جبرخطی کاربردی

درس۶

فضاهای برداری و متعامد سازی

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸
مدرس: صدقی زاده

مروری بر مطالب،

- میدان و فضای برداری (Field and Vector Space)
- زیر فضای برداری (Vector Subspace)

فضای ستون های ماتریس
Column space

فضای پوچی ماتریس
Null space

- مفهوم اسپن (Span)
- استقلال و وابستگی خطی بردارها
- مفهوم پایه و بُعد در فضای برداری (Basis and Dimension)
- تغییر پایه در فضای برداری
- فضای گستره ماتریس (Range space)
- رتبه ماتریس (Rank)
- ارتباط رتبه و پوچی ماتریس (Rank and Nullity)

تغییر پایه در فضای برداری

می دانیم،

- در فضای برداری n بُعدی V هر مجموعه از n بردار مستقل خطی تشکیل یک پایه می دهد.

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \qquad \text{و} \qquad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$$

- برای فضای برداری V بردارهای پایه منحصر بفرد نیستند، ولی نمایش هر بردار توسط این بردارهای پایه منحصربفرد است.

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n \qquad \text{و} \qquad \mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

نشان می دهیم که،

- می توان ارتباط بین نمایش این پایه ها را در قالب یک ماتریس تبدیل نمایش داد.

تغییر پایه در فضای برداری

دو دسته بردار پایه برای فضای برداری V هستند $\rightarrow \left.\begin{matrix}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\end{matrix}\right\}$

برای $\mathbf{u} \in V$ داریم،

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}}$$

مثال۱

مجموعه بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ در فضای برداری $\Re^2$ تشکیل دو دسته پایه را می دهند.

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\qquad \text{و} \qquad \mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

لذا برای $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$ داریم،

$$\mathbf{u}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2 \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+(4)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=(4)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$$

حال می توان نوشت،

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad [\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2]\mathbf{b}=[\mathbf{v}_1\quad \mathbf{v}_2]\mathbf{c}\quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

تغییر پایه در فضای برداری

از طرفی می توان نوشت،

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=k_{11}\mathbf{v}_1+k_{12}\mathbf{v}_2+\cdots+k_{1n}\mathbf{v}_n\\ \mathbf{e}_2&=k_{21}\mathbf{v}_1+k_{22}\mathbf{v}_2+\cdots+k_{2n}\mathbf{v}_n\\ &\ \ \vdots\qquad\quad \vdots\\ \mathbf{e}_n&=k_{n1}\mathbf{v}_1+k_{n2}\mathbf{v}_2+\cdots+k_{nn}\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

با نمایش ماتریسی داریم،

$$[\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \cdots\quad \mathbf{e}_n]=[\mathbf{v}_1\quad \mathbf{v}_2\quad \cdots\quad \mathbf{v}_n]\underbrace{\begin{bmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{n1}\\ k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{n2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ k_{1n}&k_{2n}&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}}_{K}$$

$$\boxed{[\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \cdots\quad \mathbf{e}_n]=[\mathbf{v}_1\quad \mathbf{v}_2\quad \cdots\quad \mathbf{v}_n]K}$$

تغییر پایه در فضای برداری

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]K$$

و

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}$$

با جایگذاری داریم،

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]K\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c} \quad \rightarrow \quad K\mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{b} = K^{-1}\mathbf{c}$$

K ماتریس تبدیل ضرایب از پایه های $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ به $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ است.

K^{-1} ماتریس تبدیل ضرایب از پایه های $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ به $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ است.

- با استفاده از روش گوس- جردن می توان این ماتریس را بدست آورد،

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n | \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n] \quad \Rightarrow \quad [I|K]$$

مثال۲

مجموعه بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ در فضای برداری $\Re^3$ تشکیل دو دسته پایه را می دهند.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نمایش بردار $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ برحسب هر یک از دسته بردارهای پایه بصورت زیر می باشد،

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 = (10)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = (-2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ به پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بیابید.

برای این منظور این بار بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ می نویسیم،

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]K_1$$

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 | \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \quad \Rightarrow \quad [I | K_1]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \end{array}\right]$$

ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید،

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad K_1\mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ به پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بیابید.

