مسائل فصل ٦

۱- فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع زیر باشد در هر یک از موارد زیر فاصله اطمینان با دمهای برابر ، کوتاهترین فاصله اطمینان و فاصله اطمینان نااریب $100(1-\alpha)\%$ را برای پارامتر θبدست آورید .

$i) N(\theta,\theta) \qquad \theta>0$

توجه داشته باشید که در روابط زیر داریم :

$$f_\theta(x)=\chi^2_{(n-1)} \qquad\qquad Q=\frac{(n-1)S^2}{\theta} \quad \chi^2_{(n-1)}$$

فاصله اطمینان بادمهای برابر

$$1-\alpha=p(\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}<\frac{(n-1)S^2}{\theta}<\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})})$$

$$p(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}<\theta<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}})$$

بنابراین فاصله به صورت زیر است

$$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}})$$

کوتاهترین فاصله اطمینان

$$1-\alpha=p(a<\frac{(n-1)S^2}{\theta}<b)=p(\frac{(n-1)S^2}{b}<\theta<\frac{(n-1)S^2}{a})$$

طول فاصله$\rightarrow$ $L=(n-1)S^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

که شرط جانبی برای مینیمم کردن L به صورت زیر است

$$\int_a^b f_\theta(x)dx=1-\alpha \xrightarrow[\partial a]{\partial} \frac{\partial b}{\partial a}f_\theta(b)-f_\theta(a)=0 \Rightarrow \frac{f_\theta(b)}{f_\theta(a)}=\frac{\partial b}{\partial a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a}=0 \Rightarrow (-\frac{1}{a^2}+\frac{\partial b}{\partial a}\frac{1}{b^2})=0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)}$$

بنابراین aو b را طوری باید انتخاب کرد که همزمان در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(x)dx = 1-\alpha \\ a^2 f_\theta(a) = b^2 f_\theta(b) \end{cases}$$

فاصله اطمینان نا اریب :

$$p(\frac{(n-1)S^2}{b} < \theta < \frac{(n-1)S^2}{a}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow p(\frac{(n-1)S^2}{b} < \theta' < \frac{(n-1)S^2}{a}) = p(a < \frac{(n-1)S^2}{\theta'} < b) = p(a < \frac{(n-1)S^2}{\theta'}\frac{\theta}{\theta'} < b) = p(a\lambda < Q < b\lambda)$$

که $\lambda = \frac{\theta'}{\theta}$ بنابراین داریم

$$H(1) = 1-\alpha$$

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial(\lambda)}\Big|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow bf_\theta(b) = af_\theta(a)$$

بنابراین a و b باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(x)dx = 1-\alpha \\ a^2 f_\theta(a) = b^2 f_\theta(b) \end{cases}$$

توجه داشته باشید که هر سه فاصله با هم متفاوت هستند

$$ii) N(\theta,\theta^2) \quad \theta > 0$$

چون آماره بسنده برای θ ، $(\sum X_i^2, \sum X_i)$است پس کمیت محوری را به صورت تابعی از آن در نظر می گیریم

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\theta^2} = \frac{n-1}{n\theta^2}(\sum X_i^2, \sum X_i) \quad \chi^2_{(n-1)}$$

فاصله اطمینان بادمهای برابر

$$p(\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} < \frac{(n-1)S^2}{\theta^2} < \chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}} < \frac{(n-1)S^2}{\theta^2} < s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}}) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان بادمهای برابر به صورت زیر است

$$(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}} < \theta < s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}})$$

فاصله اطمینان بادمهای برابر

$$p=(a<\frac{(n-1)S^2}{\theta^2}<b)=1-\alpha \Rightarrow p(s\sqrt{\frac{n-1}{b}}<\theta<s\sqrt{\frac{n-1}{a}})$$

پس طول فاطله به صورت زیر است

$$L=s\sqrt{n-1}(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}})$$

حال شرط جانبی برای مینیمم کردن L به صورت زیر است

$$\int_a^b f_\theta(x)dx=1-\alpha$$

که از این رابطه نتیجه می شود

$$\frac{\partial b}{\partial a}f_\theta(b)=f_\theta(a) \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a}=\frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)}$$

دقت کنید که در این رابطه $f_\theta(x)$ تابع چگالی $\chi^2{}_{(n-1)}$ است

از طول فاصله اطمینان داریم

$$\frac{\partial L}{\partial a}=0 \Rightarrow (-\frac{1}{2}\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial a}\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}})=0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a}=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

پس نتیجه می شود که a و b باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} a^{\frac{3}{2}}f_\theta(a)=b^{\frac{3}{2}}f_\theta(b) \\ \int_a^b f_\theta(x)dx=1-\alpha \end{cases}$$

فاصله اطمینان نااریب

$$p(s\sqrt{\frac{n-1}{b}}<\theta<s\sqrt{\frac{n-1}{a}})=1-\alpha$$

حال داریم

$$H(\lambda)=p(s\sqrt{\frac{n-1}{b}}<\theta'<s\sqrt{\frac{n-1}{a}})=p(a<\frac{(n-1)S^2}{\theta^2}<b)$$

$$p(a<\frac{\theta^2}{\theta'^2}\frac{(n-1)S^2}{\theta^2}<b)=p(a\lambda<Q<b\lambda)$$

که در این رابطه $\lambda=\frac{\theta'^2}{\theta^2}$ است حال باید داشته باشیم

$$H(1)=1-\alpha$$
$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=1}=0 \Rightarrow bf_\theta(b)=af_\theta(a)$$

پس a و b باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(x)dx = 1-\alpha \\ af_\theta(a) = bf_\theta(b) \end{cases}$$

این بار همان مراحل را با کمیت محوری زیر انجام می دهیم

$$Q = \sqrt{n}(\frac{\bar{x}-\theta}{\theta}) = \sqrt{n}(\frac{\bar{x}}{\theta}-1) \quad N(0,1)$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$p(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}(\frac{\bar{x}}{\theta}-1) < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$p(\frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{\sqrt{n}\bar{x}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{\sqrt{n}\bar{x}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

$$p(\frac{\sqrt{n}\bar{x}}{\sqrt{n}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \theta < \frac{\sqrt{n}\bar{x}}{\sqrt{n}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}})$$

$$(\frac{\sqrt{n}\bar{x}}{\sqrt{n}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{\sqrt{n}\bar{x}}{\sqrt{n}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}})$$

کوتاهترین فاصله اطمینان:

کمیت محوری را به صورت زیر می گیریم

$$\frac{\sqrt{n}\bar{x}}{\theta} \quad N(1,1) \Rightarrow p(a < \frac{\sqrt{n}\bar{x}}{\theta} < b) = 1-\alpha$$

$$(\frac{\sqrt{n}\bar{x}}{b} < \theta < \frac{\sqrt{n}\bar{x}}{a})$$

پس طول فاصله به صورت زیر است

$$L = \sqrt{n}\bar{x}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$$

و شرط جانبی به صورت زیر است

$$\int_a^b f_\theta(x)dx = 1-\alpha \Rightarrow f_\theta(x) \quad N(0,1)$$

$$\frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)} = \frac{\partial b}{\partial a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \Rightarrow (-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a} = \frac{b^2}{a^2}$$

پس a و b باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(x)dx = 1-\alpha \\ a^2 f_\theta(a) = b^2 f_\theta(b) \end{cases}$$

فاصله اطمینان نا اریب

$$Q = (\frac{\sqrt{n}\overline{x}}{\theta}) \quad N(0,1) = f_\theta(x)$$

$$H(\lambda) = (\frac{\sqrt{n}\overline{x}}{b} < \theta' < \frac{\sqrt{n}\overline{x}}{a}) = (a < \frac{\sqrt{n}\overline{x}}{\theta'} < b) = (a < \frac{\sqrt{n}\overline{x}}{\theta}\frac{\theta}{\theta'} < b) = p(a\lambda < \frac{\sqrt{n}\overline{x}}{\theta} < b\lambda)$$

$$\lambda = \frac{\theta'}{\theta}$$

$$H(1) = 1 - \alpha$$

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow bf_\theta(b) = af_\theta(a)$$

پس a و b باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(x)dx = 1-\alpha \\ bf_\theta(b) = af_\theta(a) \end{cases}$$

$iii) u(0,\theta) \qquad \theta > 0$

چون $x_{(n)}$ آماره بسنده است کمیت محوری را به صورت تابعی از $x_{(n)}$ انتخاب می کنیم

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$Q = -2n\ln\frac{x_{(n)}}{\theta} \quad \chi^2_{(2)}$$

$$p(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})} < -2n\ln\frac{x_{(n)}}{\theta} < \chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(\frac{-1}{2n}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})} < \ln\frac{x_{(n)}}{\theta} < \frac{-1}{2n}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})})$$

$$p(x_{(n)}\exp\{\frac{-1}{2n}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\} < \theta < x_{(n)}\exp\{\frac{-1}{2n}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\}) = 1-\alpha$$

پس فاصله به صورت زیر است

$$(x_{(n)}\exp\{\frac{-1}{2n}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\}, x_{(n)}\exp\{\frac{-1}{2n}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\})$$

فاصله اطمینان با کوتاه ترین طول

این قسمت در مثال ۶-۱۴ حل شده است

فاصله اطمینان نااریب

این قسمت در مثال ۶-۲۲ حل شده است

$iv) Beta(\theta,1) \qquad \theta>0$

کمیت محوری باید به صورت تابعی از آماره بسنده یعنی $\sum \ln x_i$ باشد

$$Q=-2\theta\sum \ln x_i \qquad \chi^2_{(2n)}=f_\theta(x)$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$p(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}<-2\theta\sum \ln x_i<\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha$$

$$p(-\frac{1}{2\theta\sum \ln x_i}\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}<\theta<-\frac{1}{2\theta\sum \ln x_i}\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha$$

پس فاصله به صورت زیر است

$$(-\frac{1}{2\theta\sum \ln x_i}\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})},-\frac{1}{2\theta\sum \ln x_i}\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})$$

کوتاهترین فاصله اطمینان

$$p(a<-2\theta\sum \ln x_i<b)=1-\alpha$$

$$p(\frac{-1}{2\sum \ln x_i}a<\theta<\frac{-1}{2\sum \ln x_i}b)=1-\alpha$$

پس طول فاصله به صورت زیر است

$$L=\frac{-1}{2\sum \ln x_i}(b-a)$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial L}{\partial a}=0\Rightarrow 1=\dfrac{\partial b}{\partial a}\\ \int_a^b f_\theta(x)=1-\alpha\Rightarrow\dfrac{\partial b}{\partial a}=\dfrac{f_\theta(b)}{f_\theta(a)}\end{array}\right\}\Rightarrow f_\theta(a)=f_\theta(b)$$

پس a و b باید در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{cases}\int_a^b f_\theta(x)=1-\alpha\\ f_\theta(a)=f_\theta(b)\end{cases}$$

حال اگر برای کوتاه ترین فاصله کمیت محوری را به صورت زیر تعریف می کنیم داریم

$$u=-2n\theta\ln x_{(n)} \qquad \Gamma(1,\frac{1}{2})=\chi^2_{(2)}$$

$$p(a<-2n\theta\ln x_{(n)}<b)=p(\frac{a}{-2n\ln x_{(n)}}<\theta<\frac{b}{-2n\ln x_{(n)}})=1-\alpha$$

$$L=\frac{a-b}{-2n\ln x_{(n)}}$$

$$\int_a^b\frac{1}{2}e^{\frac{-u}{2}}du=e^{\frac{-a}{2}}-e^{\frac{-b}{2}}=1-\alpha \qquad 0\le a<b<\infty \qquad (*)$$

$$0 \le a < -2\ln(1-\alpha) \qquad\qquad -2\ln(\alpha) \le b < \infty$$

حال از رابطه (*) داریم

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{-a}{2}} + \frac{\partial b}{\partial a}\frac{1}{2}e^{\frac{-b}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a} = \frac{e^{\frac{-a}{2}}}{e^{\frac{-b}{2}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{2n\ln x_{(n)}}(1-\frac{\partial b}{\partial a}) = \frac{1}{-2n\ln x_{(n)}}(\frac{-e^{\frac{-b}{2}} + e^{\frac{-a}{2}}}{e^{\frac{-b}{2}}}) > 0$$

بنابراین L نسبت به a یک تابع صعودی است پس $a=0$

$$1 - -e^{\frac{-b}{2}} = 1-\alpha \Rightarrow b = -2\ln\alpha = \chi^2_{2,1-\alpha}$$

$$(0, \frac{\chi^2_{2,1-\alpha}}{-2n\ln x_{(n)}})$$

فاصله اطمینان ناریب براساس کمیت محوری $Q = -2\theta\sum \ln x_i$

$$H(\lambda) = p(-\frac{b}{2\sum \ln x_i} < \theta' < \frac{-a}{2\sum \ln x_i})$$

$$H(\lambda) = p(a < -2\theta'\sum \ln x_i < b) = p(a < -2\frac{\theta'}{\theta}\theta\sum \ln x_i < b)$$

$$p(a\lambda < -2\theta\sum \ln x_i < b\lambda) \qquad\qquad \lambda = \frac{\theta'}{\theta}$$

$$H(1) = 1-\alpha$$

$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial(\lambda)}|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow bf_\theta(b) = abf_\theta(a)$ پس a و b در شرایط زیر صدق می کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(x) = 1-\alpha \\ bf_\theta(b) = abf_\theta(a) \end{cases}$$

$v)Beta(1,\theta)$

کمیت محوری زیر را به صورت تابعی از آماره بسنده یعنی به صورت زیر است

$$Q = -2\theta\sum \ln(1-x_i) \qquad \chi^2_{(2n)}$$

براساس این کمیت محوری به سادگی مانند قسمت (iv) مسأله حل می شود

$$vi)u(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}) \qquad\qquad \theta \in$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

آماره بسنده $(x_{(1)}, x_{(n)})$ است پس کمیت محوری را به صورت زیر تابعی از آماره بسنده می گیریم

$$Q = -2n\ln(x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2}) \qquad \chi^2_2$$

$$p(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})} < -2n\ln(x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2}) < \chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(x_{(n)} + \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}} < \theta < x_{(n)} + \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}) = 1-\alpha$$

پس فاصله به صورت زیر است

$$p(x_{(n)} + \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}, x_{(n)} + \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}})$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

$$Q = x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2} \quad Beta(n,1) = f_\theta(x)$$

$$p(a < x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2} < b) = 1-\alpha \Rightarrow p(-b + x_{(n)} + \frac{1}{2} < \theta < x_{(n)} + \frac{1}{2} - a) = 1-\alpha$$

طول فاصله به صورت $L = b - a$ است

شرط جانبی برای مینیمم کردن L به صورت زیر است

$$\int_a^b f_\theta(x) = 1-\alpha \Rightarrow b^n - a^n = 1-\alpha \Rightarrow nb^{n-1} - \frac{\partial b}{\partial a} na^{n-1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$$

$$(1-\alpha)^{\frac{1}{n}} \le b < 1 \qquad\qquad 0 \le a < \alpha^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 1 - \frac{\partial a}{\partial b} = 1 - \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a^{n-1}} < 0$$

پس L نسبت به b نزولی است پس حداکثر مقدار خود یعنی ۱ را می گیرد

$$1 - a^n = 1 - \alpha \Rightarrow a = \alpha^n$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان در سطح $1-\alpha$ بر پایه u عبارت است از

$$(x_{(n)} - \frac{1}{2}, x_{(n)} + \frac{1}{2} - \alpha^{\frac{1}{n}})$$

فاصله اطمینان نااریب

$$H(\lambda) = p(x_{(n)} + \frac{1}{2} - b < \theta' < x_{(n)} + \frac{1}{2} - a)$$

$$= p(a < x_{(n)} - \theta' + \frac{1}{2} < b) = p(a < x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2} + \theta - \theta' < b)$$

$$p(a + \lambda < x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2} < b + \lambda) \qquad \lambda = \theta' - \theta$$

$$H(\lambda) = (b+\lambda)^n - (a+\lambda)^n \Rightarrow H(\lambda) = b^n - a^n = 1-\alpha$$

$vii) p_a(\beta, \theta)$

می دانیم که $x_{(1)}$ آماره بسنده برای θ است پس کمیت محوری تابعی از آن است

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$2n\ln\frac{x_{(1)}}{\theta} \quad \chi^2_{(2)}$$

$$p(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})} < 2n\ln\frac{x_{(1)}}{\theta} < \chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(\exp\{\frac{1}{2n\beta}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\} < \frac{x_{(1)}}{\theta} < \exp\{\frac{1}{2n\beta}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\})$$

$$= p(x_{(1)}\exp\{\frac{-1}{2n\beta}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\} < \theta < x_{(1)}\exp\{\frac{-1}{2n\beta}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\})$$

پس فاصله به صورت زیر است

$$(x_{(1)}\exp\{\frac{-1}{2n\beta}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\}, x_{(1)}\exp\{\frac{-1}{2n\beta}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\})$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

$$Q = u = \frac{x_{(1)}}{\theta} \quad n\beta u^{-n\beta-1} \qquad\qquad u > 1$$

$$p(a < \frac{x_{(1)}}{\theta} < b) = 1-\alpha \Rightarrow p(\frac{x_{(1)}}{b} < \theta < \frac{x_{(1)}}{a}) = 1-\alpha$$

طول فاصله به قرار زیر است

$$L = x_{(1)}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

همچنین شرط مجانبی به صورت زیر است

$$\int_a^b n\beta u^{-n\beta-1}du = a^{-n\beta} - b^{-n\beta} = 1-\alpha \qquad\qquad 1 < a < b < \infty$$

$$1 < a < (1-\alpha)^{\frac{-1}{n\beta}} \qquad\qquad \alpha^{\frac{-1}{n\beta}} < b < \infty$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = x_{(1)}(\frac{-1}{a^2} - \frac{\partial b}{\partial a}\frac{1}{b^2})$$

$$a^{-n\beta} - b^{-n\beta} = 1-\alpha \Rightarrow -n\beta a^{-n\beta-1} + n\beta b^{-n\beta-1}\frac{\partial b}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a} = \frac{a^{-n\beta-1}}{b^{-n\beta-1}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{b^{n\beta-1} - a^{n\beta-1}}{b^{n\beta+1}} > 0$$

پس L نسبت به a صعودی است پس برای a حداقل مقدار a را اختیار می کنیم ، $a=1$ پس $b = \alpha^{\frac{-1}{n\beta}}$فاصله به صورت زیر است

$$(\frac{x_{(1)}}{\sqrt[n\beta]{\alpha}}, x_{(1)})$$

فاصله اطمینان ناریب

$$H(\lambda)=p(\frac{x_{(1)}}{b}<\theta'<\frac{x_{(1)}}{a})=p(a<\frac{x_{(1)}}{\theta'}<b)$$

$$=p(a<\frac{x_{(1)}}{\theta}\frac{\theta}{\theta'}<b)=p(a\lambda<u<b\lambda) \qquad \lambda=\frac{\theta'}{\theta}$$

$$H(\lambda)=(a\lambda)^{-n\beta}-(b\lambda)^{-n\beta}=\lambda^{-n\beta}(1-\alpha) \qquad \text{و} \quad a\lambda\geq 1$$

