۱ مقدمه

۱.۱ مباحث درسی

- مفاهیم اولیه مجموعه ها
  - مجموعه ها : مجموعه ی اعداد
  - جبر مجموعه ها : اجتماع و اشتراک مجموعه ها
  - مجموعه ی توانی
  - زوج های مرتب ، حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها
  - مفهوم رابطه ، ترتیب ، رابطه ی هم ارزی
  - تابع
- منطق : زبان ریاضی
  - فرم منطقی گزاره های ریاضی
  - ترکیبها ی گزاره ای
  - سورها در ریاضی
  - اثبات ریاضی
- ساختمان اعداد
  - اعداد طبیعی ، اصل استقراء ، تعریف های بازگشتی ، مقدمات نظریه اعداد
  - اعداد صحیح و گویا
  - حل معادلات در اعداد صحیح و گویا
  - اعداد حقیقی
- مجموعه های متناهی و نامتناهی
  - تناظر ۱-۱
  - مجموعه ی متناهی و نامتناهی
  - شمارا و ناشمارا
  - کاردینال ها
  - قضیه شرودر - برنشتاین

۲.۱ اهداف درس

۱. تعلیم بنیادی ترین مفاهیم ریاضی مدرن

۲. آشنایی با طرز فکر ریاضی مجرد

نکته ی اصلی این است که ریاضی مدرن بر پایه ی مفاهیم بنیادی و پایه ای پی ریزی گردیده است. بنابرین لازم است تا دانشجویان در این حوزه از علم با این مفاهیم آشنا گردند.

نکته ی دیگری که علاوه بر هدف اصلی مذکور باید در این درس پیگیری گردد آن است که دانشجویان باید با طرز فکر مجرد ریاضی نیز آشنا گردند و به مرور پس از بکارگیری مفاهیم بنیادی خود ریاضی ورزیده گردند. بنابرین چون این درس اولین درس در این زمینه می باشد ، لازم است تا در این درس این هدف جانبی اما بسیار مهم پی گیری گردد.

این درس در عین حالی که متضمن مفاهیم پایه ای است اما مطلب این که اکثر مفاد درس و نوع رویکرد ارائه ی مطالب در این درس نو می باشد ، دانشجویان برای مفاهیم آن دچار مشکل میگردند. برای اینکه فهم نکات مطرح شده در درس آسان تر گردد ضروری است تا در ارائه ی درس و پی گیری آن توسط دانشجویان نکات ذیل مدنظر گرفته شود :

- شرکت فعال در کلاس درس و شرکت فعال در کلاس بحث
- کار گروهی
- حل تمرین ها در گروه کاری و پروژه های تحویلی
- تسلط به تایپ فارسی Tex
- مراجعه در اوقات رفع اشکال به استاد و مشاور مربوطه

۳.۱ ارزیابی

در این درس دو امتحان کتبی موجود است :

۱. امتحان میان ترم : ۶ نمره

۲. امتحان پایان ترم : ۱۰ نمره

حل تمرین و شرکت در کلاس بحث و ارائه ی آن ها : ۲- الی ۴ نمره

حضور و غیاب : ۱- الی ۱ نمره (حذف $\frac{۳}{۱۶}$ قابل اعمال است)

پروژه ها : ۲ نمره

مطالب مهم در تمرین ها :

- دانشجویان ترغیب میگردند تا مسائل را به طور گروهی حل نمایند
- پرهیز جدی از کپی برداری
- تمرین ها هر هفته در روز یک شنبه تحویل داده میشود و در روز یک شنبه تحویل گرفته میشود. در روز سه شنبه یک هفته در میان کلاس بحث(حل تمرین) صورت میگیرد.
- در کلاس بحث از دانشجویان خواسته می شود تا راه حل خود را برای تمرین ها ارائه نمایند و نسبت به مفاهیم بحث خواهد شد

۴.۱ مروری مختصر بر تاریخ ریاضی

۱.۴.۱ ریاضی یونان (فیثاغورث)

۲.۴.۱ گام دوم در دوران یونان

دوران ریاضی است که پس از ارسطو که علم منطق را پایه ریزی کرد ، شکل گرفته است. روش های اصل موضوعه ای اثبات احکام پیچیده تر بر حسب تعاریف و اصول اولیه چیزی است که در این دوران نقش گرفته است. در این بین اقلیدس وجهه ی شاخصی را داراست (هندسه ی اقلیدسی).

نکته ی دیگر تاثیر افکار فلسفی افلاطون در ماهیت اشیاء ریاضی است. ریاضی دانان یونانی این مسئله را بسیار جدی پنداشته و بدین مطلب پرداخته اند که افلاطون بر این مطلب تاکید داشت که اشیاء ریاضی همچون دیگر اشیاء دیگر حقایقی در عالم مثل دارند و حقایق آنها اعداد و اشکال ریاضی در یک دنیای مجرد موجودند.حقایق راجع به اشیا مستقل از ذهن انسانی برقرارند.(افلاطون گرائی بعنوان

یک گرایش در فلسفه ی ریاضی معاصر نیز موجود است).این حقایق توسط انسان ها کشف میگردند. جمله ی مشهور "آن که هندسه نمیداند وارد نشود" بیانگر نظر افلاطون به جایگاه رفیع هندسه به جهت دارا بودن اشیاء مجرد در آن است.

۳.۴.۱ دوره ی اسلامی(رشد جبر- حل معادلات)

دکارت : تقلیل هندسه به جبر(به این معنا که جبر خواص اعداد را مطالعه میکند بعنوان یک زمینه ی بنیادی تر ریاضی قلمداد گردیده است.)
زمینه ی رشد ریاضیات و کاربردهایی در فیزیک مهندسی در کارهای نیوتن - لایب نیتس با ایجاد حساب دیفرانسیل و انتگرال ایجاد گردید.

۴.۴.۱ قرن نوزدهم

در این رشد ریاضیات مجرد و ایجاد خلل های منطقی باعث ایجاد روش های اصل موضوعه ای در شاخه های مختلف ریاضیات گردید :

اصول موضوعه : برای مطالعه ی اشیاء ، ابتدا خواص و روابط بنیادی آن ها را در نظر میگیریم و آن خواص تحت یک سری از اصول موضوعه ای بیان می نمائیم.

مثال ها :

- اصول هندسه ی اقلیدس در بیان هندسه ی اقلیدسی
- اصول موضوعه پئانو (Peono Arithmetic) [اصل استقراء]

۵.۴.۱ آنالیز حقیقی

کوشی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بر مبنای مفهوم حد و نه حساب بی نهایت کوچک ها ارائه نمود و به ویژه مفهوم پیوستگی $(\epsilon - \sigma)$ را به صورت امروزی ارائه نمود.
بولترانو - وایرشتراس در مطالب بیشتری کاوش کرده اند. ددکیند تعریف رسمی اعداد حقیقی را توسط برش های ددکیند ارائه نمود.

۶.۴.۱ نظریه گروه ها

معادلات درجه ی بالاتر از ۴ توسط رادیکال ها قابل حل نیست.
تثلیث زاویه (در حالت کلی) توسط خط کش و پرگار ممکن نیست.

روش های حل این مسئله ها منجر به ایجاد نظریه گروه ها گردید.(تقارن)
با ابداع مفهوم فضاهای برداری هندسه با بعد بالاتر از ۳ تعمیم یافت.

۷.۴.۱ هندسه ی نااقلیدسی

عدم موفقیت برای اثبات این که اصل توازی از اصول دیگر اقلیدس منظماً به دست می آید باعث ایجاد و کشف هندسه های نااقلیدسی، هندسه ی بیضوی و هندسه ی هذلولی گردید. مفاهیم اولیه (منطق و سیستم های استنتاجی) در اینجا بدست آمده است.

۸.۴.۱ منطق

یکی از کارهایی که در ریاضیات قرن ۱۸ صورت پذیرفت رویکرد فرمال و منطقی به گزاره های ریاضی لایب نیتس و لابرت بود.

جرج بول(قرن ۱۹) اولین کسی بود که به طور سیستماتیک به روش ریاضی (جبری) به تحلیل منطق پرداخت و باعث ایجاد و ابداع مفهوم جبرهای بول در ریاضیات گردید. بدین ترتیب منطق بخشی از ریاضیات در نظر گرفت. (بعد ها فرگه - راسل سعی بر این داشتند تا ریاضیات را منطق فروکاهش دهند)

۹.۴.۱ مفاهیم سورها و روابط توسط پیرس - فرگه

تئوریهای ریاضی بعنوان مجموعه ای از احکام از کارهای فرگه به دست آمده است.
فرگه معتقد بود که تئوری های ریاضی باید ۳ ویژگی ریز را دارا باشند :

- سازگاری : عدم وجود تناقض
- کامل بودن : هر حکم یا خودش یا نقیض آن قابل اثبات باشد
- تعمیم پذیری : روش برای تعمیم در مورد یک گزاره مشخص باشد

ابداع شکل سورهای وجودی و عمومی توسط پئانو - گترین انجام گردید.

حساب پئانو : روش اصل موضوعه ای برای حساب اعداد طبیعی توسط پیرس - ددکیند و پئانو در قرن نوزدهم صورت پذیرفت.

نظریه مجوعه ها : کانتور : مفهوم رده بندی مجموعه های نامتناهی . نظریه مجموعه ها به عنوان بنیاد ریاضی

بحران در مبانی ریاضی : سازگاری ریاضیات در اوایل قرن بیستم با ظهور بسیاری از پارادوکس ها (پارادوکس راسل و ...) به چالش کشیده شد.

روش اصل موضوعه مجموعه ها : طرح ریزی مفهوم مجموعه به گونه ای که تناقضات مرتفع گردند.
برنامه ی هیلبرت : اثبات کامل ریاضیات بر اساس ریاضیات متناهی.

۲ آشنایی اجمالی با منطق گزاره ای (ریاضی نویسی)

در این فصل با مفاهیم اولیه زبان ریاضی (به عبارتی ریاضی نویسی) آشنا میگردیم.

دقت کنید که در این قسمت هدف این است که آنچه در کار روزمره ریاضی دانان انجام میدهند را به زبان دقیق به نگارش درآوریم.

یکی از ویژگی های ریاضیات دقت در آن است بنابراین یکی از مولفه های کار ریاضی این است که بتوان مفاهیم را دقیق به رشته تحریر درآورد.

بدون نگرش دقیق اندیشه های ریاضی نمیتوان اطمینان حاصل کرد که آنچه در ذهن میگذرد واقعا دقیق می باشد. بنابراین نگارش مفاهیم ریاضی بسیار مهم می باشد.

زبان ریاضی (منطق است).

بنابراین منطق ریاضی در واقع پی ریزی شالوده افکار ریاضی است.

منطق ریاضی را به دو دسته می توان تقسیم کرد :

الف) منطق گزاره ای (propositional logic)

ب) منطق محمولات (سورها) (First-order logic) (predicate logic)

در قسمت اول منطق سعی بر این است تا جملات و متون ریاضی به جملات ابتدایی و اولیه اتمیک شکسته شوند. بنابراین میتوان یک متن ریاضی را توسط تشخیص جملات پایه ای آن و نحوه ترکیب منطقی آن جملات فهمید. بنابراین می توان فرم منطقی هر متن ریاضی را با تعیین گزاره های اتمیک بدست آورد.

به مثال های زیر توجه کنید :

- اگر A یک مثلث قائم الزاویه باشد در آن صورت مجموع مجذورات دو ضلع قائمه برابر با مجذور وتر است.
- اعداد اول بزرگتر از ۲ نامتناهی است و تمام اعداد فرد اول هستند.
- شرط لازم و کافی برای این که عدد حقیقی x مثبت باشد این است که مجذور یک عدد باشد.

- هر عدد غیر صفر مجموع مجذور ۴ عدد طبیعی است

در تمام جملات فوق می توان فرم های منطقی را مشخص نمود.

فرم های گزاره ای به چهار صورت زیر ترکیب می گردند :

۱) فرم عطفی

۲) فرم فصلی

۳) فرم شرطی

۴) فرم نفی (نقیض)

فرم عطفی : $\boxed{\quad\quad\quad}$ و $\boxed{\quad\quad\quad}$

فرم فصلی : $\boxed{\quad\quad\quad}$ یا $\boxed{\quad\quad\quad}$

فرم شرطی : اگر $\boxed{\quad\quad\quad}$ آنگاه $\boxed{\quad\quad\quad}$

(فرم دیگر شرطی ، بصورت شرط لازم و شرط کافی بیان می گردد)

فرم نفی (نقیض) : چنین نیست که $\boxed{\quad\quad\quad}$

- درست بودن فرم عطفی در صورتی برقرار است که هر دو مؤلفه درست باشند.
- درست بودن فرم فصلی در صورتی برقرار است که یکی از دو مؤلفه درست باشد.
- غلط بودن فرم شرطی در صورتی که مقدم درست باشد تالی غلط باشد.
  اگر مقدم درست باشد آنگاه تالی درست باشد.

۱.۲ منطق گزاره :

الف) گزاره اتمیک (بسیط) : با نماد های $p, q, r, ...$ نمایش داده میشوند.

ب) ادات منطقی (گزاره ای) : $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$ ، $\neg$

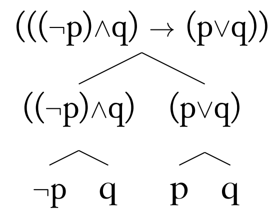
گزاره ها :

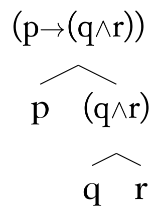
الف) گزاره های اتمیک.

ب) اگر A, B دو گزاره باشند در آنصورت $(A \wedge B)$ و $(A \vee B)$ و $(A \rightarrow B)$ و $(\neg A)$ گزاره هستند.

ج) گزاره ها توسط الف و ب تشکیل می شوند.

مثال .





درستی گزاره ها توسط جدول ارزشی فرم های منطقی مشخص می شوند :

A	B	$A \rightarrow B$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	انتفاء مقدم ۱
۰	۰	انتفاء مقدم ۱

A	B	$A \vee B$
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

A	B	$A \wedge B$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

A	$\neg A$
۱	۱
۰	۰

جدول ارزش گزاره های زیر را رسم کنید :

$(p \wedge q) \rightarrow r$

$(p \vee q) \wedge r$

$(\neg p \vee q)$

فرم های دیگر شرطی :

q شرط لازم برای p است. $\qquad p \to q:$

p شرط کافی برای q است.

تعریف . دو شرطی :

$$(p \leftrightarrow q) \rightleftharpoons (p \to q) \wedge (q \to p)$$

$p \leftrightarrow q$ ، p اگر و تنها اگر q.

$(p \leftrightarrow q)$ ، p شرط لازم و کافی برای q است.

A	B	$A \leftrightarrow B$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

برای تصمیم برای صحت یک گزاره ریاضی می توان ابتدا گزاره های اولیه را تشخیص داد سپس دید که چگونه این گزاره ها با هم به لحاظ منطقی ترکیب شده اند. در آن صورت صدق گزاره های ترکیبی با استفاده از جدول های ارزشی مشخص می گردند.

در فصول بعد، از این روش برای اثبات قضایا استفاده می کنیم.

البته برای تحلیل کامل منطق گزاره های ریاضی احتیاج به منطق محمولات که در آن سورهای وجودی و عمومی است نیز داریم (که بعداً به آن اشاره می گردد)

۲.۲ هم ارزی منطقی

تعریف . فرض کنید A و B دو گزاره در منطق گزاره ای باشند. گوئیم A و B از لحاظ منطقی هم ارزند هرگاه جدول ارزشی A و B یکسان باشند.(در این صورت می نویسیم $A \equiv B$)

تعریف . (i) گوئیم A توتولوژی (همانگونی) گویند هرگاه جدول ارزشی A همواره ۱ باشد.

(ii) گوئیم A یک تناقض است هرگاه جدول ارزشی A همواره ۰ باشد.

مثال .

۱) $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

۲) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

۳) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

۴) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

۵) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

۶) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv (p \leftrightarrow r) \vee (q \leftrightarrow r)$

مثال . گزاره های زیر توتولوژی است :

$(\neg p \vee p), (p \rightarrow p), (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

تمرین.الف) $A \equiv B$ اگر و تنها اگر $(A \leftrightarrow B)$ یک توتولوژی می باشد.

ب) A یک توتولوژی است اگر و تنها اگر $(\neg A)$ تناقض باشد.

تمرین. گزاره های زیر را به صورت منطق گزاره ای بنویسید.

الف) عدد A فرد است مگر اینکه بر دو بخش پذیر باشد.

ب) دست از طلب ندارم تا کام من برآید

. یا جان رسد به جانان یا جان ز تن در آید

گزاره.

الف) A یک توتولوژی است $\Longleftrightarrow$ $(\neg A)$ یک تناقض باشد.

ب) A یک تناقض است $\Longleftrightarrow$ $(\neg A)$ یک توتولوژی باشد.

ج) A و B دو گزاره ی هم ارزند $\Longleftrightarrow$ $(A \longleftrightarrow B)$ توتولوژی باشد.

نمادها در منطق گزاره ها :

- نماد های جمله ای : $P_۰, P_۱, \ldots$
- نماد های منطقی : $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$

اثبات . قسمت ج :

الف) اگر $(A \leftrightarrow B) \equiv T$ آنگاه $A \equiv B$

فرض : $(A \leftrightarrow B) \equiv T$ حکم : $A \equiv B$

چون A و B دو گزاره هستند پس هر دو از تعدادی گزاره ی اتمیک تشکیل شده اند. مثلا $P_1, ..., P_n$ را به صورت زیر مینویسیم.

$A(P_1, ..., P_n)$ ، $B(P_1, ..., P_n)$

گزاره های $A(P_1, ..., P_n)$ و $B(P_1, ..., P_n)$ دارای جدول های ارزشی با 2^n سطر خواهد بود.

یادآوری فرض خلف یعنی اینکه نقض جمله ای که میخواهیم ثابت کنیم را در نظر میگیریم و به تناقض برسیم.

تناقض :

$$\frac{\neg X \vdash Y, \neg Y}{X}$$

فرض می کنیم $A \not\equiv B$ بنابراین لااقل در یک سطر از جدول ارزش های A و B متفاوت هستند. مثلا در سطر m-ام $A \equiv F$ و $B \equiv T$ و یا برعکس. بنابراین جدول ارزشی $A \leftrightarrow B$ در سطر m-ام F خواهد بود.

تناقض : زیرا از طرفی $A \leftrightarrow B$ توتولوژی است. اما طبق فرض خلف $A \leftrightarrow B$ توتولوژی نیست.

با توجه به فرض خلف داریم $A \equiv B$

P_1	P_2	P_3	....	P_n	$A(P_1, ..., P_n)$	$B(P_1, ..., P_n)$	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	$\vdots$	T			
T	F	F	$\vdots$	F			
					F	T	F
F	$\vdots$	F	$\vdots$	T			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

ب) قسمت تنها اگر

فرض : $A \equiv B$ حکم : $(A \leftrightarrow B) \equiv T$

برای این که ثابت کنیم $A \leftrightarrow B$ توتولوژی است باید جدول ارزشی $A \leftrightarrow B$ را رسم کنیم و ببینیم که این جدول همواره درست است.

P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n	$A(P_1, ..., P_n)$	$B(P_1, ..., P_n)$	$A \leftrightarrow B$
					T	T	
					$\vdots$	$\vdots$	
					T	T	
					F	F	

(*)

اما چون $A \equiv B$ بنابرین در هر سطر جدول (*) B و A ارزش های یکسان دارند پس طبق جدول $A \leftrightarrow B$ همواره ارزش T $A \leftrightarrow B$ خواهد بود، پس $A \leftrightarrow B$ یک توتولوژی است.

بررسی بعضی از هم ارزی های منطقی :

۱) $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

۲) $(p_1 \vee p_2) \wedge p_3 \equiv (p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)$

۳) $(p \vee Q) \equiv Q \vee p$

۴) $(p \wedge Q) \equiv Q \wedge p$

۵) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

۶) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

مفهوم کلیدی و بنیادی منطق ، مفهوم استدلال استنتاج است.

با داشتن تعدادی متناهی مفروضات مانند $A_1, ..., A_n$ و استفاده از قواعد درست منطقی گزاره ای مانند A را بدست می آوریم. در این صورت می نویسیم : $(A_1, ..., A_n) \Longrightarrow A$

در کتب دیگر نمادهای دیگری بکار می روند :

$$\frac{A_1, ..., A_n}{A} \qquad \text{یا} \qquad \{A_1, ..., A_n\} \vdash A$$

تعریف . استنتاج (= استلزام) : گوییم گزاره های $A_1, ..., A_n$ مستلزم گزاره ی A است. (گزاره ی A از گزاره های $A_1, ..., A_n$ استنتاج میشود.) در صورتی که $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \longmapsto A$ یک توتولوژی

باشد. در این صورت می نویسیم $(A_1, ..., A_n) \Longrightarrow A$.
دقت کنید که در تعریف بالا گزاره های $A_1, ..., A_n$ گزاره هایی دلخواه هستند.

مثال .

