالا :

$v_\theta = v_\theta(r, \theta)$

$v_z = v_r = 0$

$P = P(z, r)$

تابعی از r : کویتی

تابعی از r : نیروی گریز از مرکز تابعی از z : نیروی ثقل

برای مؤلفه  $\theta$  : (در شرایط steady state)

$$\mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) \right] = 0$$

علامت منفی برای  $\theta$  و بدلیل جهت محور  $z$  است:  $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$  : مؤلفه  $z$

$$r \text{ " } : -\rho \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_\theta) \right) = 0$$

$$\rightarrow V_\theta = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r}$$

$$\text{B.C. 1: } r=R \rightarrow V_\theta = R \Omega_0$$

$$\text{B.C. 2: } r=KR \rightarrow V_\theta = 0$$

$$\rightarrow V_\theta = \Omega_0 R \left( \frac{\frac{r}{RK} - \frac{RK}{r}}{\frac{1}{k} - k} \right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial r} = 0 \rightarrow T_{r\theta} = -\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = -2\mu \Omega_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( \frac{k^2}{1-k^2} \right)$$

$$\text{گشتاور نیرو } T_z = \left( -T_{r\theta} \Big|_{r=RK} \right) \times 2\pi R K L \times \underbrace{RK}_{\text{ارتفاع}} = \omega \cdot \theta_b$$

علامت منفی بدلیل جهت محور  $r$  است. این گشتاور برابر است با گشتاور وارده بر آینه.

$\theta_b$  زاویه آینه.  $\leftarrow \mu$  بستگی می آید.

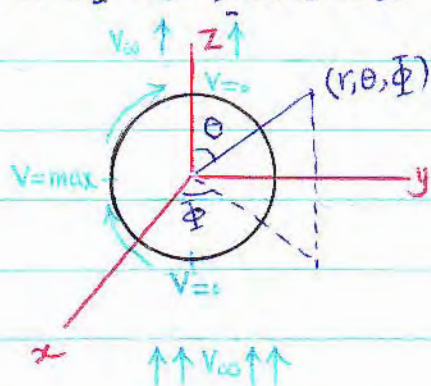


جریان لغزنده (خزشی) به دور کره:

وقتی می‌گوئیم جریان خزشی یعنی اینکه سرعت کم است و شتاب صفر می‌باشد. در این جا فرض

می‌کنیم  $Re < 0.1$  که موجب می‌شود جملات مربوط به شتاب صفر است.

می‌توان فرض کرد که سیال با سرعت  $V_{\infty}$  (رفواصل دورتر سرعت یکنواخت است)



به سمت جامد ساکن می‌آید.

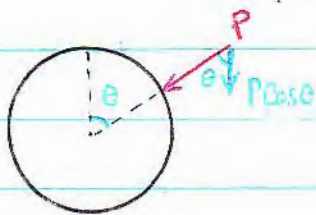
$v_{\theta}, v_r$  داریم. اما  $v_{\phi} = 0$

از حل معادلات پیشرفته ریاضی:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_{\infty}}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\theta$$

$$P = P_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\mu V_{\infty}}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$

هدف: مولفه‌ی درجهت جریان سیال، نیروهای وارد بر جامد؟



چون  $P$  هم با  $\theta$  و هم با  $r$  متغیر است باید انسترال

بگیریم:

$$F_n = \int P \cos\theta \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (P|_{r=R, z=r\cos\theta} \cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$F_n = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{سیال}} g + 2 \pi \mu R V_{\infty}$$

نیروی اول از نوع ارشمیدسی است پس نتیجه می شود که نیروی ارشمیدسی چه در سیال ساکن و

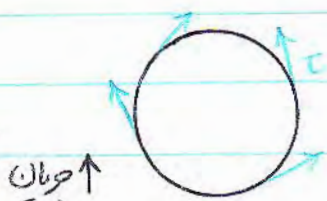
چه در سیال متحرک وجود دارد و همواره در جهت کاهش نیروی وزن است.

جمله دوم نیروی  $F_n$  یعنی  $2 \pi \mu R V_{\infty}$  از نوع نیروی drag است که از نوع

کشش بوده و مخالفت با جریان می کند.

تنش های برشی بر لای چسبندگی سیال به سطح جامد بوجود می آید. این تنش ها مماسی اند.

هم چنین این تنش ها موجب استهلاك می شوند. (استهلاك نیرو).



$$F_{\tau} = \int (\tau_{ro} |_{R} \sin \theta) dA$$

$$= 4 \pi R V_{\infty} \mu$$

این نیرو از لحاظ ظاهری شبیه نیروی drag است پس این نیرو هم drag است. و موجب

استهلاك نیرو می شود. وجود جامد در داخل سیال موجب نیروی مقاوم (اصططاک) می شود و اگر

جامدی در نزدیکی سیال نباشد، سیال بدون افت فشار و سرعت حرکت می کند.

$$F_D = 6 \pi \mu R V_{\infty} \quad (\text{درگ کل}) \quad \text{قانون استوکس:}$$



اگر یک سرباره در مزاب باشد با چه سرعتی بالا می آید و با چه سرعتی ته نشین می شود؟



عوط پر شدن :



رسوب کردن :

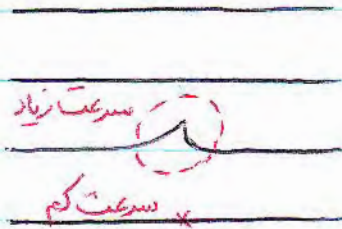
$F_D$  : با جریان سیال مخالفت دارد .

وقتی که سیال ساکن و جامد متحرک باشد ، باز هم ، مطابق قلی صادق است .

**Turbulent Flow :**

**جریان نا آرام :**

وقتی یک لایه از سیال سرعتی متفاوت با لایه های دیگر دارد

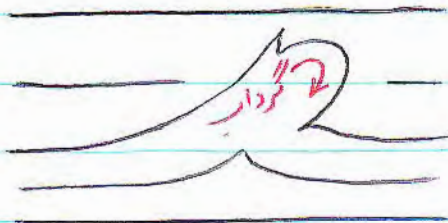


مولکول ها در جهتی حرکت می کنند که اختلاف سرعت

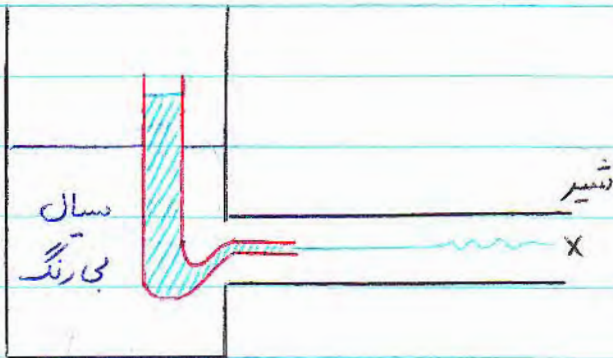
را از بین ببرند . در نتیجه موافق مولکولی (ویسکوزی) داریم

و چون این مکانیزم زمان بر است برای زمانی است که سرعت کم باشد . اگر سرعت زیاد باشد ، زمان

کافی برای مکانیزم ویسکوزی وجود ندارد . بنابراین مکانیزم از بین برنده اختلاف سرعت انجام نمی شود



آزمایش رینولدز:



اگر شیر باز شود، حرکت سیال رنگی در ابتدای مسیر آرام بوده و با دور شدن شیر

دارای اعوجاج می شود. و بعد از اعوجاج سیال رنگی در سیال بی رنگ محو می شود. هر چه

شیر بیشتر باز شود، اعوجاج در فواصل نزدیکتری شروع می شود.

$$Re = \frac{\text{نیروی اینرسی} \rightarrow \text{موجب اغتشاش}}{\text{نیروی ویسکوز} \rightarrow \text{موجب آرام بودن}}$$

عدد  $Re$  (رینولدز) بدون بعد است. روابط زیر از لحاظ دیمانسیون بیان شده اند:

$$\left. \begin{aligned} (اینرسی) \quad F_i &= ma = \rho L^3 \frac{V^2}{L} \\ (ویسکوز) \quad F_v &= \tau L^2 = \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu VL \end{aligned} \right\} \Rightarrow Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

در صورت کسر  $\rho$  داریم که مشخصه جرم است.  $L$  نیز از روی هندسه مسئله تعیین می شود.

مثلاً در سطح شیبه  $L$ ، 4 برابر ضخامت است.

$$\frac{v_z}{v_{z,max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{برای جریان آرام:}$$

$$P_o - P_L = \left(\frac{8\mu L}{\pi R^4}\right) \dot{V}$$



برای جریان turbulent :

$$\frac{\bar{v}_z}{v_{z,max}} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

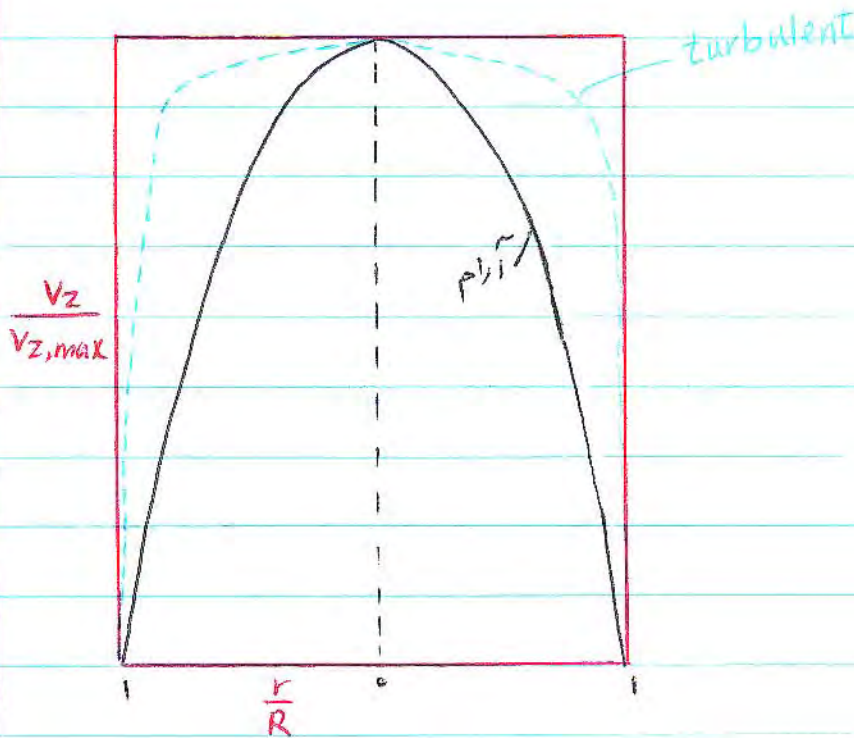
سرعت متوسط زمانی

$$P_0 - P_L \approx 0.198 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\mu^{1/4} L}{\rho R^{19/4}}\right) \dot{w}^{7/4}$$

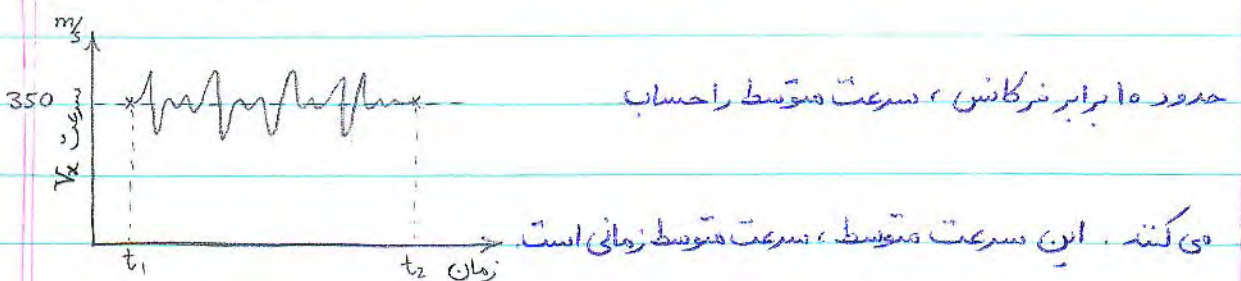
روابط فوق ، تجربی می باشند .

از مقایسه ی روابط ، در W های مختلف ، اونت فشار در جریان turbulent بسیار

جریان آرام است .



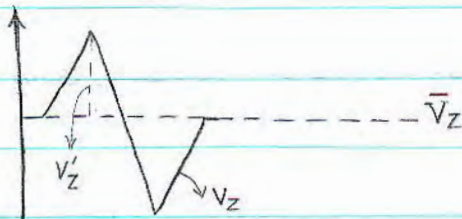
از خصوصیات جریان نا آرام این است که در هر لحظه سرعت تغییر می کند . برای رفع این مشکل



$$\bar{V}_x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_x dt \quad (\text{Time average velocity})$$

$$\bar{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

اگر دامنه‌ی نویسان در نمودار قبلی بیشتر باشد به این معناست که جریان ناآرام تر است.



$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

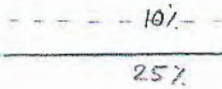
$$\bar{v}'_z = 0$$

$$I = \frac{\sqrt{(v'_z)^2}}{\bar{v}_z}$$

10-25%

شدت ناآرام بودن :

شدت توربولنت در مرکز لوله و



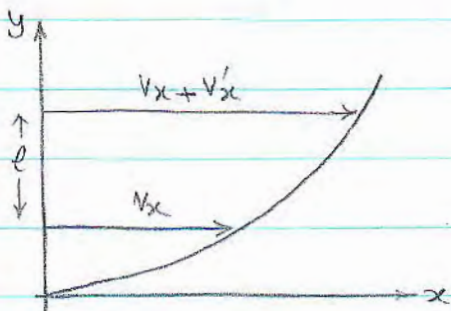
دو باره فرق می‌کند.

تئوری توربولنس پرندل :

مطابق این تئوری در جریان ناآرام برخلاف جریان آرام عامل انتقال موثر است، حرکت نوده‌ای

از اتم هاست. حرکت این نوده بصورت ناگهانی است. در جریان آرام فاصله موجود در نمودار را

فاصله بین اتمی تعریف کردیم اما در اینجا طول مشخصه  $(\ell)$  را در نظر می‌گیریم که وابسته به ابعاد سیال است.

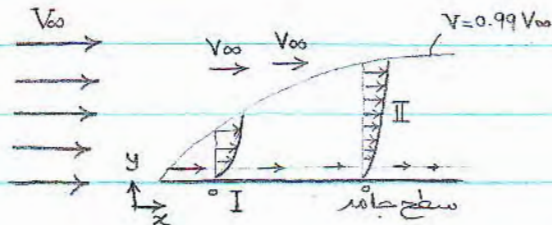


$$\bar{\tau}_{yx}^t = -\rho \ell \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^2$$



لایه های مرزی :

در مجاورت سطح جامد، سرعت لایه های مجاور تا خط فرضی زیر، با گذشت زمان کم می شود.



در I، چون طول (مسافت) کم است

پس گرادیان سرعت نسبت به II بیشتر است.

البته سرعت ابتدایی و انتهای هر دو برابر است (0 - 0.99 V∞)

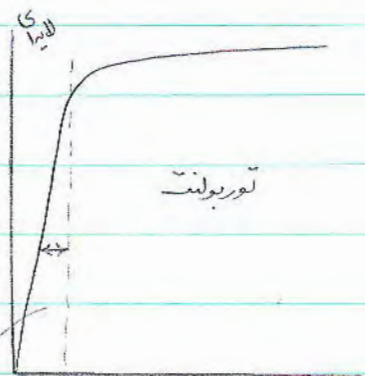
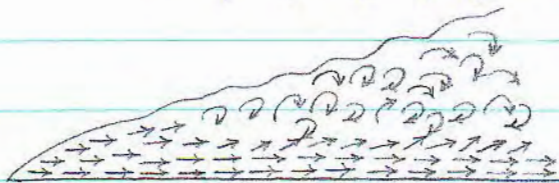
$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

$dv_x$  در لایه مرزی ثابت است (0 - 0.99 V∞)

اما  $dy$  در x های مختلف فرق می کند.

با توجه به این مطلب، در لایه های نزدیک به دیواره جریان آرام داریم چون  $\tau_{yx}$  و یا نیروی

ویسکوز بزرگتر است. هم چنین از محل شروع دیواره نیز جریان آرام است:



در جریان آرام نیروی ویسکوز مهم است و در جریان

نا آرام نیروی اینرسی در منطقه گذار هر دو نیرو مهم

است.