حال اگر فاصله مورد نظر را طوری انتخاب کنیم که $a>1$ ، آنگاه برای یک $\lambda<1$ خواهیم داشت $a\lambda\geq 1$ و در نتیجه رابطه بالا بزرگتر از

$1-\alpha$ خواهد بود که با شرایط تناقض دارد پس، $a=1$ و در نتیجه خواهیم داشت $b=\alpha^{\frac{-1}{n\beta}}$ بنابراین با انتخاب فوق داریم

$$\begin{cases}\lambda^{-n\beta}(1-\alpha) & \lambda\geq 1\\ 1-\alpha\lambda^{-n\beta} & \alpha^{\frac{1}{n\beta}}<\lambda<1\\ 0 & \lambda<\alpha^{\frac{1}{n\beta}}\end{cases}$$

$viii)\, p_a(\theta,\beta)$

آماره بسنده برا ی θ ، $\sum \ln x_i$ است پس کمیت محوری تابعی از آن است

$$2\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta} \quad \chi^2_{(2n)}=f_\theta(x)$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$p(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}<2\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta}<\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha$$

$$p(\frac{1}{2\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}<\theta<\frac{1}{2\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha$$

پس فاصله به صورت زیر است

$$(\frac{1}{2\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})},\frac{1}{2\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})$$

فاصله اطمینان با کوتاه ترین طول

$$p(a<2\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta}<b)=1-\alpha$$

$$p(\frac{a}{2\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}<\theta<\frac{b}{2\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta}})=1-\alpha$$

پس طول فاصله به صورت زیر است

$$L=\frac{1}{2\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}(b-a)$$

وشرط جانبی برای مینیمم کردن L به صورت زیر است

$$\int_a^b f_\theta(x)dx=1-\alpha\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial a}f_\theta(b)=f_\theta(a)\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a}=0\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial a}=1\Rightarrow f_\theta(b)=f_\theta(a)$$

پس a و b باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases}\int_a^b f_\theta(x)dx=1-\alpha\\ f_\theta(a)=f_\theta(b)\end{cases}$$

فاصله اطمینان ناریب

$$H(\lambda)=p(\frac{a}{2\sum\ln\frac{x_i}{\beta}}<\theta'<\frac{b}{2\sum\ln\frac{x_i}{\beta}})=p(a<2\theta'\sum\ln\frac{x_i}{\beta}<b)$$

$$p(a<2\frac{\theta'}{\theta}\theta\sum\ln\frac{x_i}{\beta}<b)=p(a\lambda<Q<b\lambda)$$

حال باید داشته باشیم

$$H(1)=1-\alpha$$

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=1}=0\Rightarrow bf_\theta(b)=af_\theta(a)$$

که f_θ تابع چگالی کای دو با $2n$ درجه آزادی است

$ix)N(\mu,\sigma^2)\qquad \mu\in\qquad\qquad \sigma>0\qquad\qquad \theta=e^\mu$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$Q=\frac{\overline{\ln x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\quad t_{(n-1)}$$

$$p(t_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}<\frac{\overline{\ln x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<t_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)})=1-\alpha$$

$$p(\exp\{\overline{\ln x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{(1-\frac{\alpha}{2})}\}<e^\mu<\exp\{\overline{\ln x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{(1-\frac{\alpha}{2})}\})=1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$(\exp\{\overline{\ln x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{(1-\frac{\alpha}{2})}\},\exp\{\overline{\ln x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{(1-\frac{\alpha}{2})}\})$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

$$Q=\frac{\overline{\ln x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\quad t_{(n-1)}$$

$$p(\overline{\ln x}-b\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{\ln x}-a\frac{s}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

$$p(\exp\{\overline{\ln x}-\frac{b}{\sqrt{n}}s\}<e^{\mu}=\theta<\exp\{\overline{\ln x}-\frac{a}{\sqrt{n}}s\})=1-\alpha \qquad (1)$$

که طول این فاصله اطمینان عبارتست از

$$\int_a^b f_\theta(q)dq=1-\alpha \qquad (2)$$

که $f_\theta(q)$ توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است

از رابطه (2) داریم

$$\frac{\partial b}{\partial a}f_\theta(b)-f_\theta(a)=0\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)}$$

از رابطه (1) داریم

$$\frac{\partial L}{\partial a}=0\Rightarrow\frac{-s}{\sqrt{n}}e^{\frac{-as}{\sqrt{n}}}+\frac{s}{\sqrt{n}}e^{\frac{-bs}{\sqrt{n}}}\frac{\partial b}{\partial a}=0\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{e^{\frac{-as}{\sqrt{n}}}}{e^{\frac{-bs}{\sqrt{n}}}}$$

پس a و bباید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases}\int_a^b f_\theta(q)dq=1-\alpha\\ e^{\frac{as}{\sqrt{n}}}f_\theta(a)=e^{\frac{bs}{\sqrt{n}}}f_\theta(b)\end{cases}$$

فاصله اطمینان نااریب

با انتخاب Q به صورت مقابل داریم

$$Q=\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \quad t_{(n-1)}$$

$$p(\exp\{\overline{\ln x}-b\frac{s}{\sqrt{n}}\}<\theta<\exp\{\overline{\ln x}-a\frac{s}{\sqrt{n}}\})=1-\alpha$$

در نتیجه داریم

$$H(\lambda)=p(\exp\{\overline{\ln x}-b\frac{s}{\sqrt{n}}\}<\theta'<\exp\{\overline{\ln x}-a\frac{s}{\sqrt{n}}\})$$

$$=p(a<\frac{\overline{\ln x}-\ln\theta'}{s/\sqrt{n}}<b)=p(a<Q(\lambda)<b)$$

به طوری که

$$Q(\lambda)=\frac{\dfrac{\overline{\ln x}-\ln\theta'}{\sigma/\sqrt{n}}-\lambda}{(\dfrac{s^2}{\sigma^2})^{\frac{1}{2}}},\lambda=\frac{\ln\theta'-\ln\theta}{\sigma/\sqrt{n}},Q(\lambda)\quad t'_{(n-1,\lambda)}$$

و $t^{'}(v,\lambda)$ نمایانگر توزیع t نا مرکزی با v درجه آزادی و پارامتر نا مرکزی λ که تابع چگالی آن در کتاب وجود دارد؛ حال برای برقراررابطه ی (۶- ۱۸) کتاب پارسیان باید داشته باشیم

$$H(0)=1-\alpha$$

$$\left.\frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=0$$

رابطه اخیر نتیجه می دهد که

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})}\int_a^b\frac{t}{(1+\dfrac{t^2}{v})^{\frac{v+2}{v}}}dt=0$$

بنابر این a و b باید همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$\begin{cases}\displaystyle\int_a^b f_\theta(q)=1-\alpha\\ \displaystyle\int_a^b\frac{t}{(1+\dfrac{t^2}{v})^{\frac{v+2}{v}}}dt=0\end{cases}$$

به طوری که $f_\theta(q)$ چگالی توزیع t با درجه آزادی v است . به سادگی تحقیق می شود که تنها جواب همزمان معادلات فوق عبارت است از

$$b=-a=t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$$

بنابر این فاصله اطمینان نا اریب به صورت زیر است

$$\left(\exp\left(\overline{\ln\ x}-t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \exp\left(\overline{\ln\ x}+t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

x) E(1 , θ) $\qquad\theta\in R$

آماره بند برای θ ، $\sum x_i$ است پس کمیت محوری را به صورت تابعی از آن اختیار می کنیم .

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$Q=2\theta\sum(x_{i-1})\approx\chi^2_{2n}$$

$$P(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}\prec 2\theta\sum(x_{i-1})\prec\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha$$

$$P(\frac{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}{2\sum(x_{i-1})}\prec\theta\prec\frac{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}{2\sum(x_{i-1})})=1-\alpha$$

پس فاصله به صورت زیر است

$$(\frac{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}{2\sum(x_{i-1})},\frac{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}{2\sum(x_{i-1})})$$

پس برای اطمینان با کوتاهترن طول داریم

$$Q=2\theta\sum(x_{i-1})\approx\chi^2_{(2n)}$$

$$P(\frac{a}{2\sum(x_{i-1})},\frac{b}{2\sum(x_{i-1})})=1-\alpha$$

که بنا به مثال (۶-۱۳) کتاب پارسیان a , b باید در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases}\int_a^b f_\theta(q)=1-\alpha\\ f_\theta(a)=f_\theta(b)\end{cases}$$

فاصله اطمینان نا اریب :

$$Q=2\theta\sum(x_{i-1})\approx\chi^2_{(2n)}$$

$$P(\frac{a}{2\sum(x_{i-1})}\prec\theta\prec\frac{b}{2\sum(x_{i-1})})=1-\alpha$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}H(\lambda)&=P(\frac{a}{2\sum(x_{i-1})}\prec\theta'\prec\frac{b}{2\sum(x_{i-1})})\\&=P(a\prec 2\,\theta'\sum(x_{i-1})\prec b)=P(a\prec\frac{\theta'}{\theta}2\theta\sum(x_{i-1})\prec b)\\&=P(a\lambda\prec Q\prec b\lambda)\end{aligned}$$

به طوری که $\lambda=\dfrac{\theta}{\theta'}$ برای تحقیق رابطه (۶- ۱۸) باید

$$\begin{cases}H(1)=1-\alpha\\ \left.\dfrac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1}=0\end{cases}$$

که از بالا نتیجه می شود که a و b باید در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases}\int_a^b f_\theta(q)\,dq=1-\alpha\\ b\,f_\theta(b)=a\,f_\theta(a)\end{cases}$$

که $f_\theta(x)$ دارای توزیع χ^2_{2n} است

۱۵)

ii) $f_\theta(x)=\dfrac{2x}{\theta^2}\qquad 0\prec x\prec\theta\qquad \theta\succ 0$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

آماره بند در این تابع چگالی x_n است پس کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$Q=-4n\ln\frac{x_n}{\theta}\approx\chi_2^2$$

$$P(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\prec -4n\ln\frac{x_n}{\theta}\prec\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha$$

$$P(\exp\left\{-\tfrac{1}{4}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\right\}\prec\frac{x_n}{\theta}\prec\exp\left\{-\tfrac{1}{4}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\right\})=1-\alpha$$

$$P(\frac{x_n}{\exp\left\{-\tfrac{1}{4}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\right\}}\prec\theta\prec\frac{x_n}{\exp\left\{-\tfrac{1}{4}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\right\}})=1-\alpha$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

این بار کمیت محوری را به صورت مقابل انتخاب می کنیم

$$Q=\frac{x_n}{\theta}\approx\beta eta(2n,1)$$

$$P(a\prec\frac{x_n}{\theta}\prec b)=1-\alpha\Rightarrow P(\frac{x_n}{b}\prec\theta\prec\frac{x_n}{a})=1-\alpha$$

بنابر این طول فاصله به صورت مقابل است

$$l=x_n(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$$

حال شرط جانبی برای مینیمم کردن ما به صورت زیر است

$$\int_a^b 2nq^{2n-1}dq=1-\alpha\Rightarrow b^{2n}-a^{2n}=1-\alpha \qquad 0\le a\prec b\le 1$$

واضح است که

$$0\le a\prec\alpha^{\frac{1}{2n}} \qquad (1-\alpha)^{\frac{1}{2n}}\le b\prec 1$$

حال از رابطه قبل داریم

$$2n\frac{\partial b}{\partial a}b^{2n-1}=2n\,a^{2n-1}\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{a^{2n-1}}{b^{2n-1}}$$

همچنین از طرفی داریم

$$\frac{\partial l}{\partial b}=x_n(-\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial b}+\frac{1}{b^2})=x_n(-\frac{1}{a^2}\frac{b^{2n-1}}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^2})=x_n(\frac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{a^{2n+1}b^2})\prec 0$$

حال چون L نسبت به b تابع نزولی است در نتیجه b حد اکثر مقدارش یعنی b=1 را اختیار میکند و بنابر این با جایگذاری در رابطه زیر داریم :

$$b^{2n}-a^{2n}=1-\alpha\Rightarrow 1-a^{2n}=1-\alpha\Rightarrow a=\alpha^{\frac{1}{2n}}$$

بنابر این کوتاهترین فاصله در سطح α-۱ بر پایه a عبارتست از $(x_n\,,\,\frac{x_n}{a^{\frac{1}{2n}}})$

فاصله اطمینان نا اریب : $Q=\frac{x_n}{\theta}$

$$P(a \prec \frac{x_n}{\theta} \prec b) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad P(\frac{x_n}{b} \prec \theta \prec \frac{x_n}{a}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \quad H(\lambda) = P(\frac{x_n}{b} \prec \theta' \prec \frac{x_n}{a}) = P(a \prec \frac{x_n}{\theta'} \prec b) = P(a \prec \frac{\theta}{\theta'}\frac{x_n}{\theta} \prec b) = P(a\lambda \prec Q \prec b\lambda) \quad , \quad \lambda = \frac{\theta}{\theta'}$$

با توجه به توزیع Q به شرط $b\lambda \le 1$ داریم

$$H(\lambda) = \lambda^{2n}(b^{2n} - a^{2n}) = \lambda^{2n}(1-\alpha)$$

حال اگر فاصله مورد نظر را طوری انتخاب کنیم که b <۱ آنگاه برای یک $\lambda \succ 1$ خواهیم داشت $b\lambda \le 1$ در نتیجه رابطه ی قبل بزرگتر از $1-\alpha$ خواهد بود که با شرایط ارائه شده (۶- ۱۸) کتاب پارسیان متناقض است که برای اجتناب از این مسئله باید b =۱ باشد و در نتیجه $a = \alpha^{\frac{1}{2n}}$ پس با تنتخاب فوق داریم

$$H(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{2n}(1-\alpha) & \lambda \le 1 \\ 1-\alpha\lambda^{2n} & 1 < \lambda < \alpha^{-\frac{1}{2n}} \\ 0 & \lambda > \alpha^{-\frac{1}{2n}} \end{cases}$$

به سادگی معلوم می شود که $H(\lambda)$ مقدار ماکزیمم خود را در $\lambda = 1$ اختیار می کند بنابر این یک فاصله اطمینان نا اریب در سطح $1-\alpha$ بر پایه کیت محوری Q به صورت زیر است

$$\left(x_{(n)}, \frac{x_{(n)}}{\alpha^{1/2n}} \right)$$

$$iii) \quad \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} \qquad 0 < x < 1 \qquad \theta > 0$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر:

آماره بند برای θ بر پایه این تابع چگالی $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ است پس کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$Q = -\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \approx \chi^2_{2n}$$

$$p\left(\chi^2_{\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)} < -\frac{2}{\theta}\sum \ln x_i < \chi^2_{\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right) = 1-\alpha$$

$$p\left(\frac{-2\sum \ln x_i}{\chi^2_{\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} < \theta < \frac{-2\sum \ln x_i}{\chi^2_{\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)}} \right) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان با دمهای برابربه صورت زیر است:

$$\left(\frac{-2\sum \ln x_i}{\chi^2_{\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} , \frac{-2\sum \ln x_i}{\chi^2_{\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)}} \right)$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول :

$$p\left(a < -\frac{2}{\theta}\sum \ln x_i < b \right) = 1-\alpha$$

$$p\left(\frac{-2\sum \ln x_i}{b} < \theta < \frac{-2\sum \ln x_i}{a} \right) = 1-\alpha$$

بنابر این طول فاصله به صورت زیر است :

$$L = -2\sum \ln x_i \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right)$$

حال شرط جانبی برای مینیمم کردن L به صورت زیر است :

$$\int_a^b f_\theta(q)\,dq = 1-\alpha \qquad \text{که} \qquad f_\theta(x) = \chi^2_{2n}$$

اگر از دو طرف شرط جانبی نسبت به b مشتق بگیریم داریم :

$$f(b) - \frac{\partial a}{\partial b} f(a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{f(b)}{f(a)} \qquad (1)$$

حال از L نسبت به b مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم :

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \;\; \Rightarrow -2\sum \ln x_i \left(-\frac{1}{a^2}\frac{\partial L}{\partial b} + \frac{1}{b^2} \right) = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{a^2}{b^2} \qquad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{f(b)}{f(a)} \;\Rightarrow a^2 f(a) = b^2 f(b)$$

بنابر این b , a را باید به گونه ای اختیار کنیم که همزمان در روابط زیر صدق کنند :

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(q)\,dq = 1-\alpha \\ a^2 f(a) = b^2 f(b) \end{cases}$$

فاصله اطمینان نا اریب :

با انتخاب کمیت محوری $Q = -\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ داریم :

$$p\left(\frac{-2\sum \ln x_i}{b} < \theta < \frac{-2\sum \ln x_i}{a} \right) = 1-\alpha$$

$$H(\lambda)=p\left(\frac{-2\sum \ln x_i}{b}<\theta'<\frac{-2\sum \ln x_i}{a}\right)$$

$$=p\left(a<\frac{-2}{\theta'}\sum \ln x_i<b\right)=p\left(a<-\frac{\theta}{\theta'}\frac{2}{\theta}\sum \ln x_i<b\right)$$

$$=p\left(a\lambda<-\frac{2}{\theta}\sum \ln x_i<b\lambda\right) \qquad \exists \;\; \lambda=\frac{\theta'}{\theta}$$

برای برقراری رابطه (۶- ۱۸) کتاب پارسیان داریم :

$$H(1)=1-\alpha$$

$$\left.\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1}=0 \quad \Rightarrow b f_\theta(b)=a f_\theta(a)$$

به طوری که $f_\theta(b)$ تابع چگالی احتمال χ^2_{2n} است . بنابر این b , a را باید طوری انتخاب کنیم که در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases}\int_a^b f_\theta(q)dq=1-\alpha\\ b f_\theta(b)=a f_\theta(a)\end{cases}$$

$$\text{iv) } \; f_\theta(x)=\frac{\alpha}{\theta}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x^\alpha}{\theta}} \qquad x>0 \qquad \theta>0$$ معلوم α

فاصله اطمینان با دمهای برابر:

چون آماره بسته به صورت $\sum x_i^\alpha$ است پس کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$Q=\frac{2}{\theta}\sum x^\alpha{}_i \approx \chi^2_{2n}$$

$$p\left(\chi^2_{\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)}<\frac{2}{\theta}\sum x_i^\alpha<\chi^2_{\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)=1-\alpha$$

$$p\left(\frac{2\sum x_i^\alpha}{\chi^2_{\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}<\theta<\frac{2\sum x_i^\alpha}{\chi^2_{\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)}}\right)=1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان به صورت زیر است :

$$\left(\frac{2\sum x_i^\alpha}{\chi^2_{\left(2n,1-\frac{\alpha}{2}\right)}},\ \frac{2\sum x_i^\alpha}{\chi^2_{\left(2n,\frac{\alpha}{2}\right)}}\right)$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول و فاصله اطمینان نا اریب :

با انتخاب کمیت محوری $Q=\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^\alpha$ تمامی نتایج مشابه مثال (۶- ۱۲) و (۶- ۲۰) کتاب پارسیان حاصل می شود .

