



به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین ریاضی مهندسی گروه ۲- نیمسال اول ۹۲-۹۱- سری ۳

موعد تحویل: **سه‌شنبه ۵ دیماه ۱۳۹۱** و **سه‌شنبه ۱۲ دیماه ۱۳۹۱**

در مسائل مقدار مرزی زیر: اول مقادیر ویژه و توابع ویژه هر مسأله را بیابید. دوم در فاصله مناسب سری فوریه هر تابع تکه‌ای پیوسته دلخواهی را بر حسب توابع ویژه هر مسأله (با توجه به تابع $p(x)$) بنویسید.

$$1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l \\ y'(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0, & 1 < x < l \\ y(1) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 0, & 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l \\ 2y(0) + y'(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 1 < x < 2 \\ y(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0, & 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

۱۰) نشان دهید مسأله با شرایط مقدار مرزی ناهمگن:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = T_0, & t > 0 \\ u(l, t) = T_1, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

با تغییر متغیر وابسته

$$W(x, t) = u(x, t) - v(x), \quad v(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{l}x$$

به معادله با شرایط مرزی همگن زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} W_t = c^2 W_{xx} & , \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ W(0, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ W(l, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ W(x, 0) = f(x) - \left[T_0 + \frac{T_1 - T_0}{l} x \right] & , \quad 0 < x < l \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} 11) & \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0 & , \quad 0 < x < a \\ u(x, b) = f(x) & , \quad 0 < x < a \end{cases} \\ 12) & \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0 & , \quad 0 < x < a \\ u(x, b) = f(x) & , \quad 0 < x < a \end{cases} \\ 13) & \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < a \\ u(x, b) = g(x) & , \quad 0 < x < a \end{cases} \\ 14) & \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a \quad , \quad y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & , \quad y > 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) < \infty \end{cases} \\ 15) & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = g(x) & , \quad 0 < x < l \end{cases} \\ 16) & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & , \quad 0 < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < +\infty \\ u_t(x, 0) = g(x) & , \quad 0 < x < +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

مقدار ویژه صفر را فراموش نکنید.