۱) $\{A \wedge B\} \Longrightarrow A$

۲) $\{A, B\} \Longrightarrow A$

۳) $A \Longrightarrow (A \vee B)$

۴) $\{p \vee q, \neg p\} \Longrightarrow q$

۵) $\{p, p \to q\} \Longrightarrow q$

۶) $\{p \to q, (r \to s)\} \Longrightarrow [(p \vee r) \to (q \wedge s)]$

۷) $\{(p \to q), (q \to r)\} \Longrightarrow (p \to r)$

لم. $\{A_1, ..., A_n\} \Longrightarrow A$ اگر و فقط اگر $\{A_1 \wedge ... \wedge A_n\} \Longrightarrow A$

نکته. رویکرد های دیگری نیز برای مفهوم برهان (استنتاج) وجود دارد. در رویکرد حاضر مفهوم استنتاج بر مبنای مفهوم درستی تعریف شده است. اما میتوان مستقل از مفهوم درستی نیز مفهوم استنتاج را بیان کرد.

تمرین. فرض کنید یک جدول ارزشی داده شده است. آیا میتوان گزاره ی A را پیدا نمود بطوری که جدول ارزشی $A(P_1, ..., P_n)$ دقیقا جدول داده شده باشد؟

P_1	P_2	P_3	$?(P_1, P_2, P_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

فرض کنید گزاره ی A موجود باشد. در آن صورت گزاره ی A فقط و فقط وقتی درست که :

۱) $P_۱$ درست باشد و $P_۲$ درست باشد و $P_۳$ درست باشد

۲) $P_۱$ درست باشد و $P_۲$ درست باشد و $P_۳$ نادرست باشد

۳) $P_۱$ نادرست باشد و $P_۲$ نادرست باشد و $P_۳$ درست باشد

الگوریتم حل مسئله

۱. ابتدا سطر هایی که در آن فرمول خواسته شده درست است را تشخیص دهید.

i) سطر درستی موجود نیست. در این صورت فرمول خواسته شده $(P_۱ \wedge (\neg P_۱))$ این است.

ii) سطر های درست موجود است. به حالت ۲ بروید. (مثلا k سطر $l_۱, l_۲, ..., l_k$ سطر هایی هستند که در فرمول خواسته شده درست است)

۲. در هر سطری که فرمول خواسته شده درست است به ارزش های $P_۱, ..., P_n$ نگاه میکنیم.
فرض کنید j-امین سطر را با چنین خاصیتی در نظر میگیریم :
در این صورت گزاره : $Q_i^{(j)} \wedge ... \wedge Q_n^{(j)} = A^{(j)}$ را می سازیم.
به طوری که :

$$Q_i^{(j)} = \begin{cases} P_i & P_i \equiv T \\ \neg P_i & P_i \equiv F \end{cases}$$

۳. در این صورت فرمول برابر است با $A = A^{(۱)} \vee ... \vee A^{(k)}$

حال باید اثبات نمود که دقیقا جدول فرمول A دقیقا جدول داده شده است.

اثبات . باید نشان دهیم فرمول A دقیقا در یکی از سطر های $l_۱, l_۲, ..., l_k$ درست است. اما A فقط و فقط وقتی درست است که وجود داشته باشد $۱ \leq j \leq k$ که $A^{(j)}$ درست باشد. اما میتوان دید که $A^{(j)}$ فقط و فقط در سطر j-ام l_j درست است. بنابراین A فقط در یکی از سطر های l_j $\quad ۱ \leq j \leq k$ درست است.

اثبات دقیق تر بر مبنای استقرا است.

مثال . فرمول $A(P_۱, P_۲, P_۳)$ را طوری بیابید که $A(P_۱, P_۲, P_۳)$ درست باشد اگر و فقط اگر اکثریت $P_۱, P_۲, P_۳$ درست باشد.

P_1	P_2	P_3	$?(P_1, P_2, P_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

$$A \equiv (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$$

منطق محمولات (منطق سور ها) :

سورهای وجودی و عمومی $\forall, \exists$

منطق محمولات در برگیرنده ی منطق گزاره هاست. (در منطق محمولات : اولا : گزاره های اتمی)

در منطق گزاره ها پایه ای ترین گزاره ها گزاره های اتمی هستند. اما منطق محمولات به تحلیل گزاره های اتمی می پردازد. (محمولات و یا نسبت ها وسیله ای برای تحلیل گزاره های اتمی هستند.)

از جهت دیگر در منطق محمولات علاوه بر رابط های منطقی گزاره ای ، رابط های منطقی سورها نیز موجودند.

به جملات ریاضی زیر دقت کنید :

۱. تمام اعداد زوج بر دو بخش پذیرند

۲. تمام اعداد طبیعی یا زوج هستند یا فرد

۳. عددی طبیعی موجود است که نه زوج است و نه فرد

۴. عدد حقیقی نامنفی موجود است

۵. بزرگترین عدد حقیقی موجود نیست

۶. عدد حقیقی x مثبت است (گزاره نما)

در منطق محمولات ارکان زیر وجود دارد:

۱. عالم سخن : مجموعه ای غیر تهی که در یک متن ریاضی خاص تمام اشیاء مورد بحث را داراست.

۲. روابط بنیادی (اتمیک) بین اشیاء عالم سخن را مورد نظر قرار میدهیم.

۳. سورها : $\forall, \exists$

۴. روابط منطقی گزاره ها : $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

۵. متغیر ها : $x_1, x_2, ...$

۶. مولفه های کمکی (و)

۷. ثابت ها $c_1, c_2, ...$

محمولات : نماد هایی به صورت $R(x)$ و $R(x,y)$ و $R(x_1, ..x_n)$ برقرار نمودن یک رابطه بین یک یا دو یا بیشتر اسناد یا محمولی است که جایگزین گزاره های اتمیک در منطق گزاره ها میشود.

فرمول (گزاره ها و گزاره نماها) هستند :

- تمام محمولات ، فرمول های اتمیک هستند. $R(x,y), R(x)$
- اگر φ_1 و φ_2 دو فرمول باشند $\varphi_1 @ \varphi_2$ که $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ و $\neg\varphi_1$ نیز فرمول هستند
- اگر x یک متغیر و φ یک فرمول باشد ، آنگاه $(\forall x \varphi)$ و $(\exists x \varphi)$ نیز فرمول هستند
- هر فرمول از مراحل بالا به دست می آبد

منطق مرتبه ی اول :

۱. عالم سخن : مجموعه ای غیر تهی که در یک متن ریاضی خاص تمام اشیاء مورد بحث را داراست.

۲. روابط بنیادی (اتمیک) بین اشیاء عالم سخن را مورد نظر قرار میدهیم.

۳. سورها : $\forall, \exists$

۴. روابط منطقی گزاره ها : $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

۵. متغیر ها : $x_1, x_2, ...$

۶. مولفه های کمکی (و)

۷. ثابت ها $c_{۱}, c_{۲}, ...$

۸. اسناد یا محمول مثلا مفهوم زوج بودن ، اول بودن و ...

گزاره های ریاضی زیر را در نظر بگیرید :

۱. تمام اعداد زوج بر دو بخش پذیرند

۲. تمام اعداد طبیعی یا زوج هستند یا فرد

۳. عددی طبیعی موجود است که نه زوج است و نه فرد

۴. عدد حقیقی نامنفی موجود است

۵. بزرگترین عدد حقیقی موجود نیست

۶. عدد حقیقی x مثبت است (گزاره نما)

هدف : ترجمه ی جملات فارسی بالا به زبان فرمال ریاضی :

جمله ی اول :

۱. عالم سخن :

i پیشنهاد اول : $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$

ii پیشنهاد دوم : $\mathbb{Z} = \{..., -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ...\}$

۲. x زوج است $E(x) \longleftrightarrow$ بر ۲ بخش پذیر است $O(x) \longleftrightarrow$

به ازای هر عدد طبیعی مانند x ، اگر x زوج باشد آنگاه x بر ۲ بخش پذیر است.

$$\forall x \in \mathbb{N}(E(x) \longrightarrow O(x))$$

جمله ی دوم :

۱. عالم سخن : $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$

۲. x عددی زوج است $\longleftrightarrow E_{۱}(x)$ $\qquad$ x عددی فرد است $\longleftrightarrow E_{۲}(x)$

به ازای هر عدد طبیعی مانند x ، x یا زوج است یا فرد.

$\forall x \in \mathbb{N}(E_{۱}(x) \vee E_{۲}(x))$

جمله ی سوم :

۱. عالم سخن : $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$

۲. x عددی زوج است $\longleftrightarrow E_{۱}(x)$ $\qquad$ x عددی فرد است $\longleftrightarrow E_{۲}(x)$

وجود دارد عددی طبیعی بطوری که آن عدد نه زوج است و نه فرد

$\exists x \in \mathbb{N}(\neg E_{۱}(x) \vee \neg E_{۲}(x))$

یا

x عددی زوج نیست $\longleftrightarrow E_{۱}(x)$ $\qquad$ x عددی فرد نیست $\longleftrightarrow E_{۲}(x)$

$\exists x \in \mathbb{N}(E_{۱}(x) \wedge E_{۲}(x))$

جمله ی چهارم :

۱. عالم سخن : $\mathbb{R}$ = اعداد حقیقی

۲. x عددی نامنفی است $\longleftrightarrow E(x)$

وجود دارد عددی حقیقی مانند x بطوری که x نامنفی است.

$\exists x \in \mathbb{R}(E(x))$

یا

x کوچکتر یا مساوی y است $\longleftrightarrow E(x, y)$ $\qquad$ $c = ۰$ ثابت

$\exists x \in \mathbb{R}(E(۰, x))$

یا

x کوچکتر از y است $\longleftrightarrow E(x, y)$ $\qquad$ $c = ۰$ ثابت

$\exists x \in \mathbb{R}(\neg E(x, ۰))$

جمله ی پنجم :

۱. عالم سخن : $\mathbb{R}$ = اعداد حقیقی

۲. x از y کوچکتراست $\longleftrightarrow E(x,y)$

به ازای هر عدد حقیقی مانند x ، وجود دارد عددی حقیقی مانند y به طوری که x از y کوچکتر است.

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(E(x,y))$

جمله ی ششم :

۱. عالم سخن : $\mathbb{R}$ = اعداد حقیقی

۲. x عددی مثبت است $\longleftrightarrow P(x)$

وجود دارد عددی مانند x که مثبت است.

$\exists x \in \mathbb{R}(P(x))$

تعریف . فرمول φ یک گزاره است در صورتیکه فاقد متغیر آزاد باشد.
متغیر آزاد : متغیری است که توسط یک سور $(\exists, \forall)$ محصور نباشد.

مثال . هر عدد صحیح مثبت در اعداد حقیقی مربع کامل است.

۱. عالم سخن : $\mathbb{R}$ = اعداد حقیقی

۲. x عدد صحیح مثبت است $\longleftrightarrow P(x)$ $\qquad$ x مربع کامل است $\longleftrightarrow O(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}(P(x) \longrightarrow O(x))$$

مثال . در اعداد مختلط معادلات درجه ی ۲ دارای جواب است.

۱. عالم سخن : $\mathbb{C}$ = اعداد مختلط

۲. معادله ای درجه ی ۲ در $\mathbb{C} \longleftrightarrow A(x)$ $\qquad$ $A(x) = ax^۲ + bx + c$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{C} \;\; \exists x_۰ \in \mathbb{C}(A(x_۰) = ۰)$$

* اعداد گویا در اعداد حقیقی چگال است.

اعداد گویا دارای خاصیت زیر هستند :
اگر دو عدد حقیقی a و b را درنظر بگیریم بطوری که $a < b$ آنگاه عدد گویایی مانند r موجود است به طوری که $a < r < b$.

۱. عالم سخن : $\mathbb{R}$ = اعداد حقیقی

۲. x از y کوچکتر است $\longleftrightarrow R(x,y)$ $\qquad$ x گویاست $\longleftrightarrow Q(x)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}[R(x,y) \longrightarrow \exists z(Q(z) \wedge R(x,z) \wedge R(z,y))$$

به زبان منطق ریاضی میتوان گفت که :

$$\forall x \forall y \exists z(x < y \longleftrightarrow x < z < y) \equiv \forall x \forall y(x < y \longleftrightarrow \exists z(x < z < y))$$

در حالت کلی داریم :
اگر متغیر z در فرمول ψ ظاهر نشود آنگاه :

$$\exists x(\psi \longrightarrow \varphi(z)) \equiv \psi \longrightarrow \exists x \varphi(z)$$

مشابها داریم :

$$\forall z(\psi \longrightarrow \varphi(z)) \equiv \psi \longrightarrow \forall z \varphi(z)$$
$$\exists z(\varphi(z) \longrightarrow \psi) \equiv \forall z \varphi(z) \longrightarrow \psi$$
$$\forall z(\varphi(z) \longrightarrow \psi) \equiv \exists z \varphi(z) \longrightarrow \psi$$

قوانین دمورگان :

$$\neg \exists z \varphi \equiv \forall z \neg \varphi(z)$$
$$\neg \forall z \varphi(z) \equiv \exists z \neg \varphi(z)$$

مثال . تمام معادلات درجه (۱) در اعداد حقیقی با ضرایب گویا دارای جواب یکتای گویاست.

۱. عالم سخن : $\mathbb{R}$ = اعداد حقیقی

۲. $R(a,x,b) = ax + b = 0$ $\qquad$ x گویاست $\longleftrightarrow Q(x)$ $\qquad$ $P(c,d) \longleftrightarrow c \neq d$

به ازای هر $a,b \in Q$ وجود دارد $x_0 \in Q$ بطوری که $ax_0 + b = 0$ و به ازای هر $x_1 \in Q$ اگر $x_1 \neq x_0$ آنگاه $ax_1 + b \neq 0$

$$\forall a,b \in Q \exists x_0 \in Q(R(a,x,b) \wedge \forall x_1(P(x_1,0) \longleftrightarrow \neg R(a,x_1,b))$$

$$\forall x_1,x_2 \in R[Q(x_1) \wedge Q(x_2) \longleftrightarrow \exists x[Q(x) \wedge R(x_0,x_1,x_2) \wedge \forall z(R(z,x_1,x_2) \longleftrightarrow E(z,x)]]$$

$$\forall a,b \in Q[\exists x \in Q(ax+b=0 \wedge \forall z_1,z_2 \in R(az_1+b=0 \wedge az_2+b=0) \longleftrightarrow z_1=z_2)]$$

مثال . شرط لازم و کافی برای اینکه تمام معادلات درجه (۲) در اعداد حقیقی دارای جواب باشد این است که $\Delta \geq 0$.

$$R(a,b,c,x) \longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$$

$$\forall a,b,c \in R([\exists x,y \in R(x \neq y) \wedge (ax^2+bx+c=ay^2+by+c=0)] \longleftrightarrow b^2-4ac>0)$$

۳ درس اول

بخش مجموعه ها ، روابط و توابع

۱.۳ مقدمه

همان گونه که در قسمت قبل اشاره شد ، مفهوم مجموعه ابتدا توسط کانتور ، ریاضیدان آلمانی در اوایل قرن بیستم مطرح شد. هدف اولیه تعریف مجموعه به منظور رده بندی مفهوم نامتناهی بود. به نظریه مجموعه هایی که برمبنای مفهوم شهودی مجموعه ها انجام می پذیرد نظریه شهودی نظریه مجموعه ها گفته میشود. در مقابل نظریه مجموعه های شهودی ، نظریه اصل موضوعه ای مجموعه ها است. که مفهوم مجموعه و تعلق به عنوان مفاهیم اولیه در نظر گرفته میشود و سپس با استفاده از منطق اصول کلی حاکم بر مجموعه ها تحت عنوان اصول نظریه مجموعه ها بیان میگردند. این اصول به گونه ای طرح ریزی گردیده اند تا تناقض نماهای موجود را مرتفع نماید و در عین حال تضمین گر وجود ایجاد مجموعه ی پیچیده تری که توسط اعمال توابع مجموعه ساز از مجموعه های ساده تر (از قبیل اجتماع ، اشتراک ، مجموعه ی توانی ، حاصل ضرب دکارتی و ...) باشد.
در این قسمت هدف مروری مختصر بر نظریه شهودی مجموعه ها است. (نظریه ی اصل موضوعه ای مجموعه ها در درس مبانی منطق و مجموعه ها مورد بحث قرار میگیرند.)
تفاوت عمده ی رویکرد شهودی با رویکرد نظریه اصل مجموعه ها این است که بسیاری از مفاهیم از قبیل اعداد مورد قبول واقع میشوند در صورتی که در رویکرد نظریه اصل مجموعه ها تنها مفهوم های اولیه ، مفهوم مجموعه و تعلق می باشد و تمامی مفاهیم دیگر از قبیل اعداد طبیعی ، اعداد صحیح ، اعداد گویا و ... و مفاهیمی از قبیل تابع ، رابطه و ... توسط مفهوم مجموعه و تعلق تعریف میگردند.

تعریف .

مجموعه : یک مجموعه عبارت است از گردایه ای از اشیاء (مسلماً این تعریف یک تعریف شهودی است و فاقد دقت های منطقی است زیرا مفهوم گردایه چیزی جز بیان دیگری از مفهوم مجموعه ها نیست)
شیوه ی معمول نشان دادن مجموعه ها ، استفاده نمودن از { } است که در داخل آن اشیائی در نظر گرفته میشود. چنانچه شئ a در یک مجموعه ی A باشد گوییم a متعلق به A است و می نویسیم ($a \in A$)

مثال .

درعالم اعداد :

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

$\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ...\} = \mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Z} = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | n, m \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$

$\mathbb{R} = \{\pm A_۰/c_۱c_۲...c_n... | A_۰ \in \mathbb{W}, c_۱, ..., c_n, ... \in \{۰, ۱, ..., ۹\}\}$

$[۰, ۱] = \{۰/c_۱c_۲...c_n... | c_۱, c_۲, ..., c_n, ... \in \{۰, ۱, ..., ۹\}\}$

$\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, ۳, ..., k\}$

نکته. برای اینکه یک مجموعه را مشخص نمائیم کافی است تا اشیاء متعلق به آنرا مشخص نمائیم. گاهی مواقع مجموعه ها عبارتند از گردایه اشیائی که دارای ویژگی $P(-)$ باشند. در آن صورت مجموعه ی A را به صورت $\{X : P(X)\}$ نمایش میدهیم.

ویژگی اوّلیه و اصلی مجموعه ها این است که دو مجموعه فقط وفقط وقتی با هم برابرند که عناصر یکسانی داشته باشند. به عبارت منطقی :
فرض کنید A و B دو مجموعه ی دلخواه باشند در آنصورت $A = B$ اگرو تنها اگر به ازای هر عنصر x ($x \in A$ اگر و تنها اگر $x \in B$).

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x(x \in A \longrightarrow x \in B) \ \ \& \ \ \forall x(x \in B \longrightarrow x \in A)$$

مطلب فوق به معنای این است که چنانچه بخواهیم اثبات کنیم که دو مجموعه با هم برابرند در آنصورت کافی است از روش عنصرگیری مطلب را به اثبات برسانیم. یعنی اینکه :

قدم اول : تمام عناصر A در B هستند.

قدم دوم : تمام عناصر B در A هستند.

تعریف . فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند. گوئیم A زیر مجموعه ی B است در صورتی که تمام عناصر A در B باشند. به بیان دیگر :

A زیرمجموعه ی B است $\Longleftrightarrow \forall x \ \ (x \in A \longrightarrow x \in B)$

نمادگذاری. در صورتی که A زیر مجموعه ی B باشد می نویسیم $A \subseteq B$

دقت کنید اصل تساوی مجموعه ها به صورت زیر در نظر گرفته میشود :

$$A = B \ \ iff \ \ A \subseteq B, B \subseteq A$$

تعریف . A را زیرمجموعه ی سره *(proper)* B میگویند هرگاه $A \subseteq B$ و $A \neq B$

نمادگذاری. اگر A زیرمجموعه ی سره B باشد آن را به صورت $A \subsetneq B$ نمایش میدهیم. (گاهی اوقات در بعضی کتاب ها مینویسند $A \subset B$)

تعریف . مجموعه ی $\emptyset$ ، مجموعه ای است که فاقد عنصری باشد. به عبارت دیگر اگر $a \in \emptyset$ باشد آنگاه $(a \neq a)$

$$a \in \emptyset \longleftrightarrow a \neq a$$

در نظریه مجموعه های اصل موضوعی وجود مجموعه ی تهی فرض میگردد. میتوان به راحتی نشان داد که $\emptyset \subseteq A$ (به انتفاء مقدم)

تعریف . فرض کنید A یک مجموعه باشد ، مجموعه ی توانی *(Powerset)* A که با $P(A)$ نمایش داده میشود عبارت است از :

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

معمولا یک زیر مجموعه از A مانند B را با یک خاصیت $P(x)$ مشخص میکنند.

$$B = \{x \in A | P(x)\}$$

نظریه مجموعه ی اصل موضوعه ای با قراردادن یک اصل مجموعه ی $P(A)$ را فرض میکند.

نکته. تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی ۲^n است. ($\sum\limits_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} = ۲^n$).

تعریف . فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند ، عناصر $A\cup B$ و $A\cap B$ را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \;\; or \;\; x \in B$$

$$x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A, x \in B$$

حالت کلی تر : فرض کنید مجموعه ی A مجموعه ای باشد که اعضای آن مجموعه هستند. مجموعه ی A را به صورت خانواده ای از مجموعه ها که با مجموعه ی اندیس I شماره گذاری شده باشد به صورت :

$$A = \{A_i | i \in I\}$$

نمایش داده میشود.$(T \neq \emptyset)$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x | x \in A_i \;\; \exists\, i \in I\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x | x \in A_i \;\; \forall i \in I\}$$

به $\bigcup_{i\in I} A_i$ و $\bigcap_{i\in I} A_i$ به ترتیب اجتماع و اشتراک خانواده ی اندیس دار $A = \{A_i | i \in I\}$ گویند. (تعریف اجتماع و اشتراک خانواده های اندیس دار در ادامه با ارائه ی مثال ارائه می گردد.)