۳- فرض کنید $x_1 \dots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N\left(\theta,\theta^2\right)$ باشد :

الف) آیا می توان به روش فاصله اطمینان با دمهای برابردو فاصله اطمینان مختلف برای θ بدست آورد ؟ چگونه؟

ب) یک فاصله اطمینان نا اریب $100(1-\alpha)\%$ برای θ^2 بدست آورید ؛

ج) کوتاهترین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای θ^2 بدست آورید .

الف) بلی

اولین فاصله اطمینان را با کمیت محوری $Q_1 = \dfrac{\bar{x}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}$ که دارای توزیع $N\left(0,1\right)$ است ایجاد می کند

$$p\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$p\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\theta} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

$$p\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sqrt{n}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \theta < \frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sqrt{n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

پس اولین فاصله اطمینان با دمهای برابر به صورت یر است :

$$\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sqrt{n}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \, , \, \frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sqrt{n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

این فاصله اطمینان را با کمیت محوری $Q_2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\theta^2}$ که دارای توزیع χ^2_{n-1} درجه آزادی است ایجاد می کنیم

$$p\left(\chi^2_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)} < \frac{(n-1)s^2}{\theta^2} < \chi^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

$$p\left(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}} < \theta < s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right) = 1-\alpha$$

پس دومین فاصله اطمینان با دمهای برابر به صورت یر است :

$$\left(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\ ,\ s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}}} \right)$$

ب) فاصله اطمینان نا اریب برای θ^2 بر پایه ی کمیت محوری $Q = \frac{(n-1)s^2}{\theta^2}$ مانند مثال (۶- ۱۹) کتاب پارسیان بدست می آید .

ج) فاصله اطمینان با کوتاهترین طول برای θ^2 بر پایه ی کمیت محوری $Q = \frac{(n-1)s^2}{\theta^2}$ مانند مثال (۶- ۱۱) کتاب پارسیان بدست می آید .

۴- فرض کنید $x \approx E(\theta)$:

الف) آیا $(x\ ,2x)$ **یک فاصله اطمینان برای** $\frac{1}{\theta}$ **است ؟ چرا ؟**

ب) فاصله اطمینان دیگری برای $\frac{1}{\theta}$ **بدست آورید که کوتاهترین طول را داشته باشد .**

الف)

$$x \approx \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad , \qquad \frac{x}{\theta} \approx E(1)$$

$$p\left(x < \theta < 2x\right) = p\left(1 < \frac{\theta}{x} < 2\right) = p\left(\frac{1}{2} < \frac{x}{\theta} < 1\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = 0.24$$

چون احتمال قرار گرفتن θ در فاصله $(x\ , 2x)$ وجود دارد پس این فاصله یک فاصله اطمینان برای θ است که ضریب اطمینان برای آن 0.24 است .

ب) کمیت محوری را به صورت مقابل اختیار می کنیم :

$$Q = 2\frac{x}{\theta} \approx \chi^2_2$$

$$p\left(\frac{a}{2x} < \frac{1}{\theta} < \frac{b}{2x}\right) = 1-\alpha$$

که طول فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$L = \frac{1}{2x}(b-a) \qquad (1)$$

شرط جانبی برای مینیمم کردن ما به صورت زیر است

$$\int_a^b \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}q}dq = e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} = 1-\alpha \qquad (2)\ , \quad 0 \le a < b < \infty$$

واضح است که $-2\ln(1-\alpha) < b < \infty$ $\qquad 0 \le a \le -2\ln(1-\alpha)$

حال از رابطه (۲) نتیجه می شود که $\qquad (3)$

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{2}}+e^{-\frac{b}{2}}\frac{\partial b}{\partial a}=0 \quad \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a}=\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{e^{-\frac{b}{2}}}$$

از طرفی $\qquad (4)$

$$\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial b}{\partial a}-1\right)$$

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می شود که

$$\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{1}{2x}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}}{e^{-\frac{b}{2}}}\right)>0$$

بنابر این L نسبت به a یک تابع صعودی است در نتیجه برای a حداقل مقدار a را اختیار می کنیم یعنی a=0 و با جایگذاری در رابطه (۲) خواهیم داشت :

$$1-e^{-\frac{b}{2}}=1-\alpha \ \Rightarrow b=-2\ln\alpha=\chi^2_{(2,1-\alpha)}$$

بنابر این کوتاهترین فاصله اطمینان در سطح $1-\alpha$ بر پایه Q عبارتست از :

$$\left(0,\frac{\chi^2_{(2,1-\alpha)}}{2x}\right)$$

۵- فرض کنید در یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی ، $\bar{x}=20$ باشد اگر تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد $f_\theta(\mu)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{32}(x-\mu)^2\right\}$ یک فاصله اطمینان ۹۰٪ برای μ بدست آورید .

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

پس فاصله اطمینان ۹۰٪ برای μ به صورت زیر است

$$\left(20-\frac{4}{5}1.64\ ,\ 20+\frac{4}{5}1.64\right)=(18.7\ ,\ 21.3)$$

۶- فرض کنید $x_1 \ldots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$, $\theta=(\mu,\sigma^2)$ باشد ؛ اگر برای مقدار ثابت c ، $\tau(\theta)$ در رابطه زیر صدق کند ، یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$٪ برای پاراش $\tau(\theta)$ بدست آورید .

$$\int_{\tau(\theta)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}dx=c$$
$$\Rightarrow \tau(\theta)=\mu+\sigma Z_{1-c}$$

۷- فرض کنید $x_1,x_2,\ldots,x_{25}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد اگر $\mu=17$ باشد یک فاصله اطمینان ۹۹ درصدی برای σ^2 بدست آورید .

کمیت محوری را به صورت مقابل در نظر می گیریم

$$Q=\frac{25s^2}{\sigma^2}\quad \chi^2_{(25)} \qquad\qquad s=\frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i-17)}{n}$$

$$p(\chi^2_{(25,0.005)}<\frac{25s^2}{\sigma^2}<\chi^2_{(25,0.995)})=0.99$$

پس فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$(0.53s^2<\sigma^2<2.4s^2)$$

۸- فرض کنید $x_1,x_2,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع زیر باشد

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ (\frac{x}{\beta})^{\alpha} & 0\le x<\beta\\ 1 & x\ge\beta\end{cases}$$

الف) اگر α معلوم باشد یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای β بدست آورید .

ب) اگر β معلوم باشد یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای α بدست آورید .

الف) چون آماره بسنده برای β ، $x_{(n)}$ است کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$\frac{x_{(n)}}{\beta}\quad Beta(n\alpha,1)\Rightarrow -2n\alpha\ln\frac{x_{(n)}}{\beta}\quad \chi^2_{(2)}$$

پس داریم

$$Q=-2n\alpha\ln\frac{x_{(1)}}{\beta}$$

پس فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای β به صورت زیر است

$$(\frac{x_{(1)}}{\exp\left\{-\frac{1}{2n\alpha}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\right\}},\frac{x_{(1)}}{\exp\left\{-\frac{1}{2n\alpha}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\right\}})$$

ب) می دانیم اگر $F_\theta(x)$ تابع توزیع باشد آنگاه

$$\sum -2n\ln F_\theta(x_i)\quad \chi^2_{(2n)}$$

حال بر این اساس کمیت محوری عبارتست از

$$Q=-2\alpha\sum\ln(\frac{x_i}{\beta})\quad \chi^2_{(2n)}$$

پس فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای α عبارتست از

$$(\frac{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}{-2\sum\ln(\frac{x_i}{\beta})},\frac{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}{-2\sum\ln(\frac{x_i}{\beta})})$$

۹- فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای مستقل از توزیع زیر باشند در هریک از موارد زیر فاصله اطمینان با دمهای برابر کوناهترین فاصله اطمینان نا اریب $(1-\alpha)\%$ برای پارامتر θ بدست آورید .

$i) x_i \quad N(i\theta, 1) \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad \theta \in$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

آماره بسنده برای پارامتر θ در این تابع چگالی $\sum ix_i$ است پس کمیت محوری باید تابعی از آن باشد

$ix_i \quad N(i^2\theta, i^2)$

چون هر ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی نرمال خود نرمال است داریم

$$\sum ix_i \quad N\left(\frac{\theta n(n+1)(2n+1)}{6}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

پس کمیت محوری عبارتست از

$$Q = \frac{\sum ix_i - \frac{\theta n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} = \frac{\sum ix_i}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} - \theta\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad N(0,1)$$

با انتخاب $y = \dfrac{\sum ix_i}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$ داریم

$$p\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < y - \theta\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$p\left(\frac{y - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} < \theta < \frac{y + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}\right) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان با دمهای برابر به صورت زیر است

$$\left(\frac{y - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}, \frac{y + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}\right)$$

واضح است که چون بعد فضای پارامتر با بعد فضای آماره بسنده برابر و توزیع کمیت محوری Q نسبت به محور عمود متقارن است آنگاه فاصله اطمینان با دمهای برابر منطبق با فاصله اطمینان با کوتاهترین طول و فاصله اطمینان نا اریب خواهد شد

$ii) x_i \quad E(i\theta) \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad \theta \in$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

آماره بسنده برای پارامتر θ عبارتست از $\sum ix_i$. پس کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$ix_i \quad E(\theta) \Rightarrow \sum ix_i \quad \Gamma(n, \theta)$

$Q = 2\theta \sum ix_i \quad \chi^2_{(2n)}$

$$p(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})} < 2\theta\sum ix_i < \chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(\frac{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}{2\sum ix_i} < \theta < \frac{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}{2\sum ix_i}) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان با دمهای برابر به صورت زیر است

$$(\frac{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}{2\sum ix_i}, \frac{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}{2\sum ix_i})$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

$$Q = 2\theta\sum ix_i \quad \chi^2_{(2n)}$$

بر مبنای این کمیت محوری داریم

$$p(a < 2\theta\sum ix_i < b) = 1-\alpha \Rightarrow p(\frac{a}{2\sum ix_i} < \theta < \frac{b}{2\sum ix_i}) = 1-\alpha$$

که طول این فاصله اطمینان عبارتست از

$$L = \frac{1}{2\sum ix_i}(b-a) \qquad (1)$$

حال شرط جانبی برای مینیمم کردن L عبارتست از

$$\int_a^b f_\theta(q)dq = 1-\alpha \qquad (2)$$

که در آن $f_\theta(q)$ تابع چگالی χ^2_{2n} است

از رابطه (۲) داریم

$$\frac{\partial b}{\partial a} f_\theta(b) - f_\theta(a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a} = \frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)}$$

از رابطه (۱) داریم

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{f_\theta(a)}{f_\theta(b)} = 1 \Rightarrow f_\theta(a) = f_\theta(b)$$

پس نتیجه می شود a و b در فاصله اطمینان با کوتاهترین طول باید در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b f_\theta(q)dq = 1-\alpha \\ f_\theta(a) = f_\theta(b) \end{cases}$$

فاصله اطمینان ناریب

$$p(\frac{a}{2\sum ix_i} < \theta < \frac{b}{2\sum ix_i}) = 1-\alpha$$

پس نتیجه می شود

$$H(\lambda) = p(\frac{a}{2\sum ix_i} < \theta' < \frac{b}{2\sum ix_i}) = p(a < 2\theta'\sum ix_i < b)$$

$$= p(a < \frac{\theta'}{\theta} 2\theta\sum ix_i < b) = p(a\lambda < Q < b\lambda)$$

به طوری که $\lambda = \frac{\theta}{\theta'}$.

برای تحقق رابطه ۶-۱۸ کتاب پارسیان باید

$$H(1) = 1 - \alpha$$

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow bf_\theta(b) = af_\theta(a)$$

$$iii) E(i\theta, 1) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \theta \in$$

فاصله اطمینان با دمهای برابر

ابتدا تعریف می کنیم $y_i = \frac{x_i}{i}$ ، $y_{(1)} = \min_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_i}{i}\right\}$

حال چون آماره بسنده برای θ، $y_{(1)}$ است کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$y_{(1)} \quad \sum i e^{-\sum i(y-\theta)} = E(\theta, \sum_{i=1}^{n} i)$$

$$n(n+1)(y_{(1)} - \theta) \quad \chi^2_{(2)}$$

$$Q = n(n+1)(y_{(1)} - \theta) \quad \chi^2_{(2)}$$

پس داریم

$$p(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})} < n(n+1)(y_{(1)} - \theta) < \chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1 - \alpha$$

$$p(y_{(1)} - \frac{1}{n(n+1)}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})} < \theta < y_{(1)} - \frac{1}{n(n+1)}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}) = 1 - \alpha$$

پس فاصله اطمینان با دمهای برابر عبارتست از

$$(y_{(1)} - \frac{1}{n(n+1)}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}, y_{(1)} - \frac{1}{n(n+1)}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})})$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

با اختیار کمیت محوری $Q = n(n+1)(y_{(1)} - \theta) \quad \chi^2_{(2)}$

مانند آنچه در مثال ۶-۱۵ کتاب پارسیان انجام شده است داریم

$$p(a < n(n+1)(y_{(1)} - \theta) < b) = 1 - \alpha$$

$$p(y_{(1)} - \frac{b}{n(n+1)} < \theta < y_{(1)} - \frac{a}{n(n+1)}) = 1 - \alpha$$

بنابه مثال ۶-۱۵ ، a و b به صورت زیر هستند

$$a = 0 \qquad b = \chi^2_{(2,1-\alpha)}$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان عبارتست از

$$(y_{(1)} - \frac{\chi^2_{(2,1-\alpha)}}{n(n+1)}, y_{(1)})$$

فاصله اطمینان ناریب

$$p(y_{(1)}-\frac{b}{n(n+1)}<\theta<y_{(1)}-\frac{a}{n(n+1)})=1-\alpha$$

در نتیجه داریم

$$H(\lambda)=p(y_{(1)}-\frac{b}{n(n+1)}<\theta'<y_{(1)}-\frac{a}{n(n+1)})=p(a<n(n+1)(y_{(1)}-\theta')<b)=p(a+\lambda<Q<b+\lambda)$$

به طوری که $\lambda=n(n+1)(\theta'-\theta)$

بنابراین با شرط $a+\lambda>0$ ،

$$H(\lambda)=e^{-\frac{(a+\lambda)}{2}}-e^{-\frac{(b+\lambda)}{2}}=e^{-\frac{\lambda}{2}}(1-\alpha)$$

برای برقراری رابطه ۶-۱۸ کتاب ، اگر $a>0$ اختیار شود آنگاه برای یک λ بزرگتر یا مساوی $-a$ داریم $a+\lambda>0$ و $H(\lambda)>(1-\alpha)$ که با شرط مورد نظر در تناقض است بنابراین a را برابر صفر قرار می دهیم و در نتیجه داریم $b=\chi^2_{(2,1-\alpha)}$

با انتخاب فوق داریم

$$\begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}}(1-\alpha) & \lambda\geq 0 \\ 1-e^{-\frac{\lambda}{2}}\alpha & 2\ln\alpha<\lambda<0 \\ 0 & \lambda\leq 2\ln\alpha \end{cases}$$

$H(\lambda)$مقدار ماکزیمم خود یعنی $(1-\alpha)$ را در $\lambda=0$ اختیار می کند که همان λ مورد نظر است بر این اساس یک فاصله اطمینان ناریب عبارتست از

$$(y_{(1)}-\frac{\chi^2_{(2,1-\alpha)}}{n(n+1)},\chi_{(1)})$$

$$iv)x_i \quad u(-i(\theta-1),i(\theta+1)) \qquad i=1,2,...,n \qquad \theta\in$$

اثبات : مشاهدات را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$y_i=\left|\frac{x_i}{i}-1\right| \quad u(0,\theta)$$

حال براساس این مشاهدات تبدیل یافته به وضوح می توان نشان داد که آماره بسنده برای تابع چگالی مسأله $y_{(n)}$ است پس کمیت محوری را به صورت تابعی از آن می گیریم

فاصله اطمینان با دمهای برابر

$$Q=-2n\ln\frac{y_{(n)}}{\theta} \quad \chi^2_{(2)}$$

$$p(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})} < -2n\ln\frac{y_{(n)}}{\theta} < \chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(\exp\{-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\} < \frac{y_{(n)}}{\theta} < \exp\{-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\}) = 1-\alpha$$

$$p(\frac{y_{(n)}}{\exp\{-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\}} < \theta < \frac{y_{(n)}}{\exp\{-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\}}) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان با دمهای برابر به صورت زیر است

$$(\frac{y_{(n)}}{\exp\{-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}\}}, \frac{y_{(n)}}{\exp\{-\frac{1}{2n}\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}\}})$$

فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

$$Q = \frac{y_{(n)}}{\theta} \quad Beta(n,1)$$

که در آن $y_{(n)}$ برابر است با

$$\max\{\left|\frac{x_i}{i}-1\right|\}$$

حال داریم

$$p(a < \frac{y_{(n)}}{\theta} < b) = p(\frac{y_{(n)}}{b} < \theta < \frac{y_{(n)}}{a})$$

که براساس مثال ۶-۱۴ کتاب پارسیان a و b به صورت زیر هستند

$$a = \alpha^{\frac{1}{n}} \qquad\qquad b = 1$$

پس فاصله اطمینان با کوتاهترین طول در سطح $100(1-\alpha)\%$ ا به صورت زیر است

$$(y_{(n)}, \frac{y_{(n)}}{\alpha^{\frac{1}{n}}})$$

فاصله اطمینان ناریب

$$Q = \frac{y_{(n)}}{\theta}$$

در نتیجه داریم

$$H(\lambda) = p(\frac{y_{(n)}}{b} < \theta' < \frac{y_{(n)}}{b}) = p(a < \frac{y_{(n)}}{\theta'} < b) = p(a < \frac{\theta}{\theta'}\frac{y_{(n)}}{\theta} < b) = p(a\lambda < u < b\lambda)$$

به طوری که $\lambda = \frac{\theta'}{\theta}$

که براساس مثال ۶-۲۲ کتاب a و b برابرند با

$$b = 1$$

$$a = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

در نتیجه فاصله اطمینان ناریب $100(1-\alpha)\%$ عبارت است از

$(y_{(n)}, \frac{y_{(n)}}{\alpha^{\frac{1}{n}}})$

۱۰- فرض کنید $\bar{X}$ نمایانگر میانگین نمونه ای n تایی از توزیع $N(\mu,16)$ باشد کمترین مقدار n را بیابید که $(\bar{x}-1,\bar{x}+1)$ یک فاصله اطمینان حداقل ۹۰درصد برای μ باشد

$$p(\bar{x}-1<\mu<\bar{x}+1)=0.9$$

$$p(-1<\bar{x}-\mu<1)=0.9 \Rightarrow p(-\frac{\sqrt{n}}{4}<z<\frac{\sqrt{n}}{4})=0.9$$

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4})-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4})=0.9 \Rightarrow 2\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4})=0.1$$

$$\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4})=0.05 \Rightarrow -\frac{\sqrt{n}}{4}=-1.64 \Rightarrow n=43.03$$

پس نتیجه می شود $n=24$ باید باشد

۱۱-در نمونه ای تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ تعداد نمونه چقدر باشد تا فاصله اطمینانهـای ۹۰ و ۹۵ درصـد دارای طولی برابر حداکثر $\frac{\sigma}{5}$ باشند

می دانیم که طول فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ به صورت زیر است

$$L=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

حال طبق صورت مسأله باید داشته باشیم

$$\begin{matrix} \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.95}<\frac{\sigma}{5} \\ \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.975}<\frac{\sigma}{5} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3.28}{\sqrt{n}}<\frac{1}{5} \Rightarrow n>268.96 \\ \frac{3.92}{\sqrt{n}}<\frac{1}{5} \Rightarrow n>384.16 \end{cases}$$

پس نتیجه می شود که حداقل مقدار n برابر ۳۸۵ است

۱۲- فرض کنید $x_1,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $u(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$ باشد نشان دهید $(x_{(1)},x_{(n)})$ یک فاصله اطمینان برای θ است

باید نشان دهیم احتمال قرارگرفتن θ در فاصله $(x_{(1)},x_{(n)})$ وجود دارد

$$p(x_{(1)}<\theta<x_{(n)})=p(0<\frac{\theta-x_{(1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}<1)$$

حال می دانیم

$$v = x_{(n)} - x_{(1)} \quad n(n-1)v^{n-2}(1-v) \qquad 0 < v < 1$$
$$u = \theta - x_{(1)} \quad n(\frac{1}{2} - u)^{n-1} \qquad -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$$

حال بنا به تکیه گاه u و v به وضوح مشخص است که نسبت $\frac{u}{v}$ در فاصله $(0,1)$ معنی دار است

پس نتیجه می شود فاصله $(x_{(1)}, x_{(n)})$ که براساس کمیت محوری $\frac{\theta - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$ ساخته شده است یک فاصله اطمینان است

۱۳-فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\theta)$ باشد

الف) یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای میانگین جامعه بدست آورید

ب) یک فاصله اطمینان نااریب بر پایه $\frac{2\sum x_i}{\theta}$ بدست آورید

ج) یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $p(x > 1)$ بدست آورید

د)یک کمیت محوری بر پایه $x_{(1)}$ پیدا کنید و آن را برای محاسبه فاصله اطمینان θ به کار برید .

