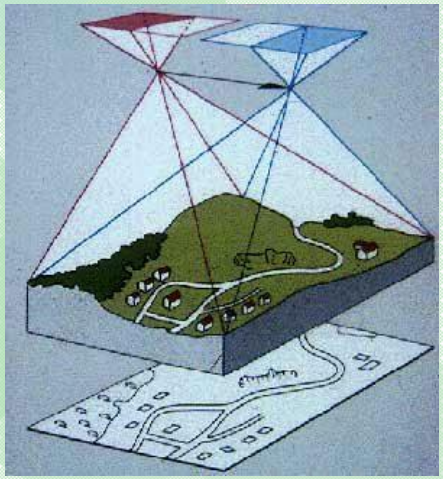
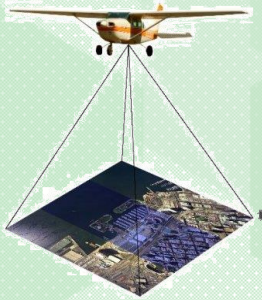
فتوگرامتری تحلیلی

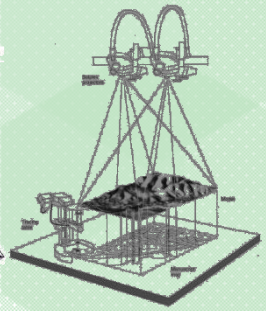
فصل اول:
مروری بر جبر خطی و ماتریسها

حبدر راستی ویس

October 14





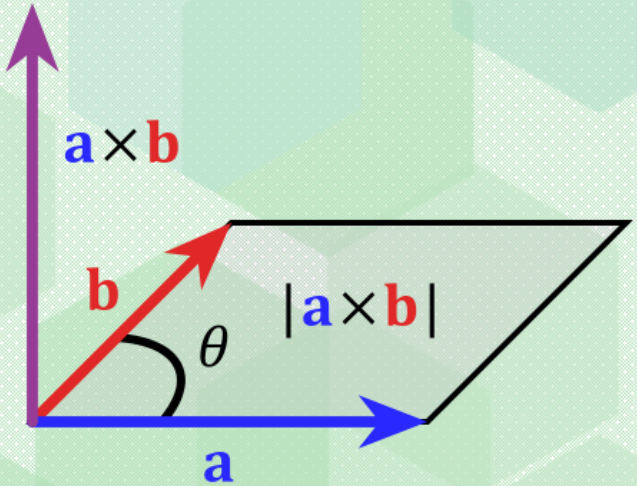


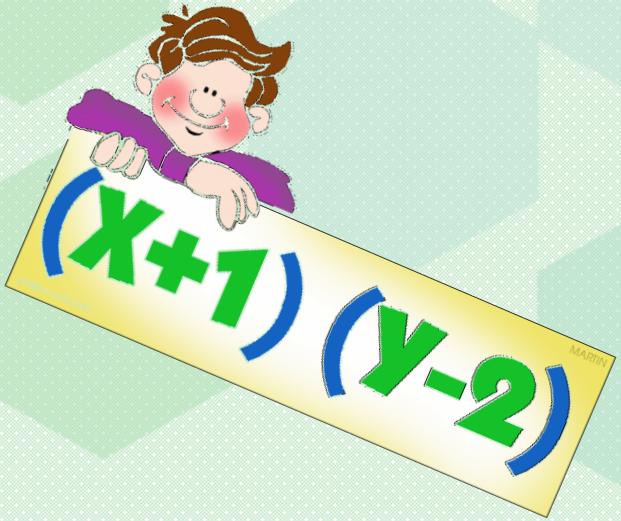
فهرست مطالب

- مقدمه
- بردارها
- ماتریسها

مقدمه

- مفاهیم مربوط به جبر خطی و ماتریسها

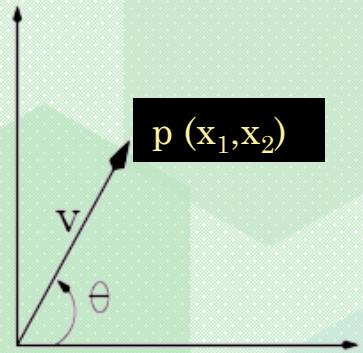




$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

بردارها

- **بردار دوبعدی**
  - به صورت یک خط در فضای دوبعدی نمایش داده میشود.