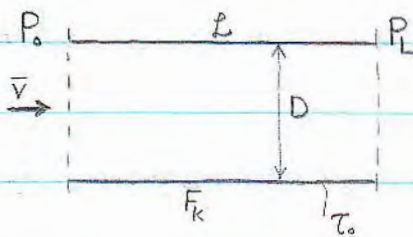
## ضرب اصطکاک :

قبلاً تحت عنوان نیروی درگ برای یک گرد بخت شد و نیروی  $F_k = 6\pi\mu R V \omega$  بدست آمد

در حالت کلی چه برای جریان آرام و چه ناآرام داریم :

$$* F_k = AKf \quad K: \text{انرژی جنبشی در واحد حجم} \quad \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$$

$$A: \text{سطح} \quad f: \text{ضرب اصطکاک} \quad F_k = (2\pi RL) \times \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \times f \quad \text{برای نوله}$$



$$F_k = [(P_0 - P_L) + \rho g(h_0 - h_L)] \pi R^2$$

$$= (P_0 - P_L) \pi R^2$$

$$f = \frac{1}{4} \left( \frac{D}{L} \right) \left( \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2} \right) \quad \text{با حذف } F_k \text{ از دو رابطه فوق داریم:}$$

$$F_k = 2\pi RL \tau_0 \quad \rightarrow \quad f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2}$$

در نوله، هالگن پودیسول رابطه معادل را بدست آورد (برای جریان آرام)

$$1 * \bar{v} = \frac{P_0 - P_L}{8\mu L} R^2 \quad 2 * \text{آرام } f = \frac{16}{Re} \quad ; \quad Re < 2100$$

وقتی جریان آرام است نیازی به رابطه \$f\$ نداریم و رابطه 1 کافی است اما برای جریان ناآرام

این تعریف مفید است.



روابط زیر تجربی است : (برای لوله های صیقلی)

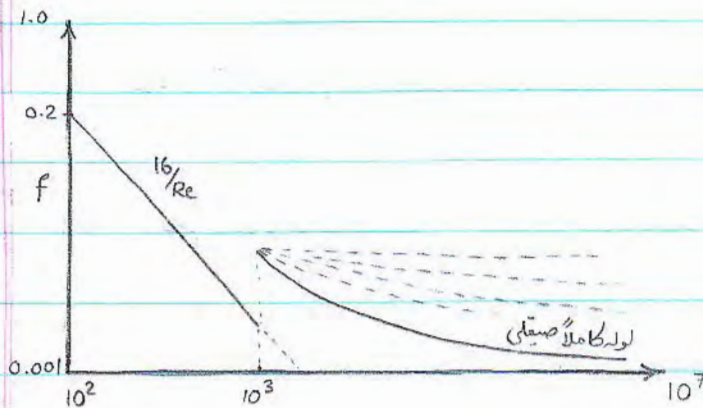
رابطه ی بلازیوس :  $f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}} \quad 2.1 \times 10^3 < Re < 10^5$

رابطه ی پرندل :  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log Re \sqrt{f} - 0.4 \quad 2300 < Re < 4 \times 10^6$

در هر دو رابطه ملاحظه می شود که  $f$  تابعی است از عدد رینولدز ( $Re$ )

در حالت کلی :  $f = f \left( \frac{D}{L}, Re, \frac{k}{D} \text{ or } \frac{\epsilon}{D} \right)$

در جریان های پایا ،  $\frac{D}{L}$  تأثیری در جریان ندارد .

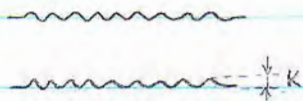


هر چه زبری بیشتر باشد ،  $f$  هم بیشتر

خواهد شد و نمودار غیرخطی به سمت بالا

می آید . ملاحظه می شود که در زبری های

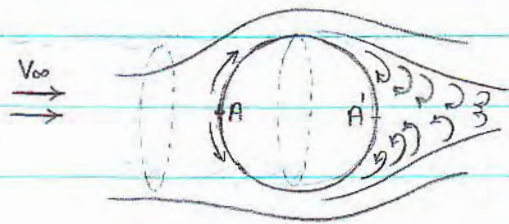
چینی بالا ،  $f$  مستقل از  $Re$  می شود .



در لوله ها برای زبری  $K$  بصورت معادل تعریف می شود :

$f$  کیفیت برون بعد است . (مفهوم فیزیکی ندارد)

برای گره : (قبلاً هم بحث شد)



در A ، سطح عمود بر جریان است در نتیجه

سرعت صفر است . این صفر شدن موجب افزایش

فشار سیال می شود . در نتیجه سیال به سمت بالا می رود . در بالا سرعت max است . در A' دوباره سرعت

صفر است . این کاهش سرعت در سرعت های بالا توسط نیروهای ویسکوزی تا همین دمی شود ، زیرا

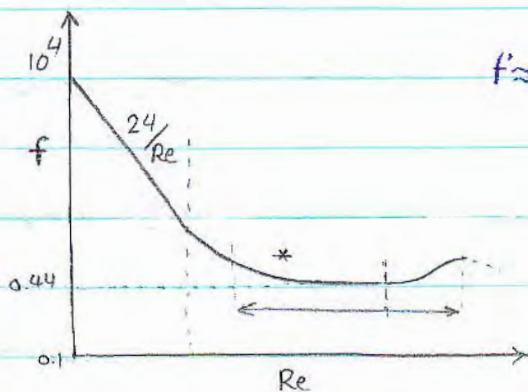
زمان بر است . در نتیجه خود سیال بر می گردد و جریان گردابی ایجاد می کند و مقداری انرژی در این

گرداب ها هدر می رود .

$$F_k = 6\pi\mu R V_\infty \quad \text{فرشی} \quad F_k = f A K = f \pi R^2 \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

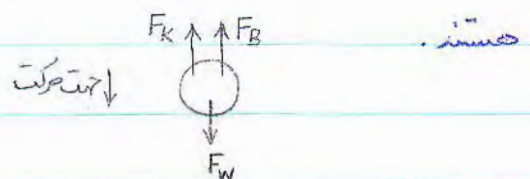
$$\rightarrow f = \frac{24}{Re} \quad Re < 0.1 \quad \text{A : سطح عمود بر جریان است .}$$

$$f = \left( \frac{24}{\sqrt{Re}} + 0.5407 \right)^2 \quad Re < 6000$$



$$f \approx 0.44 \quad 5 \times 10^2 < Re < 10^5$$

$F_k$  و نیروی درگ که قبلاً تعریف شد یکسان



$$F_w = F_B + F_k \rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{جامد}} g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{سیال}} g + f \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$



$$v_{\infty} = \left[ \frac{8Rg(\rho_s - \rho)}{3f\rho} \right]^{1/2}$$

f تابعی از رینولدز است و برای بیست آوردن رینولدز باید سرعت را بدانیم!

بنابراین از روش سعی و خطا استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. توده‌های متخلخل: Porous Media or Packed columns:

مثال عملی آن فیلترها هستند. برای حل مسئله از تئوری یک دسته لوله (Tube bundle) -

مصادیقی ارگان استفاده می‌کنیم. در این روش فرض بر این است که مجموعه ای از لوله داریم که

قطر آن متغیر است. هم چنین بین این لوله‌ها کانال وجود ندارد. قطر این لوله هانسیب به قطر کل



حبابی کم است.

کل توده  $f = \frac{1}{4} \left( \frac{D_p}{L} \right) \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}_s^2}$

$D_p$ : قطر مؤثر ذرات  
↓ particle

سرعت متوسط ظاهری  $\bar{v}_s = \frac{\dot{V}}{P \times A}$

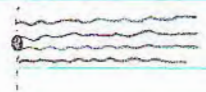
سرعت ظاهری در داخل لوله هایشتر است

$f_{tube}$ : برای یک لوله از کل توده

زیرا سطح مقطع کوچکی دارد.

$P_0 - P_L = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 L f_{tube}$   
سرعت متوسط واقعی  $R_h$

شعاع هیدرولیکی  $R_h = \frac{A_h}{P_w}$   
سطح جریان  $P_w$   
محیط ترشونده



$$f = \frac{1}{4} \frac{D_p}{R_h} \frac{\bar{V}^2}{\bar{V}_s^2} f_{tube}$$

$$\omega = \frac{\text{سطح مقطع حفره}}{\text{سطح کل جریان}} = \text{کسر حفره ها}$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{V}_s} > 1 \quad (\text{سرعت واقعی} < \text{سرعت ظاهری})$$

$$\bar{V}_s = \bar{V} \cdot \omega$$

superficial

$$f \text{ کل توده} = \frac{1}{4 \omega^2} \frac{D_p}{R_h} f_{tube}$$

تذکره: اختلاف فشار کل = اختلاف فشار برای یک لوله.

$$R_h = \frac{A_h \times L}{P_w \times L} = \frac{\text{حجم موجود در جریان}}{\text{کل سطح ترشوند}} = \frac{A_h \times L / V}{P_w \times L / V} = \frac{\omega}{S}$$

$S$ : کل سطح ترشونده بر حجم کل

$$S = S_0 (1 - \omega)$$

$S_0$ : سطح خاص (سطح کل به حجم زره)

$$R_h = \frac{\omega}{S_0 (1 - \omega)}$$

$$S_0 \text{ ذرات کروی} = \frac{(\pi D_p^2)}{(\pi D_p^3/6)} = \frac{6}{D_p} \rightarrow f = \frac{3}{2} \left( \frac{1 - \omega}{\omega^3} \right) f_{tube}$$

هرگز ارام از این لوله ها، بصورت لوله خنثی زیر هستند ← می توان  $f_{tube}$  را بدست آورد.

$$f_{tube} = \frac{16}{Re} \quad (\text{برای لوله صاف گرد})$$

الف - جریان آرام

برای لوله عمیق گرد، به جای 16 از  $\frac{100}{3}$  استفاده می کنیم.

$$f = \frac{(1 - \omega)^2}{\omega^3} \frac{75}{D_p \rho \bar{V}_s / \mu}$$

با قراردادن این فرمول در اولین رابطه، اختلاف فشار بدست می آید.

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = 150 \left( \frac{\mu \bar{V}_s}{D_p^2} \right) \frac{(1 - \omega)^2}{\omega^3}$$

$$\omega < 0.5$$

$$Re < 10$$



$$Re = \frac{D_p \rho \bar{v}_s}{\mu(1-\omega)} < 10$$

معادله فوق، بلیک کوزنی نام دارد.

ب. جریان توربولنت با سرعت زیاد:

با توجه به نمودار  $f - Re$ ، در سرعت‌های زیاد،  $Re$  مستقل از  $f$  (و بالعکس) شده و فقط

$$f_{\text{tube}} = \frac{7}{12}$$

f به زبری بستگی دارد.

$$f = \frac{7}{8} \left( \frac{1-\omega}{\omega^3} \right) \Rightarrow \frac{P_o - P_L}{L} = \frac{7}{4} \left( \frac{\rho \bar{v}_s^2}{D_p} \right) \left( \frac{1-\omega}{\omega^3} \right)$$

$$\frac{D_p \rho \bar{v}_s}{\mu(1-\omega)} > 1000$$

معادله بورک - پلوسر

ج. - برای جریان مابین الف و ب:

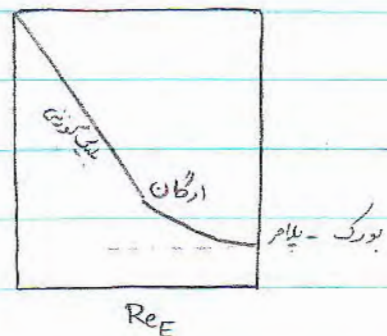
$$\frac{P_o - P_L}{L} = 150 \left( \frac{\mu \bar{v}_s}{D_p^2} \right) \frac{(1-\omega)^2}{\omega^3} + \frac{7}{4} \left( \frac{\rho \bar{v}_s^2}{D_p} \right) \frac{1-\omega}{\omega^3}$$

معادله ارگان :  
Ergun eq.

$$0.1 < \frac{D_p \rho \bar{v}_s}{\mu(1-\omega)} < 10^5$$

$$s_o = \frac{6\lambda}{D_o}$$

برای ذرات غیر کروی:

 $f_E$ 


$$\lambda = \frac{\text{سطح زره}}{\text{سطح کروی هم حجم آن}}$$

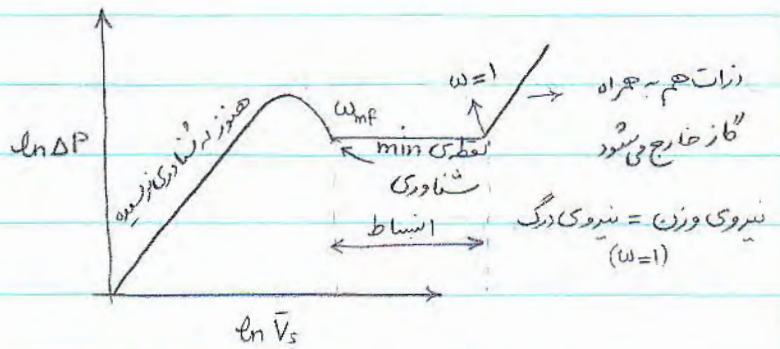
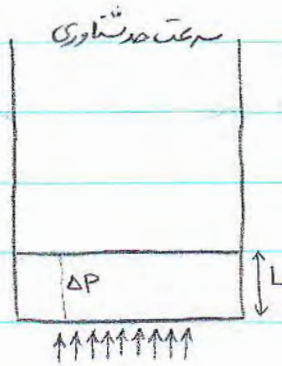
برای کره:  $\lambda = 1$

مثال 2. بسترسایل:

یکی از راکتورهای محکم در متالورژی بسترسایل است. در ابتدای یک توده‌ی جامد متراکم در ته داریم

با ایجاد اختلاف فشار و سیال سرعت پیدا می کند. این  $\Delta P$  با وزن ذرات برابر است  $\leftarrow$  سیال

بصورت فشار در می آید  $\leftarrow$  عبور گاز راحت تر می شود.



$$\Delta P / L = (\rho_s - \rho) g (1 - \omega)$$

$\rho$  سیال

در حالتیکه  $\omega_{mf}$  داریم:

$$\frac{\Delta P}{L} = (\rho_s - \rho) g (1 - \omega) = \frac{150 \mu \bar{v}_s \lambda^2 (1 - \omega)}{D_p^2 \omega^3} + \frac{1.75 \rho \bar{v}_s \lambda (1 - \omega)}{D_p \omega^3}$$

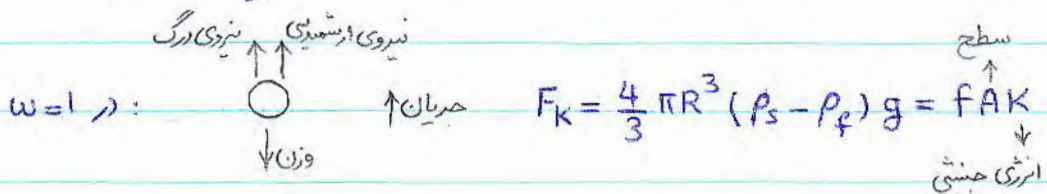
$$\times \frac{D_p \times \rho}{(1 - \omega) \mu^2} \quad ; \quad Re_D = \frac{\rho \bar{v}_s D_p}{\mu} \quad ; \quad Ga = \frac{D_p^3 (\rho_s - \rho) \rho g}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow Re_{D/mf} = (1134 + 0.0408 Ga)^{0.5} - 33.7$$

$$\omega_{mf} \approx 0.14$$

$$\lambda = 1$$

$$\omega = 1 \text{ و } \omega_{mf} \text{ : } \omega^{4.7} Ga = 18 Re_D + 2.7 Re_D^{1.687}$$





$$K = \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$v_t = \left[ \frac{4 d_p (\rho_s - \rho) g}{3 f \rho} \right]^{0.5}$$

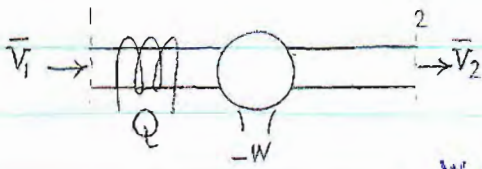
dp: قطر ذرات.

موازنه ماکروسکوپی انرژی (معادله برنولی):

در ابتدا باید قانون بقا را در نظر بگیریم. در این جا بقای مومنتم کاربردی ندارد و باید بقای انرژی

(در ترمودینامیک) را در نظر گرفت. و از این انرژی بخش مکانیکی آنرا جدا می کنیم.

رابطه  $\Delta U = Q - W$  برای سیستم بسته است درحالیکه در سیالات سیستم ها باز است.



در سیالات سه نوع کار داریم:

$$W = W_s + W_T + W_{PV \text{ or } P_r}$$

$\downarrow$  کار کشش       $\downarrow$  کار اصطکاکی       $\downarrow$  کار فشاری یا PV

قانون اول ترمودینامیک برای سیستم باز:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m}_1 \left( \overset{\substack{\text{بر واحد حجم} \\ \uparrow \text{ایستایی بر واحد حجم}}}{h_1 + e_{p1} + e_{k1}} \right) - \dot{m}_2 \left( h_2 + e_{p2} + e_{k2} \right) + \dot{Q} - (\dot{W}_s + \dot{W}_T)$$

$\downarrow$  پتانسیل       $\downarrow$  جنبشی       $\downarrow$  سرعت حرارت

$\dot{m}$ : دبی جرمی

$\dot{A}$ : سرعت A

در شرایط steady state (پایدار) داریم:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad ; \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

$$\Delta e_p = g \Delta z \quad \text{انرژی پتانسیل}$$





86.1.26

P(53)

بعبارتی حد جریان ثابت است. مثلاً اگر انرژی جنبشی زیاد شود، یکی از دو تکی دیگر و یا هر

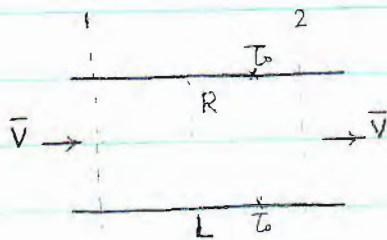
دو کاهش می یابد.