بنا به صفحه ۲۲ کتاب پارسیان مبنی بر اینکه $\theta = \frac{1}{\lambda}$ است تابع چگالی به صورت زیر است

$$x_1, x_2, ..., x_n \quad \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad E(x) = \theta$$

پس کمیت محوری را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$Q = \frac{2\sum x_i}{\theta} \quad \chi^2_{(2n)}$$
$$p(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})} < \frac{2\sum x_i}{\theta} < \chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha \Rightarrow p(\frac{2\sum x_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}} < \theta < \frac{2\sum x_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}}) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$(\frac{2\sum x_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}, \frac{2\sum x_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}})$$

ب)

$$Q = \frac{2\sum x_i}{\theta} \quad \chi^2_{(2n)}$$
$$p(a < \frac{2\sum x_i}{\theta} < b) = 1-\alpha \Rightarrow p(\frac{2\sum x_i}{b} < \theta < \frac{2\sum x_i}{a}) = 1-\alpha$$

در نتیجه داریم

$$H(\lambda) = p(\frac{2\sum x_i}{b} < \theta' < \frac{2\sum x_i}{a}) = p(a < \frac{2\sum x_i}{\theta'} < b) = p(a\lambda < Q < b\lambda)$$

به طوری که $\lambda = \frac{\theta'}{\theta}$ که برای برقراری رابطه ۶-۱۸ باید داشته باشیم

$$H(1)=1-\alpha$$

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=1}=0$$

در نتیجه داریم

$$bf_\theta(b)=af_\theta(a)$$

که $f_\theta(x)$ تابع چگالی $\chi^2_{(n)}$ است

ج)

$$p_\theta(x>1)=e^{-\theta}$$

$$Q=\frac{2\sum x_i}{\theta} \quad \chi^2_{(2n)}$$

$$p(\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}<\frac{2\sum x_i}{\theta}<\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha \Rightarrow p(\frac{2\sum x_i}{\chi^2_{(2n,1-\frac{\alpha}{2})}}<\theta<\frac{2\sum x_i}{\chi^2_{(2n,\frac{\alpha}{2})}})=1-\alpha$$

د) می دانیم $E(n\theta)$ $x_{(1)}$ است پس کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$\frac{2nx_{(1)}}{\theta} \quad \chi^2_{(2)}$$

$$p(\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}<\frac{2nx_{(1)}}{\theta}<\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})})=1-\alpha \Rightarrow p(\frac{2nx_{(1)}}{\chi^2_{(2,1-\frac{\alpha}{2})}}<\theta<\frac{2nx_{(1)}}{\chi^2_{(2,\frac{\alpha}{2})}})=1-\alpha$$

۱۴- فرض کنید X_1,X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد نشان دهید $(x_{(1)},x_{(2)})$ یک فاصله اطمینان برای θاست و امید طول آن را محاسبه کنید.

برای اینکه نشان دهیم این فاصله یک فاصله اطمینان برای θ است باید نشان دهیم که احتمال قرار گرفتن θ در فاصله $(x_{(1)},x_{(2)})$ معنی دار است

$$p(x_{(1)}<\theta<x_{(2)})=p(0<\frac{\theta-x_{(1)}}{x_{(2)}-x_{(1)}}<1)$$

حال داریم

$$v=\theta-x_{(1)} \qquad v\in$$

$$u=x_{(2)}-x_{(1)} \quad u\in[0,\infty)$$

پس از تکیه گاه u و v نتیجه می شود که احتمال قرارگرفتن $\frac{u}{v}$ در فاصله $[0,1]$ معنی دار است پس این فاصله یک فاصله اطمینان برای θاست

حال برای قسمت بعد داریم

$$L=x_{(2)}-x_{(1)}=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{2}})^2}$$

حال داریم

$$\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}} \quad N(0,1) \Rightarrow Z=(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}})^2 \quad \chi^2_{(1)}=E(\frac{1}{2})$$

پس داریم

$$E(L)=\sqrt{2}E(\sqrt{z})=\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz$$

با تغییر متغیر $s=\frac{z}{2}$ داریم

$$E(L)=2\int_0^\infty \sqrt{u}e^{-u}du=2\Gamma(\frac{3}{2})=\sqrt{\pi}$$

۱۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $u(0,\theta)$ باشد می خواهیم یک فاصله اطمینان برای θ بدست آوریم فواصل $(ax_{(n)},bx_{(n)})$ ، $1\le a<b$ و $(x_{(n)}+c,x_{(n)}+d)$ ، $0\le c<d$ را که در آن c، b، a و d مقادیر معلوم اند را در نظر بگیرید

الف) سطح اطمینان برای هر یک از فواصل فوق چقدر است

ب) آیا می توان aو b را طوری انتخاب کرد که فواصل اطمینان کوتاهترین طول را داشته باشد ؟ در مورد cو d چطور؟

الف)

$$p(ax_{(n)}<\theta<bx_{(n)})=p(\frac{1}{b}<\frac{x_{(n)}}{\theta}<\frac{1}{a})$$

که در رابطه بالا $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ دارای تابع چگالی $Q=Beta(n,1)$ است پس داریم

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} nq^{n-1}dq=(\frac{1}{b})^n-(\frac{1}{a})^n$$

پس سطح اطمینان برای این فاصله اطمینان به صورت $(\frac{1}{b})^n-(\frac{1}{a})^n$ است

حال برای فاصله زیر داریم

$$p(x_{(n)}+c<\theta<x_{(n)}+d)$$

برای فاصله فوق به وضوح مشخص است که این فاصله یک فاصله اطمینان برای θ نیست چون کمیت محوری برای فاصله بالا دارای توزیع وابسته به پارامتر θ است (کمیت محوری به صورت $f(x_{(n)}-\theta)$ است که به ازاء هر تابع $f(0)$ دارای توزیع وابسته به پارامتر است)

ب)

$$p(ax_{(n)}<\theta<bx_{(n)})$$

بنابراین فاصله اطمینان مورد نظر دارای طول

$$L=x_{(n)}(b-a)$$

خواهد بود که شرط جانبی برای مینیمم کردن L به صورت زیر است

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} nq^{n-1}dq=1-\alpha \Rightarrow (\frac{1}{b})^n-(\frac{1}{a})^n=1-\alpha \qquad 1\le a<b<\infty$$

واضح است که

$$1 \le a < \frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}} \qquad (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}} < b < \infty$$

حال از رابطه (2) داریم

$$-n\frac{\partial a}{\partial b}\frac{1}{a^2}(\frac{1}{a})^{n-1} + n\frac{1}{b^{n+1}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

از رابطه (1) داریم

$$\frac{\partial L}{\partial b} = x_{(n)}(1-\frac{\partial a}{\partial b}) = x_{(n)}(\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^{n+1}}) > 0$$

پس L ، نسبت به b صعودی است پس b مینیمم مقدار خودش را می گیریم در نتیجه داریم

$$b = (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}} \qquad a = 1$$

درنتیجه فاصله اطمینان با کوتاهترین طول به صورت زیر است

$$(x_{(n)}, \frac{x_{(n)}}{\alpha^{1/n}})$$

۱۶- فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ و $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع های بــه ترتیــب $N(\mu, a\sigma^2)$ و $N(\mu, b\sigma^2)$ باشند که در آن a و b مقادیر مثبت و معلومی هستند . یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ بــرای μ بدست آورید.

کمیت محوری را به صورت زیر ایجاد می کنیم

$$Z = \frac{\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}-\mu}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\sigma^2}{n}+\frac{b^2\sigma^2}{m}}} \qquad s_p = \frac{\frac{(n-1)s_1^2}{a}+\frac{(m-1)s_2^2}{b}}{n+m-2}$$

$$\chi^2_{(n+m-2)} \quad \frac{(n-1)s_1^2}{a\sigma^2}+\frac{(m-1)s_2^2}{b\sigma^2} \qquad \frac{(n+m-2)}{\sigma^2}s_p^2 \quad \chi^2_{(n+m-2)}$$

$$t_{n+,-2} = \frac{\frac{\bar{x}+\bar{y}-2\mu}{\sigma\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}}}{\frac{s_p}{\sigma}} = \frac{\bar{x}+\bar{y}-2\mu}{s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}}$$

پس کمیت محوری عبارتست از

$$Q = \frac{\bar{x}+\bar{y}-2\mu}{s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}}$$

$$p(-t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})} < \frac{\overline{x}+\overline{y}-2\mu}{s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}} < t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

$$p(\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}-\frac{1}{2}s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})} < \mu < \frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}+\frac{1}{2}s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$(\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}-\frac{1}{2}s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})}, \frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}+\frac{1}{2}s_p\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}}t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})})$$

۱۷- فرض کنید $X \quad E(\lambda)$ و $Y \quad E(\mu)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند

الف) یک ناحیه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای (μ,λ) بدست آورید

ب) نشان دهید $c(y,x)=\{(\lambda,\mu);\lambda x+\mu y\le a\}$ یک ناحیه اطمینان در سطح $1-\alpha$ برای (λ,μ) است

الف) کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$Q = 2(\lambda x+\mu y) \quad \chi^2_{(4)}$$

بنابراین کمیت محوری فاصله اطمینان در سطح $100(1-\alpha)\%$ به صورت زیر است

$$c(y,x)=\left\{(\lambda,\mu);\chi^2_{(4,\frac{\alpha}{2})} < 2\lambda x+2\mu y < \chi^2_{(4,1-\frac{\alpha}{2})}\right\}$$

ب) برای اینکه نشان دهیم این ناحیه ، یک ناحیه اطمینان برای (λ,μ) است باید احتمال زیر وجود داشته باشد

$$u = \lambda x+\mu y$$

$$p(\lambda x+\mu y\le a) = p(u\le a) = \int_0^a ue^{-u}du = 1-e^{-a}-ae^{-a}$$

۱۸- فرض کنید $x_1,\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پیوسته $F_\theta(x)$ باشد نشان دهید $Q=\prod_{i=1}^{n}F_\theta(x_i)$ یک کمیت محوری است

اثبات این موضوع بنا به آنچه در صفحه 244 و 245 کتاب پارسیان گفته شده است به وضوح قابل بررسی است

می دانیم

$$u = F_\theta(x_i) \quad u(0,1)$$

حال چون توزیع $F_\theta(x_1),\dots,F_\theta(x_n)$ همگی مستقل از پارامتر است پس توزیع حاصلضرب آنها نیز مستقل از θ است پس چون توزیع Q به θبستگی ندارد ، Q یک کمیت محوری است.

۱۹- یک شیر و دو خط نتیجه پرتاب یک سکه در سه مرتبه است یک فاصله اطمینان ۹۰ درصد برای احتمال شیر آمدن به دست آورید

فرض کنید $p(H)=\theta$ باشد پس داریم

$x_1, x_2, x_3 \quad \theta^x(1-\theta)^{1-x}$

پس بنابه توزیع بالا ، آماره بسنده برای θ عبارت است از $\overline{x}$ که در این تمرین مقدار آن برابر $\frac{1}{3}$است حال فاصله اطمینان مجانبی برای θ بنا به آنچه در صفحه ۲۷۹ آورده شده است عبارت است از

$$(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}, \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}})$$

در نتیجه داریم

$$(\frac{1}{3} - 1.64\sqrt{\frac{2}{27}}, \frac{1}{3} - 1.64\sqrt{\frac{2}{27}}) = (-0.11, 0.78)$$

حال چون θ بزرگتر از صفر است پس فاصله اطمینان به صورت زیر است

$(0, 0.78)$

۲۰- فرض کنید ۱۷۵ شیر و ۲۲۵ خط تنیجه پرتاب ۴۰۰ مرتبه یک سکه باشد یک فاصله اطمینان۹۰درصد برای احتمال شیر آمدن بدست آورید

بنابه آنچه در تمرین قبل گفته شد داریم

$p(H) = \theta$

$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_{400} \quad \theta^x(1-\theta)^{1-x}$

حال فاصله اطمینان به شکل زیر است

$$(\frac{175}{400} - 1.64\sqrt{\frac{175\times 225}{(400)^3}}, \frac{175}{400} + 1.64\sqrt{\frac{175\times 225}{(400)^3}}) = (0.39, 0.478)$$

۲۱- یک رستوران می خواهد میانگین پول دریافت شده از نهار را برآورد کند براساس یک نمونه تصادفی ۳۶ تایی میانگین نمونه برابر ۹۶۰ ریال است با فرض $\sigma = 200$

الف) یک فاصله اطمینان ۹۵درصد برای میانگین بدست آورید و در مورد فاصله به دست آمده اظهار نظر کنید

ب)نمونه چند تایی لازم است تا طول فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای ۹۸ ریال باشد

الف) فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ به قرار زیر است

$$(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

بنابراین داریم

$$(960 - 1.96\times\frac{200}{6}, 960 + 1.96\times\frac{200}{6}) = (894.6, 1025.3)$$

ب) طول فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ عبارتست از

$$L = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

حال بنابه خواسته مسأله داریم

$$98=\frac{2\times 1.96\times 200}{\sqrt{n}}\Rightarrow \sqrt{n}=8\Rightarrow n=64$$

پس $n=64$ است

۲۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ و $Y_1,...,Y_m$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیعهای وایبل با پارامترهای (α_1,θ_1)و (α_2,θ_2) که α_1و α_2 معلوم اند باشند یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\Delta=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ بدست آورید.

چون $(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_1},\sum_{i=1}^{m}y_i^{\alpha_2})$ یک آماره بسنده برای (θ_1,θ_2) است پس کمیت محوری را به صورت زیر اختیار می کنیم

$$Q=\Delta\frac{u_1}{u_2}\quad F(2n,2m)$$

به طوری که

$$u_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_1}}{n}\qquad u_2=\frac{\sum_{i=1}^{m}y_i^{\alpha_2}}{m}$$

حال فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$p(F(2n,2m,\frac{\alpha}{2})<\Delta\frac{u_1}{u_2}<F(2n,2m,1-\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$$

$$p(\frac{u_2}{u_1}F(2n,2m,\frac{\alpha}{2})<\Delta<\frac{u_2}{u_1}F(2n,2m,1-\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$$

۲۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ و $Y_1,...,Y_m$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیعهای گوسین معکوس با پارامترهای به ترتیب (μ_1,λ_1)و (μ_2,λ_2)باشند یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\Delta=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$بدست آورید .