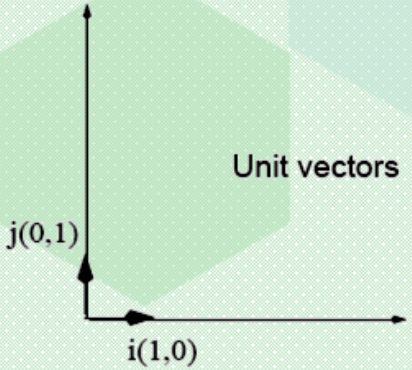


representation: $v = (x_1, x_2)$

magnitude: $\|v\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}$

direction: $\theta = \tan^{-1}(x_2/x_1)$

- **بردارهای یکه**
  - هر بردار با بزرگی 1



$$\boldsymbol{i} = (1, 0), \quad \boldsymbol{j} = (0, 1)$$

بردارها

- نرمالسازی بردارها

$$v = (2, 5), \|v\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$\bar{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{x_1}{\|v\|}, \frac{x_2}{\|v\|}\right)$$

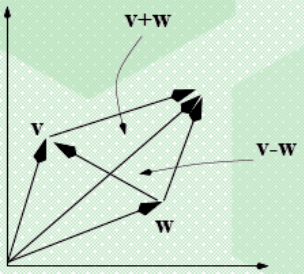
$$\bar{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

- محاسبات برداری
  - جمع
  - تفریق
  - ضرب اسکالر

$$v + w = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$v - w = (v_1, v_2) - (w_1, w_2) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$$

$$av = (av_1, av_2)$$



بردارها

- بردار n–بعدی

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- ترانهاده یک بردار

$$v^T = [\, x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n \,]$$

- ضرب داخلی(اسکالر)

$$v.w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$v.w = [\, x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n \,] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = v^T w$$

بردارها

- تعریف بزرگی

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

- تعریف dot product

$$v.v = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

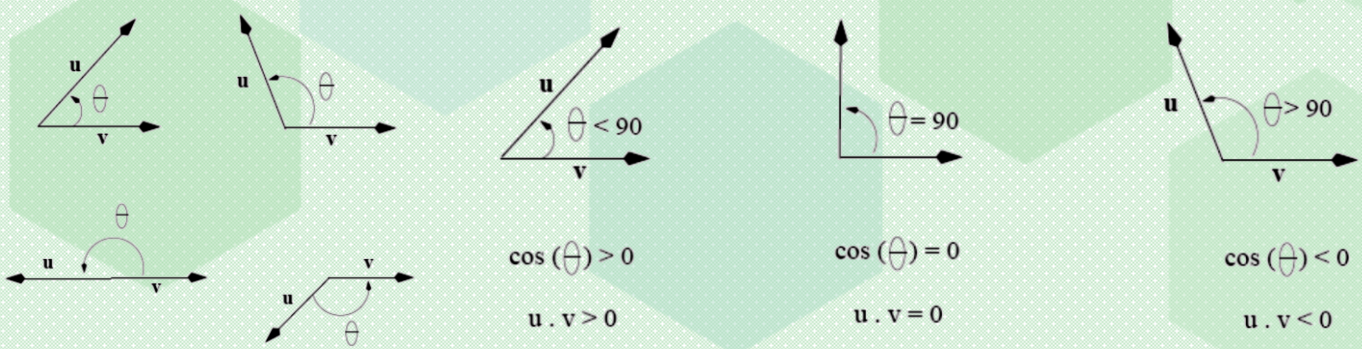
- بنابراین:

$$\|v\|^2 = v.v \;\; or \;\; \|v\| = \sqrt{v.v} = \sqrt{v^T v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- تعریف هندسی dot product

$$u.v = \|u\| \, \|v\| \, cos(\theta), \; 0 \le \theta \le \pi$$

- علامت u.v



بردارها

- ضرب خارجی

$$wv^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} [\, x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n \,] = \begin{bmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & \dots & y_1 x_n \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & \dots & y_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n x_1 & y_n x_2 & \dots & y_n x_n \end{bmatrix}$$