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\bar{V}_2}{g} - \frac{\bar{V}_1}{g} \right] + z_2 - z_1 = h_2 - h_1 = -h_L$$

در شرایطی که اذت انرژی نداریم،  $h_L$  صفر است. اگر جریان ویسکوز باشد ولی بدون تبادل

حرارت و کارشفت، هم چنین تک (ماهم باشد)، خواهیم داشت:

$$h_L = \frac{\omega \tau}{g} = \frac{E_f}{g}$$



برای حالت ساده:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \rightarrow \text{(steady state)}$$

$$z_2 = z_1 \quad \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \quad \rho_2 = \rho_1 \quad (\text{سیال تراکم ناپذیر}) \quad \Delta u = q = W_s = 0$$

در واقع کار اصطکاک موجب اذت فشار می شود.

$$\rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho} = -E_f = -W_\tau = -\frac{\Delta P}{\rho}$$

$$(P_1 - P_2) \pi R^2 = \tau_0 \times 2\pi RL$$

موازنی هوشنوم ماکروسکوپی:

$$\rightarrow \Delta P = \tau_0 \frac{2L}{R} \quad \rightarrow \frac{\Delta P}{\rho} = \tau_0 \frac{2L}{\rho R} \quad \rightarrow E_f = W_\tau = \tau_0 \frac{2L}{\rho R}$$

$$\text{ضریب اصطکاک: } f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2} \quad \rightarrow E_f = 2f \frac{L}{D} \bar{V}^2 \quad ; \quad D = 2R$$

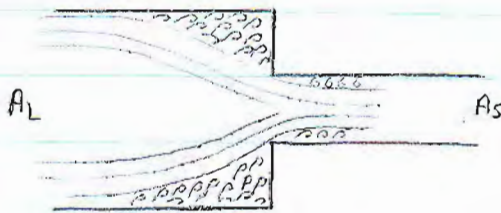
افت اصطکاکی:  $f = \frac{16}{Re}$  : جریان آرام  $\rightarrow E_f = \frac{32\mu\bar{v}L}{D^2\rho}$

برای کلیه مقاطع:  $E_f = \frac{1}{2}\bar{v}^2 \frac{L}{R_h} f$

ضریب اصطکاک:  $\frac{L}{R_h} \cdot f = e_f$  ،  $R_h = \frac{\text{سطح جريان}}{\text{محیط ترشونده}}$  : شعاع هیدرولیکی

$\rightarrow E_f = \frac{1}{2}\bar{v}^2 e_f$

این روابط برای لوله صاف نوشته شده است. اگر تغییر ضخامت داشته باشیم:

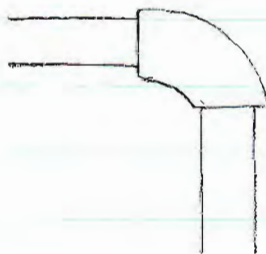


در قسمتی که سطح عمود بر جریان است، سرعت

صفر می شود.

برای انقباضی  $e_f = 0.45 \left(1 - \frac{A_s}{A_L}\right)$  ، برای انبساطی  $e_f = \left(1 - \frac{A_s}{A_L}\right)^2$

برای زانویی:



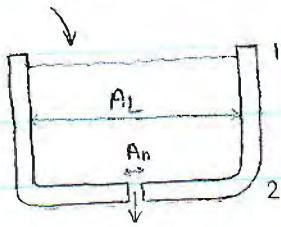
$L_e = \text{طول موثر}$  ،  $\frac{L_e}{D} = 31$

یعنی معادل است با  $31^{cm}$  لوله صاف.

$E_f = \left(2f\frac{L}{D} + \sum 2f\frac{L_e}{D}\right) \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum e_f \bar{v}^2$   
 برای خود لوله  $\uparrow$  ، برای زانویی  $\downarrow$  ، برای تغییر ضخامت  $\downarrow$



## جریان از پاتیل :



مطلوب ، میزان انرژی هدررفته در اثر تخلیه پاتیل است :

شرایط steady state است پس دبی ورودی = دبی خروجی

هم چنین  $P_1 = P_2$  و برابر فشار جواست . اگر انتقادیست باشد :  $\Delta P = \rho gh$

چون سطح مقطع 1 خیلی بیشتر از 2 است :

$$\bar{v}_1 \ll \bar{v}_2$$

سرعت پائین آمدن از دیواره پاتیل ( $\bar{v}_1$ ) خیلی کم است پس از اصطکاک ناشی از دیواره

می توان چشم پوشی کرد . بنابراین فقط اصطکاک ناشی از تغییر سطح مقطع داریم :

$$\frac{\bar{v}^2}{2\beta_2} + g\Delta z + E_f = 0 \quad , \quad E_f = \frac{1}{2} e_f \bar{v}^2$$

$$\frac{\bar{v}_2^2}{2} \left[ \frac{1}{\beta_2} + e_f \right] + g\Delta z = 0 \quad \bar{v}_2 = \underbrace{\left[ \frac{1}{\beta_2} + e_f \right]}_{C_D}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gh}$$

$$\bar{v}_2(\max) = \sqrt{2gh}$$

$h$  : ارتفاع سیال

$$\bar{v}_2 = C_D \sqrt{2gh}$$

$C_D$  : ضریب تخلیه مخزن

حال اگر دبی ورودی و خروجی باهم مساوی نباشد داریم :

$$\text{دبی جری : } \frac{dw}{dt} = \rho \bar{v}_2 A_n$$

$A_n$  : سطح مقطع پاتیل (سوراخ)

$$\frac{dw}{dt} = \rho A_n C_D \sqrt{2gh}$$

$$\int_{h/w}^{h/w_0} \frac{dw}{\sqrt{2gh}} = \int_0^{t_f} \rho A_n C_D dt$$

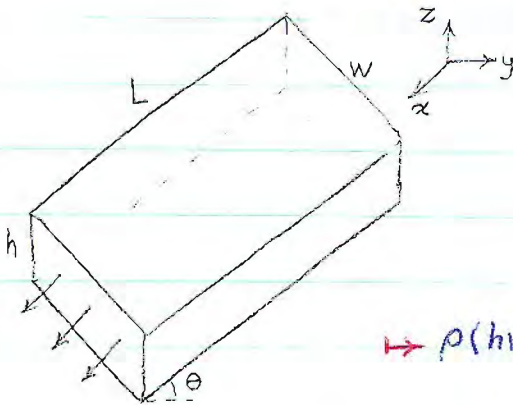
با قراردادن در داخل انگرال داریم: 
$$-\rho \frac{\pi D_L^2}{4} dh = dw \rightarrow$$

$$\rightarrow t_f = \frac{\pi D_L^2}{2 A_n C_D} \left( \frac{h_c}{2g} \right)^{1/2}$$

86.1.28

مثال. جریان روی سطح شیبدار با این تفاوت که جریان نا آرام

است. اما شرایط steady state است یعنی شتاب نداریم.



$$\rho (hwL) g \sin \theta = \tau_0 \underbrace{L(w+2h)}_{\text{سطح تماس}}$$

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2}$$

$$\rightarrow \rho (hwL) g \sin \theta = \frac{1}{2} f \rho \bar{v}^2 L (2h+w)$$
  

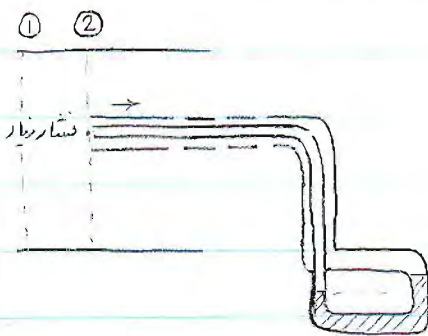
$$= \frac{1}{2} f \rho \bar{v}^2 L \frac{4hw}{De}$$

$$De = 4 \times \frac{\text{مساحت سطح مقطع}}{\text{محیط ترشونده}} = \frac{4hw}{2h+w} \rightarrow \bar{v}^2 = \frac{De g \sin \theta}{2f}$$

$$\bar{v} = 2 \left( \frac{De^{4/3} g \sin \theta}{f^{1/3}} \right)^{1/2}$$

E: زبری مطلق کانال

از این  $\bar{v}$  باید Re را بدست آورد. و بعد ببینیم در زبری مربوطه در نمودار f-Re



\* اوله پیوت: Pitot-static tube

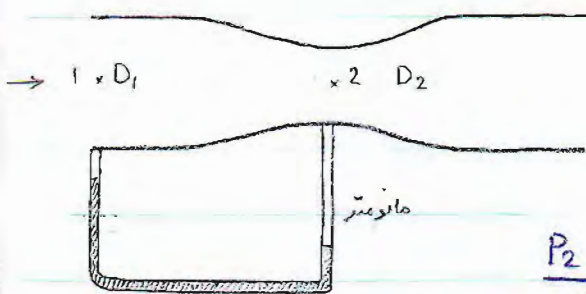
فرض اولیه. اصطکاک را در نظر نمی گیریم



اصطکاک روی سوراخ‌ها وجود دارد .  $\Delta Z = 0$  ;  $\beta = 1$

$$\frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2\beta} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2\beta} \quad P_2 - P_1 = \rho \frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

$$\bar{V}_1 = C_p \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}} \quad . \text{ } C_p \text{ برای لولری بیتوت معلوم است .}$$



ونتوری متر:

$$\Delta Z = 0 \quad , \quad \beta = 1$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2} - \frac{\bar{V}_1^2}{2} = 0$$

$$\text{بجای جرم : } \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \quad \rightarrow \bar{V}_2 = \left[ \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)} \right]^{1/2}$$

چون افت فشار ناشی از اصطکاک است ، یک ضریبی در رابطه قرار می‌گیرد .

$$\bar{V}_2 = \left[ \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)} \right]^{0.5} \times C_D \quad C_D : \text{ ضریب خروج}$$

## «انتقال گرما»

مکانیزم‌های اصلی انتقال حرارت :

1- هدایت حرارتی (مکانیزم مولکولی) *molecular heat transport (Conduction)*

هم برای سیالات و هم برای جامدات وجود دارد .

2- انتقال حرارت جانجائی (همرفتی) *Convective heat transport*

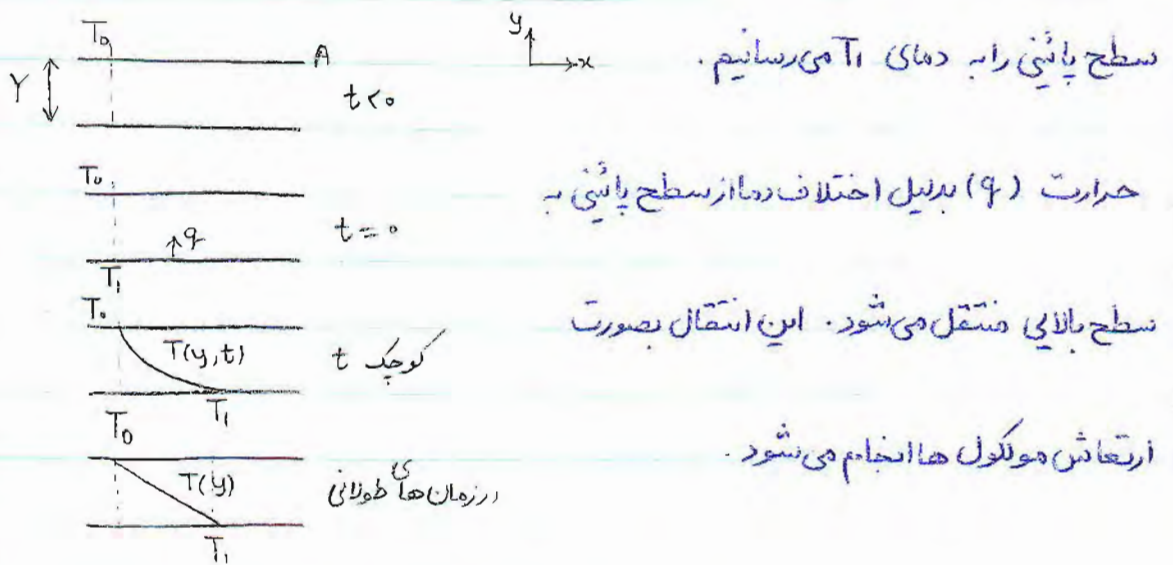
انتقال حرارت نفوذی: که مخلوطی از مورد 1 و 2 است.

*diffusive heat transport.*

3- انتقال حرارت تابشی: نیازی به محیط مادی ندارد. *Radiative heat transport.*

قانون هدایت حرارتی فوری:

سطح بالایی و پائینی جسم در زمان های  $t < 0$ ، هم دمای  $T_0$  است. بصورت ناگهانی



$$Q \propto A \frac{\Delta T}{Y} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{A} = q = k \frac{\Delta T}{Y}$$

سرعت حرارت

$$\Rightarrow q = -k \frac{dT}{dy} \quad \text{قانون انتقال حرارت فوری:}$$

از پائین به بالا،  $\frac{dT}{dy}$  منفی است. اما  $q$  در جهت  $y$  مثبت (بالا) مثبت است. در نتیجه

علامت منفی می‌آید.



↑ شار حرارت

$$q_y = -k \frac{dT}{dy}$$

قانون هدایت حرارتی فوری:

$$\text{SI: } q: \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$k: \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$\text{c.g.s: } q: \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$$

$$k: \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = -k \nabla T$$

معادله‌ی فوق را می‌توان بصورت برداری نیز نوشت:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \quad \text{تعریف نفوذ حرارتی:}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \quad \text{نفوذ مومنتوم:}$$

عدد پرندل را نیز چنین تعریف می‌کنیم:  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  این عدد بدون بعد است.

اگر این عدد خیلی کم باشد یعنی نفوذ حرارتی خیلی بیشتر از نفوذ مومنتوم است. مثل فلزات که

این عدد کوچک است.  $Pr(\text{Hg}) = 0.03$     $Pr(\text{H}_2\text{O}) = 6$     $Pr(\text{O}_2) = 0.7$ (W) سرعت انتقال حرارت:  $q \times A = Q$  ← شار حرارتی

	دما ( $^{\circ}\text{K}$ )	k	دما ( $^{\circ}\text{K}$ )	k	
O <sub>2</sub> {	200	0.018	Cu {	291	384
	300	0.022		شیشه {	
H <sub>2</sub> O {	300	0.61			
	400	0.69			
Hg {	273	8.2			
	473	12.3			

در نتیجه بهترین عایق‌ها، گازها هستند.

با توجه به قانون هدایت فوری داریم:

$$\int q_y dy = - \int_{T_1}^{T_2} k dT$$

اما خود  $k$  تابعی از دماست. بنابراین در محدوده  $T_1 - T_2$   $k_m$  (متوسط) در نظر

می‌گیریم.

$$\rightarrow \int q dy = - \int_{T_1}^{T_2} k dT = k_m (T_2 - T_1)$$

برای انتقال حرارت در جامدات به کتاب گانگنر مراجعه شود.

**مکانیزم‌های انتقال حرارت در جامدات:**

2 - الکترون آزاد

1 - ارتعاشات لایسینگ

انتقال حرارت در جامدات: فلزات - پلی‌کریستال - آمورف - متخلخل

\* برای فلزات با افزایش دما،  $k$  کاهش می‌یابد. و برای بسیاری از آلیاژها و غیرفلزات، با افزایش

دما،  $k$  افزایش می‌یابد.

$$\frac{k}{k_e T} = cte$$

$k_e$  ضریب هدایت الکتریکی (در نظر می‌گیریم):

$$cte = 22.29 \times 10^{-9} \left( \frac{\text{Volt}^2}{\text{K}^2} \right)$$

\* در گازها:  $k = f(T)$  و  $k \neq f(P)$  (در فشارهای کم (کمتر از 10 atm))

$$k = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2} C_v$$

ثابت بولتزمن  $\uparrow$   
 حجم اتمی  $\uparrow$   
 $\downarrow$  قطر اتمی  
 $\downarrow$  ظرفیت حرارتی در حجم ثابت

\* با استفاده از تئوری اتمی برای گازها:



$$k \propto T^{0.5}$$

$$k \neq f(P)$$

$$k = 1.989 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{T}{M}} \rightarrow \text{جرم اتمی}$$

\* رابطه‌ی دقیقتر :

$$\sigma^2 \Omega k \rightarrow \text{پارامتر لئونارد جونز}$$

قطر مشخصه اتمی

مکانیزم انتقال حرارت در مایعات مثل جامدات است. اما معادله‌ی زیر بصورت تجربی

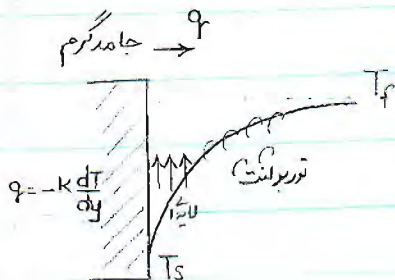
$$k = 2.8 V_s \left[ \frac{N_c}{\hat{V}} \right]^{2/3}$$

بیست آمده است :

$\hat{V}$  : حجم مولار

$V_s$  : سرعت صوت در مایع

انتقال حرارت توسط جابجایی :



قانون سرد شدن نیوتنی :

$$q = h(T_s - T_f)$$

$h$  : ضریب انتقال حرارتی (heat transfer Coefficient)

در پاشش سیال گرم شدن و منبسط می‌شود. بنابراین یک جریان روبه بالا داریم.