در این تمرین آماره بسنده برای (μ_1,λ_1) عبارت است از $(\bar{X},\sum_{i=1}^{n}(x_i^{-1}-\bar{x}^{-1}))$

و آماره بسنده برای (μ_2,λ_2) عبارت است از $(\bar{Y},\sum_{i=1}^{m}(y_i^{-1}-\bar{y}^{-1}))$

بنابراین کمیت محوری به صورت زیر است

$$Q=\Delta\frac{u_1}{u_2}\quad F(n-1,m-1)$$

$$u_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{-1}-\bar{x}^{-1})}{n-1}\qquad u_2=\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i^{-1}-\bar{y}^{-1})}{m-1}$$

بنابراین فاصله اطمینان به صورت زیر است

$$p(F(n-1,m-1,\frac{\alpha}{2})<\Delta\frac{u_1}{u_2}<F(n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$$

$$p(\frac{u_2}{u_1}F(n-1,m-1,\frac{\alpha}{2})<\Delta<\frac{u_2}{u_1}F(n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای Δ به صورت زیر است

$$(\frac{u_2}{u_1}F(n-1,m-1,\frac{\alpha}{2}),\frac{u_2}{u_1}F(n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2}))$$

مسائل فصل ۷

۱- فرض کنید x یک متغیر تصادفی در فاصله $[0,1]$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_\circ : x \quad u(0,1) \qquad \& \qquad H_1 : x \quad Beta(2,1)$$

الف) پرتوان ترین آزمون سطح α را بدست آورید

ب) نمودار $(\alpha_\phi,\beta_\phi^*)$ هایی که ϕ تابع آزمون باشد را رسم کنید

الف)

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=2x>k\Rightarrow x>k$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>k\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow E_{H_\circ}[\varphi(x)]=\alpha\Rightarrow\int_k^1 1dx=1-k=\alpha \qquad \Rightarrow k=1-\alpha$$

ب)

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>1-\alpha\\ 0 & ow\end{cases} \qquad B^*=\int_{1-\alpha}^1 2xdx=1-(1-\alpha)^2=-\alpha^2+2\alpha$$

۲- فرض کنید $c(\theta,1) \quad x$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_\circ:\theta=0 \qquad \& \qquad H_1:\theta=1$$

نشان دهید $\psi(x)=I_{[1,3]}^{(x)}$ پرتوان ترین آزمون سطح خودش است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & 1\le x\le 2\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\frac{1}{\pi(1+(x-1)^2)}}{\frac{1}{\pi(1+x^2)}}=\frac{1+x^2}{1+(x-1)^2}>k\Rightarrow 1+x^2>kx^2-2kx+2k$$

$$\Rightarrow(1-k)x^2+2kx+(1-2k)>0$$

حال مشاهده می کنیم وقتی که $k=2$ بگیریم فاصله $x\in[1,3]$ در نامساوی بالا صدق می کند

پس ما یک $k>0$ یافتیم که به ازاء آن نامساوی برقرار بوده به صورت زیر است

$$k=2 \Rightarrow -x^2+4x-3>0 \qquad \Rightarrow \qquad 1\le x\le 3$$

پس به ازاء $k=2$ پرتوان ترین آزمون سطح خودش به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & 1\le x\le 3\\ 0 & ow\end{cases}$$

حال خودتان نشان دهید که به ازاء $k\ge 2.6$ ، MPT نداریم

۳- فرض کنید $x_1,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta_1,\theta_2)$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_\circ:\theta_1=1,\theta_2=4 \qquad \& \qquad H_1:\theta_1=4,\theta_2=1$$

پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.05$ را بیابید

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^{10}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-4)^2}}{(\frac{1}{\sqrt{8\pi}})^{10}e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2}}>k$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-4)^2}>k_1 \Rightarrow -\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-4)^2>k_2$$

$$-\frac{3}{8}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}+\frac{15}{4}\sum_{i=1}^{n}x_i>k_3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-10\sum_{i=1}^{n}x_i<c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-10\sum_{i=1}^{n}x_i<c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=E_{H_\circ}(\varphi(t))=P_{H_\circ}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-10\sum_{i=1}^{n}x_i<c)=\alpha$$

۴- فرض کنید $x \quad u(0,\theta)$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_\circ:\theta=17 \qquad \& \qquad H_1:\theta=93$$

پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.37$ را بدست آورید

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{I_{(0,93)}^{(x)}}{I_{(0,17)}^{(x)}}=\begin{cases}1 & x\le 17\\ \infty & 17<x<93\end{cases}$$

پس مشاهدد می کنیم که با افزایش x نسبت صعودی است پس بر این اساس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>k\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow E_{\theta_\circ}[\varphi(x)]=0.37 \Rightarrow \int_k^{17}\frac{1}{17}dx=0.37$$

$$17-k=0.37\times 17 \Rightarrow k=17-0.37\times 17=10.71$$

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>10.71\\ 0 & ow\end{cases}$$

۵- برای آزمون زیر مجموعه N را رسم کنید

$$H_\circ : x \sim u(0,1) \qquad \& \qquad H_1 : x \sim u(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$$

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{I_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}^{(x)}}{I_{(0,1)}^{(x)}}=\begin{cases}0 & 0<x<\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<x<1\\ \infty & 1<x<\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس مشاهده می کنید که با افزایش x نسبت صعودی است پس بر این اساس آزمون زیر به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>k\\ 0 & x\le k\end{cases} \qquad \Rightarrow E_{H_\circ}[\varphi(x)]=\int_k^1 1dx=\alpha \Rightarrow 1-k=\alpha \qquad \Rightarrow k=1-\alpha$$

$$0<\alpha<\frac{1}{2}\Rightarrow B^*=E_{H_1}[\varphi(x)]=\int_{1-\alpha}^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}+\alpha$$

$$\alpha>\frac{1}{2}\Rightarrow B^*=E_{H_1}[\varphi(x)]=\int_1^{\frac{3}{2}}dx=1$$

۶- فرض کنید x یک متغیر تصادفی پیوسته باشد در هریک از آزمونهای زیر پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.05$را بدست آورید و توان آزمون را تعیین کنید

$$i)H_\circ : x \sim N(0,1) \qquad \& \qquad H_1 : x \sim c(0,1)$$

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\frac{1}{\pi(1+x^2)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}}>k\Rightarrow\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{1+x^2}>c$$

حال نمودار $\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{1+x^2}$ را رسم می کنیم و آزمون را بنا به تعریف لم بنمن- پیوسته اجرا می کنیم

$$y=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{1+x^2}>c$$

چون y زوج است پس نسبت به محور y متقارن است

اگر خط $y=c$ را مانند بالا به ازاء $0.8<c<1$ رسم کنیم آزمون به صورت زیر است

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1 & |x|<k_1 \;\; or \;\; |x|>k_2 \\ 0 & o.w\end{cases}$$

اگر خط $y=c$ را به ازاء $c\geq 1$ مانند زیر رسم کنیم آزمون به صورت زیر است

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1 & |x|>k_3 \\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=E_{H_\circ}(\varphi_2(x))=p_{H_\circ}(|x|>k_3)=2p(x>k_3)=0.05$$

$$p(z>k_3)=0.025\Rightarrow k_3=1.96\Rightarrow \varphi_2(x)=\begin{cases}1 & |x|>1.96 \\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$B^*=E_{H_1}[\varphi(x)]=p_{H_1}(|x|>1.96)=\frac{1}{n}\int_{1.96}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{-1.96}\frac{1}{1+x^2}dx=0.29$$

(6.ii

$$H_\circ : x \quad u(0,1) \qquad \& \qquad H_1 : x \quad Beta(1,2)$$

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=2(1-x)>k\Rightarrow x<c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<c \\ 0 & ow\end{cases}$$

$$E_{H_\circ}(\varphi(x))=\alpha=0.05\Rightarrow \int_0^c dx=\alpha=0.05\Rightarrow c=0.05$$

$$B^*=E_{H_1}[\varphi(x)]=\int_0^{0.05}2(1-x)dx=-(1-x)^2\Big]_0^{0.05}=0.975$$

(6iii

$$H_\circ : x \quad N(0,1) \qquad \& \qquad H_1 : x \quad Lp(0,1,1)$$

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\frac{1}{2}e^{-|x|}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}}>k_1\Rightarrow e^{\frac{1}{2}x^2-|x|}>k_2\Rightarrow\frac{1}{2}x^2-|x|>k_3\Rightarrow(|x|-1)^2>c \qquad (1)$$

از این مرحله دو روش داریم

روش 1) بررسی مقادیر مختلف k_1

الف) اگر $0.76 \le k_1 \le 0$ باشد در آن صورت c یک مقدار منفی است پس آزمونی بنا به (1) وجود ندارد

ب) اگر $1.25 \le k_1 \le 0.76$ در آن صورت $0<c<1$ است پس داریم

$$\begin{cases} |x|-1>\sqrt{c}\Rightarrow|x|>c'\Rightarrow c'=\sqrt{c}+1 \\ |x|-1>-\sqrt{c}\Rightarrow|x|>c''\Rightarrow c''=1-\sqrt{c} \end{cases}$$

در این حالت آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & |x|>c' \ \ or \ \ |x|<c'' \\ 0 & o.w\end{cases}$$

ج) اگر $k_1>1.25$ باشد در آن صورت $c\ge1$ است

$$\begin{cases} |x|-1>\sqrt{c}\Rightarrow|x|>\sqrt{c}+1=c''' \\ |x|-1>-\sqrt{c}\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow ** \end{cases}$$

توضیح ** : چون $c>1$ غیر ممکن است

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & |x|>c'' \\ 0 & o.w\end{cases}$$

روش 2) از طریق شکل

ابندا شکل $(|x|-1)^2$ را رسم می کنیم دقت کنید $k_1>0$ و $-\infty<c<\infty$ است

در این شکل سه نوع تقارن وجود دارد

(نسبت به خط $y=0$ ، خط $y=1$ وخط $y=-1$) براین اساس داریم

اگر $y=c$ داشته باشیم آنگاه $0<c<1$ را داریم

به علت تقارن به راحتی می توان بررسی کرد که $r_1=2-r_2$ (خودتان نشان دهید)

پس آزمون بنا به نسبت $\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=(|x|-1)^2>c$ به صورت زیر است

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & |x|>r_3 \ \ or \ \ |x|>2-r_2 \\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\alpha=p_{H_\circ}(|x|<r_2)+p(|x|>2-r_2)=p(x<r_2)-p(x<-r_2)+2p(x<r_2-2)-2=0.5$$

حال باید r_2 با بیابیم که در رابطه بالا صدق کند

ب) اگر $c>1$ باشد آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|>r_3 \\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$0.05=E_{H_\circ}[\varphi(x)]=p_{H_\circ}(|x|>r_3)\Rightarrow r_3=1.96$$

$$B^* = E_{H_1}[\varphi(x)] = p_{H_1}(|x| > 1.96)$$

می دانیم $E(1)$ $\quad u = |x|$ است پس داریم

$$B^* = p_{H_1}(|x| > 1.96) = e^{-1.96}$$

(6iv

$$H_\circ : x \quad u(0,1) \qquad \& \qquad H_1 : x \quad Beta(4,1)$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{3x^4}{1} > k \Rightarrow x > c$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < c \\ 0 & ow \end{cases} \qquad \alpha = \int_c^1 dx = 0.05 \Rightarrow 1 - c = 0.05 \Rightarrow c = 0.95$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > 0.95 \\ 0 & ow \end{cases} \qquad B^* = \int_{0.95}^1 4x^4 dx = \frac{4x^5}{5}\Big]_{0.95}^{1} = \frac{4}{5}(1 - (0.95)^5) = 0.19$$

۷- فرض کنید $x \quad Ge(p)$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_\circ : p = 0.1 \qquad \& \qquad H_1 : p = 0.2$$

الف) پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha = 0.19$ را به دست آورید

ب) پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha = 0.22$ را به دست آورید

الف)

$$x \quad p(1-p)^x \qquad x = 0,1,\ldots$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \le c \\ 0 & ow \end{cases} \qquad \alpha = 0.19 = \sum_{x=0}^{c} 0.1 \times 0.9^x \Rightarrow \sum_{x=0}^{c} 0.9^x = 1.9 \Rightarrow c = 1$$

ب)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \le 1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

$$\alpha = E_{H_\circ}[\varphi(x)]$$

$$\sum_{x=0}^{1} 0.1 \times 0.9^x = 0.19 \qquad \sum_{x=0}^{2} 0.1 \times 0.9^x = 0.271$$

پس بنا به آزمونهای تصادفی شده داریم

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ \delta & x = 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\alpha = 0.22 = \sum_{x=0}^{1} 0.1 \times 0.9^x + \delta(0.1 \times 0.9^2) \Rightarrow 0.03 = \delta \times 0.081 \Rightarrow \delta = 0.37$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<2\\ 0.37 & x=2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

۸- فرض کنید $x \quad HG(10,\theta,3)$ باشد آزمون زیر را انجام دهید

$H_{\circ}:\theta=5 \qquad \& \qquad H_1:\theta=6$

الف) اگر $x=2$ مشاهده شود فرض $H_{\circ}$ را رد می کنیم احتمال خطای توع اول و دوم را به دست آورید

ب) پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.05$ را به دست آورید

الف)

$$\alpha=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12} \qquad \beta=1-\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{15\times 4}{120}=\frac{1}{2}$$

ب)

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_{\circ}}}=\frac{\binom{6}{x}\binom{4}{1-x}}{\binom{5}{x}\binom{5}{3-x}}>k\Rightarrow\frac{(5-x)!(2+x)!}{(6-x)!(x+1)!}>k'\Rightarrow\frac{x+2}{6-x}>k''\Rightarrow x>c$$

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & x<c\\ \delta & x=c\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow\quad \varphi(t)=\begin{cases}1 & x<3\\ 0.6 & x=3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

۹- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد در هریک از حالات زیر پرتوان ترین آزمون سطح α رابرای آزمون $H_{\circ}:x \quad f_{\circ}$ ، $H_1:x \quad f_1$ به دست آورید

الف)

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_{\circ}}>\frac{5}{4}\\ 0 & ow\end{cases}\Rightarrow\quad \varphi_1(t)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & ow\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}\alpha=\frac{1}{4}\\ \beta^*=\frac{7}{16}\end{matrix}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_{\circ}}>\frac{3}{4}\\ 0 & ow\end{cases}\Rightarrow\quad \varphi_2(t)=\begin{cases}1 & x=1,4\\ 0 & ow\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta^*=\frac{12}{16}\end{matrix}$$

$$\varphi_3(t)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>\frac{1}{4}\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \varphi_3(t)=\begin{cases}1 & x=1,3,4\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=\frac{3}{4}\\ \beta^*=\frac{15}{16}\end{matrix}$$

ب) برای قسمت ب به بعد MP را فقط در 2 سطح بدست می آوریم . بدست آوردن MP را برای بقیه سطوح به عهدده دانشجو می گذاریم

MPدر سطح 0.01

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>5\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=7\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \beta^*=0.06$$

MP در سطح 0.05

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>2\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}1 & x>2\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \beta^*=0.2$$

ج)

MP در سطح 0.02

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>4\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=2\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \beta^*=0.09$$

MP در سطح 0.07

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>3.3\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=2,5\\ 0 & ow\end{cases} \Rightarrow \beta^*=0.29$$

د)

MP در سطح 0.05

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}\geq 3\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \beta^*=0.15$$

MP در سطح 0.1

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>2.5\\ \delta & \frac{f_1}{f_\circ}=2.5\\ 0 & \frac{f_1}{f_\circ}<2.5\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0.5 & x=2\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \beta^*=0.275$$

ه)

MP در سطح 0.05

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}\geq 4\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=2,8\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \beta^*=0.2$$

MPT در سطح 0.1

$$.\varphi(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_1}{f_\circ}>3.3\\ \delta & \frac{f_1}{f_\circ}=3.3\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & x=2,8\\ \delta & x=12\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=0.1=p(x=2,8)+\delta\, p(x=12)=0.05+\delta\times 0.06 \Rightarrow \delta=\frac{0.05}{0.06}=\frac{5}{6}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x=2,8\\ \frac{5}{6} & x=12\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \beta^*=0.06$$

۱۰- فرض کنید X و Y یک نمونه تصادفی 2 تایی از توزیع $Beta(\theta,1)$ باشد پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$ که برابر است با 0.15 را برای آزمونهای زیر به دست آورید

الف)

$H_\circ:\theta=1 \qquad \& \qquad H_1:\theta=2$

ب)

$H_\circ:\theta=2 \qquad \& \qquad H_1:\theta=1$

الف)

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = 4xy > k \Rightarrow xy > c$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & xy > c \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حال دو راه را برای بدست آوردن c ارائه می کنیم

1)

$$p(xy > c) = \frac{(1-\ln 2)}{2} \Rightarrow p(-2\ln x - 2\ln y < -2\ln c) = \frac{(1-\ln 2)}{2}$$

$$p(\chi_4^2 < -2\ln c) = \frac{(1-\ln 2)}{2} \Rightarrow -2\ln c = \chi^2_{4,\frac{1}{2}(1-\ln 2)} \Rightarrow c = e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{4,\frac{(1-\ln 2)}{2}}} = 0.51$$

2) ابتدا تابع توزیع xy را حساب می کنیم

$$F_{xy}(u) = p(y < \frac{u}{x})$$

$$= u + \int_u^1 \int_0^{\frac{u}{x}} \theta^2 (xy)^{\theta-1} dy dx = u - \theta u^\theta \ln u$$

$$\alpha = p_{H_\circ}(xy > c) = 1 - p_{xy}(c) = 1 - c + c\ln c = \frac{1}{2}(1-\ln 2) \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ب)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & xy > 0.5 \\ 0 & ow \end{cases}$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{1}{4xy} > k \Rightarrow xy < c$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & xy < c \\ 0 & ow \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = p(xy < c) = F_{xy}(c) = c - c\ln c = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

حال باید c که در رابطه بالا صدق می کند را بیابیم

۱۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد پرتوان ترین آزمون سطح α را برای آزمون $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ ، $H_1 : \theta = \theta_1$ بدست آورید. $\theta_1 > \theta_\circ$

$$i)\, f_\theta(x) = 2\theta x + 1 - \theta \qquad 0 < x < 1 \qquad -1 \le \theta \le 1$$

$$y = \frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{2\theta_1 x + (1-\theta_1)}{2\theta_\circ x + (1-\theta_\circ)} > k$$

تابع $\dfrac{2\theta_1 x+(1-\theta_1)}{2\theta_\circ x+(1-\theta_\circ)}$ نسبت به X صعودی است چون مشتق آن بزرگتر از صفر است

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\theta_1(1-\theta_\circ)-2\theta_\circ(1-\theta_1)}{(2\theta_\circ x+(1-\theta_\circ))^2}=\frac{2\theta_1-2\theta_\circ}{(2\theta_\circ x+(1-\theta_\circ))^2}\geq 0$$

پس بنا به لم بنمن پیرسن آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=E_{H_\circ}[\varphi(x)]=\int_c^1 2\theta_\circ x+(1-\theta_\circ)dx=\theta_\circ x^2+(1-\theta_\circ)x]_c^1=1-\theta_\circ c^2-(1-\theta_\circ)c=\alpha$$

$$\theta_\circ c^2+(1-\theta_\circ)c+(\alpha-1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{(\theta_\circ-1)\pm\sqrt{(1-\theta_\circ)^2-4\theta_\circ(\alpha-1)}}{2\theta_\circ}$$

جواب اصلی به صورت مقابل است

$$c=\frac{(\theta_\circ-1)+\sqrt{(1-\theta_\circ)^2-4\theta_\circ(\alpha-1)}}{2\theta_\circ}$$

$$ii)\, f_\theta(x)=(\theta+1)x^\theta$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{(\theta_1+1)x^{\theta_1}}{(\theta_\circ+1)x^{\theta_\circ}}>r \quad\Rightarrow\quad x^{\theta_1-\theta_\circ}>c \quad\Rightarrow\quad (\theta_1-\theta_\circ)\ln x>c' \quad\Rightarrow\quad \ln x>r \quad\Rightarrow\quad x>k$$

$$\varphi(x)\begin{cases}1 & x>k\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \alpha=E_{H_\circ}[\varphi(x)]=p_{\theta_\circ}(x>k)$$

$$\alpha=p(x>k)=p(-\ln x<-\ln k)=p_{\theta_\circ}(-2(\theta_\circ+1)\ln x<-2(\theta_\circ+1)\ln k)=\alpha=p(\chi_2^2<-2(\theta_\circ+1)\ln k)$$

$$\Rightarrow \chi_{2,\alpha}^2=-2(\theta_\circ+1)\ln k\Rightarrow k=\exp[\frac{\chi_{2,\alpha}^2}{-2(\theta_\circ+1)}]$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \exp[\dfrac{\chi_{2,\alpha}^2}{-2(\theta_\circ+1)}]\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$iii)\frac{2}{\theta^2}(\theta-x) \qquad 0<x<\theta$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\frac{2}{\theta_1^2}(\theta_1-x)I_{(0,\theta_1)}^{(x)}}{\frac{2}{\theta_\circ^2}(\theta_\circ-x)I_{(0,\theta_\circ)}^{(x)}}>k\Rightarrow\frac{(\theta_1-x)I_{(0,\theta_1)}^{(x)}}{(\theta_\circ-x)I_{(0,\theta_\circ)}^{(x)}}=\begin{cases}\dfrac{\theta_1-x}{\theta_\circ-x} & 0<x<\theta_\circ\\ \infty & \theta_\circ<x\end{cases}$$