- تذکر: حاصل ضرب داخلی یک عدد(اسکالر) است و حاصل ضرب خارجی یک ماتریس

بردارها

- مجموعه بردار ارتوگونال

$$x_i^T x_j = \begin{cases} \mathrm{k} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

- مجموعه بردار ارتونرمال

$$x_i^T x_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

بردارها

- **ترکیب خطی بردارها**
  - بردار V ترکیب خطی از بردارهای $v_1, \ldots, v_k$ میباشد. که $c_1, \ldots, c_k$ عدد میباشند.

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$$

- **مثال**

$$v = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

- **وابستگی خطی**
  - مجموعه بردار $v_1, \ldots, v_k$ وابسته خطی هستند اگر حداقل یکی از بردارها را بتوان بصورت ترکیب خطی از سایر بردارها نوشت.

$$v_j = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$$

بردارها

- استقلال خطی
  - مجموعه بردار $v_1, \ldots, v_k$ مستقل خطی هستند در صورتی که:

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = 0$ منجرشود به → $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$

مثال:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Let } c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0, \text{ then} \begin{bmatrix} -c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \\ -c_1 + (-c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This can only be true if $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

بردارها

- **تعبیر هندسی استقلال خطی:**
  - در فضای R^2دو بردار مستقل خطی هستند در صورتی که روی یک خط قرار نگیرند.
  - در فضای R^3سه بردار مستقل خطی هستند در صورتی که روی یک صفحه قرار نگیرند.

- **بردارهای پایه:**

R^2	R^3	R^n
$i = (1, 0),\ j = (0, 1)$	$i = (1, 0, 0),\ j = (0, 1, 0),\ k = (0, 0, 1)$	$(1,0,\ldots,0)\ (0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,\ldots,1)$

ماتریسها

- جمع و تفریق ماتریس
  - دو ماتریس باید هم اندازه باشند

- ضرب ماتریسها

m x n q x p m x p

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{q1} & b_{q2} & . & b_{qp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mp} \end{bmatrix}$$

<u>Condition: n = q</u>

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

ماتریسها

- خصوصیات ضرب ماتریسها

$$A(B+C) = AB + AC \text{ (distributive law)}$$

$$AB \neq BA$$

- ضرب در ماتریس یکه

$$AI = IA = A, \text{ where } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریسها

- ترانهاده ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}, A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Property: $(AB)^T=B^T A^T$

- ماتریس متقارن

$$A=A^T \ (a_{ij}=a_{ji}) \qquad \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 5 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

ماتریسها

- دترمینان

2 x 2 $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

3 x 3 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

n x n $$det(A)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+k}a_{jk}det(A_{jk}),\ \text{for any } k\text{: } 1\le k\le m$$

- خصوصیات

$$det(AB)=det(A)det(B)$$

$$det(A+B)\neq det(A)+det(B)$$

- دترمینان ماتریس قطری

$$\text{If } A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{nn} \end{bmatrix},\ \text{then } det(A)=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

ماتریسها

- **معکوس ماتریس**
  - ماتریس معکوس A^{-1} دارای خاصیت زیر است:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

  - A^{-1} موجود است در صورتیکه:

$$det(A) \neq 0$$

  - ماتریس سینگولار ماتریسی است که A^{-1} وجود ندارد.
  - ماتریس ill-conditioned ماتریسی است که نزدیک به سینگولار شدن است.
  - خصوصیات معکوس ماتریس