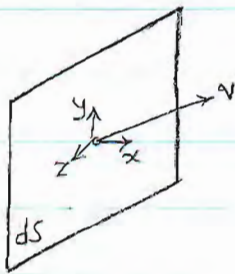
$h$  هم تابع جنس سیال است و هم نحوه‌ی انتقال حرارت.  $h$  می‌تواند به نسبت به پرورد

اینصورت چون  $q$  نمی‌تواند به باشد  $T_s = T_f$ . یعنی سیال و جامد همدما می‌شوند.

انتقال اشعری :

یک سیال با سرعت  $v$  از سطح  $ds$  عبور می‌کند. این سیال مقداری اشعری دارد.

$ds$  عمود بر  $x$  است.



$$E: \left( \frac{\text{انرژی}}{\text{حجم}} \right) \times \left( \frac{\text{حجم}}{\text{زمان}} \right) \times v \times ds = Q \quad \text{سرعت انتقال انرژی}$$

↓  
(بی حجمی)

$$e: \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) v$$

کاری که سیال انجام می دهد:  $dw = F \cdot dr \rightarrow \frac{dw}{dt} = F \frac{dr}{dt} = F \cdot v$

$$\frac{\div A}{\rightarrow} e = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) v + Pv + [\tau \cdot v] + q$$

$\frac{F}{A}$  - تنش که دو گونه است: فشاری و برشی

$$e = \left( \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 + \rho \hat{H} \right) v + [\tau \cdot v] + q$$

برای جامدات  $v=0$  در نتیجه:  $e = q$

موازنه انرژی:

سرعت انباشتی انرژی = سرعت تولید انرژی + سرعت انرژی خروجی - سرعت انرژی ورودی \*

در شرایط پایدار (S.S)، سرعت انباشتی انرژی صفر است.

منابع تولید انرژی عبارتند از: الکتریکی - شیمیایی - هسته‌ای - ویسکوز

شرایط مرزی جهت حل معادلات انتقال حرارت:

۱- درجه حرارت در سطح تماس مشخص  $(T = T_0)$

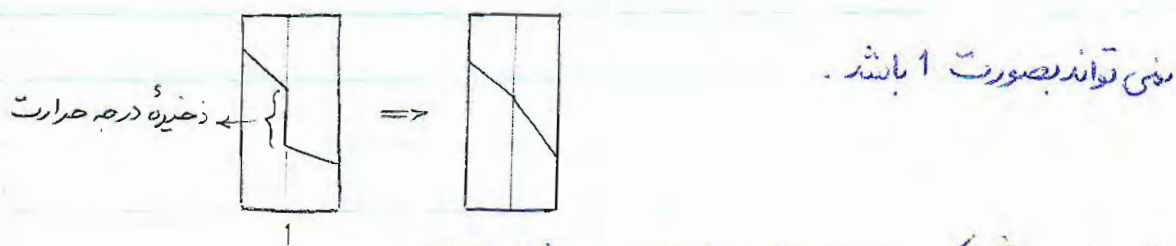
$$q = -k \frac{dT}{dx} = q_0 \quad (T = T_0)$$



2- شار حرارتی در سطح تماس مشخص  $(q = q_0)$

3- در فصل مشترک پیوستگی دما و شار حرارت.

دما در حجم می تواند ذخیره نشود نه در سطح. یعنی گرادیان اختلاف درجه حرارت



4- فصل مشترک جامد و سیال - قانون سرد شدن نیوتنی

$$q = h(T_c - T_b)$$

↑  
دمای سیال  $(T_p, T_{\infty})$

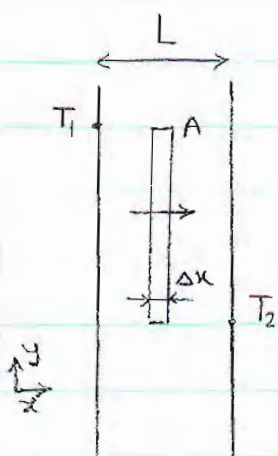
برای جامدات موازنه انرژی به موازنه حرارت تبدیل می شود. چون سرعت در جامدات

صفر است.

- انتقال حرارت در صفحه بینهایت: (S.S.)

جهت انتقال حرارت در جهت اختلاف درجه

حرارت است. از گرم به سرد.



$$q|_x \cdot A - q|_{x+\Delta x} \cdot A = 0 \Rightarrow \frac{-A \cdot \Delta x \cdot q|_{x+\Delta x} - q|_x}{\Delta x} = 0$$

$\Delta x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = 0 \Rightarrow q_x = C_1$$

با سرعت یکنواخت گرما مبادله می کند.

در هر سطح، هر چه انرژی وارد شود، همانقدر خارج می شود. (ذخیره انرژی در جا S.S نداریم)

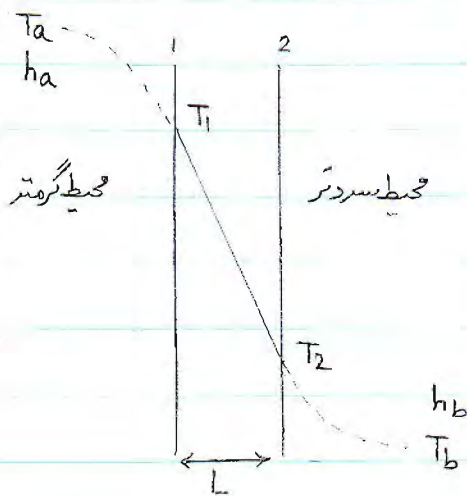
$$q_x = -k \frac{dT}{dx} = C_1 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{C_1}{k} \Rightarrow T = -\frac{C_1}{k}x + C_2$$

$$\text{B.C.1: } x=0 \Rightarrow T=T_1 \Rightarrow C_2=T_1$$

$$\text{B.C.2: } x=L \Rightarrow T=T_2 \Rightarrow T_2 = -\frac{C_1}{k}L + T_1$$

$$\Rightarrow T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{L} \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\Rightarrow q_x = k \frac{T_1 - T_2}{L}$$



$$q = k \frac{T_1 - T_2}{L} = q_0 \quad \text{از مسئله قبل:}$$

$q_0$  مقدار گرمای وارد شده به صفحه‌ی 1 و مقدار

گرمای خارج شده از سطح 2 است.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = ha(T_a - T_1) \quad \text{از گرم به سرد} \\ q_0 = hb(T_2 - T_b) \quad \text{" "} \end{array} \right.$$

$$T_1 - T_2 = \frac{q_0 L}{k} \quad , \quad T_a - T_1 = \frac{q_0}{ha} \quad , \quad T_2 - T_b = \frac{q_0}{hb}$$

$$T_a - T_b = q_0 \left( \frac{L}{k} + \frac{1}{ha} + \frac{1}{hb} \right) \quad \text{با جمع سه معادله‌ی بالا:}$$

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\frac{L}{k} + \frac{1}{ha} + \frac{1}{hb}}$$

ضرایب انتقال حرارت در گاز

نسبت به مسئله قبل، ضرایب حرارت در گاز

اصافه شده است.



$$T_1 = T_a - \frac{q}{h_a} \quad , \quad T_2 = T_b + \frac{q}{h_b}$$

تعریف:  $U$ : ضریب انتقال حرارت کلی:  $\frac{1}{U} = \frac{L}{k} + \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$

$$\rightarrow q = U(T_a - T_b)$$

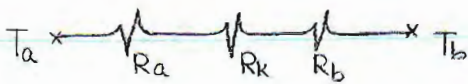
تعریف ضریب مقاومت حرارتی:  $R_k = \frac{L}{kA}$  (جامد)

برای سیال های دو طرف:  $R_{h_a} = \frac{1}{h_a A}$  ؛  $R_{h_b} = \frac{1}{h_b A}$

حل مسئله به روش دوم:

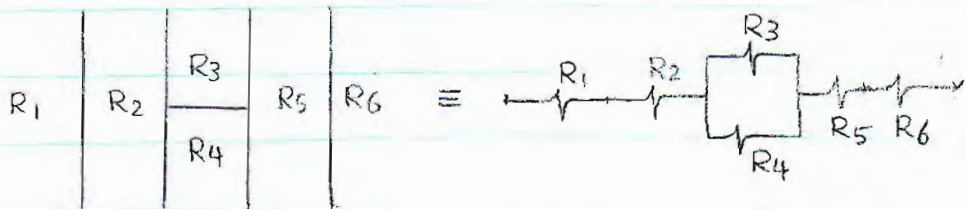
$$q = \frac{(T_a - T_b)/A}{\frac{1}{h_a A} + \frac{1}{h_b A} + \frac{L}{kA}} \Rightarrow Q = \frac{T_a - T_b}{R_k + R_a + R_b}$$

$$\Rightarrow \frac{T_a - T_b}{Q} = R_k + R_a + R_b$$



دقیقاً مثل سه مقاومت سری است:

این روش برای وقتی است که تعداد سیالات زیاد باشد.

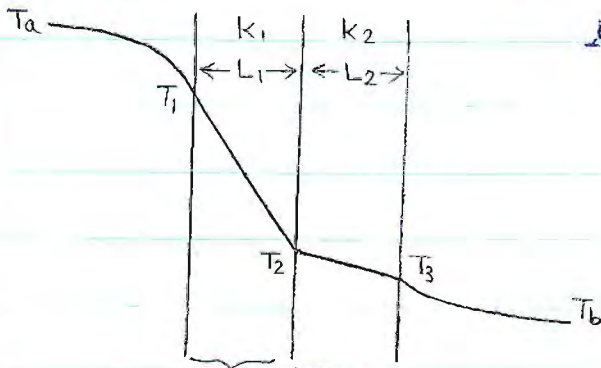


دیواره های مرکب: (S.S.)

کاربرد: کوره ها و راکتورها.

86.2.4

P(66)



مثل دستگیری قبلی است فقط یک شرط

مرزی اضافه می شود.

هدایت حرارتی کم است و مقاومت زیاد

شیب حرارتی کم است. هدایت حرارتی زیاد است.

$$-Q_0 = k_1 A \frac{T_1 - T_2}{L_1}$$

$$-Q_0 = k_2 A \frac{T_2 - T_3}{L_2}$$

$$-Q_0 = h_a A (T_a - T_1)$$

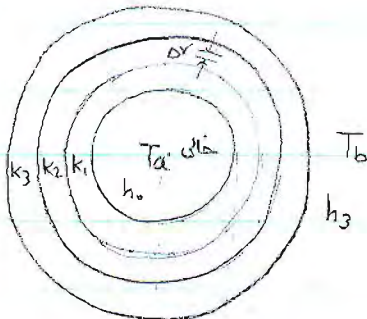
$$-Q_0 = h_b A (T_3 - T_b) \Rightarrow Q = \frac{A(T_a - T_b)}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \sum \frac{L_i}{k_i}} = UA(T_a - T_b)$$

$$T_1 = T_a - \frac{Q}{h_a \cdot A}$$

$$\frac{T_a - T_b}{Q} = R_{ha} + R_{hb} + \sum R_{ki}$$

86.2.9

دیواره مرکب استوانه ای:



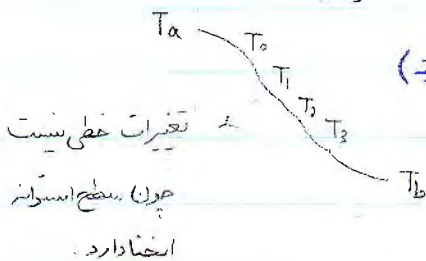
L = طول استوانه

$$Q_r = Q_{r+\Delta r}$$

$$2\pi r L q_r - 2\pi r L q_{r+\Delta r} = 0$$

یعنی Q تغییر نمی کند. اما شار آن با r متغیر است

و با بزرگ شدن r، q کم می شود. (سطح زیاد می شود)



تغییرات خطی نیست چون سطح استوانه ای متغیّر دارد.

$$\Rightarrow \frac{r q_r |_{r+\Delta r} - r q_r |_r}{\Delta r} = 0 \Rightarrow \frac{d(r q_r)}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow r q_r = C_1 \Rightarrow q_r = \frac{C_1}{r} \quad C_1 = r_0 q_0$$



یادآوری: در مسابلی برق:

$$\frac{\text{سرعت تولید حرارت}}{\text{حجم}} = \frac{RI^2}{A.L}$$

$$I: \text{ شدت جریان به واحد سطح} \quad R = \frac{L}{k_e A}$$

$$2\pi r L q_r - 2\pi r L q_{r+\Delta r} + Se \cdot 2\pi r L \Delta r = 0 \quad \text{باینک المان استوانه ای:}$$

$$\Rightarrow \frac{d(rq_r)}{dr} = Se \cdot r \quad \rightarrow \quad rq_r = \frac{1}{2} Se r^2 + C_1$$

$$\rightarrow q_r = \frac{1}{2} Se \cdot r + \frac{C_1}{r} \quad \text{و} \quad q = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\rightarrow T = -\frac{Se}{4k} r^2 - \frac{C_1}{k} \ln r + C_2$$

$$r=R: T=T_0 \quad T_0 = \text{درجه حرارت دمای سطح بیرونی سیم}$$

در غیر این صورت معادله سرد شدن نیوتنی را می نویسیم.

$$r=0 \rightarrow T \rightarrow \infty \quad \rightarrow C_1=0 \quad ; \quad C_2 = T_0 + \frac{Se R^2}{4k}$$

$$\rightarrow T - T_0 = \frac{Se R^2}{4k} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad ; \quad q_r = \frac{Se}{2} r$$

$$T_{\max} - T_0 = \frac{Se R^2}{4k} \quad ; \quad \langle T \rangle - T_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (T - T_0) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{Se R^2}{8k}$$

$$\rightarrow \langle T \rangle - T_0 = \frac{1}{2} (T_{\max} - T_0)$$

$$-r k_1 \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{I} \quad , \quad -r k_2 \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{II} \quad , \quad -r k_3 \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{III}$$

داخل:  $(T_a - T_0) h_0 = q_0 \quad \text{IV}$       بیرون:  $(T_3 - T_b) h_3 = q_3 \quad \text{V}$

$$r_0 q_0 = C = r_3 q_3 \quad \Rightarrow \quad q_3 = \frac{r_0}{r_3} q_0$$

$$\text{I. } (T_0 - T_1) = r_0 q_0 / k_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \quad \text{II. } (T_1 - T_2) = \frac{r_0 q_0}{k_2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\text{III. } (T_2 - T_3) = \frac{r_0 q_0}{k_3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$

$\rightarrow$  با جمع این معادله:  $r_0 q_0 = (T_a - T_b) / \left\{ \frac{1}{r_0 h_0} + \frac{1}{r_3 h_3} + \frac{\ln(r_1/r_0)}{k_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_2} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_3} \right\}$

اگر طول در  $2\pi L$  ضرب شوند،  $Q$  بدست می آید.

$$Q = 2\pi r L q = U_0 2\pi L (T_a - T_b) \Rightarrow \frac{T_a - T_b}{Q} = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{r_0 h_0} + \frac{1}{r_3 h_3} + \dots \right)$$

$$\frac{T_a - T_b}{Q} = R_{h_0} + R_{h_3} + \sum_i R_{k_i} \quad ; \quad R_{h_i} = \frac{1}{2\pi r_i h_i L}$$

$$R_{k_i} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_i L}$$

$T_a - T_b = \Delta V$  ،  $Q = I$  ،  $R_{h_i} = R$  : در واقع می توان شبیه سازی به مدار الکتریکی کرد:

از فرض های این مسئله نگ جفتی بودن انتقال حرارت است.



سیم استوانه ای:

$$\frac{\text{سرعت تولید حرارت}}{\text{حجم}} = Se = \frac{\bar{I}^2}{k_e}$$



معادله‌ی کلی انتقال حرارت تک بعدی:

سرعت انباشتی = سرعت تولید + سرعت خروج - سرعت ورود

$$Aq_x - Aq_{x+\Delta x} + A \overset{Q_v}{\Delta x} = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_p \frac{dT}{dt} \quad x = \text{جهت جریان}$$

$$\rightarrow -\frac{dq}{dx} + Q_v = \rho c_p \frac{dT}{dt} \quad \text{فوری}$$

$$\rightarrow k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q_v = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

تخت:

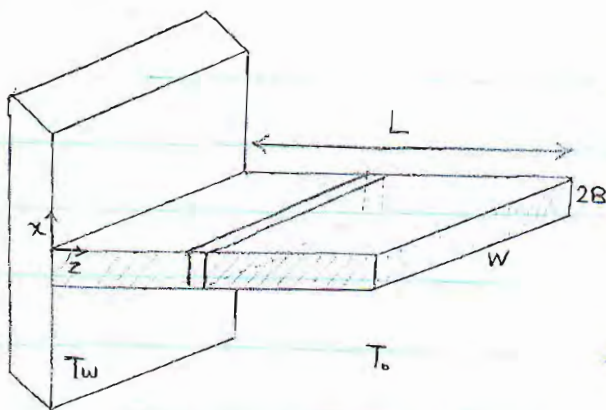
$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{k}{\rho c_p}}_{\alpha \text{ نفوذ حرارتی}} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q_v}{\rho c_p}$$

استوانه و کره:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^n} \frac{d}{dr} \left( r^n \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_v}{\rho c_p}$$

انتقال حرارت در پده‌های سردکننده: (Cooling Fin)

از فلزی استفاده می‌شود که هدایت حرارتی خوبی دارد مثل مس و Al و Cu.