تابع $\frac{\theta_1 - x}{\theta_\circ - x}$ خود یک تابع صعودی از x است پس بنابه لم نیمن پیرسن به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha = E_{H_\circ}[\varphi(x)] = p_{\theta_\circ}(x>c) = \int_c^{\theta_\circ} \frac{2}{\theta_\circ^2}(\theta_\circ - x)dx = -\frac{(\theta_\circ - x)^2}{\theta_\circ^2}]_c^{\theta_\circ} = \frac{(\theta_\circ - c)^2}{\theta_\circ^2} = \alpha$$

$$\theta_\circ - \sqrt{\alpha\theta_\circ^2} = c \qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & x>\theta_\circ - \sqrt{\alpha\theta_\circ^2}\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$iv)\, f_\theta(x) = 2\theta + 2(1-\theta)(1-x) \qquad 0<x<1 \qquad 0<\theta<1$$

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}} = \frac{2\theta_1 + 2(1-\theta_1)(1-x)}{2\theta_\circ + 2(1-\theta_\circ)(1-x)} > k$$

تابع $\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}$ نسبت به X صعودی است چون مشتق آن بزرگتر از صفر است

$$\frac{4(\theta_1 - \theta_\circ)}{(4\theta_\circ x - 2x + 2 - 2\theta_\circ)^2} > 0$$

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases} \qquad \alpha = E_{H_\circ}[\varphi(x)]$$

$$\alpha = p_{\theta_\circ}(x>c) = \int_c^1 2\theta_\circ x + 2(1-\theta_\circ)(1-x)dx = \theta_\circ x^2 - (1-\theta_\circ)(1-x)^2]_c^1$$

$$= \theta_\circ - \theta_\circ c^2 + (1-\theta_\circ)(1-c)^2 = \alpha \Rightarrow \theta_\circ - \theta_\circ c^2 + 1 - 2c + c^2 - \theta_\circ + 2\theta_\circ c - \theta_\circ c^2 - \alpha = 0$$

$$(1-2\theta_\circ)c^2 + (2\theta_\circ - 2)c + 1 - \alpha = 0 \Rightarrow c = \frac{2-2\theta_\circ + \sqrt{(2\theta_\circ - 2)^2 - 4(1-2\theta_\circ)(1-\alpha)}}{2(1-2\theta_\circ)}$$

$$f_\theta(x) = \frac{e^{(x-\theta)}}{[1+e^{(x-\theta)}]^2}$$

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}} = \frac{\dfrac{e^{(x-\theta_1)}}{[1+e^{(x-\theta_1)}]^2}}{\dfrac{e^{(x-\theta_\circ)}}{[1+e^{(x-\theta_\circ)}]^2}}$$

بنا به آنچه در فصل بعد می خوانید این تابع چگالی دارای پارامتر مکانی است حال اگر $(-\ln g(x))'$ صعودی باشد تابع دارای خاصیت MLR است یعنی نسبت بالا نسبت به x صعودی است

$$g(x) = \frac{e^x}{[1+e^x]^2} \Rightarrow -\ln g(x) = -x + 2\ln[1+e^x] \Rightarrow [-\ln g(x)]' = -1 + 2\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$[-\ln g(x)]'' = 2\frac{e^{x}+e^{2x}-e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}} = \frac{2e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} > 0$$

محدب است

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha = E_{\theta_\circ}[\varphi(x)] = \int_c^\infty \frac{e^{(x-\theta)}}{[1+e^{(x-\theta)}]^2}\,dx = \frac{-1}{[1+e^{(x-\theta_\circ)}]}\Big]_c^\infty = \frac{1}{1+e^{(c-\theta_\circ)}} = \alpha$$

$$e^{(c-\theta_\circ)} = \frac{1}{\alpha}-1 \Rightarrow e^{c} = e^{\theta_\circ}(\frac{1-\alpha}{\alpha}) \Rightarrow c = \theta_\circ + \ln(\frac{1-\alpha}{\alpha})$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>\theta_\circ+\ln(\frac{1-\alpha}{\alpha})\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$vi)\theta^{x}(1-\theta)^{1-x} \qquad x=0,1 \qquad 0<\theta<1$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{\theta_1^{\,x}(1-\theta_1)^{1-x}}{\theta_\circ^{\,x}(1-\theta_\circ)^{1-x}} > k_1 \Rightarrow (\frac{\theta_1(1-\theta_\circ)}{\theta_\circ(1-\theta_1)})^{x} > k_2 \Rightarrow x\ln(\frac{\theta_1(1-\theta_\circ)}{\theta_\circ(1-\theta_1)}) > \ln k_2$$

که چون $\frac{\theta_1(1-\theta_\circ)}{\theta_\circ(1-\theta_1)} > 1$ است نتیجه می شود که $x>c$ پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ \delta & x=c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$vii)f_\theta(x) = \frac{x^{\theta-1}e^{-x}}{\Gamma(\theta)}$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{x^{\theta_1-1}e^{-x}\Gamma(\theta_\circ)}{x^{\theta_\circ-1}e^{-x}\Gamma(\theta_1)} > k \Rightarrow x^{\theta_1-\theta_\circ} > k_2 \Rightarrow x>c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha = p(x>c) = p(2x>2c) = p(\chi^2_{2\theta_\circ} > 2c)$$

$$\Rightarrow \chi^2_{2\theta_\circ,1-\theta_\circ} = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\chi^2_{2\theta_\circ,1-\alpha}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>\frac{1}{2}\chi^2_{2\theta_\circ,1-\alpha}\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$viii)f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \qquad x\ge\theta$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{e^{\theta_1-\theta_\circ}I^{(x)}_{(\theta_1,\infty)}}{I^{(x)}_{(\theta_\circ,\infty)}} = \begin{cases}0 & \theta_\circ<x<\theta_1\\ e^{\theta_1-\theta_\circ} & x>\theta_1\end{cases}$$

نسبت به X صعودی است پس آزمون به صورت زیر است .

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$ix)\theta^2 xe^{-\theta x}=\Gamma(2,\theta)$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\theta_1^2 xe^{-\theta_1 x}}{\theta_\circ^2 xe^{-\theta_\circ x}}>k\Rightarrow e^{-(\theta_1-\theta_\circ)x}>k_2\Rightarrow-(\theta_1-\theta_\circ)x>k_3\Rightarrow x<c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=p(x<c)=p(2\theta_\circ x<2\theta_\circ c)=p(\chi_4^2<2\theta_\circ c)$$

$$\Rightarrow \chi_{4,\alpha}^2=2\theta_\circ c\Rightarrow c=\frac{1}{2\theta_\circ}\chi_{4,\alpha}^2$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<\frac{1}{2\theta_\circ}\chi_{4,\alpha}^2\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$x)f_\theta(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{2\theta_\circ}{2\theta_1}e^{-\frac{|x|}{\theta_1}+\frac{|x|}{\theta_\circ}}>k_1\Rightarrow e^{|x|(\frac{1}{\theta_\circ}-\frac{1}{\theta_1})}>k_2\Rightarrow|x|>c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|>c\\ 0 & ow\end{cases}\qquad |x|\quad E(\frac{1}{\theta})$$

$$\alpha=p_{\theta_\circ}(|x|>c)=p(\frac{2|x|}{\theta_\circ}>\frac{2c}{\theta_\circ})\Rightarrow p(\chi_2^2>\frac{2c}{\theta_\circ})=\alpha\Rightarrow\chi_{2,1-\alpha}^2=\frac{2c}{\theta_\circ}\Rightarrow c=\frac{\theta_\circ}{2}\chi_{2,1-\alpha}^2$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|>\frac{\theta_\circ}{2}\chi_{2,1-\alpha}^2\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$xi)\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\qquad 0<x<1$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\theta_\circ}{\theta_1}\frac{x^{\frac{1}{\theta_1}-1}}{x^{\frac{1}{\theta_\circ}-1}}>k\Rightarrow x^{\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_\circ}}>k_2\Rightarrow(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_\circ})>k_3\Rightarrow\ln x>k_4\Rightarrow x>c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=p_{\theta_\circ}(x>c)=p(-\ln x>-\ln c)\Rightarrow p(-\frac{2}{\theta_\circ}\ln x<-\frac{2}{\theta_\circ}\ln c)=p(\chi_2^2<-\frac{2}{\theta_\circ}\ln c)=\alpha$$

$$\Rightarrow\chi_{2,\alpha}^2=-\frac{2}{\theta_\circ}\ln c\Rightarrow c=\exp\{-\frac{\theta_\circ}{2}\chi_{2,\alpha}^2\}$$

$$xii)\ \frac{1}{6\theta^4}x^3e^{-\frac{x}{\theta}}=P(4,\frac{1}{\theta})$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\theta_\circ^{\,4}}{\theta_1^{\,4}}e^{-x(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_\circ})}>k_1\Rightarrow e^{x(\frac{1}{\theta_\circ}-\frac{1}{\theta_1})}>k_2\Rightarrow x(\frac{1}{\theta_\circ}-\frac{1}{\theta_1})>k_3\Rightarrow x>c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=E_{H_\circ}(\varphi(x))=p_{\theta_\circ}(x>c)=p(\frac{2x}{\theta_\circ}>\frac{2c}{\theta_\circ})=p(\chi_8^2>\frac{2c}{\theta_\circ})=\alpha\Rightarrow\chi^2_{2,1-\alpha}=\frac{2c}{\theta_\circ}\Rightarrow c=\frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{2,1-\alpha}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>\frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{2,1-\alpha}\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$xiii)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_\circ}}e^{-\frac{x^2}{2}(\frac{1}{\theta_\circ}-\frac{1}{\theta_1})}>k_1\Rightarrow\frac{x^2}{2}(\frac{1}{\theta_\circ}-\frac{1}{\theta_1})>k_2\Rightarrow x^2>c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x^2>c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=E_{H_\circ}(\varphi(x))=p_{\theta_\circ}(x^2>c)=p(\frac{x^2}{\theta_\circ}>\frac{c}{\theta_\circ})=p(\chi_1^2>\frac{c}{\theta_\circ})=\alpha\Rightarrow\chi^2_{1,1-\alpha}=\frac{c}{\theta_\circ}\Rightarrow c=\frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x^2>\frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$xiv)\ f_\theta(x)=2(1-\theta)x+\theta\qquad 0<x<1$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{2(1-\theta_1)x+\theta_1}{2(1-\theta_\circ)x+\theta_\circ}>k$$

این نسبت یک تابع نزولی نسبت به X است چون مشتق آن کوچکتر از صفر است

$$\frac{\partial\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}}{\partial x}=\frac{2\theta_\circ-2\theta_1}{(2(1-\theta_\circ)x+\theta_\circ)^2}$$

پس تابع نسبت به x- صعودی است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<c\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=p_{\theta_\circ}(x<c)=\int_0^c 2(1-\theta_\circ)x+\theta_\circ dx=(1-\theta_\circ)x^2+\theta_\circ x]_0^c\Rightarrow(1-\theta_\circ)c^2+\theta_\circ c$$

$$c=\frac{\theta_\circ+\sqrt{\theta_\circ^{\,2}+4\alpha(1-\theta_\circ)}}{2(1-\theta_\circ)}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<-\dfrac{\theta_\circ+\sqrt{\theta_\circ^2+4\alpha(1-\theta_\circ)}}{2(1-\theta_\circ)}\\ 0 & o.w\end{cases}$$

۱۲- فرض کنید Z یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمالهای زیر باشند علاقه مند به آزمون $H_\circ : z \quad f_\circ(z)$ و $H_1 : z \quad f_1(z)$ هستیم

الف) پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.3$ را بدست آورید

ب) پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.3$ را با ناحیه بحرانی $c=\{z_4\}$ مقایسه کنید

الف)

$$\varphi(x)=\begin{cases}1\\0\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{f_1}{f_\circ}\geq\dfrac{3}{2}\\ 0 & o.w\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & Z=z_1,z_3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

ب) توان آزمون MP برابر با $B^*=0.6$ است این در حالی است که توان آزمون با ناحیه بحرانی $c=\{z_4\}$ برابر با $B^*=0.2$ است و این در حالی است که هر دو آزمون دارای $\alpha=0.3$ هستند پس به وضوح برتری آزمون MP مشخص است

۱۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمالهای زیر باشد پرتوان ترین سطح α برای آزمون $H_\circ : x \quad f_\circ$ و $H_1 : x \quad f_1$ را بدست آورید

$$f_\circ(x)=\begin{cases}4x & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ 4(1-x) & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}\qquad\qquad f_1(x)=1\qquad 0<x<1$$

می دانیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{1}{4x}>k\qquad 0<x<\frac{1}{2}\qquad\text{و}\qquad \frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{1}{4(1-x)}>k\qquad \frac{1}{2}<x<1$$

حال ما نمودار این دو نسبت را بر روی یک محور مختصات رسم می کنیم

به وضوح می توان مشاهده کرد که این شکل نسبت به

خط $x=\dfrac{1}{2}$ متقارن است پس داریم $K_2=1-K_1$

پس با این اوصاف آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<k_1<\dfrac{1}{2}\quad or\quad x>1-k_1\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$\alpha=p_{H_\circ}(x>c)=p(x>k_1)+p(x>1-k_1)=\int_0^{k_1}4xdx+\int_{1-k_1}^{1}4(1-x)dx=\alpha\Rightarrow 2k_1^2+2k_1^2=\alpha\Rightarrow k_1^2=\frac{\alpha}{4}\Rightarrow k_1=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \quad or \quad x>1-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\\ 0 & o.w\end{cases}$$

۱۴- فرض کنید $x_1,x_2,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $u(\theta_1,\theta_2)$ باشد آزمونهای زیر را در سطح αانجام دهید

$$i)H_\circ:\theta_1=-1,\theta_2=1 \qquad \& \qquad H_1:\theta_1=-2,\theta_2=2$$

براساس آزمون بالا ما تابع چگالی و آزمون را به صورت زیر ارائه می کنیم که هر دو یک مفهوم هستند

$$x_1',x_2',...,x_n' \quad u(-\theta,\theta) \qquad H_\circ:\theta=1 \qquad H_1:\theta=2$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{\prod_{i=1}^{n}I_{(-2,2)}^{(x_i)}}{\prod_{i=1}^{n}I_{(-1,1)}^{(x_i)}}>k_1\Rightarrow\frac{I_{(-\infty,2)}^{\max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}}}{I_{(-\infty,2)}^{\max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}}}=\begin{cases}1 & \max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}<1\\ \infty & <1\max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}<2\end{cases}$$

پس نسبت به $\max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}<1$ ، نسبت صعودی است پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}>k\\ 0 & o.w\end{cases}=\begin{cases}1 & \max\{x_{(n)},-x_{(1)}\}>k\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad y_i=|x_i| \quad u(0,\theta)$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & y_{(n)}>k\\ 0 & ow\end{cases} \qquad y_{(n)} \quad n\frac{y^{n-1}}{\theta^n}$$

$$ii)H_\circ:\theta_1=0,\theta_2=1 \qquad \& \qquad H_1:\theta_1=0,\theta_2=2.5$$

براساس آزمون فرض بالا تابع چگالی و آزمون را به صورت زیر ارائه می کنیم.

$$x_1,x_2,...,x_n \quad u(0,\theta_2)$$

$$H_\circ:\theta_2=1 \qquad \& \qquad H_1:\theta_2=0.25$$

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}=\frac{I_{(0,0.25)}^{(x_{(n)})}}{4I_{(0,1)}^{(x_{(n)})}}>k_1\Rightarrow\frac{I_{(0,0.25)}^{(x_{(n)})}}{I_{(0,1)}^{(x_{(n)})}}=\begin{cases}1 & 0<x_{(n)}<0.25\\ 0 & 0.25<x_{(n)}<1\end{cases}$$

این نسبت $=\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}}$، نسبت به $x_{(n)}$ نزولی است پس تابع آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}<k\\ 0 & ow\end{cases} \qquad x_{(n)} \quad \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\alpha=p_{H_\circ}(x>k)=\int_0^k ny^{n-1}dy=y^n]_0^k=k^n\Rightarrow k=\sqrt[n]{\alpha}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}<\sqrt[n]{\alpha}\\ 0 & ow\end{cases}$$

۱۵- فرض کنید $E(1) \quad x$ اگر $y=x^{\theta}$ پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha=0.05$ را برای آزمون $H_\circ:\theta=1$ و $H_1:\theta=2$ به دست آورده و توان آزمون را محاسبه کنید

$$y \quad \frac{1}{\theta}y^{\frac{1}{\theta}-1}e^{-y^{\frac{1}{\theta}}}$$

ابتدا تابع چگالی y را محاسبه می کنیم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \Big/ e^{-y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{y-\sqrt{y}} > k \Rightarrow \frac{e^{y-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} > c$$

نمودار تابع $\frac{e^{y-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$ به صورت زیر است

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < k_1 \quad or \quad x > k_2 \\ 0 & \quad ow \end{cases}$$

حال باید K_1 و K_2 را طوری به دست آوریم که در شرایط زیر صدق کنند

$$0.05 = \int_0^{k_1} e^{-y} + \int_{k_2}^{\infty} e^{-y} = 1 - e^{-k_1} + e^{-k_2} \Rightarrow e^{-k_2} - e^{-k_1} = 0.95$$

$$\begin{cases} \dfrac{e^{k_1-\sqrt{k_1}}}{\sqrt{k_1}} = \dfrac{e^{k_2-\sqrt{k_2}}}{\sqrt{k_2}} \\ e^{-k_2} - e^{-k_1} = 0.95 \end{cases}$$

که با استفاده از روشهای عددی براحتی قابل حل است

۱۷- نشان دهید اگر دستیابی به پرتوان ترین آزمون آماره بسنده وجود داشته باشد تابع آزمون تابعی از آماره بسنده خواهد بود

می دانیم اگر آماره بسنده وجود داشته باشد تابع جگالی را میتوان به صورت زیر توشت

$$f_\theta(x) = g(\theta, s(x))h(x)$$

حال اگر آزمون مورد نظربه صورت $H_\circ : x \quad f_{\theta_\circ}(x)$ و $H_1 : x \quad f_{\theta_1}(x)$ باشد

بنابه لم نیمن پیرسن داریم

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = \frac{g(\theta_1, s(x))h(x)}{g(\theta_\circ, s(x))h(x)} > k \Rightarrow \frac{g(\theta, s(x))}{g(\theta, s(x))} = g'(\theta_1, \theta_\circ, s(x)) > k$$

که بنا به صورت مسئله مشاهده می کنید که تابع آزمون تابعی از s(x) ، یعنی آماره بسنده است

۱۸- فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $N(\theta_i, 1)$ باشد می خواهیم آزمون $H_\circ : \theta_i = 0 \quad i = 1, ..., n$ در مقابل $H_1 : \theta_i = \frac{1}{2} \quad 1 \le i \le r$ و $\theta_i = -\frac{1}{2}$ انجام دهیم

الف) پرتوان ترین آزمون سطح $\alpha = 0.05$ را بدست آورید

ب) اندازه n چقدر باشد تا توان آزمون حداقل برابر ۰/۹ باشد

$$\frac{f_{H_1}}{f_{H_\circ}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=r+1}^{n}(x_i - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}\sum x_i^2} > k$$

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=r+1}^{n}(x_i - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=r+1}^{n} x_i - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i} > k$$

$$e^{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i)} > k' \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i > c$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i > c \\ 0 & ow \end{cases}$$

