مسأله‌ی پنجم: جغجغه‌های رنگارنگ ..... ۱۰ امتیاز

یک کارخانه‌ی تولید اسباب‌بازی، جغجغه‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که n جغجغه در هریک جا می‌گیرد. ثابت کنید کارخانه می‌تواند هر nk جغجغه (با تعداد دلخواهی جغجغه از هر رنگ) را به گونه‌ای در k بسته جای دهد که در هر جعبه، جغجغه‌ها حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند.

مسأله‌ی ششم: کارت‌های دور دایره ..... ۲۰ امتیاز

۵۵ کارت داریم که روی آن‌ها اعداد مختلفی نوشته شده‌است، و ما از مقادیر آن‌ها بی‌اطلاع هستیم. کارت‌ها روی دایره‌ای به پشت چیده شده اند به گونه‌ای که ما عدد نوشته شده روی آن‌ها را نمی‌بینیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از کارت‌ها را انتخاب کرده، آن را برگردانیم، عدد نوشته‌شده روی آن را بخوانیم و دوباره آن را سر جای خود بگذاریم. می‌خواهیم روشی ارائه دهیم که با برگرداندن تعداد کمی کارت، ۳ کارت مجاور هم پیدا کنیم که عدد نوشته شده روی کارت وسط از اعداد نوشته شده روی دو کارت کناری آن بیش‌تر باشد.

الف) ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حداکثر ۱۳ کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (۱۰ نمره)

ب) ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حداکثر ۹ کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (حل این بند با برگرداندن حداکثر ۱۰ کارت ۵ نمره خواهد خواهد داشت.) (۱۰ نمره)

مسأله‌ی هفتم: مشکلات دولت ..... ۲۰ امتیاز

به علت برخی مشکلات سیاسی در کشور «یوتوپیا»، بین نمایندگان مجلس این کشور اختلاف افتاده است به طوری که هر نماینده‌ی مجلس با تعدادی از نمایندگان دیگر مشکل پیدا کرده است و حاضر به نشستن با هیچ‌یک از آن‌ها سر یک میز نیست. رئیس‌جمهور این کشور برای حل این مشکل به شرکت «زتروس» روی آورده است. این شرکت دو ماشین قابل برنامه‌ریزی A و B را خریداری کرده است. هر برنامه‌ای که به این ماشین‌ها داده می‌شود از چهار قسمت تشکیل شده است:

- قسمت اول شامل تعدادی متغیر است که باید نام‌های آن‌ها به ماشین داده شوند.
- در قسمت دوم تعدادی نابرابری به ماشین داده می‌شود که همگی باید به شکل زیر باشند:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k \geq b$$

توجه کنید که جهت بزرگتر نابرابری‌ها باید رو به متغیرها باشد. در نابرابری بالا k یک عدد طبیعی دل‌خواه است. همچنین a_1، a_2، ...، a_k و b اعداد حقیقی دل‌خواه و x_1، x_2، ...، و x_k تعدادی از متغیرها هستند.

- درقسمت سوم یکی از دو کلمه‌ی minimum و یا maximum به ماشین داده می‌شود.
- در قسمت چهارم تعدادی از متغیرها به عنوان «متغیرهای اصلی» به ماشین معرفی می‌شوند.

اگر چنین برنامه‌ای را به ماشین A بدهیم، این ماشین به هر یک از متغیرها یک مقدار حقیقی نامنفی طوری نسبت می‌دهد که اولاً تمامی نابرابری‌ها برقرار باشند و ثانیاً مجموع متغیرهای اصلی بر حسب این‌که کلمه‌ی انتخاب شده minimum یا maximum بوده، کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار ممکن خود را داشته باشد. در پایان، ماشین مقادیر نسبت داده شده به متغیرها و مجموع متغیرهای اصلی را چاپ می‌کند.

فرق ماشین B با ماشین A تنها در این نکته است که این ماشین به جای مقادیر حقیقی نامنفی، فقط می‌تواند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را به متغیرها نسبت دهد. این ماشین نیز مانند ماشین A کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار مجموع متغیرهای اصلی را با حفظ درستی نابرابری‌ها به دست می‌آورد.

برای مثال برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

x, y, z	متغیرها
$-۲x - y - z \geq -۲$ $x \geq \frac{۱}{۲}$	نابرابری‌ها
maximum	کلمه‌ی انتخاب شده
y, z	متغیرهای اصلی

با دادن این برنامه به ماشین A، ماشین عدد $\frac{۵}{۴}$ را به عنوان بیش‌ترین مقدار ممکن برای $y + z$ چاپ می‌کند، که مثلا به ازای $x = \frac{۱}{۲}$، $y = ۰$، و $z = \frac{۵}{۴}$ به دست می‌آید. (توجه کنید که مقادیر دیگری نیز برای x، y،و z وجود دارند که در نابرابری‌ها صدق کنند و مجموع $y + z$ را برابر $\frac{۵}{۴}$ قرار دهند. ولی نمی‌توان مقادیری برای متغیرها یافت که نابرابری‌ها برقرار بمانند و $y + z$ از $\frac{۵}{۴}$ بیش‌تر شود.)

حال اگر همین مسأله را به ماشین B بدهیم، عدد ۰ را به عنوان جواب اعلام می‌کند که مثلا به ازای $x = ۱$، $y = ۰$، و $z = ۰$ به‌دست می‌آید.

شرکت زتروس اعلام کرد که حاضر است مسائل پیشنهاد شده توسط دولت را حل کند. اولین مسأله‌ای که پیشنهاد شد از طرف وزارت بهداشت بود. در این مسأله وزارت بهداشت قصد داشت در بعضی از شهرهای کشور مقداری دارو برای مواقع اضطراری ذخیره کند به گونه‌ای که مجموع داروی موجود در هر شهر و تمام شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد بیش‌تر از ۱۰۰ تن باشد. هدف این بود که مجموع کل داروهای ذخیره شده در تمام شهرها کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. توجه کنید که اگر از شهر a به b پرواز مستقیم وجود داشته باشد، از b نیز به a پرواز مستقیم وجود دارد.