برای این منظور هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ می نویسیم،

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]K_2$$

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 | \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] \quad \Rightarrow \quad [I | K_2]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

بنابراین ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید،

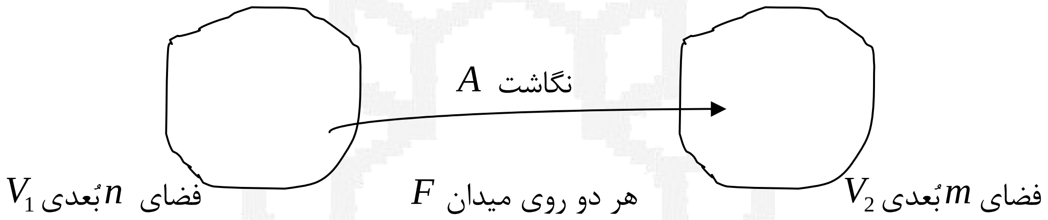
$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad K_2\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ بردارهای پایه استاندارد برای فضای برداری $\Re^3$ می باشند، بنابراین ستون های ماتریس تبدیل در این حالت همان بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ می باشند.

همانطور که مشاهده می شود $K_2 = (K_1)^{-1}$ می باشد.

مفهوم فضای گسترده در یک ماتریس (Range Space)

$$A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times1}=\mathbf{b}_{m\times1}$$



- فضای گسترده یک نگاشت خطی مانند A،

$$\boxed{R(A)=\left\{\mathbf{b}\in V_2 \;\middle|\; \exists\mathbf{x}\in V_1 \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\}}$$

- $R(A)$ توسط ستون های ماتریس A اسپن می شود و یک زیر فضا از فضای m بعدی V_2 است.
- بُعد $R(A)$ برابر با ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی در $R(A)$ می باشد.

مثال ۳

فضای گسترده ماتریس زیر را بدست آورید،

$$A_{4\times5}=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\1&4&-7&3&-2\\1&5&-9&5&-9\\0&3&-6&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

می دانیم فضای گسترده ماتریس A کلیه ترکیبهای خطی ممکن کلیه ستون های A است. از آنجائیکه ستون های سوم و پنجم به ستون های اول، دوم و چهارم وابسته می باشند، لذا $R(A)$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\5\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\end{bmatrix}\right\}\rightarrow\dim[R(A)]=3$$

به عبارتی $R(A)$ برابر است با تمامی ترکیبهای خطی ستون های اول، دوم و چهارم ماتریس A. همچنین اگر فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست آوریم، با توجه به محل عناصر محوری می توان فهمید که ستون های اول، دوم و چهارم مستقل خطی هستند.

با استفاده از دستور [R,p]=rref(A) در نرم فزار MATLAB داریم،

```
A =[1 3 -5 1 5;1 4 -7 3 -2;1 5 -9 5 -9;0 3 -6 2 -1];
[R,p]= rref(A)
R =
     1     0     1     0     1
     0     1    -2     0     3
     0     0     0     1    -5
     0     0     0     0     0
p =
     1     2     4
```


مفهوم رتبه یک ماتریس (Rank)

- رتبه یک ماتریس A برابر با ماکزیمم تعداد ستون های (یا سطرهای) مستقل خطی در آن ماتریس است.

$$\boxed{\text{rank}(A)}$$

$A_{n\times n}$ غیر منفرد $\rightarrow |A| \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rank}(A) = n \rightarrow$ رتبه کامل (full rank)

$$A_{m\times n} \rightarrow \begin{cases} \text{rank}(A) = \min(m,n) \rightarrow & \text{رتبه کامل (full rank)} \\ \text{rank}(A) < \min(m,n) \rightarrow & \text{نقص رتبه (rank deficiency)} \end{cases}$$

- رتبه یک ماتریس معادل با بُعد فضای گستره آن ماتریس است. $\boxed{\dim[R(A)] = \text{rank}(A)}$

- دستور rank(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

مثال۴

رتبه ماتریس های زیر را بدست آورید،

$$A_{4\times5}=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\1&4&-7&3&-2\\1&5&-9&5&-9\\0&3&-6&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری می فهمیم که ستون های اول، دوم و چهارم مستقل خطی هستند و چون ماتریس A سه ستون مستقل خطی دارد، لذا $\operatorname{rank}(A)=3$ است و ماتریس A نقص رتبه دارد.

$$B_{4\times3}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&-8\\4&-3&-7\\1&12&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری، ستون های اول، دوم و سوم مستقل خطی هستند و چون ماتریس B سه ستون مستقل خطی دارد، لذا $\operatorname{rank}(B)=3$ است و ماتریس B رتبه کامل دارد.

مسئله وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی جبری

- $R(A)$ زیرفضایی است که توسط ستون های ماتریس A اسپن می شود.

- اگر $\mathbf{b}\in R(A)$ می توان $\mathbf{b}$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های A نوشت،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

در چنین حالتی افزودن ستون بردار $\mathbf{b}$ به ستون های ماتریس A رتبه آن را تغییر نخواهد داد.