تعریف .الف) فرض کنید A و B دو مجموعه باشند ، در آن صورت $A - B$ عبارت است از مجموعه ای که به صورت :

$$x \in A - B \;\; iff \;\; x \in A \,\&\, x \notin B$$

تعریف می گردد.

ب) اگر U یک مجموعه باشد (مجموعه ی مرجع) ، برای $A \subseteq U$ متمم A نسبت به U را به صورت $U - A$ تعریف می کنیم.

وقتی U به عنوان مجموعه ی مرجع ثابت باشد در آنصورت متمم A نسبت U را همان متمم A مینامیم و آن را با A^c *(complement)* نشان می دهیم.

۱.۱.۳ جبر مجموعه ها :

منظور از جبر مجموعه ها عبارت است از بیان خواصی که بین روابط تعریف شده P ، $\cup$ ، $\cap$ ، $-$ ، c برقرار است.

- خواص $\cup$
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cup B = B \; iff \; A \subseteq B$
- خواص $\cap$
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cap B = A \; iff \; A \subseteq B$
- خواص $\cap, \cup$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- خواص c نسبت به $\cup$ و $\cap$

$$\begin{cases} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \end{cases}$$

دو رابطه ی آخر به قانون دمرگان مشهور هستند.

قوانین جبری روی مجموعه ها به اشتراک و اجتماع های دلخواه نیز قابل گسترش است. به عنوان مثال :

- $A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$
- $A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$
- $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I}(A_i)^c$
- $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I}(A_i)^c$

حالت خاص : $I = \mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$ در آنصورت $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را به صورت $\bigcap_{i=۱}^{\infty} A_i$ و $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را به صورت $\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$ نوشته می شود.

حالت های شمارا را میتوان وقتی نوشت که مجموعه اندیس $\{۰, ۱, ۲, ...\}$ ، $\{k, k+۱, ...\}$ باشند.

اثبات های فوق توسط روش عضوگیری انجام می پذیرد.

تمرین. برابری هایی که در کلاس مطرح شده را به اثبات برسانید.

۴ جلسه ی دوم

زوج های مرتب : دقت کنید که مجموعه ی $\{a,b\}$ و $\{b,a\}$ با هم برابرند. بنابرین ترتیب نوشتن عناصر در مجموعه ها مهم نیست. در بسیاری از مسائل ریاضی ترتیب نوشتن عناصر مهم است.

مثال . به چند حالت ممکن میتوان یک مجموعه ی ۴ نفری را روی صندلی های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نشاند ؟

$$< A,B,C,D > \longrightarrow < ۱,۲,۳,۴ >$$

$$< B,A,D,C > \ < B,D,C,A >, ...$$

برای عناصر a و b یک زوج مرتب عبارت است از عنصر (a,b) به طوری که :

$$(*) \ \ (a,b) = (a',b') \ \ iff \ \ a = a', b = b'$$

تعریف . زوج مرتب بر حسب مجموعه ها :

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

تمرین. نشان دهید تعریف بالا در شرط $(*)$ صدق می کند.

تعریف . (فون نویمان) حاصل ضرب دکارتی مجموعه A و B

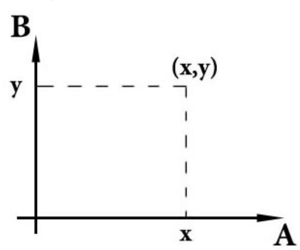
$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

(در نظریه اصل موضوعه ای مجموعه ها وجود $A \times B$ توسط تعریف (فون نویمان) به اثبت میرسد)

مثال .

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) | m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

به طور کلی میتوان حاصلضرب دکارتی A و B را به صورت محور مختصات به نمایش درآورد :



به طور کلی n- تائی های مرتب $(a_1,...,a_n)$ را می توان تعریف کرد و حاصلضرب دکارتی n- مجموعه به صورت

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \qquad \mathbb{R}^{(n)}$$

تعریف می گردند.

اگر A یک مجموعه باشد :

$$A^n = \{(a_1,...,a_n)|a_i \in A\}$$

حالت خاص وقتی که :

$$n = 0 \quad A^{(0)} = \{\emptyset\}$$

$$n = 1 \quad A^1 = \{< x >\} = A$$

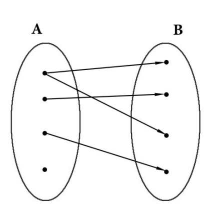
تعریف . مجموعه ی دنباله های متناهی

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup ... \cup A^n \cup ...$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} A^{(n)} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} A^{(n)} = \bigcup_{n\in\mathbb{W}} A^{(n)}$$

تعریف . رابطه ها : فرض کنید مجموعه A و B داده شده اند یک رابطه از مجموعه A در مجموعه B عبارت است از یک زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی $A \times B$.

شکل یک رابطه از $A \times B$:



دقت کنید مجموعه رابطه های A در B عبارت است از $P(A \times B)$.

مثال . $A = B = \mathbb{N}$

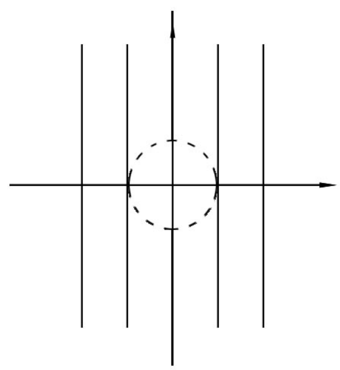
الف) مجموعه ی $\emptyset$ یک رابطه از $\mathbb{N}$ در $\mathbb{N}$ است.

ب) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x = y\}$

ج) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x = ۱ \ \ \& \ \ x + y = ۵\}$

د) $B = \mathbb{R}, A = \mathbb{Z}$

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} | a^۲ + b^۲ \geq ۱\}$$



حالت خاص : وقتی که مجموعه $A = B$ رابطه R یک رابطه ۲-تائی روی A گوییم.(نمادگذاری : aRb)

$$R \subseteq (A \times A) \quad (R \in P(A \times A))$$

تعمیم تعریف بالا به صورت R را رابطه n-تائی روی A گوییم هرگاه

$$R \subseteq A \times A \times ... \times A \quad (R \in P(A \times ... \times A))$$

مثال .

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^۳ | x \leq y \leq z\}$$

تعریف . مفهوم دامنه و برد یک رابطه : یک رابطه از A در B مانند R داده شده است.($R \subseteq A \times B$)
دامنه رابطه R و تصویر رابطه R (برد رابطه R)

$$dom(R) = \{a \in A | \exists b \in B (a,b) \in R\}$$

$$Im(R) = \{b \in B | \exists a \in A (a,b) \in R\}$$

تمرین. مثالی بزنید که :

۱) $dom(R_۱ \cup R_۲) = dom(R_۱) \cup dom(R_۲)$

۲) $dom(R_۱ \cap R_۲) \subseteq dom(R_۱) \cap dom(R_۲)$

۳) $dom(R_۱ \cup R_۲) \subset dom(R_۱) \cup dom(R_۲)$

۴) $dom(\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} dom(R_i)$ حالت کلی تر

۵ درس سوم

روابط خاص : روابط هم ارزی (Equivalence Relation) و روابط ترتیب (Ordering Relation)

روابط هم ارزی :

رابطه های هم ارزی یکی از رده های مهم از رابطه های دوتایی روی یک مجموعه A می‌باشند. این روابط در دروس مختلف از جمله جبر ، توپولوژی مورد بهره گیری می باشند. شاید در وحله ی اول فهم آن ها دشوار به نظر برسد اما پس از دیدن مثال های مختلف مفهوم روابط هم ارزی قابل فهم خواهد بود.

تعریف . فرض کنید مجموعه ی A داده شده است. رابطه ی دوتائی E را روی مجموعه A $[E \subseteq A \times A]$ را یک رابطه ی هم ارزی گویند هرگاه سه ویژگی زیر برای رابطه E برقرار باشند.

۱ رابطه ی E ویژگی بازتابی را دارا باشد.

۲ رابطه ی E ویژگی نقارنی را داشته باشد.

۳ رابطه ی E ویژگی ترایائی (تعدی) را داشته باشد.

ویژگی های بالا به زبان ریاضی به معانی زیر می باشند :

۱) $\forall a \in A : aEa \ \ ((a,a) \in E)$

۲) $\forall a,b \in A : (a,b) \in E \Longleftrightarrow (b,a) \in E$

۳) $\forall a,b \in A \ \ iff \ \ (a,b) \in E \ \ \& \ \ (b,c) \in E \rightarrow (a,c) \in E$

مثال .

رابطه ی هم ارزی را روی مجموعه ی $A = \{a,b,c\}$ تشکیل دهید.

$$E_{=} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} = \{(x,y) \in A^{۲} | x = y\}$$

$$E_{۱} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$$

$$E_{۲} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$$

$E_۳ = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$

$A^۲ = E_۴ = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

تمرین. اگر $E_۱$ و $E_۲$ دو رابطه ی هم ارزی روی A باشند آنگاه $E_۱ \cap E_۲$ نیز یک رابطه ی هم ارزی است.
آیا : $E_۱ \cup E_۲$ نیز یک رابطه ی هم ارزی است.

مثال . روی اعداد $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید.(میدانیم تفاضل (مجموع) دو عدد گویا ، گویاست.) :

$\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | a - b \in \mathbb{Q}\} = E_{\mathbb{Q}}$

$(aE_{\mathbb{Q}}b), (\sqrt{۲}, \sqrt{۲} + \frac{۱}{۳}) \in E$

تعریف . کلاس های هم ارزی : فرض کنید که E روی مجموعه A یک رابطه ی هم ارزی باشد. برای $a \in A$ ، کلاس هم ارزی () نسبت به a به صورت

$[a] = \{b \in A | aEb\}$

تعریف میشود.

مثال . در مثال های بالا کلاس های هم ارزی را محاسبه کنید.

$[\sqrt{۲}] = \{\sqrt{۲} + \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰\}$

$[a] = \{a + \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰\}$

شرایط زیر برای کلاس های هم ارزی برقرارند.

۱) $[a] = [b] \Longleftrightarrow aEb$

۲) $if \ \ aEb \rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

۳) $aEb \Longleftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$

۴) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$

فرض کنید که $B = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعه ی A باشد گوییم B یک افراز (partition) از مجموعه A است. هرگاه :

۱) $\bigcup A_\alpha = A$

۲) $\forall A_\alpha, A_\beta : A_\alpha = A_\beta \;\; or \;\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

تمرین. ثابت کنید که $A = \{[a] : a \in A\}$ یک افراز از مجموعه A است.

تمرین. فرض کنید $B = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ یک افراز روِی مجموعه A باشد.

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists i \in I : x, y \in A_i$$

نشان دهید رابطه ی $\sim$ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات : در کلاس آزمایشگاه بحث می گردد.

تمرین. فرض کنید که رابطه R روی مجموعه A یک رابطه ی انعکاسی و تقارنی باشد. رابطه ی $\overline{R}$ را بصورت زیر تعریف کنید.

$$(x, y) \in \overline{R} \;\; iff \;\; \exists a_۱, a_۲, ..., a_n \in A : (x, a_۱) \in R \;\; \& \;\; (a_۱, a_۲) \in R ... (a_n, y) \in R$$

نشان دهید :

الف) رابطه ی $\overline{R}$ یک رابطه ی هم ارزی است.

ب) اگر E یک رابطه ی هم ارزی شامل E باشد آنگاه $\overline{R} \subseteq E$.(به عبارت دیگر $\overline{R}$ کوچک ترین رابطه هم ارزی شامل R است.)

تمرین. اگر A ، n عنصری باشد تعداد رابطه هم ارزی روی مجموعه A چند تا است؟

روابط ترتیبی :

یک رده بسیار مهم دیگر از روابط روی یک مجموعه A ، روابط ترتیبی می باشند. روابط ترتیبی ، تقسیم رابطه های ترتیب خطی می باشند که روی اعداد طبیعی و حقیقی این دو مجموعه را مرتب می نمایند.

مجموعه ی A داده شده است.

الف) ترتیب های جزئی : رابطه $\sqsubseteq$ را روی مجموعه A یک رابطه ترتیب جزئی گویند هرگاه رابطه $\sqsubseteq$ دارای خواص زیر باشد :

۱ رابطه ی بازتابی : بازای هر $a \in A$ ، $a \sqsubseteq a$

۲ رابطه ی پادتقارنی : بازای هر $a, b \in A$ اگر $a \sqsubseteq b$ ، $b \sqsubseteq a$ آنگاه $a = b$

۳ رابطه ی ترایائی : بازای هر $a,b,c \in A$ اگر $a \sqsubseteq b$ و $b \sqsubseteq c$ آنگاه $a \sqsubseteq c$

مثال .

$$E_{=} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$$
$$E_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$$
$$E_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$$
$$E_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a)\}$$

تمرین. تعداد رابطه های ترتیبی روی یک مجموعه یک مجموعه n عضوی چندتاست؟
مثال . فرض کنید که A یک مجموعه باشد. $(P(A),\subseteq)$ یک مجموعه ی جزئا مرتب است.
یک رابطه ی جزئا مرتب را می توان با یک درخت نمایش داد.

رابطه های مرتب جزئی در علوم کامپیوتر مهم هستند. (شبکه ها ، جبر های بول)
تعریف . رابطه ی جزئا مرتب را یک رابطه ی ترتیب خطی (کلی) گویند در صورتی که :
$\forall a,b \in A : a \sqsubseteq b \ \ or \ \ b \sqsubseteq a$

تمرین. نشان دهید رابطه عاد کردن در اعداد صحیح یک رابطه ترتیب جزئی است.
تمرین. ترتیب های جزئی روی اعداد طبیعی ، صحیح ، گویا ، و حقیقی ترتیب های خطی هستند.
تمرین. فرض کنید که رابطه ی $\sqsubseteq$ روی مجموعه A یک ترتیب جزئی باشد. در آنصورت رابطه ی $\sqsubset$ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$x \sqsubset y \ \ iff \ \ x \sqsubseteq y \ \ \& \ \ x \neq y.$

۱ نشان دهید که به ازای هر $x \in A$ ، $x \not\sqsubset x$
۲ نشان دهید که به ازای $x,y,z \in A$ ، $x \sqsubset y \ \ \& \ \ y \sqsubset z \to x \sqsubset z$
۳ نشان دهید به ازای $x,y \in A$ ، $x \sqsubset y \to y \not\sqsubset x$

رابطه ی $\sqsubset$ را یک رابطه ی ترتیبی جزئی اکید گویند.

۶ درس چهارم

۱.۶ تابع

دسته خاص ولی مهم از روابط از یک مجموعه A در B را تابع گویند.
تابع کاربرد فراوانی دارا است و از کلیدی ترین مفاهیم ریاضی است.
یک تابع رابطه ای است که به هر عنصر $a \in A$ یک عنصر از B به نام $f(a)$ را نسبت می دهد.

تعریف . فرض کنید که A, B دو مجموعه باشند. رابطه f را از A در B یک تابع گویند هرگاه :

الف) $dom(f) = A$

ب) به ازای هر $x \in A$ و به ازای $y_1, y_2 \in B$ اگر $(x, y_1) \in f \& (x, y_2) \in f \Rightarrow (y_1 = y_2)$

مثال .

$$f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1 \& x \geq 0\}$$

$$f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^3 + y^3 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \sqrt[3]{1 + y^3}\}$$

مثال .

$$A = B = \mathbb{N} \qquad \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y = 1\}$$

نمادگذاری. اگر $f \subseteq A \times B$ یک تابع باشد در آنصورت نماد زیر را برای نمایش تابع f در نظر می گیریم :

$$f : A \to B$$

$x \mapsto f(x) :$ یگانه عنصری است $(x, f(x)) \in f$

تعاریف زیر را برای توابع در نظر بگیرید :

۱- تابع $f : A \to B$ را تابع ۱-۱ گویند هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in A$ چنانچه $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$.

۲- تابع $f : A \to B$ را یک تابع پوشا گویند هرگاه به ازای هر $x \in A$ عنصر $y \in B$ موجود باشد بطوریکه $f(x) = y$.

۳- تابع $f : A \to B$ را یک تابع دوسوئی گویند هرگاه f ۱-۱ و پوشا باشد.

مثال .

۱.۱.۶ تصویر و تصویر وارون مجموعه ها توسط یک تابع

فرض کنید که تابع $f : A \to B$ داده شده است. هدف پیدا نمودن تصویر یک زیر مجموعه دلخواه از Y از B در A توسط تابع f می باشد.

تعریف . فرض کنید که $f : A \to B$ داده شده است.

برای $X \subseteq A$:

تصویر X تحت f : $f(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X \ \ (y = f(x))\}$

و برای $Y \subseteq B$:

تصویر وارون Y تحت f : $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid \exists y \in Y \ \ (y = f(x))\}$

مثال .

گزاره های زیر ، خواص اصلی تعریف بالا را بیان می نماید :

گزاره : فرض کنید که $f : A \to B$ داده شده است ، $X \subseteq A$ و $Y \subseteq B$ مفروضند.

الف) اگر $Y, Z \subseteq B$ آنگاه

$$f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z) \quad .$$

$$f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z) \quad ..$$

ب) اگر $X_1, X_2 \subseteq A$ آنگاه

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \quad .$$

$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2) \quad ..$$

ج) به ازای هر $Y \subseteq B$

$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$$

د) به ازای هر $X \subseteq A$

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq Y$$

$$a \in f^{-1}(f(X)) \Leftrightarrow \exists y \in f(X), \ \ (f(a) = y)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in X \ \ (y = f(c) \wedge f(a) = y)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in X \ \ (f(a) = f(c))$$

اگر $a \in X$ آنگاه $a \in f^{-1}(f(x)) \Leftarrow f(a) = f(c), \exists c \in X \Leftarrow$

هـ) شرایط زیر هم ارزند :

- f ۱-۱ است.
- به ازای هر $X_1, X_2 \subseteq A$ $\quad f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.
- به ازای هر زیر مجموعه $X \subseteq A$ $\quad X = f^{-1}(f(X))$.

و) شرایط زیر هم ارزند :

- f پوشا است.
- به ازای هر زیر مجموعه $Y \subseteq B$ $\quad f(f^{-1}(Y)) = Y$.

اثبات :

تمرین. الف و ب را برای خانواده دلخواه به اثبات برسانید.

الف) دو تابع مساویند اگر و تنها اگر دامنه مساوی داشته باشند و روی نقاط دامنه مقادیر یکسان اتخاذ نمایند.

ب) $f : A \to C$ و $g : B \to C$ دو تابع باشند بطوری که به ازای هر $x \in A \cap B$، $f(x) = g(x)$ در آنصورت تابع

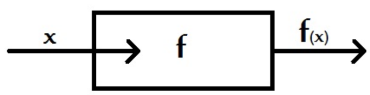
$$H : A \cup B \to C$$
$$H(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

یک تابع است. علاوه بر آن $f \subseteq H$ و $g \subseteq H$.

۷ درس پنجم

۱.۷ ترکیب و وارون توابع

توابع را میتوان بصورت ماشین های محاسب تصور نمود.

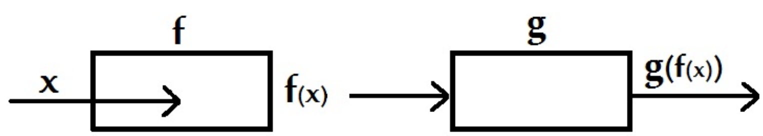


حال تصور کنید که دو ماشین محاسب را می خواهید ترکیب کنید. در آن صورت برای این منظور ابتدا می توانید f را اعمال نمائید و سپس روی مقدار حاصل یعنی $f(x)$ ، مقدار g را اعمال نموده و مقدار $g(f(x))$ را محاسبه کنید.
دقت کنید که برای این که این کار معنا دار باشد باید $f(x)$ در دامنه تابع g قرار گیرد.

ایده ی بالا را تحت ترکیب توابع بیان می کنیم :

تعریف . فرض کنید که $f : A \to B$ ، $g : B \to C$ داده شده اند. در آنصورت تابع $gof : A \to C$ بصورت زیر تعریف می گردد :

$$x \mapsto g(f(x))$$



مثال .

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^۲ \qquad\qquad x \mapsto \sqrt[۳]{x}$$

مطلوب است

$\sqrt[۳]{x^۲}$ $\quad : gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(g(x)) = \sqrt[۳]{x}^۲ = \sqrt[۳]{x^۲} \quad : fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

دقت کنید که در این حالت خاص $(gof = fog)$

مثال .

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ۲x + ۳ \qquad x \mapsto ۴x + ۷$$

$$\to ۲(۴x + ۷) + ۳ = ۸x + ۱۰$$
$$\to ۴(۲x + ۳) + ۷ = ۸x + ۱۹$$

تعریف الف) مجموعه A را در نظر بگیرید. تابع همانی $Id_A : A \to A$ به صورت $Id_A(x) = x$ تعریف می گردد.

