

خط و دایره

فعالیت



۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

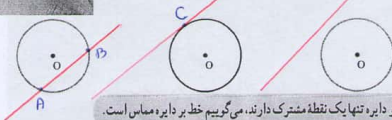
اگر این نقطه ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می شود؟ **دایره**

۲- دو خط یا موازی اند یا متقاطع؛ یعنی، یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه یکدیگر را

قطع می کنند.



حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.

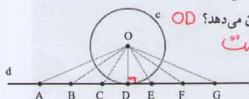


در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می گوئیم خط بر دایره مماس است.

تعریف مماس

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه ترین پاره خطی است که آن نقطه را به خط وصل

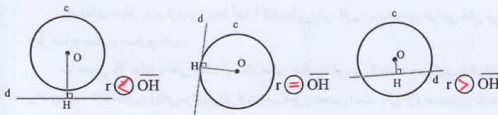
می کند. خط d بر دایره c به مرکز O شعاع r مماس است.



کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می دهد؟ **OD**
اندازه این پاره خط را با r مقایسه کنید. **برابر است**

۴- در هر یک از شکل های زیر دایره ای به شعاع r رسم کرده ایم. فاصله مرکز دایره از خط d

را $\overline{OH}$ بنامید و بدون اندازه گیری، رابطه های زیر را با علامت $>$ ، $=$ یا $<$ کامل کنید.



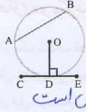
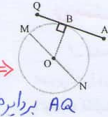
شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

کار در کلاس



$$AQ \perp OB \Rightarrow$$

AQ بر دایره هاس است



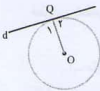
۱- در هر شکل، کدام پاره خط $OD \perp EC \Rightarrow$ بر دایره مماس است؟

EC بر دایره مماس است

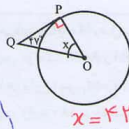
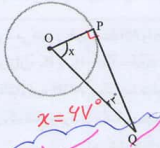
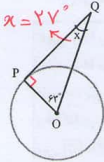
۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است.

زاویه Q چه نوع زاویه ای است؟ قائمه

$$\hat{Q}_1 = 90$$



۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



پیدا کردن مرکز دایره

فعالیت



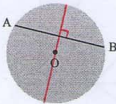
۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره ای رسم کنید. سپس، صفحه

دایره ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید.

A را به B وصل کنید. این پاره خط وتر دایره نامیده می شود.

دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند.

تای کاغذ را باز کنید.



روی خط TA را با مداد پر رنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می گویند؟ قطر

روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید.

دو پاره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه ای قطع می کنند؟ مرکز

نکته: قطری که AB را نصف می کند بر آن عمود است

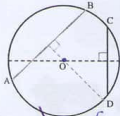
نتیجه: اگر عمود منصف دو وتر دلخواه غیر موازی را رسم کنیم یکدیگر را در مرکز دایره قطع می کنند

وتر: پاره خطی که دو نقطه ای معایز از یک دایره را به هم وصل می کند را وتر می نامیم

نیم

۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.

برای پیدا کردن مرکز یک دایره، کافی است نقطه‌ای بر خط
عمود منصف‌های دو وتر غیر موازی آن را پیدا کنیم



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.

تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.

با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم

قطر این بشقاب را پیدا کنیم.



۲۵A = قطر

۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را

کامل کنید.

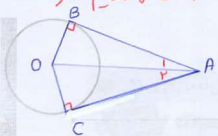
این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائم‌اند. پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$	وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.
---	---

نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند

و برعکس، باره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، بر آن عمود است

نکته: اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس باهم برابر است و خطی که مرکز را به آن نقطه وصل می‌کنیم ساز زاویه بین این دو مماس است

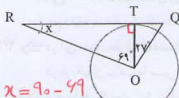


$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

کارد در کلاس

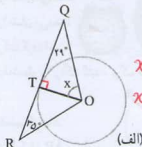


۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$$\begin{aligned} x &= 90 - 69 \\ \Rightarrow x &= 21^\circ \end{aligned}$$

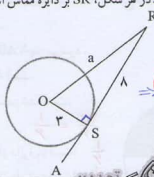
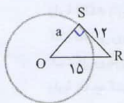
(ب)



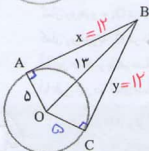
$$\begin{aligned} x &= 90 - 29 \\ x &= 61 \end{aligned}$$

۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. طول پاره خط a را به دست آورید.

$$\alpha^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow \alpha^2 = 81 \Rightarrow \alpha = 9$$



$$\begin{aligned} a^2 &= 15^2 - 12^2 = 81 + 64 \\ \Rightarrow a &= \sqrt{145} \end{aligned}$$

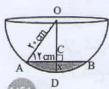


۱- نقطه B در فاصله ۱۲ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله B از نقاط تماس را به دست آورید.