حال تحت فرض $H_\circ$ داریم

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \quad N(0,r) \qquad\qquad \sum_{i=r+1}^{n} x_i \quad N(0,n-r)$$

$$y_{H_\circ} = \sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i \quad N(0,n)$$

$$\alpha = p(y_{H_\circ} > c) = p(z > \frac{c}{\sqrt{n}}) \Rightarrow Z_{1-\alpha} = \frac{c}{\sqrt{n}} \Rightarrow c = \sqrt{n} Z_{1-\alpha} = \sqrt{n} Z_{0.95}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i > \sqrt{n} \times (1.64) \\ 0 & ow \end{cases}$$

ب)

$$\beta^* = p_{H_1}(\sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i > 1.64\sqrt{n}) > 0.9$$

$$y_{H_1} = (\sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i \quad N(\frac{n}{2}, n)$$

$$p(\frac{y_{H_1} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} > \frac{1.64\sqrt{n} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}) > 0.9 \Rightarrow p(Z > \frac{1.64\sqrt{n} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}) > 0.9$$

$$\frac{3.28 - \sqrt{n}}{2} < -1.28 \Rightarrow \sqrt{n} > 5.84 \Rightarrow n > (5.84)^2 \Rightarrow n > 34.1$$

فصل ۸

۱- فرض کنید $x \quad B(10,\theta)$ تابع آزمون داده شده را برای آزمون زیر در نظر گرفته اندازه آزمون را به دست آورید

$$H_\circ:\theta=0.3 \quad \& \quad H_1:\theta\neq 0.3$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>6 \;\; or \;\; x<1\\ 0.4 & x=6\\ 0.2 & x=1\\ 0 & 1<x<6\end{cases}$$

$$\alpha=p_{H_\circ}(x>6)+p(x<1)+0.4p(x=6)+0.2p(x=1)=120\times 0.3^7\times 0.7^3+450\times 0.2^8\times 0.7^2$$
$$+10\times 0.3^9\times 0.7+0.3^{10}\times 0.4\times 210\times 0.3^6\times 0.4^4+0.2\times 10\times 0.3\times 0.7^9 =$$

۲- مفهوم خاصیت MLR چیست ؟ این خاصیت چه اهمیتی در نظریه آزمون فرض ها دارد ؟

خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا به دنبال آماره ای می گردد که نسبت $\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}$ تابعی غیر نزولی از آن باشد ، آماره ای که در خاصیت MLR صدق کند ناحیه رد آزمون را با بالاترین توان ایجاد می کند

خاصیت MLR را براساس مفهوم لم نیمن پیرسن نیز می توان درک کرد

۳- نشان دهید خانواده توزیع ها با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)=c(\theta)h(x)u(\theta-x)$ دارای خاصیت MLR است

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_\circ}(x)}=\frac{c(\theta_1)h(x)}{c(\theta_\circ)h(x)}\frac{I_{(0,\theta_1)}^{(x)}}{I_{(0,\theta_\circ)}^{(x)}}=\frac{c(\theta_1)}{c(\theta_\circ)}\frac{I_{(0,\theta_1)}^{(x)}}{I_{(0,\theta_\circ)}^{(x)}}=\begin{cases}\frac{c(\theta_1)}{c(\theta_\circ)} & 0<x<\theta_1\\ \infty & \theta_\circ<x<\theta_1\end{cases}$$

مشاهده می کنید که با افزایش x نسبت صعود می کند پس نسبت به x خاصیت MLR دارد

۴-نشان دهید خانواده توزیعهای $c(0,\theta)$ دارای خاصیت MLR است

$$x \quad \frac{1}{\theta n(1+(\frac{x}{\theta})^2)}$$

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_\circ}(x)}=\frac{\theta_\circ n(1+(\frac{x}{\theta_\circ})^2)}{\theta_1 n(1+(\frac{x}{\theta_1})^2)}=\frac{\theta_1(\theta_\circ^2+x^2)}{\theta_\circ(\theta_1^2+x^2)}$$

اگر نمودار این نسبت را رسم کنیم به صورت زیر است

به وضوح مشاهده می کنید (براساس شکل) که نسبت با افزایش $|x|$ صعودی است پس نسبت به $|x|$ خاصیت MLR داریم

۷- فرض کنید $u(0,\theta)$ x باشد برای آزمون $H_\circ:\theta\le 1$ و $H_1:\theta>1$ فرض $H_\circ$ رد می شود اگر $x\ge 9$ تابع توان آزمون را محاسبه کنید

$$p_\theta(x\ge 9)=\int_{0.9}^{\theta}\frac{dx}{\theta}=\frac{\theta-0.9}{\theta}\Rightarrow\alpha=\frac{1-0.9}{1}=0.1$$

۸- فرض کنید $Ge(\theta)$ x باشد برای آزمون $H_\circ:\theta=0.1$ و $H_1:\theta\ge 1$ پرتوان ترین آزمون یکنواخت سطح ۰/۱۹ و۰/۲۲را بدست آورید

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_\circ}(x)}=\frac{\theta_1(1-\theta_1)^x}{\theta_\circ(1-\theta_\circ)^x}=\frac{\theta_1}{\theta_\circ}(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_\circ})^x$$

چون $\frac{1-\theta_1}{1-\theta_\circ}$ کوچکتر از یک است پس نسبت به x- خاصیت MLR دارد پس تابع آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<c\\ \delta & x=c\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{1}0.1\times 0.9^x=0.19$$

پس برای $\alpha=0.19$ آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<2\\ 0 & x\ge 2\end{cases}$$

برای $\alpha=0.22$

$$0.22=p(x<2)+\delta\, p(x=2)\Rightarrow 0.03=\delta\times 0.081\Rightarrow\delta=0.37$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x<2\\ 037 & x=2\\ 0 & x>2\end{cases}$$

۱۰- فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}\qquad 0<x<1$$

علاقه مند به آزمون زیر در سطح α هستیم

$$H_\circ:\theta>\theta_\circ\qquad \& \qquad H_1:\theta<\theta_\circ$$

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_\circ}(x)}=(\frac{\theta_\circ}{\theta_1})^n\frac{e^{\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\sum\ln x_i}}{e^{\frac{1-\theta_\circ}{\theta_\circ}\sum\ln x_i}}=e^{(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_\circ})\sum\ln x_i}$$

نسبت به $\sum\ln x_i$- خاصیت MLR دارد پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum\ln x_i>c\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\alpha = p_{H_\circ}(\sum \ln x_i > c) = p(\frac{-2\sum \ln x_i}{\theta_\circ} < -\frac{2c}{\theta_\circ})$$
$$= p(\chi^2_{2n} < -\frac{2c}{\theta_\circ}) \Rightarrow \chi^2_{2n,\alpha} = -\frac{2c}{\theta_\circ}$$

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum \ln x_i > -\frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{2n,\alpha} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

ب) اگر n=2 ، $\theta_\circ = 1$ و $\alpha = 0.05$ باشد UMPT را تعیین کنید

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \ln x_1 + \ln x_2 > \frac{-\chi^2_{4,0.05}}{2} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

۱۱- فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه ۵ تایی از توزیع $\Gamma(4, \frac{1}{\theta})$ باشد پرتوان ترین آزمون یکنواخت سطح α را برای آزمون $H_\circ : \theta \geq 1$ و $H_1 : \theta < 1$ را بدست آورید

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_\circ}(x)} = (\frac{\theta_\circ}{\theta_1})^{19} e^{(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_\circ})\sum x_i}$$

نسبت به $\sum x_i$ خاصیت MLR دارد پس آزمو به صورت زیر است

$$\sum x_i \quad \Gamma(20, \frac{1}{\theta}) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \sum x_i < c \\ 1 & \sum x_i \geq c \end{cases}$$

$$\alpha = p_{H_\circ}(\sum x_i < c) = p(\frac{2\sum x_i}{\theta_\circ} < \frac{2c}{\theta_\circ}) \Rightarrow p(\chi^2_{40} < \frac{2c}{\theta_\circ}) \Rightarrow \chi^2_{40,\alpha} = \frac{2c}{\theta_\circ} \Rightarrow c = \frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{40,\alpha}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum x_i < \frac{\theta_\circ}{2}\chi^2_{40,\alpha} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

۱۲- فرض کنید $x \quad u(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ باشد می خواهیم آزمون $H_\circ : \theta \leq 3$ در مقابل $H_1 : \theta \geq 3$ را انجام دهیم UMPT اندازه $\alpha = 0.05$ را بدست آورده و تابع توان را بدست آورید

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}} = \frac{I^{(x)}_{(\theta_1 - \frac{1}{2}, \theta_1 + \frac{1}{2})}}{I^{(x)}_{(\theta_\circ - \frac{1}{2}, \theta_\circ + \frac{1}{2})}}$$

حالت برای این نسبت دو حالت در نظر می گیریم

حالت اول : $\theta_\circ - \frac{1}{2} < \theta_1 - \frac{1}{2} < \theta_\circ + \frac{1}{2} < \theta_1 + \frac{1}{2}$

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}=\begin{cases}0 & \theta_\circ-\frac{1}{2}<x<\theta_1+\frac{1}{2}\\ 1 & \theta_1+\frac{1}{2}<x<\theta_\circ-\frac{1}{2}\\ \infty & \theta_\circ-\frac{1}{2}<x<\theta_1+\frac{1}{2}\end{cases}$$

حالت دوم : $\theta_\circ-\frac{1}{2}<\theta_\circ+\frac{1}{2}<\theta_1-\frac{1}{2}<\theta_1+\frac{1}{2}$

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}=\begin{cases}0 & \theta_\circ-\frac{1}{2}<x<\theta_\circ+\frac{1}{2}\\ R(x) & \theta_\circ+\frac{1}{2}<x<\theta_1-\frac{1}{2}\\ \infty & \theta_1-\frac{1}{2}<x<\theta_\circ+\frac{1}{2}\end{cases}$$

در این حالت $R(x)$ را مقداری عضو $[0,\infty)$ در نظر می گیریم

پس مشاهده می کنید در هر دو حالت نسبت $\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}$ ، نسبت به x صعودی است پس نسبت به x خاصیت MLR داریم

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x>c\\ 1 & x\le c\end{cases}$$

$$\alpha=p_{H_\circ}(x>c)=\int_c^{3+\frac{1}{2}}dx=0.05\Rightarrow c=\frac{5}{2}-0.05=2.45$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x>2.45\\ 1 & x\le 2.45\end{cases}$$

$$p_{\theta_\circ}(x>c)=\int_{2.45}^{\theta+\frac{1}{2}}dx=\theta-1.95$$

۱۳- فرض کنید $x_1,x_2,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $\chi^2_{(\theta)}$ ، $\theta\in$ باشد می خواهیم آزمون $H_\circ:\theta\le 8$ و $H_1:\theta\ge 9$ را انجام دهیم UMPT اندازه $\alpha=0.05$ را بدست آورید

$$x_1,x_2,...,x_n \quad (\frac{1}{2})^{\theta}\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\theta}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\theta}{2})}$$

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}=\frac{2^{\theta_\circ}}{2^{\theta_1}}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\frac{\theta_1}{2}-\frac{\theta_\circ}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\theta_\circ}{2})}{\Gamma(\frac{\theta_1}{2})}$$

به وضوح مشخص است که تابع $\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}$ نسبت به $\prod_{i=1}^{n}x_i$ دارای خاصیت MLR است پس آزمون زیر به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \prod_{i=1}^{n} x_i > c\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad\qquad 0.05=p_{\theta=8}(\prod_{i=1}^{n} x_i > c)$$

۱۴- فرض کنید $c(\theta,1)$ x باشد تابع آزمون φ با ناحیه بحرانی $x>1$ را به دست آورید نشان دهید نشان دهید تابع توان یک تابع صعودی است آیا آزمون φ یک UMPT برای آزمون $H_\circ:\theta<0$ و $H_1:\theta>0$ است

$$\Pi_\varphi(\theta)=p_\theta(x>1)=\int_1^\infty \frac{1}{\Pi(1+(x-\theta)^2)}=\frac{1}{\Pi}Arctg(\theta-1)$$

$$\frac{\partial\Pi_\varphi(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\Pi}\frac{1}{1+(\theta-1)^2}>0$$

پس نسبت به θ صعودی است

اما این آزمون یک آزمون UMPT نیست بنا به صفحه 361 قسمت ج کتاب

۱۵- فرض کنید $x_1,x_2,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $u(\theta,\theta+1)$ باشد می خواهیم آزمون $H_\circ:\lambda\le\lambda_\circ$ و $H_1:\lambda>\lambda_\circ$ را انجام دهیم UMPT اندازه $\alpha=0.05$ را بدست آورید

$$\frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_\circ)}=(\frac{\lambda_\circ}{\lambda_1})^n\frac{I_{(\theta,\theta+\lambda_1)}^{(x_{(n)})}}{I_{(\theta,\theta+\lambda_\circ)}^{(x_{(n)})}}=\begin{cases}(\frac{\lambda_\circ}{\lambda_1})^n & \theta<x_{(n)}<\theta+\lambda_\circ\\ \infty & \theta+\lambda_\circ<x_{(n)}<\theta+\lambda_1\end{cases}$$

نسبت به $x_{(n)}$ صعودی است پس خاصیت MLR نسبت به $x_{(n)}$ داریم

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x_{(n)}>c\\ 1 & o.w\end{cases} \quad y=x_{(n)} \quad \frac{n}{\lambda^n}(y-\theta)^{n-1}$$

$$0.05=p_{H_\circ}(x_{(n)}>c)=\int_c^{\theta+\lambda_\circ}\frac{n}{\lambda_\circ{}^n}(y-\theta)^{n-1}=(\frac{y-\theta}{\lambda_\circ})^n]_c^{\theta+\lambda_\circ}=1-(\frac{c-\theta}{\lambda_\circ})^n=0.05$$

$$c=\lambda_\circ\sqrt{0.95}+\theta_\circ$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x_{(n)}>\lambda_\circ\sqrt{0.95}+\theta_\circ\\ 1 & o.w\end{cases}$$

۱۶- فرض کنید X_1و X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $u(\theta,\theta+1)$باشد می خواهیم آزمون $H_\circ:\theta=0$ و $H_1:\theta>0$را انجام دهیم آزمونهای زیر را در نظر گیرید

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1 & x_{(1)}>0.95\\ 0 & x_{(1)}<0.95\end{cases} \quad \varphi_1(x)=\begin{cases}1 & x_1+x_2>c\\ 0 & o.w\end{cases}$$

الف) c را طوری تعیین کنید که اندازه آزمونهای φ_1و φ_2 برابر باشند

ب) تابع توان آزمونهای φ_1و φ_2 را بدست آورید

ج) نشان دهید φ_2 پرتوان تر از φ_1 است

اول اندازه آزمون φ_1 را بدست می آوریم

$$x_{(1)} \quad 2(1-x+\theta)$$

$$p_{H_\circ}(x_{(1)} > 0.95) = \int_{0.95}^{1} 2(1-y) = -(1-y)^2]_{0.95}^{1} = 0.0025$$

$$p(x_1 + x_2 > c) = 0.0025 \Rightarrow \int_{c-1}^{1}\int_{c-x_2}^{1} dx_1 dx_2 = \int_{c-1}^{1} 1 - c + x_2 dx$$

$$= x_2 - cx_2 + \frac{x_2{}^2}{2}]_{c-1}^{1} = \frac{3}{2} - 2c + 1 + \frac{c^2}{2} - \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow 2 - 2c + \frac{c^2}{2} = 0.0025$$

$$\begin{cases} c_1 = 1.93 \\ c_2 = 2.07 \end{cases}$$

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & x_1 + x_2 > 1.93 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

ب)

$$\Pi_{\varphi_1}(\theta) = p_\theta(x_{(1)} > 0.95) = \int_{0.95}^{\theta+1} 2(1-y+\theta)dy = -(1-y+\theta)^2]_{0.95}^{\theta+1} = (0.05-\theta.)^2$$

حال برای آزمون φ_2 سه حالت داریم :

حالت اول : $0 \le \theta < 0.465$

$$\Pi_{\varphi_2}(\theta) = p_\theta(x_1 + x_2 > 1.93) = \int_{0.93-\theta}^{\theta+1}\int_{0.93-\theta}^{\theta+1} dx_2 dx_1 = 2\theta^2 + 0.14\theta + 0.0025$$

حالت دوم : $0.465 < \theta < 0.965$

$$\Pi_{\varphi_2}(\theta) = p_\theta(x_1 + x_2 > 1.93) = 1 - \int_{\theta}^{1.93-\theta}\int_{\theta}^{1.93-x_1} dx_2 dx_1 = -2\theta^2 + 3.86\theta + 0.86$$

حالت سوم : $0.965 < \theta$

$$\Pi_{\varphi_2}(\theta) = 1$$

حالت به وضوح می توان براساس حایگذاری مقادیر مختلف θ مشاهده کرد که φ_2 پرتوان تر است.