ب) تابع $B \subseteq A$ تابع شمول به صورت $\begin{array}{c} i_B : B \to A \\ x \mapsto x \end{array}$ تعریف می گردد.

مثال . تابع $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^۲ \end{array}$ را در نظر بگیرید آیا می توان تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را پیدا نمود بطوری که $gof = Id_{\mathbb{R}}$ ؟

هدف : پیدا نمودن تابع g است.

$$\begin{array}{c} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(f(x)) = x \end{array} \qquad g(x^۲) = x$$

فرض کنید تابع f موجود باشد.

$$\begin{array}{ccc} g(f(۱)) = ۱ & & g(f(-۱)) = -۱ \\ & \text{و} & \\ g(۱) = ۱ & & g(۱) = -۱ \end{array} \qquad ※$$

علت این که تابع موجود نیست چیست؟(بحث شود) .

حال تابع $\begin{array}{c} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ foh = Id \end{array}$ بیابید.

$$f(h(x)) = Id_{\mathbb{R}} \quad \to \quad (h(x))^۲ = x$$

آیا $\sqrt{x}$ تابع مورد نظر است؟ (خیر)

(چرا) : اولأ که $\sqrt{x}$ برای اعداد منفی در اعداد حقیقی تعریف نشده است.

سوال : $h(-۱)$ چیست؟ $(h(-۱))^۲ = -۱$ ※

تمرین.

الف) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ $(fog)oh = fo(goh)$

ب) $A \xrightarrow{Id_A} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{Id_B} B$ $foId_B = f$ و $Id_Aof = f$

ج) اگر $(x \in c)$ باشد آنگاه $(gof)^{-۱}(x) = f^{-۱}(g^{-۱}(x))$

۲.۷ تعریف معکوس یک تابع :

تابع :

الف) $f : A \to B$ یک تابع است گوئیم f دارای معکوس چپ است هرگاه تابع $g : B \to A$ موجود باشد بطوریکه $gof = Id_A$

$$Id_A = gof : A \to A$$

ب) تابع $f : A \to B$ را دارای معکوس راست گوئیم هرگاه تابع $h : B \to A$ موجود باشد بطوریکه

$$foh : B \to B$$

$$foh : Id_B$$

ج) گوئیم تابع f معکوس پذیر است در صورتی که دارای معکوس چپ و راست باشد.

(در تعریف بالا دقت شود)

مثال .

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	تابع f دارای معکوس چپ نیست
$x \mapsto x^۲$	ولی دارای معکوس راست است.

$g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	تابع g دارای معکوس چپ است
$x \mapsto \sqrt{x}$	ولی دارای معکوس راست نیست.

$h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	تابع h دارای معکوس چپ و راست است
$x \mapsto ۲x + ۳$	و این تابع در واقع معکوس پذیر است.

گزاره جالب : معکوس چپ و راست داشتن را به ترتیب به یک به یک بودن و پوشا بودن تابع نسبت می دهند.

گزاره ۱ : اگر f معکوس پذیر باشد در آنصورت معکوس چپ و راست آن برابرند.

گزاره ۲ :

الف) f دارای معکوس چپ است اگر و تنها اگر ۱-۱ باشد.

ب) f دارای معکوس راست است اگر و تنها اگر f پوشا باشد.

ج) f معکوس پذیر است $\Leftrightarrow$ f ۱-۱ و پوشا باشد.

اثبات :

تعریف . فرض کنید تابع $f : A \to B$ معکوس پذیر باشد. در آنصورت معکوس (وارون) این تابع بصورت $f^{-۱} : B \to A$ نمایش می دهیم. $fof^{-۱} = Id_B$ و $f^{-۱}of = Id_A$

تمرین.

الف) اگر $f : A \to B$ و $g : B \to C$ دو تابع معکوس پذیر باشند، در آنصورت $gof : A \to C$ نیز معکوس پذیر است.

ب) در شرایط بند الف نشان دهید که $(gof)^{-۱} = f^{-۱}og^{-۱}$

تمرین. اگر $fof = Id$ آنگاه f دوسوئی است.

تمرین. سری اول :

۱ - خواص جبر مجموعه ها که در کلاس مطرح شده اند را به اثبات برسانید.

۲ -الف) نشان دهید که اگر $< a, b >$ را به صورت $< a.b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$ تعریف کنیم در آنصورت
$< a', b' >=< a, b > \Leftrightarrow a = a' \ \ \& \ \ b = b'$

ب) نشان دهید که برای a, b, c تعریف $< a, b, c >= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ تعریف درستی برای ۳تائی مرتب نیست.

ج) با توجه به تعریف استقرائی گفته شده در کلاس تعریف $< a, b, c >$ را بر حسب مجموعه ها بیان نمایید.

۳ - فرض کنید $R_۱, R_۲$ دو رابطه از مجموعه A در مجموعه B هستند. نشان دهید که :

الف) $dom(R_۱ \cup R_۲) = dom(R_۱) \cup dom(R_۲)$

ب) $dom(R_۱ \cap R_۲) \subseteq dom(R_۱) \cap dom(R_۲)$

مثالی بزنید که $dom(R_۱ \cap R_۲) \neq dom(R_۱) \cap dom(R_۲)$

ج) حالت کلی تر الف و ب را برای اجتماع و اشتراک دلخواه به اثبات برسانید.

تمرین. سری دوم :

۱ - نشان دهید که کلاس هم ارزی یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه A تشکیل یک افراز روی مجموعه A می دهد.

۲ - فرض کنید که $A = \{B_\alpha : \alpha \in I\}$ یک افراز روی مجموعه A باشد در آنصورت رابطه $\sim$ که بصورت زیر تعریف می گردد :

$$x, y \in A \qquad x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I \quad x, y \in B_i$$

نشان دهید که $\sim$ یک رابطه هم ارزی است و کلاس های هم ارزی رابطه $\sim$ دقیقاً A می باشد.

۳ - فرض کنید که R یک رابطه انعکاسی و متقارن باشد در آنصورت چنانچه رابطه $\tilde{R}$ بصورت :

$$\tilde{R} = \{(x,y) \in A \times A \mid \exists a_۱, ..., a_n \in A \quad (x, a_۱) \in R \ \& \ (a_۱, a_۲) \in R \ \&...\& \ (a_n, y) \in R\}$$

یک رابطه هم ارزی است. به $\tilde{R}$ بستار تعدی رابطه R گویند.

۴ - فرض کنید که A یک مجموعه n عضوی باشد تعداد رابطه های هم ارزی روی مجموعه A چندتا است؟

تمرین. سری سوم :

۱ - گزاره تصویر و تصویر وارون را برای اجتماع و اشتراک دلخواه به اثبات برسانید.

۲ - دو تابع مساویند اگر و تنها اگر دامنه های مساوی داشته باشند و مقادیر تابع روی دامنه های آنها با هم برابر باشند.

۳ - فرض کنید $g : B \to C \quad f : A \to C$ دو تابع باشند ، علاوه بر آن به ازای هر $x \in A \cap B \quad f(x) = g(x)$ در آنصورت تابع

$$H : A \cup B \to C$$
$$H(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

یک تابع است و علاوه بر آن $H = f \cup g$.

تمرین. سری چهارم :

۱ -الف) فرض کنید $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ در آنصورت $ho(gof) = (hog)of$

ب) اگر $f : A \to B$ یک تابع باشد در آنصورت $foId_B = Id_Aof = f$

ج) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ و $x \subseteq c$ باشد در آنصورت $(gof)^{-۱} = f^{-۱}(g^{-۱}(x))$

۲ - اگر f دارای معکوس چپ g و معکوس راست h باشد در آنصورت $g = h$.

۳ -الف) اگر $f : A \to B$ و $g : B \to C$ دو تابع معکوس پذیر باشند در آنصورت gof نیز معکوس پذیر است.

ب) در شرایط بند (الف) $(gof)^{-۱} = f^{-۱}og^{-۱}$

۴ - فرض کنید که $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب خطی باشد و $<$ رابطه جزئی اکید تعریف روی X باشد. $f : X \to X$ صعودی است در صورتی که به ازای هر $x, y \in X$ اگر $x < y$ آنگاه $f(x) < f(y)$.

الف) نشان دهید که f ۱ - ۱ است.

ب) اگر f پوشا نیز باشد نشان دهید که $f^{-۱}$ نیز صعودی است.

۵ - فرض کنید $(X, \leq)$ و $(Y, \leq)$ دو مجموعه جزئا مرتب باشد و تابع دوسوئی $f : X \to Y$ و حافظ ترتیب موجود باشد نشان دهید اگر $(X, \leq)$ یک مرتب خطی باشد در آنصورت $(Y, \leq)$ مجموعه مرتب خطی است.

۸ مجموعه‌ی متناهی، نامتناهی، شمارا، ناشمارا :

- تلقی شهودی ما از مجموعه‌ی متناهی یا نامتناهی چیست ؟
* مثال مجموعه‌های متناهی : ϕ تهی ، $\{۱\}$ ، $\{۱, ۲, ..., n\}$
* مثال مجموعه‌های نامتناهی : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, ...$

۱.۸ خواص مجموعه‌های نامتناهی :

i) مجموعه‌ی نامتناهی غیرتهی است.

ii) اگر مجموعه‌ی X نامتناهی باشد، آنگاه هر ابرمجموعه‌ی X نامتناهی است.

iii) اگر X نامتناهی باشد و $x_. \in X$ آنگاه $X - \{x_.\}$ نیز نامتناهی است.

- خاصیت نامتناهی بودن معیاری است برای بزرگ بودن یک مجموعه.
(در آتیه وقتی مفهوم "عدد اصلی = $card$" را بیان نمودیم؛ خود مجموعه‌ی نامتناهی را نیز از حیث تعداد اعضا رده بندی می‌کنیم.)

تعریف . مجموعه‌ی X را نامتناهی گوییم هرگاه با یک زیرمجموعه‌ی سره‌ی خود $proper\ subset$ در تناظر $(۱-۱)$ باشد.
به عبارت دیگر X نامتناهی است هرگاه زیرمجموعه‌ی $Y \subsetneqq X$ و تابع دوسویی $f: X \to Y$ موجود باشد.

مثال .

۱) $\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی) نامتناهی است.

علت : $\mathbb{E} \subsetneqq \mathbb{N}$ اعداد زوج $\quad \begin{cases} f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{E} \\ x \longrightarrow ۲x \end{cases}$ یک تابع دوسویی $(bijective)$

یا

تابعی دو سویی $\quad \begin{cases} g: \mathbb{N} \longrightarrow B = \mathbb{N}^{\geq ۲} \\ x \longrightarrow x + ۱ \end{cases} \quad B = \mathbb{N}^{\geq ۲} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq ۲\} \subsetneqq \mathbb{N}$

۲) $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) نامتناهی است.

علت : $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ h(x) = \begin{cases} ۲z & z \geq ۰ \\ -۲z - ۱ & z < ۰ \end{cases} \end{cases}$$

- ثابت کنید h تابعی (۱-۱) و پوشاست

۳) $\mathbb{Q}$ (اعداد گویا) نامتناهی است.

علت : می‌توان به جای یافتن $A \subsetneqq \mathbb{Q}$ و تابع دوسویی $f : \mathbb{Q} \to A$ تابع $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ را طوری یافت که g (۱-۱) و غیرپوشا باشد.

$$\begin{cases} g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ g(q) = \begin{cases} h(q) & q \in \mathbb{Z} \\ q & q \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \end{cases} \end{cases}$$

در واقع $x \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ سبب غیر پوشا شدن تابع g می‌شود.

- بین دیگر : مجموعه‌ی X نامتناهی است $\Leftrightarrow$ تابع $f : X \to X$ (۱-۱) و پوشا موجود باشد.

- تعریف : مجموعه‌ی X متناهی است در صورتیکه نامتناهی نباشد $\Leftrightarrow$ برای هر تابع $f : X \to X$ اگر f (۱-۱) باشد، آنگاه f پوشاست.

۴) $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) نامتناهی است.

علت :

$$K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$K(r) = \begin{cases} g(r) & r \in \mathbb{Q} \\ r & r \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

$g(r)$ تابع مثال ۳ است.

- ثابت کنید K (۱-۱) و غیرپوشاست.

تعریف . فرض کنید X نامتناهی باشد و $X \subseteq Y$ آنگاه Y نیز نامتناهی است.

اثبات . چون X نامتناهی است پس تابع $f : X \xrightarrow[injective]{۱-۱} X$ و غیرپوشا موجود است.

هدف : ثابت کنید Y نیز نامتناهی است.

هدف : تابع $h : Y \longrightarrow Y$ (۱-۱) و غیرپوشاست.

- تابع h را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} \mathrm{h}: Y \longrightarrow Y \\ h(y) = \begin{cases} f(y) & y \in X \\ y & y \in (Y - X) \end{cases} \end{cases}$$

باید نشان دهیم تابع h (۱-۱) و غیرپوشاست.

- برای اثبات (۱-۱) بودن h کافی است نشان دهیم :

$$\forall y_۱, y_۲ \in Y \qquad (h(y_۱) = h(y_۲) \longrightarrow y_۱ = y_۲)$$

فرض کنید $y_۱, y_۲ \in Y$ و دلخواه باشند :

(i) حالت اول : اگر $y_۱, y_۲ \in X$ در اینصورت :

$$h(y_۱) = f(y_۱), h(y_۲) = f(y_۲)$$
$$if \quad h(y_۱) = h(y_۲) \Rightarrow f(y_۱) = f(y_۲) \xrightarrow{f\ is\ (۱-۱)} y_۱ = y_۲$$

(ii) حالت دوم : اگر $y_۱, y_۲ \in (Y - X)$ در اینصورت :

$$h(y_۱) = y_۱, h(y_۲) = y_۲$$
$$if \quad h(y_۱) = h(y_۲) \longrightarrow y_۱ = y_۲$$

(iii) حالت سوم : اگر $y_۱ \in X$ و $y_۲ \in (Y - X)$ در اینصورت :

$$h(y_۱) = f(y_۱), h(y_۲) = y_۲$$

اگر $y_۱ \neq y_۲$ آنگاه $h(y_۱) \neq h(y_۲)$.
زیرا $h(y_۱) = f(y_۱) \in X$ و $h(y_۲) = y_۲ \in (Y - X)$

- برای اثبات غیرپوشا بودن h باید نشان دهیم :

$$\exists y_۰ \in Y \quad \forall y \in Y \qquad h(y_۰) \neq y_۰ \ (*)$$

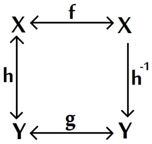
به وضوح $y_۰ \in X$ وجود دارد که در (*) صدق کند. چون $f : X \longrightarrow X$ غیرپوشاست.

نتیجه. اگر X متناهی باشد و $Y \subseteq X$ آنگاه Y نیز متناهی است.

تمرین. ثابت کنید اگر X متناهی باشد آنگاه $P(X)$ نیز متناهی است.

گزاره. اگر X نامتناهی باشد و Y در تناظر (۱-۱) با X باشد آنگاه Y نیز نامتناهی است.

اثبات . فرض : X نامتناهی است و $X \sim Y$. حکم : Y نامتناهی است.



$\Leftarrow$ اولاً تابع $f : X \xrightarrow{(1-1)} X$ و غیرپوشا موجود است. ثانیاً $h : Y \xrightarrow[onto]{(1-1)} Y$ موجود است.
تابع $g = h^{-1}ofoh : Y \to Y$ را معرفی می‌کنیم. که (۱ - ۱) و غیرپوشاست.
- (۱ - ۱) بودن واضح است.
- پوشا نبودن : طبق فرض چون $f : X \longrightarrow X$ (۱ - ۱) و غیرپوشاست. پس $x \in X$ موجود است بطوریکه $x \notin Im(f)$.
نشان می‌دهیم که $h^{-1}(x) \notin Im(h^{-1}ofoh)$.
در غیر این‌صورت فرض کنید $y \in Y$ موجود باشد به طوری که :

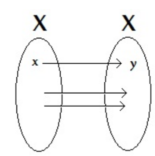
$$h^{-1}ofoh(y) = h^{-1}(x) \Longrightarrow h^{-1}(f(h(y))) = h^{-1}(x) \xrightarrow{h^{-1}\ is\ (1-1)} f(h(y)) = x \quad ※$$

چون $x \notin Im(f)$

گزاره. فرض کنید X نامتناهی است و فرض کنید $x_0 \in X$ آنگاه $X - \{x_0\}$ نامتناهی است.

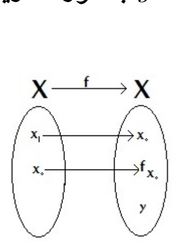
اثبات . طبق فرض تابع $f : X \longrightarrow X$ یک به یک و غیرپوشا موجود است.
هدف : پیدا کردن تابع $g : X - \{x_0\} \longrightarrow X - \{x_0\}$ بطوری که (۱ - ۱) و غیرپوشا باشد.
حالت ۱ : اگر $x_0 \notin Im(f)$ آنگاه تابع g را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} g : X - \{x_0\} \longrightarrow X - \{x_0\} \\ g(y) = f(y) \qquad \forall y \in X - \{x_0\} \end{cases}$$



حالت ۲ : اگر $x_0 \in Im(f)$ و $f(x_0) \neq x_0$ ، f غیرپوشاست پس $y \in (X - Im(f))$ موجود است ($y \notin x_0$).
از طرفی $x_0 \in Im(f)$ بنابراین عنصر یگانه‌ی $x_1 \in X$ ($x_1 \notin x_0$) موجود است که $f(x_1) = x_0$.
تابع $g : X - \{x_0\} \longrightarrow X - \{x_0\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_1 \\ y & x = x_1 \end{cases}$$



ثابت کنید $f(x_\circ) \notin Im(g)$

حالت ۳ : اگر $x \in Im(f)$ و $f(x_\circ) = x_\circ$ در اینصورت g را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} g : X - \{x_\circ\} \longrightarrow X - \{x_\circ\} \\ g(x) = f(x) \end{cases}$$

گزاره. مجموعه‌ی تهی $\emptyset$ و مجموعه‌های تک عضوی متناهی هستند.

اثبات . مجموعه‌ی $\emptyset$ زیرمجموعه‌ی سره ندارد لذا نمی‌تواند نامتناهی باشد پس $\emptyset$ متناهی است.
مجموعه‌ی تک عضوی دلخواه $\{x_\circ\}$ را در نظر می‌گیریم. $P(\{x_\circ\}) = \{\emptyset, \{x_\circ\}\}$. تنها زیرمجموعه‌ی سره‌ی $\{x_\circ\}$ مجموعه‌ی $\emptyset$ است و چون نمی‌توان از $\emptyset$ به مجموعه‌ی $\{x_\circ\}$ یک تناظر (۱ - ۱) ایجاد کرد لذا $\{x_\circ\}$ متناهی است.

گزاره. مجموعه‌ی X متناهی است اگر و فقط اگر $\emptyset$ باشد و یا $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد بطوری که X همتوان (در تناظر (۱ - ۱)) با مجموعه‌ی $\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, ..., k\}$ است.

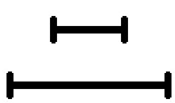
اثبات . از چپ به راست $(\Longrightarrow)$:
طبق قضایای قبل مجموعه $\emptyset$ و $\mathbb{N}_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ متناهی است از اصل استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم:
اگر $k = ۱$ باشد آنگاه $\mathbb{N}_k$ مجموعه‌ای یک عضوی است و ثابت کردیم که متناهی است.
فرض استقرا : فرض می‌کنیم به ازای $k \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}_k$ متناهی است.
حکم استقرا : باید ثابت کنیم $\mathbb{N}_{k+۱}$ نیز متناهی است.
خلاف حکم استقرا را فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $\mathbb{N}_{k+۱}$ نامتناهی باشد در این‌صورت بنا بر قضایای قبل $\mathbb{N}_{k+۱} - \{k+۱\} = \mathbb{N}_k$ نیز متناهی است اما این یک تناقض است.
پس حکم استقرا ثابت شد. پس برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}_k$ نیز متناهی است.

از راست به چپ $(\Longleftarrow)$:
فرض : X متناهی است.
حکم : $X = \emptyset$ یا وجود دارد $k \in \mathbb{N}$ به طوری که $X \sim \mathbb{N}_k$ (تناظر (۱ - ۱) = همتوان).
عکس نقیض گزاره‌فوق را ثابت می‌کنیم :
فرض جدید : $X \neq \emptyset$ و X با هیچ $\mathbb{N}_k$ در تناظر (۱ - ۱) نیست.
حکم جدید : X نامتناهی است.
چون $X \neq \emptyset$ پس یک عنصر $x_۱$ را از X انتخاب می‌کنیم. $X - \{x_۱\} \neq \emptyset$ زیرا اگر $X - \{x_۱\} = \emptyset$ آنگاه $X = \{x_۱\} \sim \mathbb{N}$ که با فرض تناقض دارد. برای $X - \{x_۱\}$ عملی مشابه را انجام می‌دهیم. یعنی عنصر $x_۲$ را از $X - \{x_۱\}$ انتخاب می‌کنیم.