در واقع  $T = T(x, y, z)$  اما ما آن‌گویی در

نم بعد مشکل است.  $T$  بیشتر تابع  $z$

است. پس در جهات دیگر تابعیت وجود

ندارد. در سطوح هاشور خورده برای سادگی کار فرض می‌کنیم انتقال حرارت نداریم.

$$q_z \text{ 2BW} - q_{z+\Delta z} \text{ 2BW} - \underbrace{2\Delta z Wh (T - T_0)}_q = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B} (T - T_0) \quad \text{و} \quad q_z = -k \frac{dT}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{h}{Bk} (T - T_0)$$

$$\text{B.C.1: } z=0 \rightarrow T = T_w$$

$$\text{B.C.2: } z=L \rightarrow \frac{dT}{dz} = 0$$

B.C.2 از آنجایی که انتگرال عینتی فرض کردیم

برای اینکه پارامترهای کسری داشته باشیم از پارامترهای بیرون بعد استفاده می‌کنیم مثل Re

ضریب اصطکاک، عدد پریندل. در اینجا هم از دمای بیرون استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \quad \text{و} \quad \zeta = \frac{z}{L} \quad \text{مختصات بیرون بعد}$$

$$T = (T_w - T_0)\theta + T_0$$

$$dT = (T_w - T_0) d\theta$$

$$d^2 T = (T_w - T_0) d^2 \theta$$

$$z = L\zeta \rightarrow dz = L d\zeta$$

$$(dz)^2 = (L d\zeta)^2$$

$$d^2 z = L^2 d^2 \zeta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} = \frac{hL^2}{kB} \theta \quad \text{و} \quad N^2 = \frac{hL^2}{kB}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} = N^2 \theta$$

$$\Rightarrow \theta = C_1 \cosh N\zeta + C_2 \sinh N\zeta$$

$$\text{B.C.1: } \zeta=0 \quad \text{و} \quad \theta=1$$

$$\text{B.C.2: } \zeta=1 \quad \text{و} \quad \frac{d\theta}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 1$$

$$C_2 = -\tanh N$$



$$\Rightarrow \theta = \frac{\cosh N(1-\zeta)}{\cosh N}$$

$$Q = \int q \, dA = \int h(T-T_0) \, dA = \int_0^W \int_0^L h(T-T_0) \, dz \, dy$$

$$= \int_0^1 \theta \, d\zeta \quad \text{چک شود}$$

$$\eta = \frac{\text{حرارت دفعی - واقعی}}{\text{حرارت دفعی - ایده آل}} = \frac{\int_0^W \int_0^L h(T-T_0) \, dz \, dy}{\int_0^W \int_0^L h(T_w-T_0) \, dz \, dy} = \frac{\tanh N}{N}$$

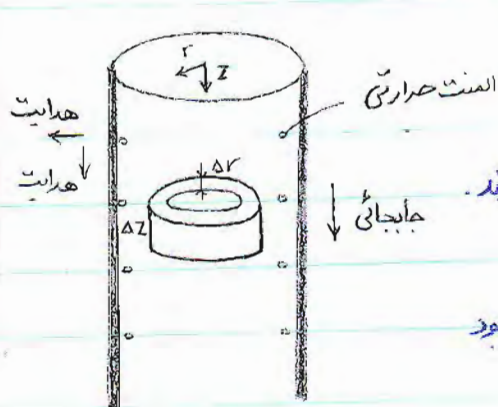
از  $z=0$  تا  $z=L$  ، درجه حرارت کم می شود مثلاً :  $100 - T_w - 80 - 60 - 40$

اما  $T_0 = 20$  است .

کنوکسیون (سرعت) طبیعی - اجباری : (Natural-Forced Convection)

کنوکسیون اجباری برای لوله :

در حالت Steady state ، هم سرعت و هم دما با زمان تغییر نمی کند .



حرکت خود سیال موجب انتقال جابجایی می شود .

اگر سیال ساکن باشد ، دو مکانیزم دیگر هنوز وجود دارند .

حرکت سیال لایه ای است و در جهت r حرکت سیال وجود

ندارد .

$$2\pi r \Delta z q_r - 2\pi (r+\Delta r) \Delta z q_{r+\Delta r}$$

در جهت r :

جست  $z$  : هم جابجایی داریم و هم هدایت :

$$0 = \underbrace{2\pi r \Delta r q_z}_{\text{هدایت}} - \underbrace{2\pi r \Delta r q_{z+\Delta z}}_{\text{جابجایی}} + 2\pi r \Delta r v_z \rho H|_z - 2\pi r \Delta r \rho H|_{z+\Delta z}$$

چون شرایط پایدار است ، تغییرات انرژی مکانیکی نداریم . از بالا به پایین انتقالی زیاد می شود .

$$H : \frac{\text{انرژی}}{\text{جرم}} \quad Q : \frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r \rho v_z \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$q_r = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = c_p \frac{\partial T}{\partial z} \quad , \quad q_z = -k \frac{dT}{dz}$$

$$\Rightarrow v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$



## کنوکسیون طبیعی:



$$v_x = v_y = 0 \quad v_z = v_z(y)$$

$$T(y) \quad \text{در جهت } y, \text{ هدایت داریم}$$

یعنی  $q_y$  . در جهت  $z$  ، هدایت و جابجایی داریم .

چون سرعت کم است (  $\Delta T$  کم است ) از حدمات  $\tau \cdot V$  در جهت  $z$  صرف نظر می کنیم .

$$-\frac{dq_y}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad k \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

$$\text{B.C.1: } y = -B \rightarrow T = T_1$$

$$y = +B \rightarrow T = T_2$$

$$\int \Rightarrow T = \frac{c_1}{k} y + c_2$$

$$T = \bar{T} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{B} y \quad ; \quad \bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

از خصوصیات کنوکسیون طبیعی این است که حرکت سیال وابسته به تغییرات دماست .

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \rho g_z$$

معادله ناویر استوکس:

$\rho$  تابعی از درجه حرارت است . پس نسبت متغیر  $\rho$

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = \mu \frac{d^2 v_z}{dy^2}$$

را حول یک درجه حرارت می نویسیم .

$$\bar{T}: \quad \rho = \rho|_{T=\bar{T}} + \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=\bar{T}} (T - \bar{T}) + \dots$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_P \quad \text{ضریب انبساط حرارتی:}$$

$$\Rightarrow \rho = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T})$$

86: 2. 18

$$\Rightarrow \mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dP}{dz} + \bar{\rho} g - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T}) \quad ; \quad T = \bar{T} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{B} y$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \left( \frac{dP}{dz} + \bar{\rho} g \right) + \frac{1}{2} \bar{\rho} g \beta \frac{\Delta T}{B} y$$

B.C.1:  $y = -B \rightarrow v_z = 0$  \* B.C.2:  $y = +B \rightarrow v_z = 0$

$$\Rightarrow v_z = \frac{(\bar{\rho} g \beta \Delta T)}{12\mu} B^2 \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^3 - \left( \frac{y}{B} \right) \right] + \frac{B^2}{12\mu} \left( \frac{dP}{dz} + \bar{\rho} g \right) \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^2 - 1 \right]$$

دبی کل صفر است چون سیستم بسته است. هر چه در بالا می رود، همانقدر پائین می آید.

$$\int_{-B}^{+B} \rho v_z dy = 0$$

$\Delta T$  کوچک باشد

با این فرض که  $\Delta T^2 = 0$ ، اگر نخواهد دبی جری صفر باشد باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{dP}{dz} + \bar{\rho} g = 0$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{\bar{\rho} g \beta \Delta T}{12\mu} B^2 \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^3 - \left( \frac{y}{B} \right) \right]$$

سرعت متوسط از  $-B$  تا  $B$  صفر است.

$$B.C.0: \langle v_z \rangle = \frac{\int_0^B v_z dy}{\int_0^B dy} = \frac{\bar{\rho} g \beta \Delta T B^2}{48\mu}$$

$$\frac{v}{y} = \frac{y}{B}$$

نصورت بدون بعد:

$$\frac{v}{v_z} = \frac{B v_z \rho}{\mu}$$

$$v_z = \frac{\overbrace{\bar{\rho}^2 g \beta B^3 \Delta T}^{Gr}}{12\mu^2} (y^3 - y)$$

$$Gr = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta \Delta T B^3}{\mu^2} = \frac{\bar{\rho} g B^3 \Delta \rho}{\mu^2} \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T})$$

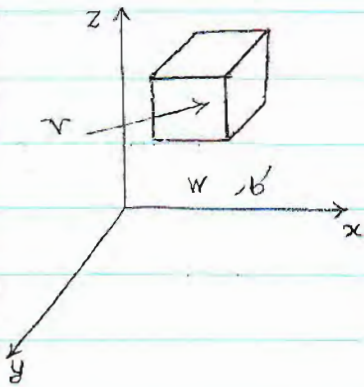


عدد Grashof نسبت دینامی شناوری به ویسکوز است.

اجباری  $Nu = f(Re, Pr)$

طبیعی  $Nu = f(Gr, Pr)$

معادله انرژی:



اختلاف سرعت درونی جرمی = سرعت انباشتنی انرژی (همیشگی و داخلی)

کار انجام شده توسط سرعت کار انجام شده + انرژی بر روی سیستم + انرژی توسط هدایت + اختلاف سرعت درونی - جرمی

$$\Rightarrow \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = \Delta y \Delta z (e|_x - e|_{x+\Delta x})$$

$$+ \Delta x \Delta z (e|_y - e|_{y+\Delta y}) + \dots + \rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = - (\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) v) - (\nabla \cdot q)$$

$$- (\nabla \cdot \rho v) - \nabla \cdot (\tau \cdot v) + \rho [v \cdot g]$$

$$u = H - \frac{P}{\rho} \rightarrow \rho c_p \frac{DT}{Dt} = - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) - \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_P \frac{DP}{Dt} *$$

\* معادله نهایی

فرم های خاص معادله انرژی:

$$\frac{\partial \ln P}{\partial T} = -1$$

۱- گاز ایده آل:

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - P (\nabla \cdot v)$$

86. 2. 23

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots$$

2 - سیال در فشار ثابت یا دانسیته‌ی ثابت:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

3 - جامد:

معادله‌ی بوزنیک (تقریب بوزنیک) کنوکسیون طبیعی:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = (-\nabla P + \bar{\rho} g) - (\nabla \cdot \tau) - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T})$$

در کنوکسیون طبیعی ما چیزی است.

آنالیز ابعادی:

قضیه  $\pi$  یا کینگم:

$n$ : متغیر  $\leftarrow$   $m$ : آحاد اصلی  $\leftarrow$   $n-m$ : گروه بدون بعد

سیال در طول:  $h: (\bar{v}, \rho, k, \mu, c_p, D)$

$\theta$ : زمان -  $M$ : جرم -  $T$ : دما -  $L$ : طول

$\rho: ML^{-3}$  -  $D: L$  -  $\bar{v}: L\theta^{-1}$  -  $c_p: L^2\theta^{-2}T^{-1}$

$\mu: ML^{-1}\theta^{-1}$  -  $k: ML\theta^{-3}T^{-1}$  -  $h: M\theta^{-3}T^{-1}$

$n=7$   $\leftarrow$   $m=4$   $\rightarrow$   $\pi = 7-4=3$



86. 2. 23

به تعداد  $m$ ، متغیر اصلی در نظر می‌گیریم بطوریکه  $D$  و  $K$  در آن باشند. (و سایر دیگر

$\rho$  و  $\bar{V}$  هستند.

$h$  نمی‌تواند متغیر اصلی باشد پس کنار گذاشته می‌شود. بعد، متغیر باقی مانده را به متغیر

اصلی تقسیم می‌کنیم تا بدون بعد شوند.

$$\pi_1 = \frac{h}{V^a D^b \rho^c k^d}$$

$\pi_1$  باید بدون بعد شود.

$$M: 1 = 0a + 0b + c + d \Rightarrow c + d = 1$$

$$L: 0 = a + b - 3c + d \quad , \quad \theta: -3 = -a - 3d \quad , \quad T: -1 = -d$$

علت اینکه چهار متغیر اصلی در نظر گرفتیم بدلیل این معادلات بالا بود. در غیر این صورت

$$a = 0 \quad , \quad b = -1 \quad , \quad c = 0 \quad , \quad d = 1$$

یکی از معادلات بی‌معنی می‌شد.

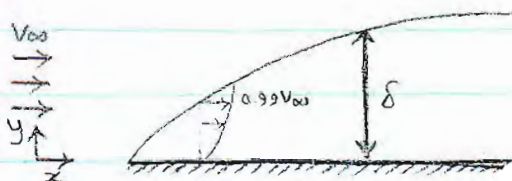
$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{hD}{k} = Nu$$

$$\pi_2 = \frac{\bar{V} \rho D}{\mu} = Re$$

$$\pi_3 = \frac{C_p \mu}{k} = Pr$$

$$\Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

در بحث لایه مرزی سرعت:



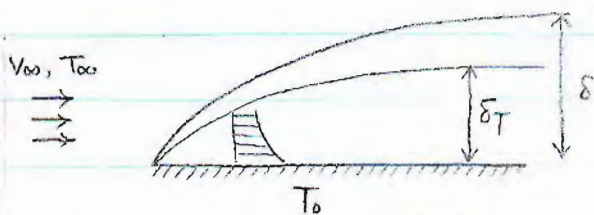
$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}}$$

بالا ترازی لایه مرزی، اصطفاک جامد تا شری ندارد.

$$f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2}$$

این لایه مرزی مربوط به سرعت است.

اما برای حرارت؟ همزمان هم لایه مرزی سرعت داریم هم لایه مرزی حرارت:



$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_{\infty}} = 0.99$$

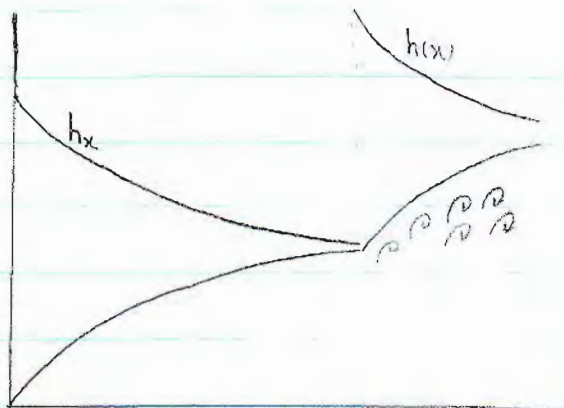
$$h = \frac{q_{\infty} \rightarrow q_w|_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{-k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}}$$

با افزایش  $x$ ، شیب حرارتی کم تر می شود.

پس  $h$  هم کم می شود. در واقع با جلو تر رفتن سیال گرم می شود پس سرعت انتقال

حرارت کمتر می شود. بنابراین با ضخیم شدن لایه مرزی،  $h$  کم می شود.

اگر جریان توربولنت شود، مکانیزم انتقال حرارت از هدایت به جابجایی تبدیل می شود.



در نتیجه  $h$  بشدت زیاد می شود.

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$

شروع جریان توربولنت

$$h_x = 0.332 k Pr^{0.343} \left[ \frac{v_{\infty}}{v_x} \right]^{1/2} \rightarrow Nux = \frac{h_x \cdot X}{k} = 0.332 Pr^{0.343} Re_x^{0.5}$$

که نفوذ موثرترم



86 . 2 . 23

ملاحظه می شود که  $Nu$  تابعی از  $Re$  و  $Pr$  است ..  $(Pr \geq 0.6)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h} = 0.664 Pr^{0.343} \left[ \frac{V_{\infty}}{\nu_L} \right]^{1/2} \\ \bar{Nu} = 0.664 Pr^{0.343} Re^{0.5} \end{array} \right.$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} = 0.975 Pr^{-1/3} \quad Pr > 0.5$$

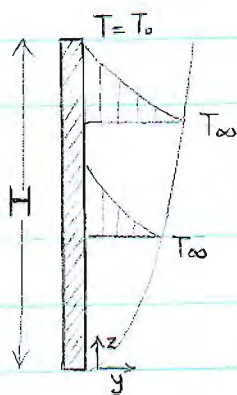
$Pr \ll 1$  :  $\delta_T \gg \delta$  : پرتک خیلی کوچک (غلزات مایع) :

$Pr \sim 1$  :  $\delta_T = \delta$  : برای گازها :

$Pr > 1$  :  $\delta_T < \delta$  : برای مایعات معمولی :

86 . 2 . 25

مثال ازگنوکسیون طبیعی :



سیال ساکن است با دمای  $T_{\infty}$

$v_z = v_z(z, y)$  : نیک لایه‌ی مرزی ایجاد می شود :

$v_y \ll v_z$  ,  $v_y = v_y(z, y)$  ,  $T = T(z, y)$

جریان لایه‌ای فرض شده است .

$$\bar{\rho} \left( v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad \text{مولفه‌ی z :$$

$$+ \bar{\rho} g \beta (T - T_{\infty}) \quad \left[ -\nabla P + \bar{\rho} g \right]$$

86.2.25

$$\text{بوسستگی: } \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

در اینجا هم جابجایی قوی تراز ویسکوز است.

$$\text{انرژی: } \rho c_p (v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

با توجه به شرایط مرزی مسئله را حل می‌کنیم. به 6 شرط مرزی نیاز است:

$$\text{B.C.1 - } y=0 \rightarrow v_z=0, T=T_0$$

$$\text{B.C.2 - } y=\infty \rightarrow v_z=0, T=T_{\infty}$$

$$\text{B.C.3 - } z=0 \rightarrow v_z=0, T=T_{\infty}$$

$$h = \frac{q_0}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{-k \frac{dT}{dy} |_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}}, \quad \text{Nu} = \frac{h L_c}{k}$$

$L_c$ : طول مشخصه (راستوانه، همان قطر است).

$$\text{Nu}_z = \frac{h z}{k}$$

$\text{Nu}_z$ : نسبت منطقه‌ای

با زیاد شدن ضخامت لایه مرزی،  $h$  کم می‌شود.

$$\frac{\text{Nu}_z}{\sqrt[4]{Gr/4}} = \frac{0.676 Pr^{1/2}}{(0.861 + Pr)^{1/4}}, \quad \text{Gr} = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta (T - T_0) z}{\mu^2}$$

$$h z \propto z^{-1/4}, \quad \bar{h} = \frac{4}{3} h z$$

$$\frac{\text{Nu}_H}{\sqrt[4]{Gr/4}} = \frac{0.902 Pr^{0.5}}{(0.861 + Pr)^{1/4}}$$



86.2.25

سرعت انتقال حرارت از دیواره به سیال را بدست آورید.



