

انتگرال دو متغیره

معادلات پارامتری

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

مساحت ناحیه محدود به منحنی $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ در صفحه مختصات کدام است؟

(۱) 1 $\frac{1}{2}$ (۲)

(۳) 2 $\frac{3}{2}$ (۴)

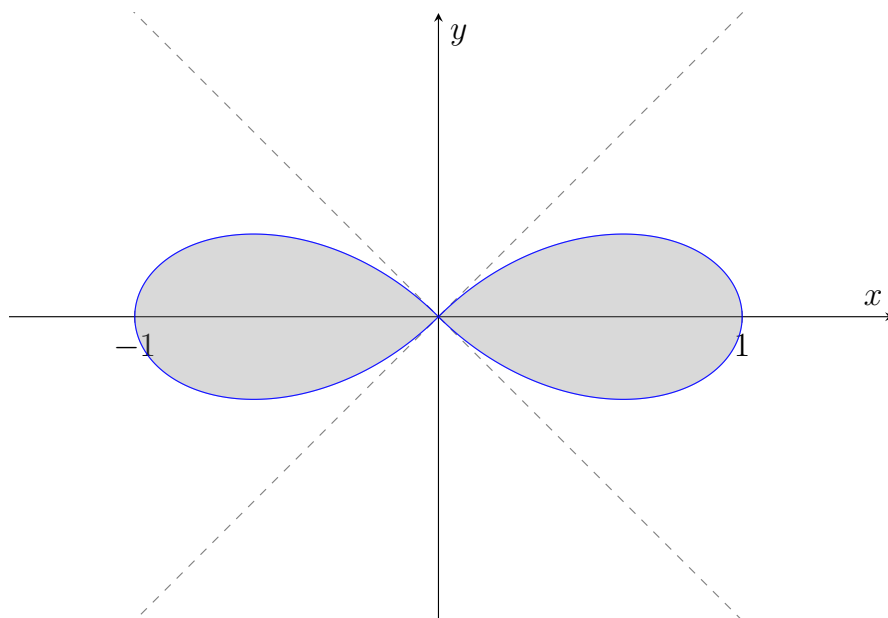
۲ روش حل مسئله

پاسخ: با توجه به رابطه ارائه شده، استفاده از مختصات قطبی توصیه می‌گردد. در مختصات قطبی

$x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ است. در نتیجه رابطه به صورت زیر خواهد شد:

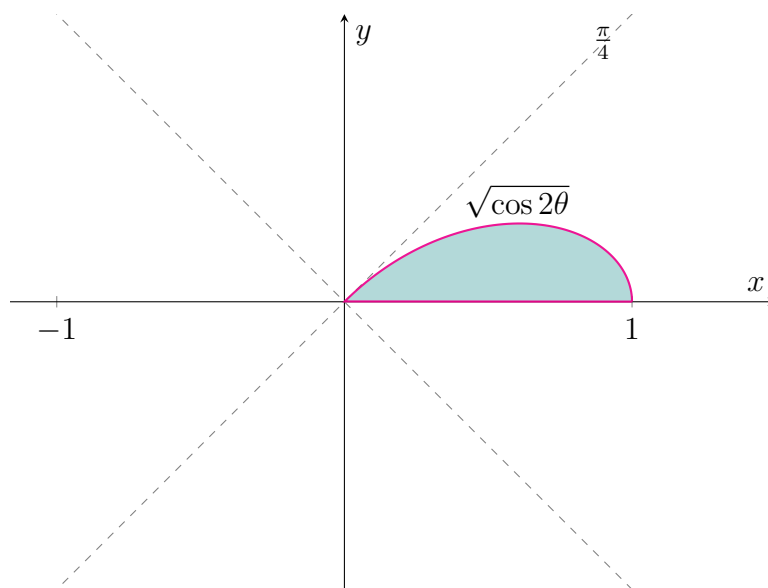
$$(r^2)^2 = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta, \Rightarrow r^2 = \cos 2\theta$$

زاویه این رابطه پارامتری با توجه به اینکه سمت چپ همواره مثبت است، باید در بازه $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ باشد. اگر θ در مرز باشد مقدار شعاع صفر و اگر $\theta = 0$ باشد، مقدار شعاع واحد است. از طرفی زاویه مورد بحث می‌تواند در بازه $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ هم باشد. تحلیل مربوط به طول شعاع را برای این بازه هم می‌توان داشت. یک شکل کلی از این نمودار به صورت زیر است.



برای تعیین مساحت می‌توان مساحت بخشی از منحنی در ناحیه اول مثلثاتی را محاسبه و سپس جواب را چهار برابر کرد. عنصر دیفرانسیل در مختصات قطبی $r dr d\theta$ است. بازه زاویه مورد انتگرال در ناحیه اول

مثلاثی از 0 تا $\frac{\pi}{4}$ و شعاع از 0 تا $\sqrt{\cos 2\theta}$ تغییر می کند. این ناحیه در شکل زیر نمایش داده شده است.



$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

گزینه ۱ صحیح است.

شکست خوردن تلخ است، اما تلاش
نکردن برای موفقیت بدتر است.
تئودور روزولت



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com