به همین ترتیب $x_1, x_2, ..., x_k$ را از X انتخاب می‌کنیم $X - \{x_1, x_2, ..., x_k\} \neq \emptyset$ زیرا در غیر این‌صورت $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \sim \mathbb{N}_k$ و با فرض تناقض دارد.
پس همیشه عنصر x_{k+1} را می‌توان از $X - \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ انتخاب کرد.
- بنابر اصل استقرای ریاضی برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک زیرمجموعه‌ی سره‌ی X مانند $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ موجود است.
- مجموعه‌ی تمام x_nهای انتخابی را (برای هر $n \in \mathbb{N}$ با A نمایش می‌دهیم. (طبق AC مجازیم)
- آنگاه تابع $f : A \longrightarrow A - \{x_1\}$ را با $f(x_k) = x_{k+1}$ تعریف می‌کنیم. چون f تابعی دوسویی بین A و $A - \{x_1\}$ (زیرمجموعه‌ی سره‌ی A) است پس A نامتناهی است و چون $A \subseteq X$ پس X نیز نامتناهی است.

تقسیم‌بندی مجموعه‌ها به متناهی و نامتناهی درواقع رده‌بندی مجموعه‌ای از حیث کوچکی یا بزرگی است.
در مجموعه‌های متناهی تعداد اعضا نیز وسیله‌ای برای مقایسه‌ی کوچک یا بزرگ بودن این مجموعه‌ها است.
تعداد اعضا در مجموعه های متناهی یکی از وسایل سنجش مجموعه‌های متناهی است.
سوال : راجع به مجموعه‌های نامتناهی چه می‌توان گفت؟

تعریف . فرض کنید X,Y دو مجموعه باشند گوئیم X,Y هم‌توان هستند هرگاه $f : X \longrightarrow Y$ (۱-۱) و پوشا موجود باشد و با نماد $(X \sim Y)$ نمایش داده می‌شود.



به عبارت دیگر گوئیم X,Y دارای یک تعداد اعضا هستند هرگاه مجموعه‌های X,Y هم‌توان باشند.

گزاره. رابطه $\sim$ روی مجموعه‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

اثبات .

(i) انعکاسی : به وضوح $X \sim X$ تحت تابع همانی (Id_x)

(ii) تقارنی : $X \overset{f}{\sim} Y \longrightarrow Y \overset{f^{-1}}{\sim} X$

(iii) تعدی : $X \overset{f}{\sim} Y \quad \& \quad Y \overset{g}{\sim} Z \longrightarrow X \overset{gof}{\sim} Z$

بنابراین کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی " $\sim$ " را روی همه‌ی مجموعه در نظر می‌گیریم.

$۰ = [\phi] = \{\phi\}$

$۱ = [\{۱\}] = \{X \mid$ تک عضوی است $X\}$

$۲ = [\{۱,۲\}] = \{X \mid$ دو عضوی است $X\}$

.

.

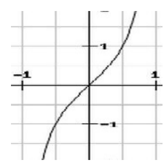
.

$\aleph_۰ = [\mathbb{N}] =$ مجموعه‌های شمارای نامتناهی

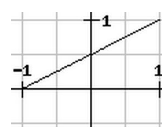
$\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ شمارا هستند.

مجموعه‌های ناشمارا $= c = [\mathbb{R}] =$ کاردینال اعداد حقیقی

مثال .



۱) $(-۱,۱) \sim \mathbb{R}$ $\qquad x \longrightarrow tg(\frac{\pi x}{۲})$



۲) $(-۱,۱) \sim (۰,۱)$ $\qquad x \longrightarrow \frac{x+۱}{۲}$

۳) ثابت کنید $[۰,۱) \sim (۰,۱)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{n+۱} & x \in \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, ...\} \\ x & x \notin \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, ...\} \end{cases}$$

مجموعه‌ها :

- متناهی
- نامتناهی
  - شمارای نامتناهی
  - ناشمارا

سوال : چگونه چک کنیم که مجموعه‌ی داده شده شمارا است؟

حالت ۱ : اگر مجموعه‌ی داده شده زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد.

حالت ۲ : اگر مجموعه‌ی داده شده زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی نباشد.

قضیه ۱. هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی شمارا است.

اثبات . فرض کنید $X \subseteq \mathbb{N}$ و $X \neq \emptyset$ نامتناهی
هدف : پیدا کردن تابع $f : \mathbb{N} \xrightarrow[onto]{(1-1)} X$. این تابع را با استقرا می‌سازیم.
$a_1 = f(1) =$ کوچکترین عنصر X
حال فرض کنید $a_1 = f(a), ..., a_n = f(n)$ را تعریف نموده ایم. حال مجموعه‌ی $Y = X - \{f(1), ..., f(n)\}$ را در نظر می‌گیریم. طبق قضایای ثابت شده مجموعه‌ی Y همچنان نامتناهی است. پس $Y \neq \emptyset$ بنابراین دارای عضو ابتدا است.

$$a_{n+1} = f(n+1) = min\, Y$$

بنابراین با استقرا تابع f تعریف شده است.

الف) ثابت کنید f (۱-۱) است.
باید ثابت کنیم : $m \neq n \longrightarrow f(m) \neq f(n)(a_m \neq a_n)$
فرض کنید $m > n$ یعنی اینکه $m > 1$ درآنصورت $a_m = MinX - \{a_1, ..., a_{m-1}\}$ علی‌الخصوص $a_m \notin \{a_1, ..., a_{m-1}\}$ چون $m > n$ بنابراین $n \leq m - 1$ پس $a_n \in \{a_1, ..., a_{m-1}\} \Longleftarrow$
$f(m) = a_m \neq a_n = f(m)$ مشابهاً $n > m$ هم ثابت می‌شود.

ب) ثابت کنید f پوشا است.
چون f (۱-۱) است :

$$Im(f) = \{a_1, a_2.a_3, ...\}$$

یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی است.
بنابراین فرض کنید $x \in X$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $n \in \mathbb{N}$ موجود است بطوریکه $x = f(n) = a_n$.
مسلماً $n \in \mathbb{N}$ موجود است بطوری که $x \leq a_n = f(n)$ (چرا ؟)
حالت ۱ : فرض کنید $\emptyset \neq \{n \in \mathbb{N} \mid x \leq a_n\} = A$
فرض کنید $n. = min(A)$
ثابت کنید $x = a_{n.}$

$$x = a_{n.} = min(X - \{a_۱, ..., a_{n.-۱}\})$$

چون به ازای هر $i < n.$ داریم $a_i < x$ بنابراین اولاً $x \notin \{a_۱, ..., a_{n.-۱}\}$
یعنی اینکه $x \in X - \{a_۱, ..., a_{n.-۱}\}$ بنابراین داریم : $a_{n.} \leq x$

نتیجه. فرض کنید X شمارا (نامتناهی است) در آن‌صورت هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از X مانند Y نیز شمارا است.

مثال . ثابت کنید $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست.

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$(m, n) \longrightarrow$ عدد طبیعی $\qquad h(m, n) = ۲^m \times ۳^n$

ثابت کنید که تابع h (۱-۱) است.
ولی h پوشا نیست.

$$h(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = Im(h) \subseteq \mathbb{N}$$

پس $Im(h)$ شماراست پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نیز شماراست.

قضیه ۲.

۱) فرض کنید $X_۱ \sim X_۲$ و $Y_۱ \sim Y_۲$ در آن‌صورت $X_۱ \times Y_۱ \sim X_۲ \times Y_۲$

۲) فرض کنید X, Y شمارا باشند آنگاه $X \times Y$ نیز شماراست.

اثبات . می‌دانیم $X_۱ \xrightarrow{g} X_۲$ و $Y_۱ \xrightarrow{f} Y_۲$ تابع های (۱-۱) و پوشا هستند.

تابع $\begin{cases} h : X_۱ \times Y_۱ \longrightarrow X_۲ \times Y_۲ \\ (x, y) \longrightarrow (g(x), f(y)) \end{cases}$ نشان دهید h (۱-۱) و پوشاست.

برای اینکه ثابت کنیم h (۱-۱) است باید نشان دهیم :

$$h(x_۱, y_۱) = h(x_۲, y_۲) \longrightarrow (x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$$

$$(g(x_۱), f(y_۱)) = (g(x_۲), f(y_۲)) \longleftrightarrow g(x_۱) = g(x_۲) \& f(y_۱) = f(y_۲)$$

$$\longleftrightarrow (x_۱ = x_۲) \quad \& \quad (y_۱ = y_۲) \longleftrightarrow (x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$$

برای اینکه ثابت کنیم h پوشاست باید نشان دهیم :

$$\forall (x,y) \in X_2 \times Y_2 \quad \exists (\acute{x},\acute{y}) \in X_1 \times Y_1 \quad h(\acute{x},\acute{y}) = (x,y)$$

فرض کنید $(x,y) \in X_2 \times Y_2$ و دلخواه باشد. در اینصورت داریم :

$$x \in X_2 \quad \& \quad y \in Y_2 \longleftrightarrow (\exists \acute{x} \in X_1 \ \ g(\acute{x}) = x) \ \& \ (\exists \acute{y} \in Y_1 \ \ f(\acute{y}) = y)$$

$$\longleftrightarrow \exists (\acute{x},\acute{y}) \in X_1 \times Y_1 \quad g(\acute{x}) = x \ \& \ f(\acute{y}) = y \longleftrightarrow \exists (\acute{x},\acute{y}) \in X_1 \times Y_1 \quad h(\acute{x},\acute{y}) = (g(\acute{x}), f(\acute{y})) = (x,y)$$

پس h تابعی پوشاست.

تعریف . رابطه ی R را روی X یک رابطه ی ترتیب تام یا خطی گویند هرگاه R یک رابطه ی ترتیب باشد و علاوه بر آن :

$\forall x,y \in X \quad (xRy \quad \vee \quad yRx)$ یعنی هر دو عضو X قابل مقایسه باشند

مفاهیم اولیه مربوط به رابطه ی ترتیب :

قرارداد : $(X, \leqslant)$ منظور این است که $\leqslant$ یک رابطه ی ترتیب روی X است.

نکته ی اول : گاهی مواقع در تعریف رابطه ی ترتیب، ترتیب اکید در نظر میگیریم.

تعریف . " رابطه ی ترتیب اکید" :

i) R ضد انعکاسی باشد. یعنی : $\forall a \in X \sim (aRa)$

ii) R دارای خاصیت تعدی باشد. یعنی $\forall a,b,c \in X (aRb \quad \& \quad bRc \longrightarrow aRc)$

مثال . فرض کنید $X = \mathbb{R}$. رابطه ی S را روی $\mathbb{R}$ رابطه ی " $<$ " بگیرید

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a < b\}$$

$$aS'b \longleftrightarrow aSb \quad \vee \quad a = b$$

تمرین. نشان دهید که (X, S') یک رابطه ی ترتیب است.

بالعکس : فرض کنید S یک رابطه ی ترتیب روی X باشد. از S میتوانیم یک رابطه ی ترتیب اکید روی X تعریف کنیم.

$$aS'b \leftrightarrow aSb \quad \& \quad a \neq b$$

نکته. طبق قرارداد انجام شده اگر $(X, \leqslant)$ یک ترتیب دلخواه باشد آنگاه $(X, <)$ را ترتیب اکید وابسته به $\leqslant$ می نامیم.

نکته. اگر $(X,<)$ ترتیب اکید باشد آنگاه خاصیت زیر برای " $<$ " برقرار است.

$\forall a,b\in X(a<b\longrightarrow\sim(b<a))$

اثبات . فرض خلف : فرض کنید $a,b\in X$ و دلخواه باشد و aRb و bRa. آنگاه طبق خاصیت تعدی رابطه ی ترتیب اکید داریم :

$aRb\ \ \&\ \ bRa\longrightarrow aRa$

پس " $R=<$" دارای خاصیت انعکاسی است. اما این یک تناقض است. زیرا میدانیم یک رابطه ی ترتیب اکید دارای خاصیت ضد انعکاسی است.

مفاهیم مهم در رابطه ی ترتیب :
فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک رابطه ی ترتیب باشد.

۱) $a\in X$ را عنصر "مینیمم" گوییم هرگاه : $\forall b\in Xa\leqslant b$

۲) $b\in X$ را عنصر "ماکزیمم" گوییم هرگاه : $\forall c\in Xc\leqslant b$

۳) $a\in X$ را "مینیمال" گوییم هرگاه عنصر $b\in X$ موجود نباشد بطوری که $b<a$.

۴) $a\in X$ را "ماکزیمال" گوییم هرگاه عنصر $b\in X$ وجود نداشته باشد بطوری که $a<b$.

مثال . اگر $a\in X$ (مینیمم) باشد آنگاه (مینیمال) نیز هست. همچنین اگر $a\in X$ (ماکزیمم) باشد آنگاه (ماکزیمال) نیز هست.

۵) فرض کنید $A\subseteq X$، گوییم b یک کران بالا برای A است هرگاه برای هر $a\in A$ ؛ $a\leqslant b$.

مثال .

- اگر $X=\mathbb{R}$ مطلوب است مجموعه ی کران های بالای A در $\mathbb{R}$ $\varphi=\{x\in\mathbb{R}|x\geqslant ۱\}=[۱,+\infty)$
- اگر $A=\mathbb{Z}$ آنگاه : $\varphi=\emptyset$
- اگر $X=\mathbb{Q}$ و $A=\{x\in\mathbb{Q}|x^۲<۲\}$ آنگاه : $ub(A)=\{x\in\mathbb{Q}|x>\sqrt{۲}$

۶) مشابها فرض کنید $A\subseteq X$. $b\in X$ را کران پایین برای مجموعه ی A نامیم هرگاه : $\forall a\in Ab\leqslant a$

۷) فرض کنید $A\subseteq X$. $b\in X$ را کوچکترین کران بالا (سوپریمم sup) برای A نامیم هرگاه :

- a یک کران بالا برای A باشد
- برای هر کران بالای دیگری از A مانند c، $a\leqslant c$. یعنی $ub(A)$ دارای مینیمم است.

۸) مشابها $b \in X$ را بزرگترین کران پایین (inf) برای A هرگاه :

- b یک کران پایین برای A باشد
- برای هر کران پایین دیگری از A مانند c، $c \leqslant b$.

۹) فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک رابطه ی ترتیب خطی باشد. گوییم $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب است هرگاه هر زیر مجموعه ی غیر تهی از X مانند A دارای مینیمم باشد.

مثال .

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ یک مجموعه ی خوش ترتیب است.
- $((0,1), \leqslant)$ خوش ترتیب نیست
- $(\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant)$ خوش ترتیب نیست

مثال . فرض کنید $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ رابطه ی قاموسی را روی X در نظر بگیرید.

$(a,b) \leqslant (a',b') \Longleftrightarrow (a < a') \vee (a = a' \ \ \& \ \ b \leqslant b')$

تمرین. آیا $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب است؟

مجموعه های ناشمارا :

آیا مجموعه ی ناشمارا وجود دارد؟

قضیه : ثابت کنید فاصله ی $(0,1)$ یک مجموعه ی ناشماراست.

اثبات . میدانیم که اعداد حقیقی دارای بسط اعشاری هستند. از طرفی هر عدد حقیقی در $(0,1)$ را به صورت $0/a_1 a_2 ... a_n ...$ میتوان نوشت بقسمیکه $a_i = \{0, 1, ..., 9\}$.
از طرفی میتوان با توجه به قرارداد گفته شده بسط اعشاری یگانه ای برای اعداد حقیقی بین $(0,1)$ در نظر گرفت. پس هر عدد حقیقی متناظر با یک دنباله از اعداد بین ۰ تا ۹ است.

$x \longrightarrow 0/a_1 a_2 \quad a_i = \{0, 1, ..., 9\}$

حال ثابت میکنیم که هیچ تابع پوشا از اعداد طبیعی به فاصله ی $(0,1)$ وجود ندارد.
فرض کنید تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$ یک تابع داده شده باشد.

$f(1) = 0/a_1^1 a_2^1 a_3^1 ...$

$f(۲) = ۰/a_۱^۲ a_۲^۲ a_۳^۲ ...$ $\{a_j^i\}_{i,j\in\mathbb{N}}$

$f(n) = ۰/a_۱^n a_۲^n a_۳^n ...$

برای اینکه اثبات کنیم تابع پوشا نیست باید یک عدد حقیقی بین $(۰,۱)$ مانند x را نشان دهیم که در برد f قرار نمیگیرد.

عدد $x = ۰/b_۱ b_۲ ... b_n ...$ را با استقرا میسازیم.

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $b_n \in \{۱,۲,...,۹\}$ را طوری انتخاب میکنیم که $b_n \neq a_n^n$. مسلما چنین چیزی ممکن است.

ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f(n) \neq x$.

نتیجه : اعداد اصم ناشمارا است.

اثبات . میدانیم $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ ناشماراست. از طرفی چون $\mathbb{Q}$ شماراست بنابرین $\mathbb{Q}^c = (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ نمیتواند شمارا باشد.

قضیه : ثابت کنید اجتماع دو مجموعه ی شمارا، شماراست.

لم. اجتماع متناهی از مجموعه های شمارا، شماراست.

قضیه : اجتماع شمارائی از مجموعه های شمارا، شماراست.

اثبات . فرض کنید $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ شماراست.

ثابت کنید $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ نیز شماراست.

$A_n \overset{h_n}{\approx} \mathbb{N}$ چون شماراست پس تابع h_n موجود است. حال تابع $h : \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \xrightarrow{۱-۱} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$h(x) = (n, h_n(x)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

به طوری که n کوچکترین اندیسی باشد که $x \in A_n$.

ثابت کنید h تابعی $(۱-۱)$ است.

$$h(x_۱) = h(x_۲) \longrightarrow (n, h_n(x_۱)) = (n, h_n(x_۲)) \longrightarrow x_۱ = x_۲$$

۹ ساختمان اعداد

در این فصل میخواهیم ضمن بررسی و معرفی اجمالی نحوه ی ساخت اعداد، خاصیت های اصلی و ریشه ای اعداد را مورد بررسی قرار دهیم.
در ابتدا به بررسی اعداد طبیعی که پایه ای ترین مفاهیم در این باب هستند می پردازیم:

ساختمان اعداد طبیعی
اعداد طبیعی: همانگونه که قبلا اعداد طبیعی (یا همان اعداد صحیح مثبت تعریف گردید) این مجموعه ها عبارتند از :

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$
$\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ...\}$

این مجموعه وسیله ی شمارش های ابتدائی می باشند.
دو سوال بنیادی را میتوان در مورد مجموعه های بالا در نظر گرفت :

۱) آیا مجموعه های بالا وجود دارند و خاصیت اصلی این مجموعه ها چیست؟

۲) اعمال اصلی روی این این اعداد از قبیل جمع، ضرب، تفاضل و ... چگونه تعریف می گردند؟

در این قسمت ضمن بحث پیرامون سؤال نخست، نشان خواهیم داد که چگونه سؤال دوم از سؤال اول به دست می آید.
عناصر هر دو مجموعه ی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ توسط عدد ابتدائی خود یعنی ۰ و ۱ و با اعمال تابع تالی روی عناصر یکی پس از دیگری تولید می گردند. تالی یک عنصر x عبارت است از اولین عنصر بعد از x که البته همان $x + ۱$ است. برای این که اعداد طبیعی را مورد شناسایی قرار دهیم باید سعی کنیم خواص اولیه تابع تالی را بدست آوریم.
ابتدا سعی میکنیم با توجه به دانش قبلی خود پیرامون اعداد طبیعی این خواص را بدست آوریم. اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را در نظر میگیریم : $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$

$S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
یگانه تالی $x \longrightarrow x$
$S(۱) = ۲, S(۲) = ۳, ...$

بنابراین به این معنا $\mathbb{N}$ از عدد ۱ و تابع S بدست می آید.

خواص اصلی تابع S :

- S تابعی ۱ − ۱ است.
- هر عدد به غیر از ۱ تالی عنصری است.

$$۱ \longrightarrow S(۱) \longrightarrow S(S(۱)) \longrightarrow S(S(S(۱)))...$$

بطور شهودی میتوان گفت که $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه ی استقرائی شامل ۱ است :

مجموعه ی A را با عنصر متمایز $a \in A$ در نظر بگیرید و فرض کنید که تابع ۱ − ۱، $S : A \longrightarrow A$ به گونه ای تعریف شده است که :

$$\forall x(x \neq a \longleftrightarrow \exists y \ \ (s(y) = x))$$

میتوان در A کپی شبیه $\mathbb{N}$ را ایجاد نمود و چگونه ؟

$$\begin{array}{llll} a & S(a) & S(S(a))... \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow ... \\ ۱ & ۲ & ۳ \ .... \end{array}$$

(اصل مجموعه نامتناهی در نظریه مجموعه ها متضمن وجود اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ می باشد)

دقت کنید که خاصیت ۲ در واقع متضمن وجود تابع ۱ − ۱ ولی غیر پوشاسا می باشد. این مطلب در واقع مبنای تعریف مجموعه های نامتناهی است.

نحوه ی بیان رسمی که $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه ای است که دارای خاصیت استقرائی است به صورت زیر بیان می گردد :

اصل استقراء : فرض کنید که $X \subseteq \mathbb{N}$ بطوری که :

- $۱ \in X$
- $\forall n(n \in X \longrightarrow S(n) \in X)$

درَ آن صورت $X = \mathbb{N}$.