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=n$$

مسئله وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی جبری

$$A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}$$

اگر $\operatorname{rank}(A)\neq\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})\rightarrow\mathbf{b}\notin R(A)\Rightarrow$ سیستم ناسازگار و دستگاه جواب ندارد

اگر $\underbrace{\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})\rightarrow\mathbf{b}\in R(A)}$

$\Downarrow$

سیستم سازگار و دستگاه جواب دارد

$N(A)$ تهی → یک جواب منحصر بفرد

$N(A)$ تهی نیست → بیشمار جواب

مثال ۵

وجود یا عدم وجود جواب را برای دستگاه معادلات زیر بررسی نمایید.

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=2\\2x_1+x_2+x_3-x_4=4\\5x_1+4x_2+x_3-x_4=9\end{cases}\rightarrow\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&1&1&-1\\5&4&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\9\end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A)=2,\quad \operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3\quad\rightarrow$ دستگاه جواب ندارد

$$\begin{cases}-x_1+2x_2+4x_3=2\\x_1+2x_2+x_3=1\\3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}\rightarrow\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&4\\1&2&1\\3&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3\quad\rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\x_1+2x_2+2x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=6\end{cases}\rightarrow\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=2\quad\rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد

مفهوم فضای پوچی در یک ماتریس (Kernel یا Null Space)

- فضای پوچی یک نگاشت خطی مانند A ،

$$\boxed{N(A)=\{\mathbf{x}\in V_1 \to A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}}$$

$$\boxed{\dim[N(A)]=\nu(A)} \quad \to \quad \text{(nullity)}$$ پوچی

- فضای پوچی مجموعه تمامی پاسخهای غیر صفر معادله همگن $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است.
- اگر تنها پاسخ معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ همان پاسخ بدیهی صفر باشد، رتبه ماتریس A کامل است.
- فضای پوچی، یک زیر فضا از فضای n بُعدی V_1 است.

$$\boxed{\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n}$$

- دستور null(A) و null(A,’r’) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

مثال ۶

ماتریس A را در نظر بگیرید، فضای پوچی و پوچی آن را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\1&4&-7&3&-2\\1&5&-9&5&-9\\0&3&-6&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

همانطور که گفته شد رتبه این ماتریس برابر ۳ می باشد. از معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ می توان نوشت،

$$A\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\4\\5\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-5\\-7\\-9\\-6\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}5\\-2\\-9\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3+x_4\mathbf{u}_4+x_5\mathbf{u}_5=\mathbf{0}$$

از آنجائیکه بردارهای مربوط به ستون های سوم و پنجم وابسته خطی هستند، می توان آنها را بصورت یک ترکیب خطی از سه بردار ستونی دیگر نوشت،

$$\mathbf{u}_3=(1)\mathbf{u}_1+(-2)\mathbf{u}_2+(0)\mathbf{u}_4 \quad , \quad \mathbf{u}_5=(1)\mathbf{u}_1+(3)\mathbf{u}_2+(-5)\mathbf{u}_4$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می آیند،

$$A\mathbf{x}=(x_1+x_3+x_5)\mathbf{u}_1+(x_2\text{-}2x_3+3x_5)\mathbf{u}_2+(x_4\text{-}5x_5)\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

چون بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4$ مستقل خطی هستند، می توان نوشت،

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 \text{-} 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 \text{-} 5x_5 = 0 \end{cases}$$

باید توجه کرد که تعداد این معادلات برابر با رتبه ماتریس A می باشد. هر بردار $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ که سه معادله بالا را برآورده سازد یک بردار متعلق به فضای پوچی ماتریس A خواهد بود. تعداد بردارهایی که بدین ترتیب می توان انتخاب کرد نامحدود است، لیکن تعداد بردارهای مستقل خطی برابر با بُعد فضای پوچی می باشد. بطور مثال دو بردار زیر مستقل خطی هستند و سه معادله بالا را برآورده می کنند،

$$N(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-2}{5} \\ -3 \\ \frac{-3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-3}{5} \\ -2 \\ \frac{-2}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

بنابراین هر پاسخ معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ باید به اسپن این دو بردار تعلق داشته باشد، به عبارتی، این دو بردار یک پایه برای $N(A)$ تشکیل می دهند و $\text{nullity}(A) = 2$ می باشد.

با استفاده از دستور null(A) و null(A,’r’) در نرم فزار MATLAB داریم،

```
A =[1 3 -5 1 5;1 4 -7 3 -2;1 5 -9 5 -9;0 3 -6 2 -1];
null(A)
ans =
   -0.5050    0.1313
    0.6504    0.5473
    0.4331    0.0307
    0.3596   -0.8100
    0.0719   -0.1620
null(A, 'r')
ans =
   -1   -1
    2   -3
    1    0
    0    5
    0    1
```