290°K

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = 0.703$$

$$T_f = \frac{T_o + T_{\infty}}{2} = 325^\circ K$$

$$Gr = \frac{g \beta}{\nu^2} (T_o - T_{\infty}) H^3 = 1.86 \times 10^8$$

بصورت تقریبی: برای گاز ایده آل:  $\beta = \frac{1}{T}$

مسئله قبلی در شرایط  $10^4 < Gr \cdot Pr < 10^{10}$  باید صدق کند.

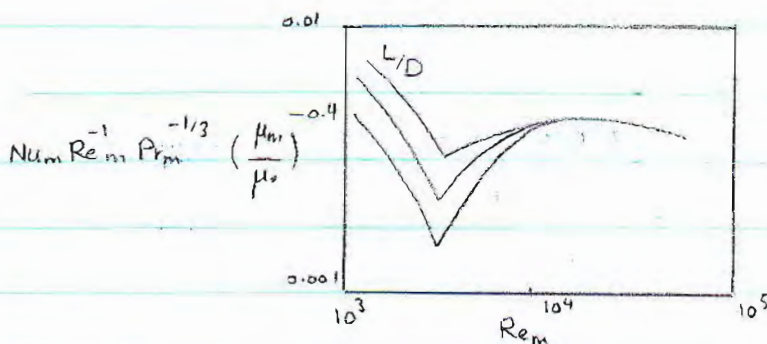
\* عدد راندل:  $Ra = Gr \cdot Pr$

$$Nu_H = 55.8 \quad h = Nu \frac{k}{H} \Rightarrow h = 5.23 \frac{W}{m^2 K}$$

$$Q = h(T_o - T_{\infty})A = 5.23 \times (360 - 290)(0.3 \times 0.1) = 11 \text{ W}$$

روابط تجربی برای کنوکسیون اجباری در لوله:

$$Nu_m = C Re_m^n Pr_m^m \left[ \frac{\mu_m}{\mu_o} \right]^x \quad T_m: \text{Cup mix. temp.}$$



برای وقتی سیال سرد است،

$$T_f = \frac{T_o + T_{\infty}}{2}$$

تعریف می کنیم.

## انتقال حرارت گذرا :

فقط برای جامدات بررسی می‌کنیم. در واقع شرایط غیر steady state یا متغیر با زمان

را بررسی می‌کنیم.

چون ضخامت قطعه‌ی گرم وارد شده به سیال سرد کم است، در داخل قطعه شیب

حرارتی نداریم. پس توانیم فوراً فایده‌ای ندارد.

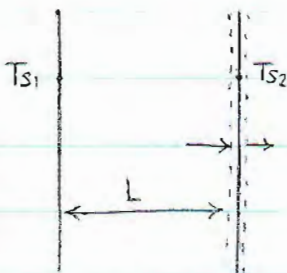


سرعت از دست دادن حرارت جامد = سرعت جذب حرارت از طرف سیال  $T_f$

$$(T - T_f) h \cdot A = -\rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

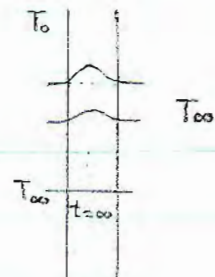
$$\int \Rightarrow \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(\frac{-hAt}{\rho c_p V}\right) \quad t=0 : T = T_i$$

## سرشدن نیوتنی :



در هر لحظه، مقدار حرارتی که

از طریق هدایت وارد می‌شود با



مقدار حرارتی که از طریق جابجایی خارج می‌شود برابر است.

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(-\frac{hAt}{\rho c_p V}\right)$$

$$\frac{KA}{L} (T_{s1} - T_{s2}) = hA (T_{s2} - T_{\infty})$$

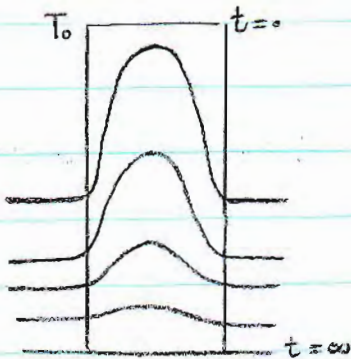
$$\Rightarrow \frac{T_{s1} - T_{s2}}{T_{s2} - T_{\infty}} = \frac{L/KA}{1/hA} = \frac{R_{\text{هدایت}}}{R_{\text{جابجایی}}} = Bi \quad (\text{Biot number عدد بیو})$$



اگر  $Bi < 0.1$  ، قطعه کوچک محسوب می شود ، با این شرط از قانون سرد شدن نیوتنی

می توان استفاده کرد . تغییر درجه حرارت در داخل قطعه سریع انجام می شود . چون قطعه کوچک

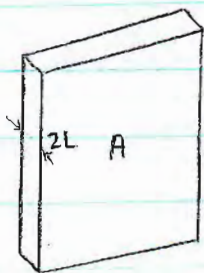
است می توان از شبیه حرارتی صرف نظر کرد . در غیر این صورت ، تغییرات زیاد است :



$$Bi \equiv \frac{hL_c}{K_{\text{جامد}}}$$

شبهه رابطی Nu است :

$$Nu \equiv \frac{hL_c}{K_{\text{سائل}}}$$



$$L_c = \frac{V}{A_{\text{انتقال حرارت}}}$$

$$L_c = \frac{A \times 2L}{2A} = L$$

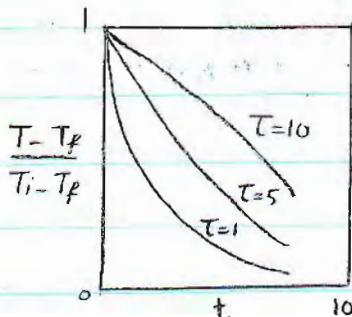
استوانه :  $L_c = \frac{\pi R^2 L}{2\pi RL} = \frac{R}{2}$  : L, R

کره :  $L_c = \frac{R}{3}$

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(-\frac{hAt}{\rho c_p V}\right)$$

ثابت زمانی  $\frac{hA}{\rho c_p V} = \frac{1}{\tau}$  ( $\frac{1}{s}$ )

این ثابت زمانی سرعت هم در داشتن قطعه



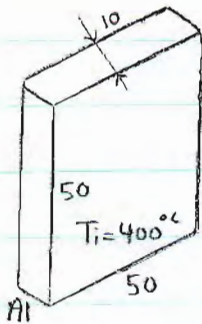
بسیار در انسان می آید .

$$\frac{hAt}{\rho c_p V} = \frac{ht}{\rho c_p L_c} \cdot \frac{L_c}{L_c} \cdot \frac{k}{L} = \frac{hL_c}{k} \cdot \frac{tk}{\rho c_p L_c^2} = Bi \cdot \frac{t\alpha}{L_c^2} = Bi \cdot Fo$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad ; \quad Fo = \frac{t\alpha}{L_c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp(-Bi \cdot Fo)$$

این راجع خنثی ساده است فقط باید شرط  $Bi \leq 0.1$  رعایت شود.



25°C

$$h = 4400 \frac{W}{m^2 K}$$

در زمان  $t$  درجه حرارت 50°C شود.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{4400 \times 0.05}{238} = 0.089 < 0.1 \quad \text{سرد شدن نیوتنی}$$

$$\alpha = \frac{238}{2700 \times 900}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} = 3.92 \times 10^{-3} t$$

$$\frac{50 - 25}{400 - 25} = \exp(-0.084 \times 3.92 \times 10^{-3} t) \Rightarrow t = 823 (s)$$

چون جسم را هم دما در نظر گرفتیم، این دما، هم دمای داخل و هم دمای خارج (سطح) قطعه است.

در واقع چون  $Bi < 0.1$  است، شبیه‌ترین در داخل قطعه ناچیز است.

$$-V \rho c_p \frac{dT}{dt} = hA(T - T_f) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{h}{\rho L_c c_p} (T - T_f) = -1.23 \frac{K}{s}$$

$\uparrow$   
 $t=0, T=400$

با کاهش اختلاف (درجه حرارت)، سرعت سرد شدن هم کمتری شود. پس در  $t=0$ ، سرعت

max است.

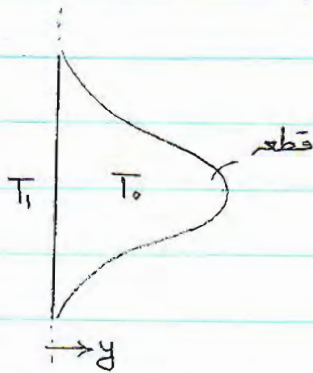


### قطعه نیمه بینهایت:

صنخامت قدری بزرگ است که عمق قطعه تحت تأثیر درجه حرارت بیرون قرار نمی گیرد.

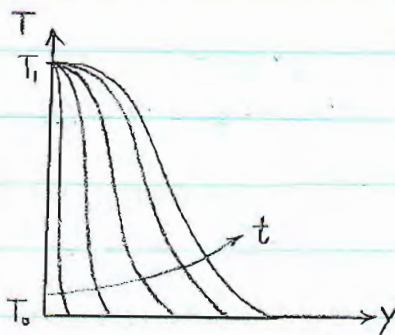
نیمه بینهایت بودن به زمان وابسته است. در  $t = \infty$  واقعی، هیچ قطعه ای نیمه بینهایت

نیست. در این جا، یک طرف قطعه در تماس با سیال است:



$$T = T(y, t)$$

$$\begin{cases} T(y, 0) = T_0 \\ T(0, t) = T_1 \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

I.C:  $t = 0 \quad T = T_0 \Rightarrow \theta = 0$  (شرط اولیه نیست). (شرط اولیه است)

B.C.1:  $y = 0 \quad T = T_1 \Rightarrow \theta = 1$

B.C.2:  $y = \infty \quad T = T_0 \Rightarrow \theta = 0$

حل معادله کدیفیراسیون: بدون بعد:  $\eta = \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}$  ;  $\theta = \theta(\eta)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta}{t} \cdot \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \Rightarrow \theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = h \Rightarrow h' + 2\eta h = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta=0 \rightarrow \theta=1 \\ \eta=\infty \rightarrow \theta=0 \end{array} \right.$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = c_1 e^{-\eta^2} \quad ; \quad c_2 = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} \Rightarrow \theta = 1 - \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = 1 - \frac{\overbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta}^{\text{erf}(\eta)}}{\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta}_{=1}}$$

$$\Rightarrow \theta = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta)$$

$\eta$  از صفر تا  $\infty$  تغییر می‌کند و  $\text{erf}(\eta)$  از صفر تا 1.

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\eta = 2 : \text{erf}(\eta) = 0.99 \Rightarrow \theta \approx 0$$

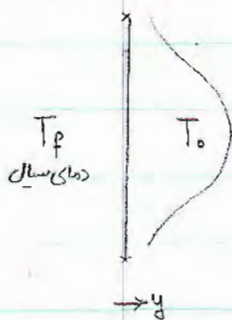
$$\Rightarrow \frac{T - T_0}{T_i - T_0} \approx 0 \Rightarrow T \approx T_0 \Rightarrow y \geq 4\sqrt{\alpha t} \quad \text{شرط نیمه بی‌نهایت بودن}$$

$$\text{اگر } \theta = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i} \text{ باشد :}$$

$$\theta = \text{erfc}(\eta)$$

86.3.1

جسم نیمه بی‌نهایت :



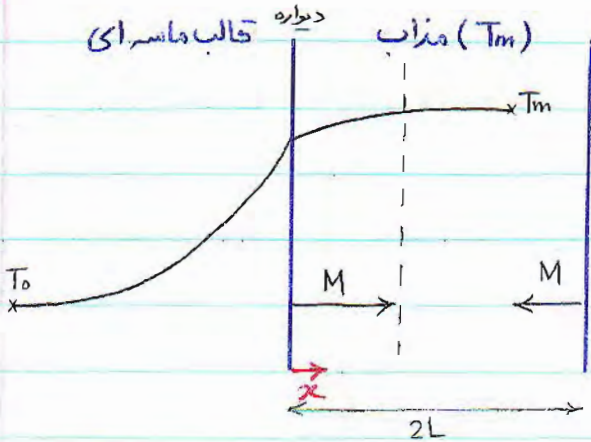
$$-k \frac{dT}{dy} = h [T_p - T]$$

$$\frac{T - T_0}{T_p - T_0} = \text{erfc} \left[ \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \right] - e^{\gamma} \text{erfc} \left[ \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right]$$



$$y = \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \left[ \frac{y}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right]$$

ریخته‌گری (رقالب ماسه‌ای):



M: جبهه‌ی انجماد

فرض: قطعه نیند، بی‌نهایت

سرعت جذب حرارت توسط قالب =  
سرعت از دست دادن گرمای بخار ذوب

$$\frac{T - T_m}{T_0 - T_m} = \text{erf} \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$q|_{x=0} = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{k(T_m - T_0)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

$$q|_{x=0} = \rho_l H_f \frac{dM}{dt}$$

↓ دانسیته سیال

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

← دانسیته جامد

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{(T_m - T_0) \sqrt{k \rho c_p}}{\rho_l H_f \sqrt{\pi t}}$$

I.C:  $t=0 \quad M=0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{T_m - T_0}{\rho_l H_f} \right] \sqrt{k \rho c_p} \sqrt{t}$

M: طول انجماد (جبهه انجماد)  $M=L$  زمان انجماد کامل:  $t_p$

$$t = C \left[ \frac{V}{A} \right]^2 \xrightarrow{\text{استرانه}} \frac{R}{2}$$

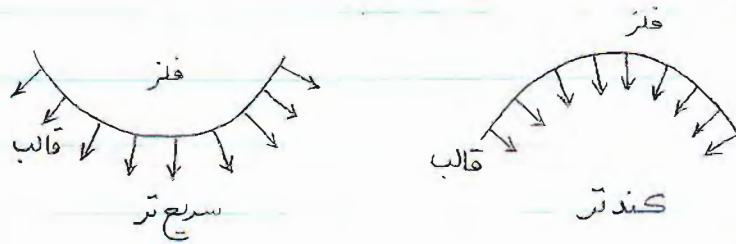
قاعده‌ی چرونوف:

t: زمان پایان انجماد  $V$ : حجم قطعه  $A$ : سطوحی که انتقال حرارت دارند

$$C = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\rho_l H_f}{T_m - T_0} \right]^2 \left[ \frac{1}{k \rho c_p} \right]$$

ضریب چرونوف

این قاعده یک اصل رارعايت نوي کند. و آن هم شکل قالب است.