زتروس برای حل این مسأله با استفاده از ماشین A برنامه‌ای به این منظور طراحی کرد. در این برنامه به هر شهر یک متغیر نسبت داده شده که نشان‌گر مقدار دارویی است که باید در آن شهر ذخیره شود. به این ترتیب اگر n را تعداد شهرها فرض کنید، آن‌گاه متغیرهای برنامه $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n می‌باشند.

سپس به ازای هر شهر یک نابرابری در برنامه قرار داده شد به این ترتیب که مجموع متغیر مربوط به آن شهر و متغیر مربوط به شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و تمامی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی گردیدند.

برای مثال اگر کشور، پنج شهر داشته باشد و بین شهرهای ۱ و ۲، شهرهای ۲ و ۳، شهرهای ۳ و ۴، و شهرهای ۳ و ۵ پرواز مستقیم وجود داشته باشد، برنامه‌ای که به ماشین داده می‌شود به صورت زیر است:

$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$	متغیرها
$x_۱ + x_۲ \geq ۱۰۰$ $x_۲ + x_۱ + x_۳ \geq ۱۰۰$ $x_۳ + x_۲ + x_۴ + x_۵ \geq ۱۰۰$ $x_۴ + x_۳ \geq ۱۰۰$ $x_۵ + x_۳ \geq ۱۰۰$	نابرابری‌ها
minimum	کلمه‌ی انتخاب شده
$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$	متغیرهای اصلی

که جواب ماشین برابر ۲۰۰ است که به ازای مثلا $x_۱ = ۱۰۰$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = ۱۰۰$، $x_۴ = ۰$، و $x_۵ = ۰$ به دست می‌آید.

مسأله‌ی بعدی توسط وزارت مبارزه با قاچاق پیشنهاد شد. این وزارت قصد داشت در بعضی از فرودگاه‌های کشور مراکز مبارزه با قاچاق تاسیس کند به طوری که تعداد این مراکز تا حد امکان کم باشد و در حداقل یکی از فرودگاه‌های مبدا یا مقصد هر پرواز یک مرکز مبارزه با قاچاق وجود داشته باشد.

زتروس برای حل این مسأله با استفاده از ماشین B برنامه‌ای ارائه داد. در این برنامه به ازای هر فرودگاه یک متغیر وجود داشت. در این صورت اگر n فرودگاه داشته باشیم، متغیرها $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n خواهند بود. سپس برای هر پرواز بین

فرودگاه i و j، نابرابری $x_i + x_j \geq ۱$ در برنامه قرار داده شد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و همه‌ی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی شدند.

عددی که ماشین B به عنوان کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع متغیرهای اصلی اعلام کرد، برابر کم‌ترین تعداد مراکزی بود که باید تاسیس می شدند، و متغیرهایی که مقدار ۱ گرفتند، فرودگاه‌هایی را تعیین کردند که باید در آن‌ها مرکز مبارزه با قاچاق تاسیس می‌شد.

اکنون شما باید زتروس را یاری کنید که بتواند مسأله‌های پیشنهادی دیگری را نیز با موفقیت به انجام برساند. همان‌طور که در مثال‌های بالا ملاحظه کردید طراحی برنامه‌ها باید به گونه‌ای باشد که نوشتن برنامه‌ی نهایی از روی اطلاعاتی که در دسترس شرکت قرار می‌گیرد، به سادگی امکان‌پذیر باشد.

الف) رئیس‌جمهور یوتوپیا با مشاهده‌ی موفقیت این شرکت در حل مسایل یاد شده، مسأله‌ی زیر را به این شرکت پیشنهاد داد: آقای رئیس‌جمهور می‌خواهد تعدادی از نمایندگان مجلس را به جلسه‌ای دعوت کند ولی به علت مشکلی که در ابتدا گفته شد، او نمی‌خواهد که جلسه به مشاجره کشیده شود و از طرفی قصد دارد که حداکثر تعداد نمایندگان ممکن را دعوت کند. به همین خاطر، او لیست نمایندگانی را که باهم خصومت دارند تهیه کرده و به شرکت داده و از آن خواسته است که بیش‌ترین تعداد نمایندگانی را تعیین کند که هیچ دوتای آن‌ها با هم خصومت نداشته باشند. با استفاده از ماشین B به زتروس کمک کنید که این مسأله را حل کند. (۱۰ نمره)

ب) وزارت کار هم مسأله‌ای مطرح کرده است. این وزارت تعدادی پروژه دارد که می‌خواهد آن‌ها را به چند شرکت واگذار کند. هر شرکت لیست پروژه‌هایی را که توانایی انجام آن‌ها را دارد به این وزارت داده است. این وزارت قصد ندارد به هیچ شرکتی بیش از یک پروژه واگذار کند و یا پروژه‌ای را به بیش از یک شرکت واگذار کند. از طرفی می‌خواهد تعداد پروژه‌های واگذار شده بیش‌ترین تعداد ممکن باشد. این مسأله را با استفاده از ماشین B حل کنید. (۱۰ نمره)

ج) ثابت کنید که اگر در مسأله‌ی وزارت مبارزه با قاچاق، برنامه‌ی تهیه شده برای ماشین B اشتباهاً به ماشین A داده شود، جواب به‌دست آمده کم‌تر نصف جواب به‌دست آمده از ماشین B نخواهد بود . (یعنی مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین A کم‌تر از مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین B نخواهد بود). (۱۰ نمره)

«موفق باشید»