تعریف . یک ساختار استقرائی عبارت است از مجموعه ۳ تایی $< A, S, a >$ بطوری که A یک مجموعه ناتهی و $a \in A$ یک عنصر متمایز از مجموعه ی A است. و علاوه بر آن $S : A \longrightarrow A$ تابعی است که در شرایط زیر صدق می نماید :

- S تابعی ۱-۱ است.
- $a \notin Im(S)$
- $\forall x(x \notin a \longrightarrow x \in Im(S))$

- (اصل استقراء) به ازای هر زیرمجموعه ی X از A چنانچه $a \in X$ و به ازای هر t اگر $t \in X$ آنگاه $S(t) \in X$ در آنصورت $X = A$.

اصل موضوعه وجود مجموعه های استقرائی :
یک ساختار استقرائی موجود است. جلوتر خواهیم دید که هر دو ساختار استقرائی با هم ایزومرف خواهند بود، پس تا مرحله ایزومرفیسم ساختارهای استقرائی یگانه هستند.
توابع بازگشتی (**Recursive function**) :
می دانیم در اعداد طبیعی توابعی را بصورت بازگشتی تعریف مینماییم. بعنوان مثال تابع فاکتوریل یگانه تابعی است $! : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت

$$1! = 1$$
$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$

تعریف میگردد.
ریشه وجود یگانگی تابع فاکتوریل در مفهوم استقراء قرار دارد. حالت کلی تر وجود تابع های بازگشتی را در قضیه توابع بازگشتی به اثبات می رسانیم.
قضیه بازگشت (فرم ساده) :
فرض کنید که $< \mathbb{N}, S, 1 >$ مجموعه اعداد طبیعی بهمراه تابع تالی باشد. (در واقع ساختار استقرائی و البته اعداد طبیعی را در نظر گرفته ایم).
علاوه بر آن فرض کنید که مجموعه A و عنصر $a \in A$ را بطور ثابت در نظر گرفته ایم و تابع $G : A \longrightarrow A$ داده شده است.
در آن صورت تابع یگانه $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ موجود است بطوری که $f(1) = a$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $f(S(n) = G(f(n)$.

اثبات . اثبات وجود :
برای اینکه نشان دهیم تابع f وجود دارد در واقع f را به عنوان یک رابطه از $\mathbb{N}$ در A می سازیم.
ابتدا تعریف زیر را در نظر میگیریم :
رابطه ی R از $\mathbb{N}$ در A را پذیرفتنی گوییم هرگاه شرایط زیر برای R بر قرار باشد :

- a یگانه عنصری باشد که $< 1, a > \in R$
- اگر $S(n) \in dom(R)$ آنگاه $n \in dom(R)$
- به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در صورتی که $< n, \alpha > \in R$ و $(S(n), \beta) \in R$ آنگاه $\beta = G(\alpha)$

ادعا (1) : یک رابطه ی پذیرفتنی از $\mathbb{N}$ در A موجود است.

اثبات . اگر $R=\{(۱,a)\}$ آنگاه به وضوح R یک رابطه ی پذیرفتنی است.

ادعا (۲) : اگر $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه ی پذیرفتنی باشند آنگاه چنانچه $n\in dom(R_۱)\cap dom(R_۲)$ در آن صورت به ازای هر $\alpha,\beta\in A$ اگر $<n,\alpha>\in R_۱$ و $<n,\beta>\in R_۲$ آنگاه $\alpha=\beta$

اثبات . مجموعه ی X را به صورت

$$X=\{n\in\mathbb{N}\mid \text{اگر } \alpha,\beta\in A \text{ و } (n,\alpha)\in R_۱ \text{ و } (n,\beta)\in R_۲ \text{ در آنصورت } \alpha=\beta\}$$

تعریف میکنیم. نشان می دهیم که مجموعه ی X یک مجموعه استقرائی است.
به علت شرط ۱ در بالا داریم $۱\in X$. نشان میدهیم در صورتی که $n\in X$ آنگاه $S(n)\in X$. برای این که اثبات کنیم $S(n)\in X$ باید ابتدا فرض کنیم که $S(n)\in dom(R_۱)\cap dom(R_۲)$
در آنصورت طبق خاصیت ۲ داریم $n\in dom(R_۱)\cap dom(R_۲)$.
بنابراین اگر $<n,\alpha>\in R_۱$ و $<n,\beta>\in R_۲$ آنگاه $\alpha=\beta$.
فرض کنید که $\alpha\in A$ یگانه عنصری می باشد که $<n,\alpha>\in R_۱\cap R_۲$. حال فرض کنید برای هر $\gamma,\lambda\in A$ داریم $<S(n),\gamma>\in R_۱$ و $<S(n),\lambda>\in R_۲$. طبق رابطه ی ۳ چون $R_۱$ و $R_۲$ هر دو پذیرفتنی هستند در آنصورت

$$\lambda=G(\alpha),\gamma=G(\alpha)$$

بنابراین $\lambda=\gamma$. این مطلب نشان می دهد که $S(n)\in X$.
حال با توجه به ادعای ۱ و ۲ میخواهیم تابع f را بسازیم. ابتدا خانواده ی $\mathcal{A}$ را بصورت زیر تعریف میکنیم.

$$\mathcal{A}=\{R\subseteq\mathbb{N}\times A\mid R\text{یک رابطه پذیرفتنی است}\}$$

مجموعه $\mathcal{A}$ را با یک مجوعه ی ناتهی I اندیس گذاری می نماییم. پس

$$\mathcal{A}=\{R_i|i\in I\}$$

رابطه f از $\mathbb{N}$ در A را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f=\bigcup_{i\in I}R_i$$

نشان می دهیم که رابطه ی f همان تابع مورد دلخواه در مسئله است.
ادعا (۳) : f یک تابع است.

اثبات . برای اثبات ادعای ۳ باید اولا ثابت کنیم $dom(f)=\mathbb{N}$. مشابه اثبات ادعای ۲ از روش استقرائی استفاده می نمائیم. تحقیق می کنیم که $dom(f)$ یک مجموعه ی استقرائی است.

دقت کنید که به علت خاصیت ۱ در مفهوم رابطه پذیرفتنی داریم $1 \in dom(f)$.

حال باید ثابت کنیم که اگر $n \in dom(f)$ آنگاه $S(n) \in dom(f)$.

فرض کنید که $i \in I$ و $\alpha \in A$ بگونه ای باشد که $< n, \alpha > \in R_i$ اگر $S(n) \in dom(R_i)$ که مسئله حل شده است در غیر این صورت ادعا میکنیم که :

$$R_i \cup \{(S(n), G(\alpha))\} = R'$$

یک رابطه ی پذیرفتنی است (این ادعا به صورت تمرین اثبات شود.)

پس $R' \in A$ و $S(n) \in dom(R')$ و نتیجتا $S(n) \in dom(f)$.

مطلب دومی که باید اثبات گردد این است که اگر $(n, \alpha) \in f$ و $(n, \alpha) \in f$ آنگاه $\alpha = \beta$ این مطلب نیز با استقراء به اثبات می رسد :

$$Y = \{n \in \mathbb{N} | \forall \alpha, \beta \in A \ \ [((n, \alpha) \in f \& (n, \beta) \in f) \to \alpha = \beta]$$

(اثبات بر عهده ی دانشجو)

قدم آخر : حال که f یک تابع است آن را به صورت $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ نمایش می دهیم.

دقت کنید که $f(1) = \alpha$.

حال باید ثابت کنیم که $f(S(n) = G(f(n))$. چون $S(n) \in dom(f)$ پس $i \in I$ موجود است به طوری که $S(n) \in dom(R_i)$ و بنابراین $n \in dom(R_i)$.

طبق شرط ۳ مفهوم رابطه پذیرفتنی داریم که :

$$< S(n), \beta > \in R_i \ \ , \ \ < n, \alpha > \in R_i$$

آنگاه $\beta = G(\alpha)$ ولی طبق تعریف f، $a = f(n)$ و $\beta = f(S(n) = G(f(n)$ و حکم به اثبات می رسد.

تمرین. صورت کلی تر قضیه بازگشتی :

فرض کنید A یک مجموعه است و $\alpha \in A$ باشد و $G : \mathbb{N} \times A \longrightarrow A$ یک تابع باشد. در آن صورت تابع یگانه $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ موجود است بطوری که $f(1) = \alpha$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم :

$$f(S(n)) = G(n, f(n))$$

تمرین. نشان دهید که اگر $< A, S', a >$ یک ساختار استقرائی باشد در آنصورت تابع ۱ − ۱ و پوشا $F : \mathbb{N} \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $F(1) = a$. و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $F(S(n) = S(F(n)$.

جلسه ی دوم

جلسه ی قبل نشان دادیم که چگونه مفهوم استقراء نقش بنیادی در بیان ساختار اعداد طبیعی دارد. در این جلسه راجع به اینکه چگونه استقراء می تواند ساختار جبری اعداد طبیعی را تعریف نماید بحث میکنیم.

ساختار جبری اعداد طبیعی :

در اعداد طبیعی ساختار جبری آن یعنی چهار عمل اصلی یعنی جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم را می توان تعریف نمود و سپس خواص اصلی این اعمال را بیان نمود، همچنان که ساختار ترتیبی اعداد نیز حائز اهمیت است.

در این قسمت توضیح میدهیم که چگونه تعاریف استقرائی برای تعریف جمع و ضرب می توان ارائه نمود.

تعریف بازگشتی جمع و ضرب :

دقت کنید که تابع جمع و ضرب اعداد طبیعی در خواص اصلی استقرائی زیر صدق می کنند :

$$\begin{cases} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longrightarrow x+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longrightarrow x \times y \end{cases}$$

$$x + ۱ = S(x)$$

$$x + S(y) = S(x+y)$$

$$x \times ۱ = x$$

$$x \times S(y) = (x \times y) + x$$

این دو خاصیت اشاره شده ، در واقع می توانند مبنائی برای تعریف بازگشتی برای تعریف دو تابع جمع و ضرب گردند.

تعریف . (الف) : فرض کنید که $k \in \mathbb{N}$. در آنصورت تابع $f_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} f_k(۱) = S(k) \\ f_k(S(n)) = S(f_K(n)) \end{cases}$$

این تابع به علت قضیه بازگشتی موجود است.

بنابراین تابع f_k موجود است. حال تابع زیر را تعریف می کنیم :

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, k) \longrightarrow f_k(x)$$

این تابع روی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ تعریف میگردد که با توجه به وجود تابع f_k نیز موجود است.

(ب) : مشابهاً برای $k \in \mathbb{N}$ تابع

$$g_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$g_k(۱) = k$$
$$g_k(S(n)) = g_k(n) + n$$

تعریف می گردد. این تابع نیز طبق قضیه تابع بازگشتی موجود است.

حال تابع ضرب را به صورت

$$\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, k) \longrightarrow g_k(x)$$

تعریف کنید.

پس از اینکه توابع + و $\times$ تعریف شده اند باید خواص معمولی که برای این اعمال برقرار می باشند را به اثبات برسانیم.

گزاره. فرض تابع جمع و ضرب را که در بالا تعریف شده اند را در نظر می گیریم. این دو تابع دارای خواص زیر می باشند :

- (خاصیت جابجایی) :

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \;\; x + y = y + x$$
$$\forall x, y \in \mathbb{N} x \times y = y \times x$$

- (خاصیت شرکت پذیری) :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \;\; (x + y) + z = x + (y + z)$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \;\; x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

(تمام این خواص را میتوان با استقراء ثابت کرد)

به عنوان مثال خاصیت جابجایی را برای جمع به اثبات می رسانیم.

اثبات . فرض کنید $a \in \mathbb{N}$ و $I = \{y : a + y = y + y\}$ را در نظر بگیریم. باید ثابت نمود که $I = \mathbb{N}$.
پایه ی استقراء : باید نشان داد که $a + ۱ = ۱ + a$

$$J = \{a \in \mathbb{N} | a + ۱ = ۱ + a\}$$

اولا نشان دهید : $۱ \in J$
فرض کنید $n \in J$. $n + ۱ = ۱ + n$

$$۱ + (S(n)) = S(n) + ۱$$
$$۱ + (S(n)) = ۱ + (n + ۱) \overset{\text{شرکت پذیری}}{=} (۱ + n) + ۱ \overset{\text{فرض استقرا}}{=} (n + ۱) + ۱ = S(n) + ۱$$

خاصیت شرکت پذیری مستقل از خاصیت جابجایی توسط استقراء قابل اثبات است.
حال فرض کنید $n \in I \longleftarrow S(n) \in I$. اگر $n \in I$ آنگاه $a + n = n + a$.
حال می خواهیم نشان دهیم که $a + S(n) = (S(n) + a)$:

$$a + S(n) = a + (n + ۱) = a + S(n) \overset{\text{طبق تعریف جمع}}{=} S(a + n)$$
$$= S(n + a) = (n + a) + ۱ \overset{\text{شرکت پذیری}}{=} n + (a + ۱) \overset{\text{فرض استقرا}}{=} n + (۱ + a) \overset{\text{شرکت پذیری}}{=} (n + ۱) + a = S(n) + a$$

تمرین. بقیه خواص جمع و ضرب را با استقراء به اثبات رسانید.

تمرین. تابع توان را با توجه به تابع بازگشتی زیر تعریف کنید.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, y) \longrightarrow x^y$$

$$x^۱ = x$$
$$x^{y+۱} = (x^y).x$$

نشان دهید

$$x^{(y+z)} = x^y \times x^z$$
$$(x^y)^z = x^{yz}$$

تعریف . $\leqslant$ روی اعداد طبیعی: $x \leqslant y \leftrightarrow (x = y) \vee \exists m \in \mathbb{N} \;\; (x + m = y)$

نشان دهید که رابطه ی $\leqslant$ یک ترتیب خطی روی $\mathbb{N}$ تعریف می نماید.

در جلسه قبل اعداد طبیعی و ساختار جبری آن را مورد بحث قرار دادیم.
در این جلسه راجع به اینکه چگونه اعداد صحیح و گویا از اعداد طبیعی ساخته می‌شوند به بحث می‌پردازیم.

اعداد صحیح : در اعداد صحیح تفاضل دو عدد تعریف می‌گردد. اگر دو عدد صحیح $x, y \in \mathbb{Z}$ را در نظر بگیریم، تفاضل x, y که با $x - y$ نمایش داده می‌شود به عنوان تابعی روی زوج مرتب (x, y) تعریف می‌گردد.
دقت کنید که دو عنصر صحیح را می‌توان به صورت تفاضل دو عدد طبیعی درواقع نوشت. پس تفاضل x, y تابعی از (x, y) است. $x, y \in \mathbb{N}$.
اما اگر $(x', y'), (x, y) \in \mathbb{N}^۲$ در نظر گرفته شوند در آنصورت می‌دانیم : $x - y = x' - y'$ اگر و تنها اگر $(*)\ x + y' = x' + y$
بنابراین شرط تساوی تفاضل دو عدد طبیعی برابری $(*)$ است که کاملاً توسط اعداد طبیعی و جمع روی آن قابل تعریف است.
ایده ی بالا مبنائی برای تعریف اعداد صحیح می‌باشد.

تعریف . $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. روی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ رابطه هم‌ارزی $\sim$ را بصورت زیر تعریف کنید:
$(x, y) \sim (x', y') \quad iff \quad x + y' = y + x'$

به راحتی می‌توان دید که رابطه $\sim$ ، یک رابطه هم‌ارزی است.

مثال . $(۲, ۳) \sim (۴, ۵) \sim (n, n + ۱)$

با توجه به تعریف رابطه $\sim$ کلاس‌های هم‌ارزی رابطه تعریف شده را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

تعریف .

$$\mathbb{Z} = \{[(x, y)] \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$
$$۰ = [(۱, ۱)] = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$$
$$۱ = [(۱, ۰)] = \{(S(x), x) \mid x \in \mathbb{N}\}$$
$$n = [(n, ۰)] = \{(k + n, k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$
$$-n = [(۰, n)] = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$$

در واقع یک عنصر $[(x, y)] \in \mathbb{Z}$ نماینده‌ای از تفاضل $x - y$ است.
حال فرض کنید که $[(x, y)] \in \mathbb{Z}$ داده شده است و (x, y) یکی از نمایندگان داخل کلاس مزبور باشد.
حالت ۱ : $x \leqslant y$. در آنصورت طبق تعریف $\leqslant$ روی اعداد طبیعی :

$x = y$ یا عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ موجود است بطوریکه $x + m = y$.

در حالت نخست یعنی وقتی که $x = y$ داریم :

$$[(x,y)] = [(x,x)] = [(۰,۰)]$$

در حالت بعدی یعنی وقتی که $m \in \mathbb{N}$ موجود است که $x + m = y$ داریم :

$$[(x,y)] = [(x,x+m)] = [(۰,m)] = -m$$

حالت ۲ : $x > y$. در آنصورت عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ موجود است بطوریکه $x = y + m$.

$$[(x,y)] = [(y+n,y)] = [(n,۰)] = n$$

$$\mathbb{Z} = \{[(n,۰)] \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(۰,n)] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{n\} \cup \{-n\}$$

در قسمت بعدی تعریف جمع، ضرب و ترتیب روی اعداد صحیح را تعریف نموده و خواص آن را به صورت تمرین بیان می‌نمائیم.

تعریف جمع و ضرب روی اعداد صحیح

$$x - y \oplus x' - y' = [(x,y)] \oplus [(x',y')] = [(x+x', y+y')]$$

$$x - y \otimes x' - y' = [(x,y)] \otimes [(x',y')] = [(xx'+yy', xy'+yx')]$$

پس از تعریف جمع و ضرب، به بیان خواص اصلی تابع جمع می‌پردازیم.

گزاره.

الف) توابع جمع و ضرب خوش تعریف هستند.

ب) خواص جبری زیر برای جمع و ضرب برقرارند.

(i) خاصیت شرکت پذیری جمع و ضرب :

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$$

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$$

(ii) خاصیت جابجائی :

$$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$$

$$\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$$

(iii) خاصیت پخشی جمع نسبت به ضرب :

$$\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$$

(iv) عنصر خنثی جمع و ضرب :

$$\alpha \oplus ۰ = \alpha$$

$$\alpha \otimes ۱ = \alpha$$

(v) عنصر معکوس جمعی : به ازای هر $\alpha \in \mathbb{Z}$، عنصر $\beta \in \mathbb{Z}$ موجود است بطوریکه :
$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = ۰$

نتیجه : $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes, ۰, ۱)$ یک حلقه جابجائی است.

اثبات این خواص به راحتی انجام می‌پذیرد.

تمرین. خاصیت حذف را در اعداد صحیح به اثبات رسانید.

اشاره‌ای مختصر به اعداد گویا :

اعداد گویا در واقع حاصل تعریف عمل تقسیم روی اعداد صحیح است. می‌دانیم که عدد گویا به‌صورت $\frac{m}{n}$ نمایش داده می‌شود بطوری که $m, n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq ۰$.
علاوه بر آن تساوی برای دو عدد گویای $\frac{m_۱}{n_۱}$ و $\frac{m_۲}{n_۲}$ بصورت زیر تعریف می‌گردد :

$$\frac{m_۱}{n_۱} = \frac{m_۲}{n_۲} \Longleftrightarrow m_۱ n_۲ = m_۲ n_۱ \qquad (*)$$

رابطه $(*)$ می‌تواند منشأ تعریف یک رابطه هم‌ارزی گردد که بر مبنای آن می‌توان اعداد گویا و همین‌طور ساختار جبری روی آن را تعریف کرد.
حاصل‌ضرب دکارتی اعداد صحیح در خودش یعنی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه S از $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$S = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \neq ۰\}$$

با الهام‌گیری از $(*)$ می‌توانیم رابطه $\sim$ را روی مجموعه S بصورت زیر تعریف نمائیم : فرض کنید $(m_۱, n_۱), (m_۲,, n_۲) \in S$ درآنصورت $m_۱ \times n_۲ = n_۱ \times m_۲$ اگر و تنها اگر $(m_۱, n_۱) \sim (m_۲, n_۲)$ و $(m_۱, n_۱) \sim (m_۲, n_۲)$ با توجه به خواص ضرب در اعداد صحیح می‌توان نشان داد که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است.

گزاره. رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است.

اثبات . با توجه به اینکه ضرب در اعداد صحیح جابجائی است، بنابراین رابطه $\sim$ دارای خاصیت بازتابی و تقارنی می‌باشد.
حال برای اثبات خاصیت تعدی رابطه $\sim$ ، فرض می‌کنیم که :

$$(m_۱, n_۱) \sim (m_۲, n_۲) \;\&\; (m_۲, n_۲) \sim (m_۳, n_۳)$$

باشد. در آنصورت طبق تعریف رابطه $\sim$ داریم :

$$m_۱ \times n_۲ = n_۱ \times m_۲ \;\&\; m_۲ \times n_۳ = n_۲ \times m_۳ \qquad (**)$$

حال چنانچه طرفین تساوی ها را در هم ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$m_۱ \times n_۲ \times m_۲ \times n_۳ = (n_۱, m_۳) \times (n_۲, m_۲)$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

حالت ۱ : $m_۲ \neq ۰$. در اینصورت چون $n_۲$ نیز مخالف صفر است پس $m_۲ \times n_۲ \neq ۰$ و بنابراین با توجه به خاصیت حذف در اعداد صحیح خواهیم داشت :

$$m_۱ \times n_۳ = n_۱ \times m_۳$$

با توجه به تعریف رابطه $\sim$ مطلب بالا نتیجه می‌دهد :

$$(m_۱, n_۱) \sim (m_۳, n_۳)$$

حالت ۲ : $m_۲ = ۰$. در این حالت با توجه به تساوی $(**)$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$m_۱ \times n_۲ = n_۲ \times m_۳ = ۰$$

مجدداً با استفاده از خاصیت حذف در اعداد صحیح خواهیم داشت :

$$m_۱ = m_۳ = ۰$$

پس :

$$(۰, n_۱) \sim (۰, n_۳)$$

با توجه به گزاره بالا می‌توان کلاس‌های هم‌ارزی ناشی از رابطه $\sim$ را در نظر گرفت :
مجموعه $\mathbb{Q}$ را مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی در نظر بگیرید.

$$\mathbb{Q} = \{[(m,n)] \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$$

عناصر $a \in \mathbb{Q}$ را یک عدد گویا می‌نامیم.
مانند آنچه که در اعداد صحیح توضیح داده شد، باید پس از تعریف نمودن $\mathbb{Q}$ اعمال جبری را روی این مجموعه تعریف نموده و سپس خواص این اعمال را بدست آوریم.
با توجه به اینکه خواص اعمال جبری روی اعداد گویا مشابه با اعداد صحیح است صرفاً به تعریف نمودن این اعمال بسنده نموده و اثبات خواص را به عنوان تمرین بیان می‌نمائیم.