برای رفع این مشکل:

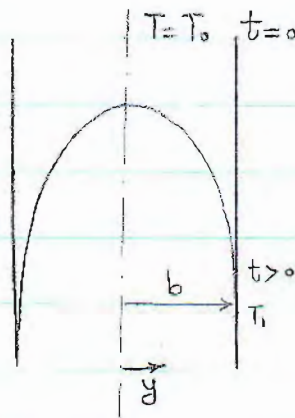
$$\beta = \gamma \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{a\beta} \right] \text{ پارامتر شکل } a$$

کره  $a=3$  استوانه بلند  $a=4$  صفحه  $a=\infty$

$$\gamma = \left[ \frac{T_m - T_0}{\rho_i H_f} \right] \rho c_p$$

$$\beta = \frac{V/A}{\sqrt{\alpha t}}$$

انتقال حرارت گذرا همراه با شیب حرارتی:



$$\text{معادله انرژی: } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$I. : T = T_0 : t = 0$$

$$B.C. 1-2 : y = \pm b : T = T_1$$

$$y = 0 : \frac{dT}{dy} = 0$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad , \quad \eta = \frac{y}{b} \quad , \quad \tau(F_0) = \frac{\alpha t}{b^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad \tau = 0, \theta = 1 \quad , \quad \eta = \pm 1, \theta = 0$$

روش جدا کردن متغیرها (Separation of variables)



Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \theta = \cosh Nx - (\tanh N) \sinh Nx \quad \text{or} \quad \theta = \frac{\cosh N(1-x)}{\cosh N}$$

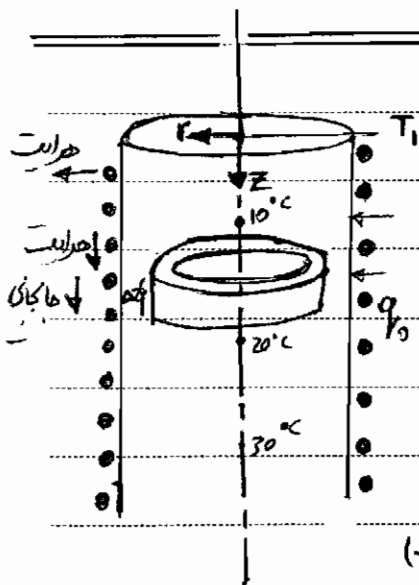
$$Q = \int q dA = \int h(T-T_0) dA = \int_0^L \int_0^W h(T-T_0) dz dy = \int_0^L \theta dz \quad (\text{میک شود})$$

$\uparrow$   $hwL(T_w - T_0)$

$$\eta = \frac{\text{حرارت دفعی واقعی}}{\text{حرارت دفعی در حالت ایده آل}} = \frac{\int_0^L \int_0^W h(T-T_0) dz dy}{\int_0^L \int_0^W h(T_w - T_0) dz dy} = \frac{\int_0^L \theta dz}{\int_0^L dz} = \frac{\tanh N}{N}$$

### کنوسون (فصل هفتم) Convection

کنوسون طبیعی - کنوسون اجباری  
Natural Con. Forced Con.



در هنگامی که مایع، مغز نشسته، در ارتفاع  $z$  حرارت برحالی که تأثیر دارد در عکس

$$\text{در جهت } z: 2\pi r \Delta z q_r - 2\pi r(r+\Delta r) \Delta z q_{r+\Delta r}$$

$$\text{در جهت } z \text{ (سایه): } 2\pi r \Delta r q_z - 2\pi r \Delta r q_{z+\Delta z}$$

$$\text{در جهت } z \text{ (جای): } 2\pi r \Delta r v_z \rho H \Big|_z - 2\pi r \Delta r v_z \rho H \Big|_{z+\Delta z}$$

$$\frac{2\pi r \Delta r \Delta z}{\Delta z \Delta r \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial q_r}{\partial r} + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r \rho v_z \frac{\partial H}{\partial z} \right] = 0$$

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \rho \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

۱۴ / ۲ / ۱۴

دانشی که خصوصی نمیم که در زمانه  $z$  و  $r$  مایع در حال حرکت است و در این حالت می توانیم از معادله حرارت در مایع  $z$  در جهت  $z$  استفاده کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Subject:

Year:      Month:      Date: ( )

برای درجه معادله هارون پیرسون

$$V_z = V_{z,max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \Rightarrow V_{z,max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

B.C.1:  $r=0 \rightarrow T = \text{finite}$

B.C.2:  $r=R \rightarrow k \frac{dT}{dr} = q_0$

B.C.3:  $z=0 \rightarrow T = T_1$

حال به حل معادله هارون پیرسون می پردازیم:

بدون بعدی کنیم  $T_0 z, r \rightarrow$

$$\varepsilon = \frac{r}{R}$$

از B.C.2 در شرایط  $\Delta T = \frac{q_0 R}{k}$

$$\theta = \frac{T - T_1}{q_0 R / k}$$

گنیم به ازای رسم بدون کد و با داشتن دو پارامتر بدون بعد و در نهایت می آید که هر دو معادله با هم سازگار است.

$$\xi = \frac{z}{\rho c_p V_{z,max} R^2 / k}$$

$\xi = \frac{z}{h}$  (در صورتی که  $h = \rho c_p V_{z,max} R^2 / k$ )

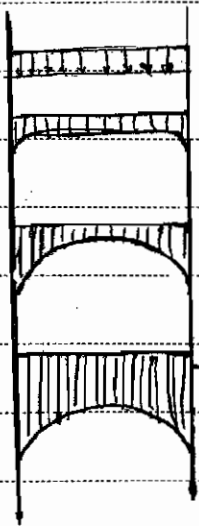
$$(1 - \varepsilon^2) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right)$$

B.C.1:  $\varepsilon=0 \Rightarrow \theta = \text{finite}$

B.C.2:  $\varepsilon=1 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} = 1$

B.C.3:  $\xi=0 \Rightarrow \theta = 0$

حل این معادله نیز در شرایط هارون پیرسون



باز پس تر آمدن  
تعداد جریان در هر مقطع تغییر  
می کند ولی شکل پروفیل عوض  
نمی شود. (حالت کاملاً همبسته)

حالت  
چون برای حالتی سرد است که در این مقطع  
حرارتی به سردی کاملاً سطح یافته باشد.  
که در این حالت

$$\theta(\varepsilon, \xi) = C_0 \xi + f(\varepsilon)$$

در داخل معادله جاری کنیم

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \varepsilon \frac{df}{d\varepsilon} \right) = C_0 (1 - \varepsilon^2)$$

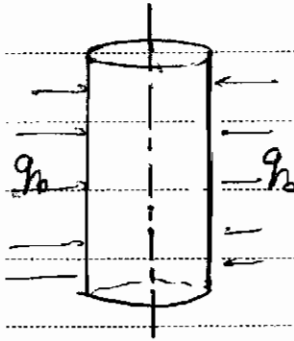


اسرائل

$$\theta(\epsilon, \xi) = C_0 \xi + C_1 \left( \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\epsilon^4}{16} \right) + C_2 \ln \epsilon + C_3$$

تمام شرایط فیزیکی اعمال می شود

مشاهده می شود که شرط  $\theta = 0$  در  $z=0$  در هر دو طرف با نسبت  $z=0$  برقرار است و این هم با شرط  $\theta = 0$  در  $z=0$  سازگار است که برای دانش شرط سوم، معادله دیفرانسیل انرژی حل می شود



$$\dot{q}_0 (2\pi R z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v_z c_p (T - T_1) r dr d\theta$$

$$\dot{q}_0 = \int_0^1 \theta(\epsilon, \xi) (1 - \xi^2) \epsilon d\epsilon$$

$$C_1 = 0 \quad C_0 = 4 \quad C_2 = -\frac{7}{24}$$

$$\theta(\xi, \epsilon) = 4\xi + \epsilon^2 - \frac{1}{4}\epsilon^4 - \frac{7}{24}$$

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r, z) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

توسط این معادله

توسط این معادله

$$T_m = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) T(r, z) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}$$

Cup mixing temp.

توسط این معادله  $T_m$  پیدا می شود. در واقع در این معادله،  $T_m$  به عنوان میانگین دما در تمام حجم محاسب می شود.

$$= T_1 + 4\xi \frac{q_0 R}{k}$$

توسط این معادله  $T_m =$

توسط این معادله

$$r=R \Rightarrow \epsilon=1$$

$$\theta = \theta_{\text{surface}} = \theta_s = 4\xi + 0.46$$

$$T_s - T_1 = \frac{q_0 R}{k} (4\xi + 0.46) \quad \Rightarrow \quad (T_m - T_1) = 4\xi \frac{q_0 R}{k}$$

$$T_s - T_m = \frac{q_0 R}{k} (0.46)$$

$$h (T_s - T_m) = q_0 \Rightarrow h = \frac{q_0}{T_s - T_m} = \frac{q_0}{q_0 R (0.46/k)} \Rightarrow h = \frac{2k}{D(0.46)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

کنوسون احدی، هدایت از Z کم، در میل حرارتی شش یافته باره

44

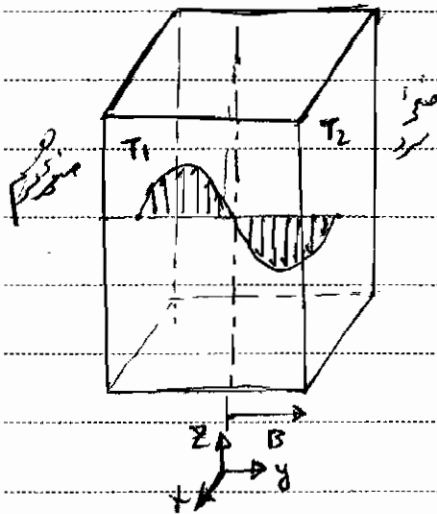
$\frac{hD}{k} = 4.36 =$  عدد نامست  $Nu = 4.36$  Nusselt Number

برای لایه استوانه‌ای  $T_{r=R} = T_0 \rightarrow Nu = 3.66$

$Nu = \frac{q_{conv}}{q_{cond}}$  در حالت کنوسون اجباری اشیاء خواهد بود  $Nu = Nu(Re, Pr)$

### Natural Convection

کنوسون طبیعی



$v_x = v_y = 0$

$v_z = v_z(y)$

$T = T(y)$

$\Delta T$  (تفاوت دما)

در جهت y: هدایت

در جهت z: هدایت

$[T, v] = 0$

$-\frac{dv_z}{dy} = 0 \Rightarrow k \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$

B.C.1:  $y = -B, T = T_1$

B.C.2:  $y = +B, T = T_2$

$T = \frac{q}{k}y + C_2$

$\Rightarrow T = \bar{T} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{B} y$

which  $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$

$\Delta T = T_1 - T_2$

معادله ناور استوکس:  $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \rho g_z$

برای حالت ناور استوکس  $\frac{dp}{dz} + \rho g = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$

فرد در حالات ناور استوکس برای بدنه دانه‌ها حالت است

اما در این حالت نیست، می‌توان  $\rho$  را به  $\bar{T}$  ربط داد (رابطه استوکس) و خواهم داشت:

$\rho = \rho|_{T=\bar{T}} + \frac{d\rho}{dT}|_{T=\bar{T}}(T-\bar{T}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dT^2}|_{T=\bar{T}}(T-\bar{T})^2$  (توجه به ریزه به ریزه و مرتبه یکم)

در اینجا  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_{\rho}$

$\Rightarrow \rho = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T})$

فرض اینکه خطی

فرض اینکه خطی در  $\bar{T}$

در معادله ناور استوکس قرار می‌دهیم:

$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{dp}{dz} + \bar{\rho} g - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T})$



$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \left( \frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g \right) + \frac{1}{2} \bar{\rho}g\beta \Delta T \frac{y}{B}$$

B.C.1,2  $y = \pm B \quad v_z = 0$

از انتگرال  $\rightarrow v_z = \frac{(\bar{\rho}g\beta \Delta T)B^2}{12\mu} \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^2 - \left( \frac{y}{B} \right) \right] + \frac{B^2}{12\mu} \left( \frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g \right) \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^2 - 1 \right]$

در هر دو طرف انتگرال بگیریم  $\rightarrow \int_{-B}^0 \rho v_z dy = 0$   
 رابطه بین دما و سرعت

با فرض دما و سرعت  $\rightarrow \Delta T^2 = 0 \rightarrow \frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g = 0$   
 برای تقریبی سازی با

$v_z = \frac{(\bar{\rho}g\beta \Delta T)B^2}{12\mu} \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^3 - \left( \frac{y}{B} \right) \right]$   
 $\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^B v_z dy}{\int_0^B dy} = \frac{\bar{\rho}g\beta \Delta T B^2}{48\mu}$   
 سرعت متوسط از  $-B$  تا  $B$  - صفر است

$\bar{y} = \frac{y}{B} \quad \bar{v}_z = \frac{B v_z \rho}{\mu}$

توزیع سرعت را ترسیم کنید

$\bar{v}_z = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta B^3 \Delta T}{12\mu^2} (\bar{y}^3 - \bar{y})$

$Gr = \left[ \frac{\bar{\rho}^2 g \beta \Delta T B^3}{\mu^2} \right] \rightarrow$  Grashof Number

$\Delta p = \bar{\rho} \beta \Delta T$   
 اختلاف دما

$\equiv \left[ \frac{\bar{\rho} g \beta^3 \Delta p}{\mu^2} \right]$   
 نیروی شناوری / نیروی دینامیک

$(\Delta p = \rho_1 - \rho_2 = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T}))$

$\bar{v}_z = \frac{1}{12} Gr (\bar{y}^3 - \bar{y})$

عدد نوسل  $Nu = f(Re, Pr)$   
 عدد گراسوف  $Gr = f(Gr, Pr)$

معادله انرژی

General Energy Equation = انتقال حرارت در یک طرف + انتقال حرارت در یک طرف دیگر (در صورت انباشتنی و غیره)

کار انجام شده توسط نیروی گرانشی + سرعت کار انجام شده توسط نیروی چسبندگی

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = \Delta y \Delta z (e|_x - e|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (e|_y - \dots) + \rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x q_x + \dots)$$

کلیتاً مساوی

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right] = - [\nabla \cdot (\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u) \mathbf{v}] - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) - \nabla \cdot [\tau \cdot \mathbf{v}] + \rho [v \cdot \mathbf{g}]$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - \underbrace{(\tau : \nabla \mathbf{v})}_{\text{ویرال}} - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \frac{DP}{Dt} *$$

● فرض کنی حالت معادله انرژی  
1- کارایی اول

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -1$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

2- معادله درجه اول

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

3- حالت

معادله بوزنیت (تدریس بوزنیت) (تدریس بوزنیت) طبیعی

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = (-\nabla P + \bar{\rho} \mathbf{g}) - (\nabla \cdot \tau) - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T})$$



آنالیز ابعادی

تقسیم  $\pi$  با سیستم

$n$  متغیر |  $n-m$  متغیر مستقل  
 $m$  تعداد متغیر

$h: (\bar{v}, \rho, k, \mu, c_p, D)$

راه سال برای سال در داخل اوله

1) تعداد  $m$

2)  $n$  بظ

3) به تعداد  $m$  متغیر اصلی

4) متغیرهای باقی مانده

$m:$   
 $L:$  طول  
 $T:$  دما  
 $M:$  جرم  
 $A:$  سطح

$\rho = ML^{-3}$   
 $D = L$   
 $\bar{v} = L\theta^{-1}$   
 $c_p = L^2\theta^{-2}L^{-1}$   
 $\mu = ML^{-1}\theta^{-1}$   
 $k = ML\theta^{-3}T^{-1}$

$h = M\theta^{-3}T^{-1}$

$n = 7, m = 4 \quad \pi = 7 - 4 = 3$

$\pi_1 =$

متغیرهای باقی مانده که در اینجا می بینیم باید هر چهار آن را در سیستم قرار دهیم

$\pi_1 = \frac{h}{\bar{v}^a D^b \rho^c k^d}$

$M: 1 = 0a + b + c + d$   
 $L: 0 = a + b - 3c + d$   
 $\theta: -3 = -a - 3d$   
 $T: -1 = -d$

3)  $\bar{v}, D, k$

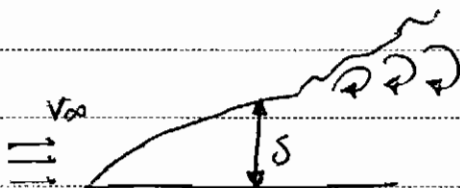
$\Rightarrow \pi_1 = \frac{hD}{k} = Nu$

$\pi_2 = \frac{\bar{v} \rho D}{\mu} = Re$

$\pi_3 = \frac{c_p \mu}{k} = Pr$

$Nu = f(Re, Pr)$

لایه های مرزی حرارتی

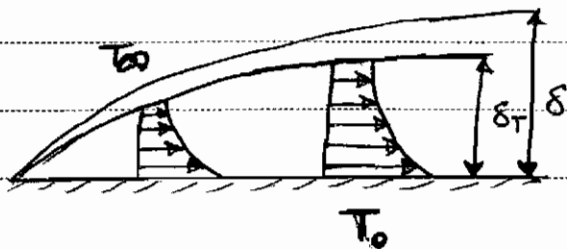


$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$

رکب سیال در دستم

$f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2}$

لایه مرزی در واقع مجرای است که سیال هنوز حرکت می کند تا جایی که است. در درجه اول این لایه مرزی سرد دارد



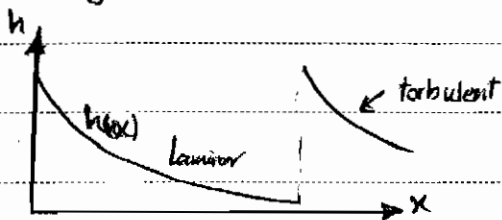
$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_{\infty}} = 0.99$

$h = \frac{q_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

این دو هم ظاهر می شود و می تواند در هم باشد  
 و این منطقی است



هنگامی که وارد نقطه توربولنت شدیم مکانیزم انتقال حرارت از هوابندی به جابجایی تبدیل می شود و انتقال حرارت بیشتر از طریق جابجایی است

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x dx}{\int_0^L dx} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad \bar{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k}$$

$$h_x = 0.332 k Pr^{0.343} \left[ \frac{v_{\infty}}{v_x} \right]^{1/2}$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 Pr^{0.343} Re_x^{0.5} \quad Pr \gg 0.6$$