$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 - 5^2 = 144 \\ \Rightarrow x &= \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} O'A = O'B \\ \hat{A}O'O = \hat{B}O'O \end{cases} \end{aligned}$$



۳- در کاسه رویه و مقداری آب ریخته‌ایم. AB برای ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟

$$OC^2 = 20^2 - 12^2 \Rightarrow OC^2 = 400 - 144 \Rightarrow OC^2 = 256 \Rightarrow OC = 16$$

$$x = 20 - 16 = 4 \text{ cm}$$

زاویه های مرکزی

فعالیت



10:15



۳۰ درجه

۱- ساعت های روبه رو چه زمانی را نشان می دهند؟

پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت ها چه زمانی را نشان می دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه شمار چند درجه حرکت کرده است؟ $30 = 12 \div 360$

در هر یک از ساعت ها مسیر حرکت عقربه دقیقه شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی تر را طی کرده است؟ **ساعت دوازده**



۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده اند.

کمان کوچک تر را با $\widehat{AB}$ نمایش می دهیم و آن را کمان $\widehat{AB}$ می نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه $\angle AOB$ زاویه مرکزی روبه رو به کمان $\widehat{AB}$ نامیده می شود.

کمان $\widehat{AB}$ نیز روبه رو به زاویه مرکزی $\angle AOB$ است.

۳- شکل روبه رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

زاویه $\angle O_1$ چه کسری از 360° درجه است؟ $\frac{4}{360} = \frac{1}{90}$

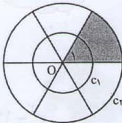
$$\frac{4}{360} = \frac{1}{90}$$

کمان روبه رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟ $\frac{1}{90}$

کمان روبه رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟ $\frac{1}{90}$

آیا این دو کسر با هم مساوی اند؟ **بله**

آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر، اولی $\frac{1}{90}$ از دایره C_1 و دومی $\frac{1}{90}$ از دایره C_2 است**



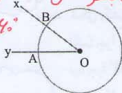
اندازه کمان $\widehat{AB}$ برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه رو به آن. بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه های مساوی، طول های متفاوتی داشته باشند.

حل

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه رو به O_1 در هر یک **هر دایره با هر شعاعی 360° است و این دایره**

از دایره های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟ **$\frac{1}{6}$ دایره است پس هر یک 60° می باشند**



۵- در شکل رو به رو زاویه $\angle xOy$ برابر 36° درجه است.

کمان $\widehat{AB}$ چند درجه است؟ 36° **$\widehat{AB} = xOy$**

طول کمان $\widehat{AB}$ چه کسری از دایره است؟ $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$

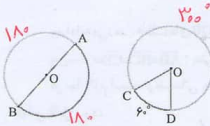
برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } \widehat{AB}}{360^\circ}$$

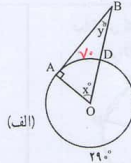
کار در کلاس



۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.
اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.



۲- اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.



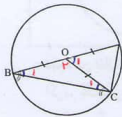
$$x = \widehat{AD} \Rightarrow$$

$$x = 70 \Rightarrow y = 90 - 70$$

$$\Rightarrow y = 20$$

(الف)

۳- در شکل روبه رو، AB قطر دایره است.
زاویه B چند درجه است؟



$$\hat{O}_1 = \widehat{AC} = 50$$

$$\Rightarrow \hat{O}_2 = 180 - 50 = 130$$

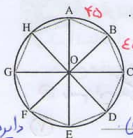
$$OB = OC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 25$$

$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 130 = 50$$

فعالیت



$$340 \div 8 = 42.5$$



۱- محیط دایره روبه رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده ایم.

می خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.

رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می کند:

«مثلث های AOB، BOC، COD و ... متساوی الساقین اند.

چرا؟ $OH = \dots = OC = OB = OA$ (شعاع های)

و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه های سبز رنگ با هم برابرند.

چرا؟ $(\hat{O}_1 = 45, OA = OB) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 47.5$

پس همه زاویه های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟

آرش می گوید: «اولی این تنها برابری زاویه ها را نشان می دهد

و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی

پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

$$(\hat{O}_2 = 45, OB = OC) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 47.5$$

پس تمام زوایای سبز رنگ با هم مساوی می باشند

$$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2 \times 47.5 = 95$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dots = \hat{H} = 95$$

بعد ادامه می دهد: «مثلث های AOB, BOC, COD... هم نهشت اند. در چه حالتی؟ (رضی و رضی)»

پس... $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.»

هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منظم بودن هشت

ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید. کلامی

الف) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$. چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$ ؟

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$

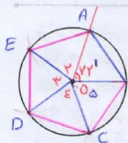
ب) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$. چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$ ؟

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای نظیر آن ها نیز با هم برابر خواهد بود.
به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمان های نظیر آن ها نیز با هم برابر است.

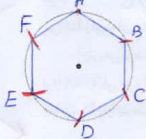
کاردر کلاس



۱- با استفاده از خط کش و نقاله، در دایره رویه رو یک پنج ضلعی منظم رسم کنید. اندازه های آن $360 \div 5 = 72^\circ$ و $\widehat{AOB} = 72^\circ$ رسم زاویه مرکزی 72° در $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \dots = \widehat{O_5} = 72^\circ$

۲- الف) دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و

بی دربی کمان بزنید.



ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟ $360 \div 6 = 60^\circ$ چرا این کمان ها با هم مساوی اند؟ $AB = BC = \dots = AF$ د هر کمان چند درجه است؟ 60° ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می شود؟ $AC = BD = CE = DF = EA = FB = 120^\circ$

زیرا اگر در یک دایره اندازه وترها مساوی باشد آن گاه کمان های نظیر آن ها نیز با هم مساوی هستند

زاویه های محاطی

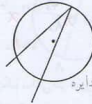
فعالیت



۱- مانند نمونه رسم شده (الف)، در شکل های زیر نمونه ای از هر یک از وضعیت های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



(ب) رأس زاویه خارج دایره



(الف) رأس زاویه روی دایره



(د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه ای غیر از مرکز

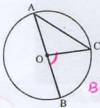


(ج) رأس زاویه در مرکز دایره

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟ (ج)

به زاویه ای که در شکل «الف» مشاهده می کنید، زاویه محاطی گفته می شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع های آن، دایره را قطع کرده اند.

زاویه محاطی

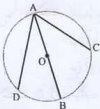


۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب $\widehat{BC}$ بنویسید: $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$

چرا زاویه های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟ $OA = OC$

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{C}$

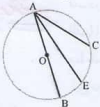
اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب $\widehat{BC}$ بنویسید. $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



۳- با توجه به فعالیت قبل، با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب $\widehat{DC}$ بنویسید.

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$



۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم بر حسب $\widehat{EC}$ بنویسید.

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$

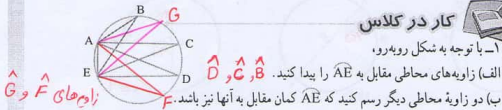
۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همه

حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید. **بله**
اندازه هر زاویه محاطی برابر است با **نصف کمان مقابل به آن**

کار در کلاس



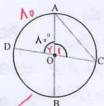
۱- با توجه به شکل روبه‌رو،



۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.

دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید. **طراحی**



$$\hat{O} = 80^\circ \rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

به آن می‌باشد

زهر

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

به کمان مقابل است

مجموع زاویه‌ها در مثل ۱۸۰ است

مثلث OAC متساوی الساقین است

و زاویه‌ها ۱۰۰ است

فعالیت



۱- یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویه دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همه این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

بله، زیرا هر دو به روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند.

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟ **۱۸۰، ۳۶۰ ÷ ۲ = ۱۸۰**

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟ **۹، ۱۸۰ ÷ ۲ = ۹۰**

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

نود (۹۰) درج زیرا نصف کمان مقابلش می‌باشد

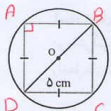
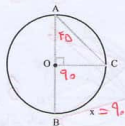
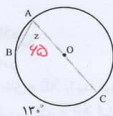
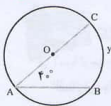
$$\widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \text{زاویه محاطی مقابل به آن} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

کاردر کلاس



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.

$$y = 10$$



۲- در شکل روبه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد.

$$BD \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{BD} = 180$$

چرا این لوزی، مربع است؟

$$\Rightarrow \widehat{A} = \frac{180}{2} = 90$$

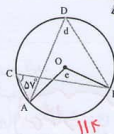
قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

$$BD^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow BD = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} \Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$$

دوری که یک زاویه قائمه داشته باشد مربع است



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.



$$d = c = 57$$

$$e = \widehat{AB} = 114$$

۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه

$$\widehat{AB} = \theta = 72$$

است؟

اگر، دهانه پرگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع

از نقطه B، بی‌دری کمان‌هایی بزنیم، به این ترتیب

چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟

$$360 \div 72 = 5$$



$$j = 2 \times 57 = 114$$

$$h = \widehat{A} = 57$$

$$k = 2\widehat{B} = 66$$

$$i = \widehat{C} = 66$$