تعریف جمع و ضرب روی اعداد گویا

توابع

$$\oplus_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\otimes_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم :

$$\frac{m}{n} \oplus_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'} = [(m,n)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(m',n')] = [(mn' + nm', nn')]$$
$$\frac{m}{n} \otimes_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'} = [(m,n)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(m',n')] = [(mm', nn')]$$

قبل از اینکه خواص جبری توابع $\oplus_{\mathbb{Q}}$ و $\otimes_{\mathbb{Q}}$ را بیان نمائیم، باید خوش‌تعریفی تعاریف بالا را اثبات نمائیم. یعنی باید ثابت کنیم که :
(خوش‌تعریفی :)

الف) $(mn' + nm', nn') \in S$

یعنی $nn' \neq ۰$

ب) اگر
$$\begin{cases} (m,n) \sim (p,q) \\ (m',n') \sim (p',q') \end{cases}$$

آنگاه $(mn' + nm', nn') \sim (pq' + qp', qq')$

اثبات . قسمت الف واضح است.
برای اثبات قسمت ب باید ثابت کنیم که :

$$(mn' + nm') \times qq' = (pq' + qp') \times nn'$$

مشروط بر اینکه :

$$\begin{cases} mq = np \\ m'q' = n'p' \end{cases}$$

تمرین. این مطلب را به اثبات برسانید.

تمرین. ثابت کنید که $(\mathbb{Q}, \oplus_{\mathbb{Q}}, \otimes_{\mathbb{Q}}, ۰, ۱)$ یک میدان است.
در اینجا $[(۰,۱)] = ۰$ و $[(۱,۱)] = ۱$

تعریف رابطه ترتیب روی مجموعه $\mathbb{Q}$:
رابطه $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ را بصورت زیر روی مجموعه $\mathbb{Q}$ تعریف می‌نمائیم:
برای $[(m,n)]$ و $[(m',n')]$ متعلق به $\mathbb{Q}$: $[(m,n)] \leqslant_{\mathbb{Q}} [(m',n')]$ **درصورتیکه** $mn' \leqslant_{\mathbb{Z}} nm'$
اولاً باید خوش‌تعریفی تعریف بالا را نشان داد. ثانیةً خواص متداول رابطه $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ را به اثبات رسانید :

تمرین. نشان دهید که $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ رابطه‌ای خوش تعریف است و علاوه بر آن رابطه ترتیب خطی روی $\mathbb{Q}$ را تعریف نمائید.

خاصیت اصلی دیگری که در اعداد گویا برقرار است خاصیت چگال بودن اعداد گویا است.
برای اینکه نمادگذاری‌ها راحت‌تر باشند، از این به بعد یک عدد گویا را طبق روش مرسوم به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$[(m,n)] = \frac{m}{n}$$

خاصیت چگال بودن اعداد گویا :

فرض کنید $\frac{m}{n} <_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'}$ در آنصورت عدد گویای $\alpha \in \mathbb{Q}$ موجود است بطوریکه $\frac{m}{n} <_{\mathbb{Q}} \alpha <_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'}$

اثبات . بگیرید : $\alpha = \frac{mn'+nm'}{۲nn'}$

تمرین. نشان دهید که : $\frac{m}{n} < \alpha < \frac{m'}{n'}$

۱۰ اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی

عدداصلی (کاردینال $cardinal$): مجموعه ی A داده شده است.

$card(A) = |A|$ بطور شهودی تعداد اعضای A است. مثلا

$card(\{۱, ۲, ۳, ..., k\}) = k$

سؤال : وقتی راجع به مجموعه های نامتناهی صحبت می کنیم منظور از تعداد اعضا چیست؟

تعریف . $A \sim B \iff$ تابعی مانند $f : A \longrightarrow B$ ، $(۱ - ۱)$ و پوشا موجود باشد.

رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه ها است. بنابراین:

$|A| = card(A) = [A]_{\sim}$

$|\mathbb{Q}| = card(\mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}]_{\sim} = [\mathbb{N}]_{\sim} = \aleph.$ الف - صفر

$|\mathbb{R}| = card(\mathbb{R}) = [\mathbb{R}]_{\sim} = c$

هدف : مانند اعداد طبیعی در اعداد کاردینال اعمال جبری (جمع، ضرب - توان) تعریف میکنیم.

تعریف . ترتیب روی اعداد کاردینال :

هدف : مقایسه ی دو کاردینال ؛ برای مقایسه دو عدد کاردینال از تعریف بعد کمک میگیریم.

تعریف . فرض کنید مجموعه های A و B داده شده اند ، گوییم " A کمتر یا مساوی B است " و می نویسیم $A \leqslant B$ هرگاه :

تابع $f : A \xrightarrow{(۱-۱)} B$ موجود باشد.

خواص :

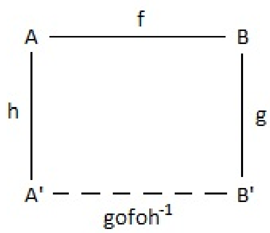
۱) اگر $A \sim B$ آنگاه $A \leqslant B$ و $B \leqslant A$

۲) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \leqslant B$. پس $\mathbb{N} \leqslant \mathbb{R}$

۳) $\mathbb{Q} \leqslant \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{Q}$

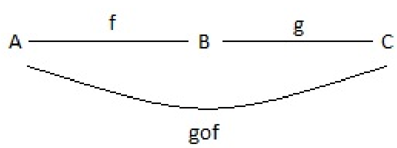
۴) فرض کنید $A \leqslant B$ و $A \sim A'$ و $B \sim B'$ در اینصورت $A' \leqslant B'$

اثبات :



نتیجه : بنابراین می توان تعریف بالا را بصورت $(card(A) \leqslant card(B))$ $|A| \leqslant |B|$ نوشت.

۵) اگر $|B| \leqslant |C|$ و $|A| \leqslant |B|$ آنگاه $|A| \leqslant |C|$



قضیه شرودر - برنشتاین : فرض کنید دو مجموعه A و B به گونه ای باشند که $A \leqslant B$ و $B \leqslant A$ آنگاه $A \sim B$.

تعاریف مقدماتی : فرض کنید مجموعه X و تابع $f : X \longrightarrow X$ داده شده است. گوییم $C \subseteq X$ نسبت به تابع f پایا است (C، f-پایاست) هرگاه داشته باشیم $f(C) \subseteq C$.

یعنی C، f-پایاست هرگاه : $\forall x \in C \;\; f(x) \in C$

مثال . تابع

$$f = \begin{cases} [۰, ۱] \longrightarrow [۰, n] \\ f(x) = x^{۲} \end{cases}$$

در نظر بگیرید. داریم : $f([۰, ۱/۲]) = [۰, ۱/۴] \subseteq [۰, ۱/۲]$

پس $[۰, ۱/۲]$، f-پایاست.

گزاره. فرض کنید $f : X \longrightarrow X$ داده شده است و $E \subseteq X$ را در نظر می گیریم، در آن صورت $C \subseteq X$ موجود است به طوری که :

i) $E \subseteq C$

ii) C، f-پایاست

iii) C کوچکترین مجموعه ی دارای خاصیت (i) و (ii) است.

اثبات . فرض کنید $D_{0} = E$ و $D_{n+1} = f(D_n)$ در آن صورت نشان دهید که اگر $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ آنگاه C دارای خواص (i) و (ii) و (iii) می باشد.

$$D_{0} = E, D_1 = f(E), D_2 = f(D_1) = f(f(E)) = fof(E) = f^{(2)}(E)$$

پس :

$C = E \cup f(E) \cup f^{(2)}(E) \cup f^{(3)}(E) \cup \ldots$ $f(C) = f(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(D_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = C \Longrightarrow f(C) \subseteq C$

اثبات . قضیه شرودر - برنشتاین :

حالت خاص : فرض کنید $B \subseteq A$ و تابع $f : A \longrightarrow B$ (۱-۱) داده شده باشد.

هدف : تابع $g : A \longrightarrow B$، (۱ − ۱) و پوشا پیدا کنید.

ایده ی اثبات : تابع $f : A \longrightarrow B$ را به صورت زیر اصلاح کنید.

$g : A \longrightarrow B$

مجموعه ی $C \subseteq A$ را در نظر بگیریم. و تابع g را بصورت زیر تعریف کنید :

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in C \\ z & z \in (A - C) \end{cases}$$

هدف: C را بگونه ای بیابید که تابع g یک تابع (۱ − ۱) و پوشا از A به B باشد.

شرایط لازم برای C :

- برای اینکه برد تابع g در مجموعه ی B باشد باید داشته باشیم $(A - C) \subseteq B$
- باید تابع g، (۱ − ۱) باشد. به ازای هر $z_1 \in C$ و $z_2 \in (A - C)$ باید نشان دهیم $g(z_1) \neq g(z_2)$ یعنی $f(z_1) \neq z_2$

بنابراین باید داشته باشیم $\forall z \in C \quad f(z) \notin (A - C)$.

این به این معنی است که برای هر $z \in C$ ، $f(z) \in C$. یعنی این که باید اثبات کنیم: C، f-پایاست.

بنابراین مجموعه ی C را معرفی میکنیم. مجموعه E را با $(A-B)$ مساوی بگیرید $E=(A-B)$. طبق گزاره اثبات شده ... $C=(A-C)\cup f(A-B)\cup f^{۲}(A-B)\cup$ اگر $C=\bigcup_{n=۰}^{\infty} f^n(A-B)$ در آن صورت :

C یک مجموعه f - پایاست.

وعلاوه بر آن $(A-C)\subseteq B$.

نشان دهید که در واقع تابع $g:A\longrightarrow B$ که به صورت :

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z\in C \\ z & z\notin C \end{cases}$$

یک تابع $(۱-۱)$ و پوشا از A به B است بنابراین $A\sim B$.

قضیه مهم

شرودر - برنشتاین : $|A|\leqslant|B| \& |B|\leqslant|A| \Longrightarrow |A|=|B|$

با اصل انتخاب می توان ثابت کرد که رابطه $\leqslant$ روی کاردینال ها یک ترتیب خطی است.

$\forall A,B \quad |A|\leqslant|B|$ یا $|B|\leqslant|A|$

تعریف . گوییم $|A|<|B|$ هرگاه $|A|\leqslant|B|$ و $|A|\neq|B|$

مثلا $\aleph_۰ < C$:

۱ - $\aleph_۰ \leqslant C$
$$\begin{aligned} f:\mathbb{N}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longrightarrow x\end{aligned}$$

۲ - $\aleph_۰ \neq C$ چون ثابت کردیم $\mathbb{R}$ ناشماراست.

سؤال : آیا بزرگترین کاردینال موجود است؟ به علت قضیه زیر خیر.

قضیه کانتور : ثابت کنید که به ازای هر مجموعه ی A ؛ $|A|<|P(A)|$

قضیه بالا تعمیم قضیه زیر است در اعداد طبیعی

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{۰\} \qquad n<۲^n$$

اثبات . الف : ثابت کنید که $|A|\leqslant|P(A)|$ (با فرض $A\neq\emptyset$)

$$\begin{cases} f:A\longrightarrow P(A)\\ x\longrightarrow\{x\}\end{cases}$$

ثابت کنید f تابعی ۱ - ۱ است.

* حالت خاص : $A=\emptyset$ آنگاه $P(A)=\{\emptyset\}$ تابع $\emptyset$ یک تابع (۱ − ۱) از $\emptyset$ به $P(\emptyset)$ است.

ب: ثابت کنید که هیچ تابع $f:A\longrightarrow P(A)$ پوشا موجود نیست.
هدف : پیدا کردن عنصری در $P(A)$ (به عبارت دیگر $B\subseteq A$) به قسمیکه $f(x)=B \quad \nexists x\in A$
مجموعه ی B را به صورت زیر تعریف کنید :

$B=\{x\in A|x\notin f(x)\}$

نشان دهید که $B\notin I_m(f)$.
فرض کنید $B\in I_m(f)$. فرض کنید $x\in A$ موجود باشد بطوری که $f(x)=B$.
سؤال : $x\in B$ ؟
فرض کنید $x\in B$ آنگاه طبق تعریف B داریم $x\notin B$ پس $x\notin B$
بنابراین تابع f پوشا نیست.

جبر کاردینال ها :
تعریف جمع : فرض کنید λ و k دو کاردینال باشند.
هدف : $k+\lambda$
$k=|A|$ و $\lambda=|B|$. می توان نمایندگان k و λ را طوری انتخاب کرد که $A\cap B=\emptyset$ آنگاه $k+\lambda=|A\cup B|$
در قدم اول خوش تعریفی تعریف بالا را بدست بیاورید.

لم. فرض کنید $A\overset{f}{\sim}A'$ و $B\overset{g}{\sim}B'$ و $A\cap B=A'\cap B'=\emptyset$. ثابت کنید $A\cup B\sim A'\cup B'$

اثبات .

$h:A\cup B\longrightarrow A'\cup B'$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in B\end{cases}$$

خواص جمع :

$\forall k+۰=k$ (i

$\forall k,\lambda \;\; k+\lambda=\lambda+k$ (ii

$\forall k,\lambda,\gamma \;\; (k+\lambda)+\gamma=k+(\lambda+\gamma)$ (iii

$\forall k,\lambda,\gamma \;\; k\leqslant\lambda\Longrightarrow k+\gamma\leqslant\lambda+\gamma$ (IV

اثبات . (iii) : فرض کنید $k=|A|$ و $\lambda=|B|$ و $\gamma=|C|$ علاوه بر آن فرض کنید که $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\emptyset$

$$k+\lambda=|A\cup B|$$

اثبات . (IV) : $k=|A|$ و $\lambda=|B|$ و $\gamma=|C|$ و $A\cap B=B\cap C=A\cap C=\emptyset$

تعریف ضرب : فرض کنید $k=|A|$ و $\lambda=|B|$ در آن صورت $|A\times B| \overset{\text{تعریف}}{=} k\times\lambda$

خوش تعریفی : فرض کنید $A \overset{f}{\sim} A'$ و $B \overset{g}{\sim} B'$. ثابت کنید $A\times B\sim A'\times B'$

$$h(x)=\begin{cases} A\times B\longrightarrow A'\times B' \\ h(x,y)=(f(x),g(y)) \end{cases}$$

ثابت h، $(1-1)$ و پوشا است.

خواص ضرب :

$k\times ۰=۰$ (i

$k\times ۱=k$ (ii

$\forall k,\lambda,\gamma \;\; (k\times\lambda)\times\gamma=k\times(\lambda\times\gamma)$ (iii

$\forall k,\lambda,\gamma \;\; (k+\lambda)\times\gamma=k\times\gamma+\lambda\times\gamma$ (IV

$\forall k,\lambda \;\; k\times\lambda=\lambda\times k$ (V

$\forall k,\lambda,\gamma \;\; k\leqslant\lambda\Longrightarrow k\times\gamma\leqslant\lambda\times\gamma$ (VI

اثبات .

$(i): A\times\emptyset=\emptyset$

$(ii): A\times\{۱\}\sim A$

$(iii): (A\times B)\times C\sim A\times(B\times C)$

$((x,y),z)\xrightarrow{h}(x,(y,z))$

تعریف . فرض کنید $k=|A|$ و $\lambda=|B|$.

$$k^\lambda=|A^B|$$

منظور از $A^B=\{f:B\longrightarrow A | f \;\; is \;\; a \;\; function\}$

۱ - خوشتعریفی :

$$\begin{matrix} A \sim A' \\ B \sim B' \end{matrix} \implies A^B \sim (A')^{B'}$$

خواص توان در اعداد کاردینال :

$(i)\ k^{۰} = ۱$

$(ii)\ k^{۱} = k$

$(iii)\ (k^{\lambda})^{\mu} = k^{(\lambda.\mu)}$

$(IV)\ k^{(\mu+\lambda)} = k^{\mu}.k^{\lambda}$

$(V)\ (k.\lambda)^{\mu} = k^{\mu}.\lambda^{\mu}$

$(VI)\ (k+\lambda)^{\mu} =$ چیزی نمیتوان گفت

مثال .

۱)

$$C.C = C$$

راه حل اول : با استفاده از خواص توان
با توجه به اینکه $C = ۲^{\aleph_۰}$ بنابراین داریم :

$$C.C = ۲^{\aleph_۰}.۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰+\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰} = C$$

راه حل دوم : ثابت کنید $C.C \leqslant C$ و $C \leqslant C.C$

$$\begin{cases} g : (۰,۱)(۰,۱) \longrightarrow (۰,۱) \\ g(۰/\alpha_۱\alpha_۲...,۰/\beta_۱\beta_۲...) = ۰/\alpha_۱\beta_۱\alpha_۲\beta_۲... \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f : C \longrightarrow C.C \\ f(x) = (x,x) \end{cases}$$

f بوضوح (۱-۱) است.
ثابت کنید که g خوش‌تعریف است
ثابت کنید که g (۱-۱) است.

۲)

$$C^C = ۲^C = |P(\mathbb{R})|$$

اثبات : ثابت کنید که $C^C \leqslant ۲^C$ و $۲^C \leqslant C^C$.

$$۲ \leqslant C \longrightarrow ۲^C \leqslant C^C \qquad (I)$$
$$C \leqslant ۲^C \longrightarrow C^C \leqslant (۲^C)^C = ۲^{C.C} = ۲^C \longrightarrow C^C \leqslant ۲^C \qquad (II)$$
$$\xrightarrow{I\&II,\text{قضیه شرودر- برنشتاین}} C^C = ۲^C$$

۳)

$$\aleph_\circ^{\aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ} = C$$

اثبات : ثابت کنید که $\aleph_\circ^{\aleph_\circ} \leqslant ۲^{\aleph_\circ}$ و $۲^{\aleph_\circ} \leqslant \aleph_\circ^{\aleph_\circ}$

$$۲ \leqslant \aleph_\circ \longrightarrow ۲^{\aleph_\circ} \leqslant \aleph_\circ^{\aleph_\circ}$$
$$\aleph_\circ \leqslant ۲^{\aleph_\circ} \longrightarrow \aleph_\circ^{\aleph_\circ} \leqslant (۲^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ . \aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ}$$

پس $\aleph_\circ^{\aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ}$

۴)

$$\aleph_\circ^C = ۲^C$$

اثبات : $۲^C \leqslant \aleph_\circ^C \leqslant C^C \leqslant ۲^C$

۵)

$$C^{\aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ} = C$$

اثبات : $C^{\aleph_\circ} = (۲^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ . \aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ} = C$

۶) مطلوبست $|\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}|$ پیوسته است $f\}| = ?C$ چرا؟

علت : خاصیت مهم توابع پیوسته : توابع پیوسته بطور یکتا روی اعداد گویا مشخص می‌شود.
فرض کنید تابع f روی اعداد حقیقی پیوسته باشد و علاوه بر آن مقادیر f روی $\mathbb{Q}$ مشخص باشد.
در این صورت مقادیر f روی کل اعداد حقیقی مشخص است.

$a_n \in \mathbb{Q}$ $\qquad \{a_n\} \longrightarrow x$

طبق پیوستگی $\qquad \{f(x)\} \longrightarrow f(x)$

بنابراین دنباله $\{f(a_n)\}$ همگراست و مقدار آن دقیقاً مقدار f در نقطه x است.

۷) ثابت کنید $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ توابع $continuety$ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$
ثابت کنید وجود دارد تابع $H : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ بطوریکه H (۱-۱) باشد.

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow f|_{\mathbb{Q}}$$

ثابت کنید H (۱-۱) است.

$$f_1, f_2 \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

بررسی (۱-۱) بودن

$$H(f_1) = H(f_1) \longrightarrow f_1 = f_2$$
$$f_1|_{\mathbb{Q}} = f_2|_{\mathbb{Q}} \longrightarrow f_1 = f_2$$
$$\{q_n\} \longrightarrow x \qquad q_n \in \mathbb{Q}$$
$$f_1(q_n) \longrightarrow f_1(x) \quad \& \quad f_2(q_n) \longrightarrow f_2(x)$$
$$f_1(q_n) = f_2(q_n) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_1(q_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(q_n) \Longrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

پس

$$|C(\mathbb{R},\mathbb{R})| \leqslant |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = C$$

از طرفی $\qquad |C(\mathbb{R},\mathbb{R})| \geqslant C$

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ g(r) = f_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

بطوریکه $\qquad f_r(x) = r \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

ثابت کنید g (۱-۱) است.