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

ماتریسها

- شبه معکوس
  - ماتریس شبه معکوس A^+ به صورت زیر تعریف میشود:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

  - میتوان نشان داد:

$$A^+ A = I \quad \text{(provided that } (A^T A)^{-1} \text{ exists)}$$

- تریس یک ماتریس

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

  - خصوصیات

$$tr(A^T) = tr(A)$$

$$tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$\text{(in general, } tr(AB) \neq tr(A)tr(B))$$

ماتریسها

- رنک یک ماتریس
  - میتوان به صورت بعد بزرگترین مربع داخل یک ماتریس با دترمینان غیر صفر تعریف کرد:
    - مثلا ماتریس روبرو دارای رنک 3 است

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 14 \\ 3 & 9 & 6 & 21 \\ 8 & 10 & 7 & 28 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \quad det(A) = 0, \text{ but } det(\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 8 & 10 & 7 \end{bmatrix}) = 63 \neq 0$$

  - تعریف دوم: بیشترین تعداد سطرها (ویا ستونها) ی مستقل خطی

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

  - مثال:
    - پس میتوان گفت رنک این ماتریس 4 نیست.

$$1\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ 28 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

ماتریسها

- رنک و سینگولاریتی

If A is nxn, $rank(A) = n$ iff A is nonsingular (i.e., invertible).

If A is nxn, $rank(A) = n$ iff $det(A) \neq 0$ (**full rank**).

If A is nxn, $rank(A) < n$ iff A is singular

ماتریسها

- ماتریس ارتوگونال

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{array}{c} u_1^T = [a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}] \\ u_2^T = [a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n}] \\ \cdots \\ u_m^T = [a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn}] \end{array} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \cdots \\ u_m^T \end{bmatrix}$$

- A ارتوگونال است اگر:

$$u_j . u_k = 0, \text{ for every } j \neq k \ (u_j \text{ is perpendicular to } u_k)$$

- مثال:

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

ماتریسها

- ماتریس ارتونرمال
  - A ارتونرمال است اگر:

(1) $u_k . u_k = 1$ or $\|u_k\| = 1$, for every k

(2) $u_j . u_k = 0$, for every $j \neq k$ (u_j is perpendicular to u_k)

- اگر A ارتونرمال باشد محاسبه معکوس آسان است.

$$AA^T = A^T A = I \quad (\text{i.e., } A^{-1} = A^T)$$

- همچنین ضرب این ماتریس در یک بردار، بزرگی بردار را تغییر نمیدهد

$$\|Av\| = \|v\| \text{ (does not change the magnitude of } v\text{)}$$

ماتریسها

- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
  - بردار v یک بردار ویژه ماتریس A و λ مقدار ویژه ماتریس A میباشند در صورتیکه:
    - (با فرض صفر نبودن ماتریس v)

$$Av = \lambda v$$

  - تفسیر: تبدیل خطی ماتریس A بر روی بردار v جهت آن را تغییر نمیدهد و فقط بزرگی آن را تغییر میدهد.
  - محاسبه مقدار ویژه:
    - مثال

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad det(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{bmatrix}) = 0 \text{ or } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ or } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad Av = \lambda v$$

ماتریسها

- خصوصیات مقادبر ویژه:
  - تنها برای ماتریسهای مربعی تعریف میشوند.
  - اگر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس **A** باشند:

(1) $\sum_i \lambda_i = tr(A)$

(2) $\prod_i \lambda_i = det(A)$

(3) if $\lambda = 0$ is an eigenvalue, then the matrix is not invertible

(4) A and A^2 have the same eigenvectors

(5) if λ is an eigenvalue of A, then λ^2 is an eigenvalue of A^2

جمعبندی

- مروری بر مفهوم بردار
- خصوصیات بردارها و تعاریف
- مروری بر مفهوم ماتریسها
- عملهای حسابی مختلف بر روی ماتریسها
- خصوصیات و برخی تعاریف در مورد ماتریسها