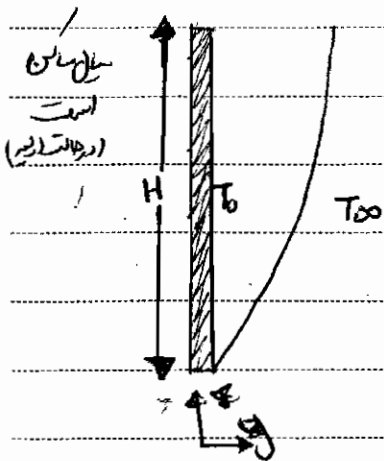
$$\bar{h} = 0.664 Pr^{0.343} [v_{\infty}/v_L]^{1/2}$$

$$\bar{Nu}_L = 0.664 Pr^{0.343} Re^{0.5}$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} = 0.975 Pr^{-1/3} \quad Pr > 0.5$$

- $Pr \ll 1 \Rightarrow \delta_T > \delta$
- $Pr \approx 1 \Rightarrow \delta_T \approx \delta$
- $Pr > 1 \Rightarrow \delta_T < \delta$

مای از منویسین طبیعی



$$v_z \ll v_z(z, y)$$

$$v_y \ll v_z$$

$$v_y(z, y)$$

$$T(z, y)$$

$$v_x = 0$$

در سطح است با  $T_{\infty}$

$$\rho (v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}) = \mu (\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}) + \rho g \beta (T - T_0)$$

$$\rho c_p (v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) = k (\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2})$$

$$3-T \text{ B.C.1 } y=0 \quad v_z \approx T = T_0$$

$$y=\infty \quad v_z \approx T > T_0$$

$$z=0 \quad v_z \approx T = T_{\infty}$$



$$\theta(\eta, \tau) = f(\eta) \cdot g(\tau)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = f(\eta) \cdot \frac{dg}{d\tau} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = g \cdot \frac{df}{d\eta} \quad \mapsto \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = g \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$\Rightarrow f \frac{dg}{d\tau} = g \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\beta^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = -\beta^2 \quad \mapsto \quad g = A e^{-\beta^2 \tau}$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta^2 f = 0 \quad \mapsto \quad f = B \sin \beta \eta + C \cos \beta \eta$$

$$\Rightarrow \theta = e^{-\beta^2 \tau} (D \sin \beta \eta + E \cos \beta \eta)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad \mapsto \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = E e^{-\beta^2 \tau} (\cos \beta \eta)$$

$$\eta = 1 \quad , \quad \theta = 0 \quad \mapsto \quad 0 = E e^{-\beta^2 \tau} \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \tau} \cos[(n + \frac{1}{2})\pi \eta]$$

$$\tau = 0 \quad , \quad \theta = 1 \quad \mapsto \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos[(n + \frac{1}{2})\pi \eta]$$

طرفین ضرب شود :  $[\cos(m + \frac{1}{2})\pi \eta] d\eta \quad ; \quad -1 \leq \eta \leq 1$

$$\theta = 0 \quad (m \neq n) \quad , \quad \theta = 1 \quad (m = n)$$

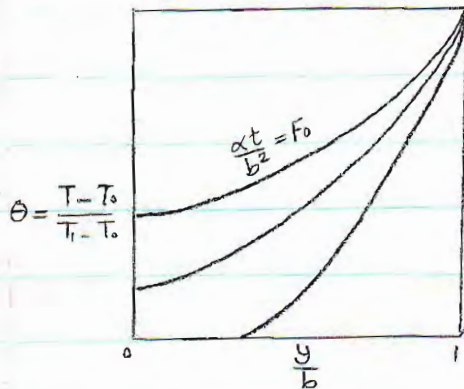
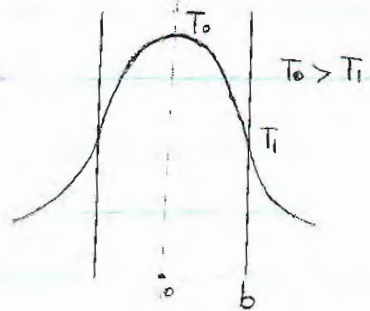
$$\mapsto E_m = \frac{2(-1)^m}{(m + \frac{1}{2})\pi} = E_n$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi} \exp(-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \alpha t / b^2) \times \cos[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi y}{b}]$$

86.3.6

در معادله‌ی اخیر، عدد فوریه و مختصات بیرون بعد  $(\frac{y}{b})$  دیده می‌شود.

به جای حل سری فوق، نمودار زیر رسم می‌کنند:



اگر بجای دمای سطح، دمای سیال را داشته باشیم:

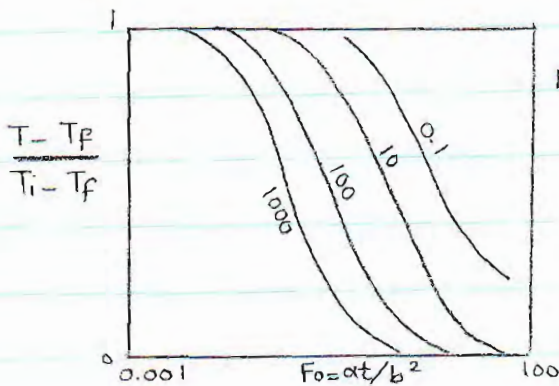
B.C.2:  $-k \frac{dT}{dy} = h(T - T_f)$

$\cos \beta = 0$  در مسئله بی‌نهایتی

$\cot \beta_n b = \frac{k_s}{hb} (\beta_n b) = Bi (\beta_n b)$

$\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n b}{\beta_n b + \sin(\beta_n b) \cos \beta_n b} \exp(-\beta_n^2 \alpha t) \cos \beta_n y$

اما بجای آنکه سری را حل کنیم، می‌توان از نمودارهای « Heisler » استفاده کرد.

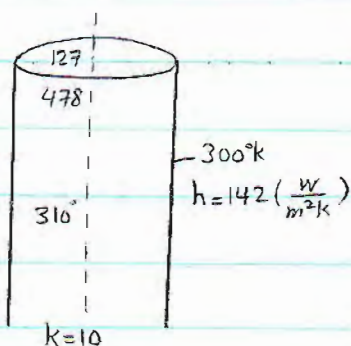


$Bi = \frac{hL}{k}$

مرکز  $\frac{r}{R} = 0$



مثال - چقدر طول می کشد که دمای مرکز به  $310^{\circ}\text{K}$  برسد؟



شماره های مربوط به استوانه را نگاه می کنیم.

استوانه:  $Bi = \frac{hR}{2k}$

آماره نمودار  $Bi = \frac{hR}{k}$  در نظر گرفته شده است. برای کره

هم ضریب 3 حذف شده است. برای مرکز:  $\frac{r}{R} = 0$

$\theta = 0.056$

$Bi = \frac{142 \times 0.0638}{16} = 0.563$

ابتدا با جابجایی  $Bi$  می فهمیم که سرد شدن

$Fo = \frac{\alpha t}{b^2} = 3.2$   
استوانه ای:  $b^2 = R^2$

$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = 5$  :  $t = 1(\text{hr})$  نیوتنی نیست.

برای سطح:  $\frac{r}{R} = 1$  :  $t = 3200(\text{s})$

اگر  $\min$  زمان مطرح باشد، به  $\max$  عدد  $Bi$  مراجعه می کنیم.

$Fo = 0.6 \rightarrow t = 600(\text{s})$   $\min$  زمان که مرکز به  $310^{\circ}\text{K}$  برسد.

تابش:

برای انتقال حرارت توسط این مکانیزم، محیط مادی نیاز نیست.

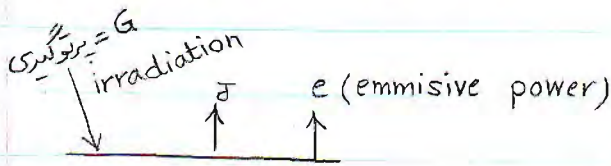
طیف امواج  $100\mu\text{m} - 0.1$  است. (فوق قرمز):  $0.4 - 0.7\mu\text{m}$

تابش توسط امواج الکترومغناطیسی روی بی‌دهنده

سرعت انتقال حرارت وابسته است به دمای قطعه، سطح و جنس

وابسته به سطح بودن: برای مایعات و جامدات مربوط به لایه‌های آخراتی می‌شود که تابش را

دریافت می‌کنند.  $e = \sigma T^4$ : شار انرژی تابشی

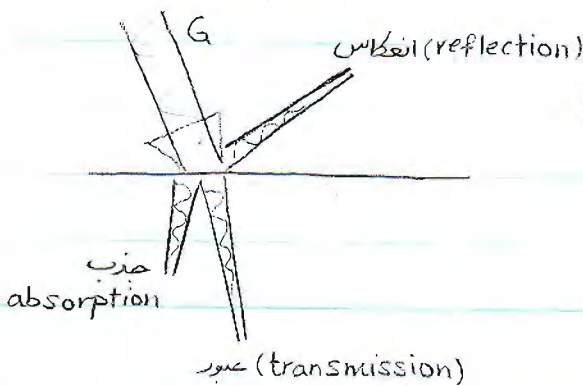


سطح هم تابش دریافت می‌کند، هم انعکاس

$J$ : پرتودهی ( $\rho G$ ) (radiosity)

بی‌دهنده و می‌فرستد.

$$J = \rho G + e$$



$$G = \alpha G + \rho G + \tau G$$

$\alpha$ : ضریب حذب

$\rho$ : " انعکاس

$\tau$ : " عبور

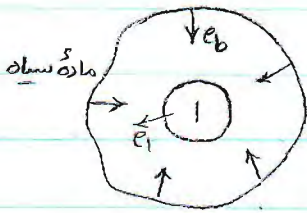
$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad ; \quad \alpha + \rho = 1 \quad : \quad \tau = 0 \quad : \quad \text{کدر}$$

$\alpha = 1$  ،  $\rho = 0$  : block body radiation : جسم سیاه

تمام پرتو ورودی را حذب می‌کند. هم چنین حداکثر توان تابشی را دارد. ( $e_b$ )

$$e = \epsilon e_b \quad \text{ضریب نشر}$$





$$q_{r,net} = e_1 - \alpha_1 e_b$$

جذب می کند ساطع می کند

$$= \epsilon_1 e_b - \alpha_1 e_b = e_b (\epsilon_1 - \alpha_1)$$

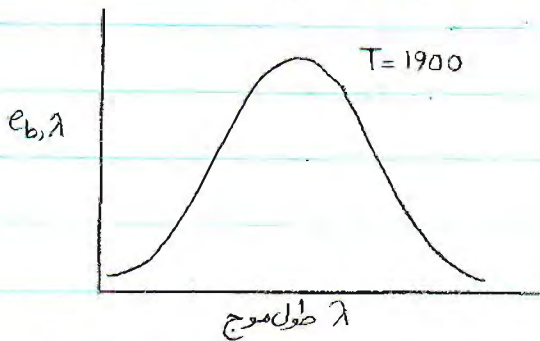
$$\Rightarrow \epsilon_1 = \alpha_1$$

تعداد حرارتی:  $q_{net} = 0$

قانون کیرشهف: اگر یک جسم در تعادل با ماده سیاه باشد:  $\epsilon = \alpha$

اگر چندین جسم داشته باشیم در تعادل با ماده سیاه:

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} = \dots = 1$$



تعریف برای  $e_b$ :

$$e_b = \int_0^{\infty} e_{b,\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{\exp\left[\frac{ch}{k_B \lambda T}\right]} d\lambda = \sigma T^4$$

$\sigma$ : استفان - بولتزمن       $k_B$ : بولتزمن       $h$ : پلانک

$$\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K} \quad , \quad e = e_b \epsilon \quad , \quad e = \epsilon \sigma T^4$$

جسم سیاه:



وقتی پرتویی وارد می شود، مقدار خیلی کم بیرون می رود.

86.3.6

$$e = \epsilon e_b (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

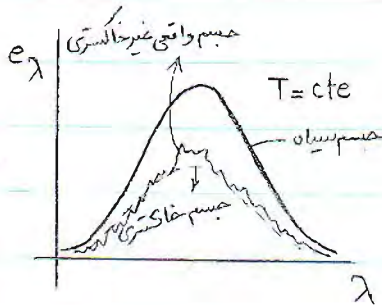
در هر بار برخورد، یک ضریب  $\rho$  وارد می شود.

$$e = \epsilon e_b \times \frac{1}{1-\rho} \quad ; \quad \alpha + \rho = 1 \quad (T=0)$$

$$e \text{ حفره} = \frac{\epsilon e_b}{\alpha}$$

86.3.8

جسم خاکستری:



$$e_b = \int_0^{\infty} e_{b,\lambda} d\lambda$$

$$e = \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} e_{b,\lambda} d\lambda \quad \text{حالت کلی:}$$

توان نشر جسم سیاه از خاکستری بیشتر است. (سطح زیر منحنی)

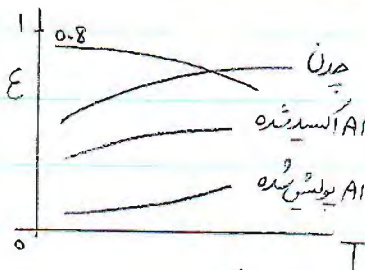
$$e = \epsilon_{\lambda} \int_0^{\infty} e_{b,\lambda} d\lambda$$

$$\epsilon_{\lambda}, \alpha_{\lambda} \neq f(\lambda)$$

در حالت کلی: 1: دمای تارده جذب کننده  $\alpha_{12}$  2: دمای مانده پخش کننده

$$\alpha_{12} = \alpha_{11} = \alpha_1 = \epsilon_1$$

برای جسم خاکستری:



در یک محدوده دمای، اگر ضریب نفوذ در

کم نباشد، می توان جسم را خاکستری فرض نمود.

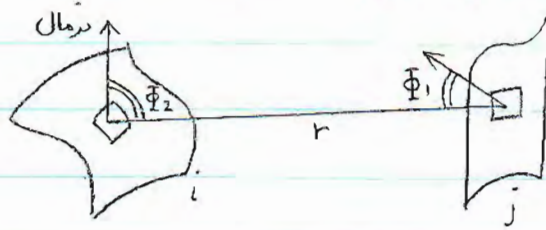
$\alpha(\phi)$  سطوح آینه ای

سطوح پخش diffusive

در حل مسائل راحت تر است



فاکتور دید: (view factor)

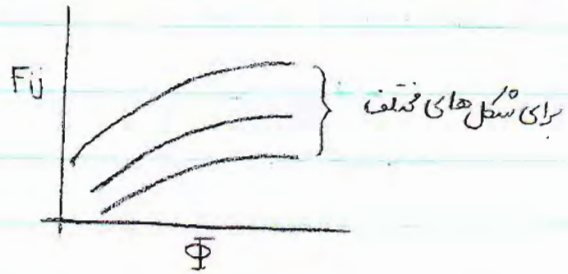
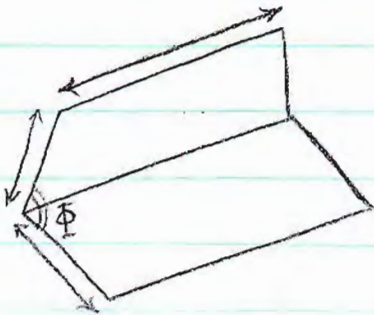


نسبت به زاویه ای که این دو سطح با هم می سازند یک درصدی از انرژی را دریافت می کند.

$$F_{ij} = \frac{\text{تشریحی که از i در تمام جهات می شود}}{\text{تشریحی که به j می رسد}}$$

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \Phi_1 \cos \Phi_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

به جای محاسبه ی انتگرال، یک سری منحنی داریم.



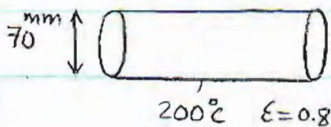
جسم داخل جسم سیاه باشد:  $A. e_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4$  تشریحی کند

جذب می کند:  $B. \alpha_{12} e_{b2} = \alpha_{12} \sigma T_2^4$   $T_1$ : دمای جسم

$$q_{i, total} = A - B = \sigma (\epsilon_1 T_1^4 - \alpha_{12} T_2^4) \quad \alpha_{12} = \alpha_{11} = \epsilon_1$$

$$= \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

مثال: یک لوله ی فولادی بخار حاوی کند. محیط جسم سیاه است:  $T = 25^\circ C, h = 15 \frac{W}{m^2 K}$



توان تشریحی:  $\epsilon \sigma T_1^4 = 0.8 \times 5.67 \times 10^{-8} (473)^4$

86.3.8

$$\Rightarrow \text{توان نشر کلی} = 2270 \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

- شار انرژی تابشی به سطح واردهی شود:  $G = \sigma T_2^4 = 5.67 (T_2)^4 = 447 \left( \frac{W}{m^2} \right)$

- کل شار گرمایی خارج شده از لوله:

$$q = \overbrace{h(200 - 25) + \epsilon \sigma T_1^4}^{\text{خارج می شود}} - \underbrace{\alpha \sigma T_2^4}_{\text{وارد می شود}} = 998 \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

$$E_{12} = e A_1 = \underbrace{e_{b1}}_{\text{معمولاً}} A_1 F_{12}$$

$$E_{21} = e_{b2} A_2 F_{21}$$

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad \text{کاملاً بستری باشد}$$

$$F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1n} = 1$$