در واقع g هر عدد حقیقی r را به تابعی ثابت می‌برد که به ازای جمیع مقادیر مقدار تابع r می‌شود. واضح است که توابع ثابت برای هر $r \in \mathbb{R}$ یکتا هستند. پس g (۱-۱) است.

فرضیه پیوستار (CH) : کاردینال k بین $\aleph_0$ و C موجود نیست.

$$\neg\exists k \qquad \aleph_0 < K < 2^{\aleph_0} = C$$

فرضیه پیوستار تعمیم یافته (GCH) :

$$\forall \lambda \geqslant \aleph_0 \quad \neg\exists k \qquad \lambda < k < 2^{\lambda}$$

۱۱ فصل هفتم : اصل انتخاب و برخی صورت‌های هم‌ارز آن

اصل انتخاب : $Axiom\ of\ choise \qquad (AC)$

اصل انتخاب از لحاظ تاریخی اولین اصل مورد بحث می‌باشد.

۱) سازگاری اصل انتخاب با اصول دیگر :
آیا پذیرش اصل انتخاب منجر به تناقض است؟ (سازگاری) $\leftarrow$ گودل

۲) آیا می‌توان این اصل را از اصول دیگر نتیجه گرفت؟ (استدلال) $\leftarrow$ کوهن

هندسه اقلیدسی اشیا مورد بحث : نقطه و خط
روابط مهم : وقوع xRy. نقطه x روی خط y واقع است.
اصل توازی : p نقطه، l,l' خط هستند.

$$\forall p \forall l\ [\neg(pRl) \to \exists l'(pRl'\ \&\ \neg\exists p'(p'Rl\ \&\ p'Rl))]$$

از لحاظ منطقی اصل موضوعه هندسه اقلیدسی در این زبان بیان گردید. تئوری = T

$$T = \{\sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۳, \sigma_۴, \sigma_۵\}$$

باید ثابت کنیم که T منجر به تناقض نمی‌گردد.
برای اثبات سازگاری کافی است یک الگو یا تعبیر مناسب برای این اصول پیدا کنیم. (مثلاً الگوی مناسب برای هندسه‌ی اقلیدسی توسط هندسه‌ی دکارتی انجام می‌پذیرد.)
هذلولی :

$$T = \{\sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۳, \sigma_۴, \sigma'_۵\}$$

مدل‌ها، الگوها و تعبیرهایی برای هندسه هذلولی وجود دارد.
R ریمانی :

$$T = \{\sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۳, \sigma_۴, \sigma''_۵\}$$

تعریف . فرض کنید که S یک مجموعه‌دلخواه و ناتهی باشد و S گردایه‌ای از مجموعه هاست.

$$S = \{X_i | i \in I\} \quad \forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$$

تعریف تابع انتخاب از مجموعه‌ی S :
تابع $f : S \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$
را یک تابع انتخاب از مجموعه‌ی S گوئیم هرگاه به ازای هر $i \in I$

$$f(X_i) \in X_i$$

مثال .

$$S = \{\{۱, ۲, ۳, ...\}, \{۲, ۳, ...\}, \{۳, ۴, ...\}, ..., \{n, n + ۱, ...\}, ...\}$$

$$S = \{X - n | n \in \mathbb{N}\} \qquad \bigcup_{n=۱}^{\infty} X_n = \mathbb{N}$$

$$f : \{X_n | n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(X_n) = Min\{X_n\} = n$$

مثال .

$$I = \{۱, ۲, ..., ۱۳۸۶\} \quad \text{و} \quad S = \{X_۱, X_۲, ..., X_{۱۳۸۶}\}$$

S گردایه‌ای از مجموعه‌ها می‌باشد. $\forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$

تابع انتخاب زیر را تعریف می‌کنیم :

چون $X_۱ \neq \emptyset$ پس $a_۱ \in X_۱$ موجود است. بنابراین $f(X_۱) = a_۱$

چون $X_۲ \neq \emptyset$ پس $a_۲ \in X_۲$ موجود است. پس $f(X_۲) = a_۲$.

به همین ترتیب چون $X_{۱۳۸۶} \neq \emptyset$ پس $a_{۱۳۸۶} \in X_{۱۳۸۶}$ موجود است پس : $f(X_{۱۳۸۶}) = a_{۱۳۸۶}$.

پس تابع $f = \{X_۱, X_۲, ..., X_{۱۳۸۶}\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$

بنابراین تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم : $f(X_i) = a_i$

از لحاظ نظریه مجموعه‌ها وجود چنین تابعی قابل اثبات است. حال استدلال شهودی و غلط زیر را در نظر بگیرید:

چون برای هر $i \in I$ ، $X_i \neq \emptyset$ پس برای هر X_i ، a_i موجود است بطوریکه $a_i \in X_i$. پس تابع انتخاب $f : S \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: $f(X_i) = a_i$.

مشکل آنجاست که ممکن است S نامتناهی باشد. در این صورت وجود چنین تابعی از لحاظ نظریه مجموعه‌ها قابل اثبات نیست. پس به اصلی نیازمندیم که وجود چنین تابعی را برای S های نامتناهی بیان کند.

۱.۱۱ اصل انتخاب

فرض کنید که $S = \{X_i\}_{i \in I}$ گردایه‌ای دلخواه از مجموعه‌های ناتهی باشد. در آنصورت تابع انتخاب برای گردایه S موجود است.

وجود دارد تابع $f : S \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ به قسمی که $f(X_i) \in X_i$

۲.۱۱ لم زورن

یادآوری تعاریف : فرض کنید که $(P, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد.

* $X \subseteq P$ را در نظر بگیرید. گوئیم X یک زنجیر است هرگاه :
  به ازای هر $a, b \in X$ ، $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$.
* $a \in P$ یک کران بالا برای X گوئیم هرگاه $\forall x \in X (x \leqslant a)$
* $a \in P$ را عنصر ماکزیمال گوئیم هرگاه $\forall x \in X (a \leqslant x \longrightarrow a = x)$

لم زورن : فرض کنید که $(P,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $P \neq \emptyset$.
فرض کنید به ازای هر زنجیر ناتهی از P مانند X ، این زنجیر دارای کران بالا در P باشد.
در آنصورت P دارای یک عنصر ماکزیمال است.

یادآوری : رابطه‌ی $<$ روی مجموعه‌ی X خوش تعریف $(well-order)$ است. اگر هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از X مانندY دارای عنصر ابتدا باشد.

۳.۱۱ اصل خوش‌ترتیبی : $(well-ordering\ principle)$

به ازای هر مجموعه مانند X ، رابطه ترتیب $<$ روی X می‌توان پیدا کرد بطوریکه $(X,<)$ خوش‌ترتیب است.

قضیه : اگر X نامتناهی باشد آنگاه زیرمجموعه‌ای از X مانند Y همتوان با اعداد طبیعی موجود است.

اثبات . (شهودی) چون X نامتناهی است پس ناتهی است. بنابراین عنصر $x_۱ \in X$ را انتخاب می‌کنیم.
مجموعه $X-\{x_۱\}$ نیز ناتهی است. پس عنصر $x_۲ \in X-\{x_۱\}$ را انتخاب می‌کنیم.
به همین ترتیب $X-\{x_۱,...,x_{k-۱}\}$ غیر تهی است. پس عنصر x_k را می‌توان از آن انتخاب کرد. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ عنصر x_n را بطوریکه $x_n \in X-\{x_۱,x_۲,...,x_{n-۱}\}$ می‌توان انتخاب کرد.
مجموعه شامل x_n ها را Y می‌نامیم. بوضوح تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to Y \\ f(n)=x_n \end{cases}$ دوسویی موجود است پس $Y \sim \mathbb{N}$ و $Y \subseteq X$

اثبات . (دقیق‌تر) فرض کنید $S=\{Y\subseteq X | Y\neq\emptyset\}$ طبق اصل انتخاب تابع $f:S\longrightarrow \bigcup Y \subseteq X = X$.
طبق اصل انتخاب تابع فوق موجود است بطوریکه :
به ازای هر $y\in S$ ، $f(y)\in y$
هدف : پیدا کردن تابع (۱-۱) $g:\mathbb{N}\longrightarrow X$

$$g(۱)=f(X)=x_۱$$
$$g(n+۱)=f(X-\{g(۱),...,g(n)\})$$

$g(۱)$: عنصری است که در X بطور دلخواه انتخاب شده است.
$g(n+۱)$: عنصری است در $X-\{g(۱),...,g(n)\}$
تابع g موجود است. (طبق قضیه وجود توابع بازگشتی)
اگر تابع g موجود باشد، بنابراین تابع g (۱-۱) است.

قضیه : (با استفاده از لم زورن)
صورت ۱ : به ازای هر دو مجموعه‌ی B, A یا تابع (۱-۱) از $B \longrightarrow A$ مانند f موجود است و یا تابع یک به یک مانند g از $A \longrightarrow B$ موجود است.
صورت ۲ : به ازای هر A, B $\quad |B| \leqslant |A|$ یا $|A| \leqslant |B|$.

اثبات . ایده‌ی اثبات : با استفاده از لم زورن مجموعه جزئاً مرتب $(P, \leqslant)$ را طوری معرفی می‌کنیم که عنصر ماکزیمال P نتیجه خواسته شده را ثابت نماید.
مجموعه P را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$P = \{(A_\alpha, f_\alpha) | A_\alpha \subseteq A, \;\; f_\alpha : A_\alpha \xrightarrow{(1-1)} B\}$$

اولاً P ناتهی است : $A_\alpha = \emptyset \subseteq A$. $\emptyset : \emptyset \longrightarrow B$ یک به یک است. رابطه‌ی $\leqslant$ را روی مجموعه‌ی P بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(A_\alpha, f_\alpha) \leqslant (A_\beta, f_\beta) \Longleftrightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta \;\&\; f_\alpha \subseteq f_\beta \Longleftrightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta \;\&\; \forall x \in A_\alpha (f_\alpha(x) = f_\beta(x))$$

اولاً : ثابت کنید که $\leqslant$ یک رابطه‌ی جزئاً مرتب است.
ثانیاً : ثابت کنید که $(P, \leqslant)$ در شرط لم زورن صدق می‌کند.
فرض کنید که $\Gamma = \{(a_\alpha, f_\alpha) | \alpha \in I\}$ یک زنجیر از P باشد. فرض کنید $A' = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ و $f = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha$
ادعا : $(A', f') \in P$
اولاً ثابت کنیم f یک تابع است. ثانیاً f (۱-۱) است.

f تابع است :

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$$
$$\rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in I, (x, y_1) \in f_{\alpha_1}, (x, y_2) \in f_{\alpha_2}$$
$$\begin{cases} (A_{\alpha_1}, f_{\alpha_1}) \in \Gamma \\ (A_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}) \in \Gamma \end{cases} \Longrightarrow f_{\alpha_1} \subseteq f_{\alpha_2} \Rightarrow y_1 = y_2 \quad or \quad f_{\alpha_2} \subseteq f_{\alpha_1} \Rightarrow y_1 = y_2$$

پس P دارای عنصر ماکزیمال است. پس $(A_\alpha, f_\alpha) \in P$ موجود است که (A_α, f_α) ماکزیمال است.
حالت (۱) : $A_\alpha = A$ در این صورت : تابع $f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B$ (۱-۱) است. پس مطلب خواسته شده بدست می‌آید.
حالت (۲) : $A_\alpha \neq A$ $(A_\alpha \subsetneqq A)$
ادعا : تابع $f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B$ یک تابع دوسویی است.
در صورت اثبات ادعا تابع $f_\alpha^{-1} : B \longrightarrow A_\alpha$ یک تابع (۱-۱) است. چون $A_\alpha \neq A$ بنابراین $x \in (A - A_\alpha)$ موجود است. اگر تابع f_α پوشا نباشد آنگاه $y \in B - Im(f_\alpha)$ موجود است.

حال $A' = A_\alpha \cup \{x\}$. $\quad f' = f_\alpha \cup \{(x,y)\}$

نشان دهید که : $(A', f') \in P$

یعنی باید ثابت کنیم $A' \subseteq A$ و $f' : A' \longrightarrow B$ تابع است و (۱-۱) است.

دقت کنید $(A_\alpha, f_\alpha) < (A', f')$

که این مطلب با ماکزیمال بودن (A_α, f_α) در تناقض است.

f (۱-۱) است :

$$\forall x_1, x_2 \in A' \quad \forall y \in B$$
$$(x_2, y), (x_1, y) \in f \quad \overset{?}{\to} \quad x_1 = x_2$$
$$\longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in I \Longrightarrow \begin{cases} (x_1, y) \in f_{\alpha_1} \\ (x_2, y) \in f_{\alpha_2} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که (A', f) یک کران بالای Γ است.

فرض کنید که $(A_\alpha, f_\alpha) \in \Gamma$ و دلخواه باشد. باید ثابت کنیم که

$$(A_\alpha, f_\alpha) \leqslant (A', f)$$

یعنی باید ثابت کنیم $A_\alpha \subseteq A'$ و $f_\alpha \subseteq f$ و این واضح است.

ثابت کنید که : اصل خوش‌ترتیبی $\Longleftarrow$ اصل انتخاب

فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیر تهی داده شده است.

داده ها : $\quad S = \{X_i | i \in I\} \quad X_i \subseteq X \;\&\; X_i \neq \emptyset$

خواسته : تابع انتخاب برای S

$$f : S \longrightarrow X$$
$$f(X_i) \in X_i$$

طبق اصل خوش ترتیبی رابطه $<$ روی مجموعه‌ی X را می‌توان طوری تعریف نمود که $(X, <)$ خوش‌ترتیب باشد. چون $\emptyset \neq X_i \subset X$ بنابراین نسبت به رابطه‌ی $<$ دارای عنصر min است.

$$\begin{cases} f : \{X_i | i \in I\} \longrightarrow X \\ f(X_i) = min_<(X_i) \end{cases}$$

لم زورن $\Longleftarrow$ اصل خوش‌ترتیبی

فرض : فرض کنید $(P, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد که $P \neq \emptyset$ و هر زنجیر ناتهی از P مانند X دارای کران بالایی در P باشد. در این صورت $(P, \leqslant)$ دارای عنصر ماکزیمال است.

حکم : فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد ، رابطه‌ی ترتیب $<$ موجود است بطوریکه $(X,<)$ خوش‌ترتیب باشد.

اثبات . فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. (مسلماً می‌توان فرض کرد X نامتناهی باشد.)
هدف : پیدا کردن رابطه $\leqslant$ روی مجموعه‌ی X به قسمی که $(X,\leqslant)$ خوش‌ترتیب باشد.

$P=\{(A_\alpha,\leqslant_\alpha)|A_\alpha\subseteq X,\leqslant_\alpha\subseteq A_\alpha^2\}$

$\leqslant_\alpha$ یک رابطه خوش‌ترتیب روی A_α است.

$(A_\alpha,\leqslant_\alpha)\sqsubseteq(A_\beta,\leqslant_\beta)\Longleftrightarrow A_\alpha\subseteq A_\beta\ \&\ \leqslant_\alpha\subseteq\leqslant_\beta$

به ازای هر $x\in A_\beta-A_\alpha$ و $y\in A_\alpha\quad y\leqslant_\beta x$

واضح است رابطه‌ی $(P,\sqsubseteq)$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است و علاوه بر آن $P\neq\emptyset$ زیرا $(\emptyset,\emptyset)\in P$. فرض کنید $\Gamma=\{(A_\alpha,\leqslant_\alpha)|\alpha\in I\}$ یک زنجیر از P باشد.

$A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\subseteq X$

$\leqslant=\bigcup_{\alpha\in I}\leqslant_\alpha\subseteq A^2$

باید ثابت کنیم $(A,\leqslant)\in P$
یعنی اینکه باید ثابت کنیم $\leqslant$ یک رابطه خوش‌ترتیب روی A تعریف می‌کنیم.
بطور دقیق‌تر : اولاً ثابت کنید که رابطه $\leqslant$ روی A یک رابطه ترتیب خطی است.
ثانیاً ثابت کنید که رابطه $\leqslant$ روی A خوش‌ترتیب است.

i) انعکاسی :

$\forall a\in A\quad a\leqslant a$

$a\in A\longrightarrow\exists\alpha\ a\in A_\alpha\xrightarrow{\text{رابطه انعکاسی است}}(\alpha,a)\in\leqslant_\alpha\xrightarrow{\leqslant_\alpha\subseteq\leqslant}(\alpha,a)\in\leqslant$

ii) تعدی :

$\forall a,b,c\in A\quad a\leqslant b\ \&\ b\leqslant c\longrightarrow a\leqslant c$

اولاً ثابت کنید ترتیب خطی است : $\forall a,b\in A\quad a\leqslant b\ \ or\ \ b\leqslant a$
چون Γ یک زنجیر است $\Longleftarrow\exists\gamma\in I$ بطوریکه $a,b\in A_\gamma$ چون $\leqslant_\gamma$ یک رابطه‌ی ترتیب خطی روی A_γ هست پس :

$a\leqslant_\gamma b$ یا $b\leqslant_\gamma a$ پس $a\leqslant b$ یا $b\leqslant a$
ثانیاً ثابت کنید که رابطه $\leqslant$ یک رابطه‌ی خوش‌ترتیب روی X است.
فرض کنید $A\subseteq X$ یک زیرمجموعه دلخواه و ناتهی از X باشد. چون $A\neq\emptyset$ پس عنصر $a\in A$ موجود

است از طرفی $a \in I$ موجود است بطوریکه $a \in A_\alpha$.
$A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ چون رابطه‌ی $\leqslant_\alpha$ روی A_α یک رابطه خوش‌ترتیب است بنابراین $(A \cap A_\alpha)$ نسبت به رابطه $\leqslant_\alpha$ – دارای عنصر min است. فرض کنید $b \in (A \cap A_\alpha)$ عنصر$\leqslant_\alpha$ – مینیمم $(A \cap A_\alpha)$ باشد.
ادعا : b عنصر min نسبت به رابطه‌ی $\leqslant$ است.
اثبات ادعا : فرض کنید $c \in A$ عنصری دلخواه باشد پس $\beta \in I$ موجود است. $c \in A_\beta$

۱ $c \in A_\alpha \cap A_\beta$ پس $c \in A \cap A_\alpha$ پس $b \leqslant c$

۲ $c \in A_\beta - A_\alpha$ ، بنابراین $A_\alpha \subseteq A_\beta$ و بطور قوی‌تر می‌توان گفت که $(A_\alpha, \leqslant_\alpha) \sqsubseteq (A_\beta, \leqslant_\beta)$
در تعریف $\sqsubseteq$ داریم:

$$b \leqslant_P c \quad c \in A_\beta - A_\alpha \quad b \in A_\alpha$$

پس $b \leqslant c$.

نکته دیگر : زمانی که باید چک کنیم :

$$A = \bigcup A_\alpha$$
$$\leqslant = \bigcup \leqslant_\alpha$$

باید ثابت کنیم اولاً : $(A, \leqslant) \in P$
ثانیاً ثابت می‌کنیم که $(A, \leqslant)$ یک کران بالا برای Γ است.

$$\forall \alpha \in \Gamma \quad (A_\alpha, \leqslant_\alpha) \sqsubseteq (A, \leqslant)$$

باید ثابت کنیم که به ازای هر $x \in (A - A\alpha)$ و $y \in A_\alpha$

$$y \leqslant x$$

اما $x \in A - A_\alpha$ پس $\exists \beta \in I$ بطوری که $x \in A_\beta$ پس $x \in A_\beta - A_\alpha$

از طرفی می‌توان فرض کرد : $\begin{cases} A_\alpha \subseteq A_\beta \\ \leqslant_\alpha \subseteq \leqslant_\beta \end{cases}$

پس $(A_\alpha, \leqslant_\alpha) \subseteq (A_\beta, \leqslant_\beta)$ داریم $y \leqslant_\beta x$.
پس از چک کردن شرط لم زورن عنصر ماکزیمال $(A, \leqslant)$ در P موجود است.
ادعا : $A = X$
فرض خلف : در غیر این صورت عنصر $x \in X - A$ را انتخاب می‌کنیم. حال روی مجموعه $A \cup \{x\}$ رابطه‌ی

$$\leqslant' = \leqslant \cup \{(a, x) | a \in A\}$$

را در نظر می‌گیریم. براحتی می‌توان ثابت نمود $(A\cup\{x\},\leqslant)$ یک رابطه‌ی خوش‌ترتیب روی $A\cup\{x\}$ پس:

$$(A\cup\{x\},\leqslant')\in P$$

اما $(A,\leqslant)\subsetneqq(A\cup\{x\},\leqslant')$
تناقض با ماکزیمال بودن $(A,\leqslant)$ دارد.

۴.۱۱ اصل ماکسیمال هاسدورف

یکی دیگر از معادل های اصل انتخاب است.

اگر $(P,\leqslant)$ یک رابطه‌ی جزئاً مرتب باشد و τ را مجموعه‌ی همه‌ی زنجیرهای P قرار دهیم آنگاه $(\tau,\subseteq)$ دارای عضو ماکسیمال است.