

ریشه و توان

مزدوج مخرج و لگاریتم

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی دهم



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
 - این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
 - در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
 - نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
 - در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
- بسیار ساده 🍌 جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 - ساده 😊 جهت تثبیت مطالب
 - متوسط 😊 جهت تمرین بیشتر مطالب
 - سخت 😡 جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

در دستگاه معادلات زیر، حاصل $\frac{y}{x}$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} 2^{4x} + 2^{2x+1} + 1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \\ 2^{2y} - 2^{y+1} + 1 = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: 😬 طرف دوم هر دو معادله نباید در مخرج کسر دارای عدد گنگ باشد. در نتیجه ابتدا باید در مزدوج خودشان ضرب شده تا مخرج کسر از حالت گنگ خارج شود.

$$\begin{aligned} \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} &= \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2} \\ &= (\sqrt{2} + 1)^2 \end{aligned}$$

برای عبارت سمت راست معادله دوم هم به همین صورت عمل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} &= \frac{1 + 5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{-9 + 4\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= 9 - 4\sqrt{2} \\ &= 8 - 4\sqrt{2} + 1 \\ &= (2\sqrt{2} - 1)^2 \end{aligned}$$

💡 یکی از روش‌های حل مسائل مربوط به چندجمله‌ای‌ها یافتن راهی برای تبدیل آن‌ها به مربع کامل یا مکعب کامل است.

اکنون باید طرف اول معادلات ساده شود. طرف اول هر دو معادله به صورت مربع کامل قابل نمایش است:

$$2^{4x} + 2^{2x+1} + 1 = (2^{2x} + 1)^2 = (4^x + 1)^2$$

$$2^{2y} - 2^{y+1} + 1 = (2^y - 1)^2$$

با معادل قرار دادن سمت راست و چپ معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (4^x + 1)^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 \\ (2^y - 1)^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2 \end{cases}$$

از آنجایی که تنها جواب‌های مثبت قابل قبول هستند، برای معادله اول $4^x = \sqrt{2}$ و معادله دوم $2^y = 2\sqrt{2}$

بدست می‌آید. با لگاریتم گرفتن از دو طرف مقادیر مجهولات تعیین می‌شوند.

$$4^x = \sqrt{2} \Rightarrow x \ln 4 = \ln \sqrt{2}, \Rightarrow 2x \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2, \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$2^y = 2\sqrt{2} \Rightarrow y \ln 2 = \ln 2\sqrt{2}, \Rightarrow x \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2, \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

در نهایت نسبت دو جواب به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{y}{x} = 6$$

مرا با موفقیت‌هایم قضاوت نکن،
بین که چند بار شکست خورده‌ام و
دوباره شروع کرده‌ام!
نلسون ماندلا



 AvaEducation16.blog.ir

   [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

  0935 210 4321