۱۷- فرض کنید F تابع توزیعی به صورت زیر باشد

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & x \ge 0 \end{cases}$$

با تعریف $G_\theta(x) = [F(x)]^\theta$ ، $\theta > 0$ اگر $z_1, z_2, ..., z_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $G_\theta(x)$ باشد علاقه مند به آزمون $H_\circ : \theta = 1$ و $H_1 : \theta > 1$ هستیم UMPT اندازه $\alpha = 0.05$ را بدست آورید

$z_1,\dots,z_n \quad \frac{\theta}{2}(\frac{z}{z+1})^{\theta}=\theta\exp\{\theta\ln\frac{z}{z+1}-\ln z\}$

$f_{\theta}(z_1,\dots,z_n)=\theta^n\exp\{\theta\sum\ln\frac{z}{z+1}-\sum\ln z\}$

$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}=(\frac{\theta_1}{\theta_\circ})^n\exp\{(\theta_1-\theta_\circ)\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1}\}$

به وضوح مشخص است که نسبت $\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1}$ داریم

$-2\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1} \quad \chi^2_{2n}$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1}>c\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$\alpha=0.05=p_{H_\circ}(\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1}>c)=p(-2\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1}<-2c)=p(\chi^2_{2n}<-2c)\Rightarrow\chi^2_{2n,0.05}=-2c$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{z_i}{z_i+1}<\frac{1}{2}\chi^2_{2n,0.05}\\ 0 & o.w\end{cases}$$

۱۸- فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از $p(\lambda)$ باشد می خواهیم آزمون $H_\circ:\lambda\le 1$ و $H_1:\lambda>1$ را انجام دهیم اگر آزمون φ_1 را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_1\ge 0\\ 0 & x_1<2\end{cases}$$

الف) نشان دهیم φ_1 در سطح $\alpha=0.26$ پرتوان ترین آزمون یکنواخت است

ب) $E(\varphi_1(x)|x_1+x_2)$ را محاسبه کرده نشان دهید یک آزمون اندازه $\alpha=0.26$ است

ج) اگر $\varphi_2(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم نشان دهید φ_2 یک آزمون اندازه $\alpha=0.26$ است

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}1 & x_1+x_2>3\\ 0.61 & x_1+x_2=3\\ 0 & x_1+x_2<3\end{cases}$$

الف) تابع توان آزمون $\varphi_1(x)$ به صورت مقابل مشاهده می شود که این آزمون در سطح $\alpha=0.26$ است

$\Pi_{\varphi_1}(\lambda)=1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}$

$\alpha=\Pi_{\varphi_1}(\lambda)=1-2e^{-2}=0.26$

حال برای آنکه نشان دهیم پرتوان ترین آزمون یکنواخت است فرض کنید تنها یک مشاهده x_1 داریم نشان می دهیم نسبت به x_1 خاصیت MLR داریم

$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_\circ}}=\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_\circ}}(\frac{\lambda_1}{\lambda_\circ})^{x_1}$

چون $\frac{\lambda_1}{\lambda_\circ}>1$ است پس نسبت به x_1 خاصیت MLR داریم حال بنابه قضیه ۸-۱ فرض پرتوان ترین بودن اثبات می شود

ب)

$$E_{H_\circ}(\varphi(x)|x_1+x_2)=p_{H_\circ}(\varphi(x)=1|x_1+x_2=t)=p_{H_\circ}(x_1\geq 2|x_1+x_2)$$

$$=\sum_{x_1=2}^{\infty}\frac{p(X_1=x_1)p(X_2=t-x_1)}{p(x_1+x_2=t)}=\sum_{x_1=2}^{\infty}\binom{t}{x_1}\frac{1}{2^t}=1-\binom{t}{0}\frac{1}{2^t}-\binom{t}{1}\frac{1}{2^t}$$

که جواب بدست آمده مشخص است که مسئله دارای کمبود است چون برای اینکه نشان دهیم اندازه آزمون $\alpha=0.26$ است باید مقدار t معلوم باشد

ج)

$$E_{H_\circ}(\varphi_2(x))=p_{H_\circ}(x_1+x_2>3)+0.5p_{H_\circ}(x_1+x_2=3)=1-\sum_{i=0}^{3}\frac{e^{-2}2^i}{i\,!}+0.61e^{-2}\frac{2^3}{3!}=0.26$$

۱۹- فرض کنید X_1,X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $\beta eta(\theta,1)$ باشد می خواهیم آزمون $H_0:\theta\leq 1 \quad vs \quad H_1:\theta>1$ را انجام دهیم اگر φ آزمونی در ارتباط با ناحیه ی بحرانی زیرباشد $C=\left\{x:\frac{3}{4}x_1\leq x_2\right\}$ تابع توان و اندازه آزمون φ را بدست آورید ؛ آیا آزمون فوق نا اریب است؟

$$p\left(x_2>\frac{3}{4}x_1\right)=\alpha$$

$$\Pi_\varphi(\theta)=1-\int_0^1\int_0^{\frac{3}{4}x_1}\theta^2(x_1x_2)^{\theta-1}dx_2\,dx_1=1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{\theta}$$

$$\alpha=\Pi_\varphi(1)=1-\frac{3}{8}=\frac{3}{5}$$

برای اینکه آزمونی نا اریب باشد باید داشته باشیم

$$\sup_{\theta\in H_0}\Pi_\varphi(\theta)\leq\inf_{\theta\in H_1}\Pi_\varphi(\theta)$$

$$\sup_{\theta\in H_0}\Pi_\varphi(\theta)=\frac{5}{8}\qquad\qquad \inf_{\theta\in H_1}\Pi_\varphi(\theta)=\frac{5}{8}$$

که در رابطه بالا صدق می کند .

۲۰- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد که در آن $\varphi(0)$ تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد است $f_\theta(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-\theta)+\varphi(x+\theta)\right] \quad x\in \quad ,\theta\in$ می خواهیم آزمون $H_0:\theta=0 \quad vs \quad H_1:\theta\neq 0$ را انجام دهیم UMPT اندازه α را بدست آورید .

حل : آزمون فوق را به دو آزمون زیر تفکیک می کنیم و نشان می دهیم برای هر دو یک ناحیه ی بحرانی وجود دارد :

$$(\mathrm{II})\begin{cases}H_0:\theta=0\\H_1:\theta<0\end{cases}\qquad\qquad(\mathrm{I})\begin{cases}H_0:\theta=0\\H_1:\theta>0\end{cases}$$

به وضوح مشخص است که اگر نتایجه هر دو آزمون یکی شود ناحیه ی بحرانی آزمون مسئله نیز همانند نتیجه آزمونهای (I) و (II) خواهد بود برای اثبات این موضوع به شیوه زیر عمل می کنیم

آزمون (I)

برای پیدا کردن UMPT این آزمون ابتدا آزمون زیر را در نظر می گیریم :

$$H_0:\theta=0 \qquad H_1':\theta=\theta_1 \qquad \ni\ \theta_1>0$$

طبق لم پرسن داریم :

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_0(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_1)^2}+e^{-\frac{1}{2}(x+\theta_1)^2}}{2e^{-\frac{1}{2}x^2}}>k_1$$

$$e^{-\frac{1}{2}\theta^2}\,\frac{e^{x\theta_1}+e^{-x\theta_1}}{2}>k_1 \Rightarrow \cosh\theta_1 x>r_1$$

حال نمودار $\cosh\theta_1 x$ را در نظر بگیرید ((دقت

کنید که مینیمم تابع $\cosh\theta_1 x$ به ازاء تمامی مقادیر

θ_1 برابر یک است .))

***

***

بنابر نمودار واضح است که ناحیه رد به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|>c_1\\ 0 & 0w\end{cases}$$

که در آن c_1 طوری انتخاب می شود که

$$E_{H_0}\left[\varphi(x)\right]=\alpha \Rightarrow p_{H_0}\left(|x|>c_1\right)=\alpha \Rightarrow c_1=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

که چون ناحیه رد به مقدار θ_1 بستگی ندارد نتیجه می شود که این ناحیه رد پر توان ترین آزمون برای آزمون نیز خواهد بود

$$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1:\theta>0$$

آزمون(II)

برای پیدا کردن پر توان ترین آزمون برای این آزمون ابتدا آزمون زیر را در نظر می گیریم :

$$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1':\theta=\theta_2 \qquad \ni\ \theta_2<0$$

طبق لم نیمن پرسن داریم :

$$\frac{f_{\theta_2}(x)}{f_0(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_1)^2}+e^{-\frac{1}{2}(x+\theta_1)^2}}{2e^{-\frac{1}{2}x^2}}>k_2 \Rightarrow \cosh\theta_2 x>r_2$$

حال به وضوح می توان مشاهده کرد نمودار $\cosh\theta_2 x$ را که درآن $\theta_2<0$ است بازمانند قبل می شود ؛ بنا بر این ناحیه رد به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|>c_2\\ 0 & 0w\end{cases}$$

که در آن c_2 طوری انتخاب می شود که

$$E_{H_0}\left[\varphi(x)\right]=\alpha \Rightarrow p_{H_0}\left(|x|>c_2\right)=\alpha \Rightarrow c_2=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

که مجددا چون ناحیه رد به مقدار θ_2 بستگی ندارد نتیجه می شود که این ناحیه رد UMPT پر توان ترین آزمون برای آزمون مقابل نیز خواهد بود

$$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1:\theta<0$$

حال بنابر نتایج آزمون $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ به وضوح مشخص است که UMPT برای آزمون مسئله نیز به صورت زیر خواهد بود :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۲۱- فرض کنید $x_1\dots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $DU(\{1,\dots,\theta\})$ و $\theta\in$ باشد می خواهیم آزمون $H_0:\theta\le 0 \quad vs \quad H_1:\theta>\theta_0$ را انجام دهیم نشان دهید $\varphi(x)$ پر توان ترین آزمون یکنواخت در سطح α است.

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>\theta_0\\ \alpha & x_{(n)}<\theta_0\end{cases}$$

می دانیم که UMPT برای آزمون مسئله طبق تعریف کتاب به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>c_1\\ 0 & 0.w\end{cases} \qquad x_{(n)} \quad \left(\frac{x}{\theta}\right)^n-\left(\frac{x-1}{\theta}\right)^n$$

$$\Pi_{\varphi_2}(x)=p\left(x_{(n)}>c\right)=\sum_{x=c+1}^{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^n-\left(\frac{x-1}{\theta}\right)^n=1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n$$

$$\alpha=\sup_{\theta\in H_0}\left(\Pi_{\varphi_2}(x)\right)=1-\left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n=\alpha \Rightarrow c=(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}\theta_0$$

پس UMPT برای آزمون مسئله به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}\theta_0\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

که تابع توان آن به صورت زیر است :

$$\Pi_{\varphi_2}(x)=1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$$

حال نشان می دهیم که تابع توان ناحیه رد $\varphi^*(x)$ نیز همانند بالا است

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>\theta_0\\ \alpha & x_{(n)}\le\theta_0\end{cases}$$

$$\Pi_{\varphi^*}(y)=\sum_{y=\theta_0+1}^{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^n-\left(\frac{y-1}{\theta}\right)^n+\sum_{y=1}^{\theta_0}\left(\frac{y}{\theta}\right)^n-\left(\frac{y-1}{\theta}\right)^n$$

$$=1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n+\alpha\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n=1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n$$

مشاهده می کنید که تابع توان هر دو یکی شده پس هر دو آنها UMPT هستند .

مسئله ۲۱ را می توان به شیوه زیر نیز اثبات کرد :

ابتدا آزمون زیر را در نظربگیرید

$$(\mathrm{I})\, H_0^{'}:\theta=\theta_0 \qquad vs \qquad H^{'}_1:\theta=\theta_1$$

به طوری که $\theta_1>\theta_0$ برای آزمون $H_0^{'}$ در مقابل $H^{'}_1$ ، MP در سطح α بر اساس لم نیمن پیرسن به صورت زیر ایجاد می شود

$$\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_0}}>k\Rightarrow\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\frac{\mathrm{I}_{\{1,\dots,\theta_1\}}\left(x_{(n)}\right)}{\mathrm{I}_{\{1,\dots,\theta_0\}}\left(x_{(n)}\right)}=\begin{cases}\left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n & x_{(n)}<\theta_0\\ \infty & x_{(n)}>\theta_0\end{cases}$$

حال فرض کنیم $k=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$ باشد در نتیجه ناحیه رد به صورت زیر خواهد بود :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>\theta_0\\ \gamma & x_{(n)}\le\theta_0\end{cases}$$

که γ به صورت زیر تعیین می شود :

$$\alpha=E_{\theta_0}\left[\varphi(x)\right]=p_{H_0}\left(x_{(n)}>\theta_0\right)+\gamma\, p_{H_0}\left(x_{(n)}\le\theta_0\right)\Rightarrow\gamma=\alpha$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>\theta_0\\ \alpha & x_{(n)}\le\theta_0\end{cases}$$

پس $\varphi(x)$ ، ناحیه رد MP برای آزمون (I) خواهد بود حال چون ناحیه رد به θ_1 بستگی ندارد این $\varphi(x)$ ، MP برای آزمون زیر نیز خواهد بود :

$$(\mathrm{I})\, H_0^{'}:\theta=\theta_0 \qquad vs \qquad H^{'}_1:\theta>\theta_1$$

که چون کلاس آزمون های سطح α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 زیر کلاس آزمون های سطح α برای آزمون H_0' در H_1 مقابل است نتیجه می شود که $\varphi(x)$ ناحیه رد UMP برای آزمون مسئله خواهد بود .

۲۲- در مسئله ۲۱ نشان دهید $\varphi^*(x)$ پر توا نترین آزمون یکنواخت اندازه α برای آزمون $(\mathrm{I})\, H_0:\theta=\theta_0 \quad vs \quad H_1:\theta\neq\theta_0$ است :

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}>\theta_0\vee x_{(n)}\le\alpha^{1/n}\theta_0\\ 0 & 0w\end{cases}$$

برای حل این مسئله مانند مثال ۲۰ ، آزمون را به دو زیر آزمون زیر تقسیم می کنیم و نشان می دهیم ناحیه رد برای هر دو یکی است .

$$(\mathrm{I}):\begin{cases} H_0:\theta=\theta_0 \\ H_1:\theta>\theta_0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II}):\begin{cases} H_0:\theta=\theta_0 \\ H_1:\theta<\theta_0 \end{cases}$$

اثبات بقیه مسئله را به عهده دانشجو می گذاریم .

۲۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f_\theta(x)=1+\theta^2\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad 0<x<1 \qquad 0<\theta<\sqrt{2}$$

پر توان ترین آزمون یکنواخت در سطح $\alpha=0.1$ را برای آزمون

$H_0:\theta=0 \quad vs \quad H_1:\theta\neq 0$ بدست آورید .

این آزمون با کمی توجه به حدود پارامتر θ را می توان به آزمون زیر تبدیل کرد :

$$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1:\theta>0$$

حال برای حل این آزمون ابتدا MLR را مشخص می کنیم

$$y=\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_0}}=\frac{1+\theta_1^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{1+\theta_0^2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \qquad \theta_1>\theta_0$$

حال چون مشتق تابع y مثبت است :

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\theta_1^2-\theta_0^2}{\left(1+\theta_0^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}>0$$

نتیجه می گیریم $\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_0}}$ نسبت به x خاصیت MLR دارد پس آزمون به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & x>c \\ 0 & 0w \end{cases}$$

که در آن c به صورت زیر تعیین می شود :

$$\alpha=E_{\theta_0}\left[\varphi(x)\right]=p_{\theta=0}(x>c)=\int_c^1 dx=1-c=\alpha \Rightarrow c=1-\alpha$$

پس UMPT در سطح $\alpha=0.1$ به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & x>0.9 \\ 0 & x\leq 0.9 \end{cases}$$

مسائل فصل ۹

۱- در مسئله ۱ از مسائل فصل دوم می خواهیم به روش LRT به ترتیب آزمون های زیر را در سطح $\alpha=0.5$ انجام دهیم

$$i)\, H_0 : \alpha = 0 \qquad vs \qquad H_1 = \alpha \neq 0$$

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (1-\beta)\beta^{x-\alpha} \qquad x = \alpha, \alpha+1, \ldots \qquad 0 < \beta < 1$$

$$L(\theta) = (1-\beta)\beta^{\sum x_i - n\alpha}\, \mathrm{I}_{(-\infty, x_1)}(\alpha) \qquad \hat{\alpha} = x_1 \Rightarrow 0 < \beta < 1$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum\left(x_i - x_{(1)}\right)}{\sum\left(x_i - x_{(1)}\right) + n} \qquad \sup_H L(\theta) = \left(1-\hat{\beta}\right)^n \hat{\beta}^{\sum(x_i)}$$

و تحت فرض داریم :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\bar{x}}{\bar{x}+1} \qquad \sup_{H_0} L(\theta) = \left(1-\hat{\beta}_0\right)^n \hat{\beta}_0^{\sum(x_i)}$$

حال خواهیم داشت : $\lambda(x) = \dfrac{\left(1-\hat{\beta}_0\right)^n}{\left(1-\hat{\beta}\right)^n} = \left(\dfrac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}}\right)^{\sum x_i} \hat{\beta}^{n x_{(1)}}$

توزیع آماره $\lambda(x)$ به سادگی قابل بررسی نیست پس از توزیع جانبی استفاده می کنیم

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & -2\ln\lambda(x) > \chi^2_{(1,1-\alpha)} \\ 0 & 0.w \end{cases}$$

$$ii)\, f_\theta(x) = \frac{\binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0,1,\ldots$$

$$H_0 : \theta = 3 \qquad vs \qquad H_1 : \theta \neq 3$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\binom{\theta}{x_i}\binom{N-\theta}{n-x_i}}{\binom{N}{n}}$$

بدست آوردن $\hat{\theta}$ برای تابع درست نمایی بالا نیازمند روشهای عددی است .

$$iii)\, H_0 : \alpha = \frac{1}{2} \qquad vs \qquad H_1 : \alpha \neq \frac{1}{2}$$

(β معلوم) $f_{(\alpha,\beta)}(x) = (1-\alpha)^{x^\beta} - (1-\alpha)^{(x+1)^\beta} \qquad x = 0,1,\ldots$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left\{(1-\alpha)^{x_i^{\beta}} - (1-\alpha)^{(x_i+1)^\beta}\right\}$$

بدست آوردن $\hat{\alpha}$ برای این تابع چگالی نیازمند روشهای عددی است .

$$iv)\, x_1 \ldots x_k \qquad \binom{n+x-1}{x}\theta^n (1-\theta)^x$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{3} \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq\frac{1}{3}$$

$$L(\theta)=\left\{\prod_{i=1}^{k}\binom{n+x_i-1}{x_i}\right\}\theta^{kn}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{k}x_i}$$

$$\hat{\theta}=\frac{kn}{kn+\sum_{i=1}^{k}x_i}$$

$$\sup L(\theta)=\left\{\prod_{i=1}^{k}\binom{n+x_i-1}{x_i}\right\}\hat{\theta}^{kn}\left(1-\hat{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=L\left(\frac{1}{3}\right)=\prod_{i=1}^{k}\binom{n+x_i-1}{x_i}\left(\frac{1}{3}\right)^{kn}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i}$$

حال فرض H_0 رد می شود اگر :

$$\lambda(t)<\lambda_0 \Rightarrow \left(\frac{kn}{kn+\sum_{i=1}^{k}x_i}\right)^{-kn}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{kn+\sum_{i=1}^{k}x_i}\right)\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i}<c$$

که ما برای بدست آوردن ناحیه رد به رسم نمودار $\lambda(t)$ به صورت تابعی از $\sum_{i=1}^{k}x_i$ متوسل شدیم به طوری که kn=6) , k=2 (n=3

بنا به شکل مقابل ناحیه رد برای آزمون LRT به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum x_i<c_1 \ or \ \sum x_i>c_2\\ \gamma_1 & \sum x_i=c_1\\ \gamma_2 & \sum x_i=c_2\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

پس داریم

$$\alpha=p\left(\sum x_i<c_1\right)+p\left(\sum x_i>c_2\right)+\gamma_1 p\left(\sum x_i=c_1\right)+\gamma_2 p\left(\sum x_i=c_2\right)$$

$$f_\theta(x)=\left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{2} \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq\frac{1}{2}$$

$$L(\theta)=\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\sum|x_i|}(1-\theta)^{n-\sum|x_i|}$$

که به وضوح می توان نشان داد $\hat{\theta}=\frac{\sum|x_i|}{n}$

فرض H_0 رد می شود اگر $\lambda(t)<\lambda_0$

پس داریم

$$\lambda(t)=\left(2\hat{\theta}\right)^{-\sum|x_i|}\left(2\left(1-\hat{\theta}\right)\right)^{\sum|x_i|-n}<\lambda_0$$

$$\Rightarrow\left(2\left(\frac{n-\sum|x_i|}{\sum|x_i|}\right)\right)^{\sum|x_i|}<c$$

که برای بدست آوردن ناحیه رد به رسم نمودار تابع $y=\left(2\left(\frac{n-x}{x}\right)\right)^x$ متوسل شدیم که x عبارت است از $\sum|x_i|$. (دقت شود که این نمودار را به ازاء n=5 رسم کرده ایم .)

❉❉

❉❉

بر اساس نمودار بالا ناحیه رد را به صورت زیر تعیین می کنیم (دقت شود که این نواحی را به ازاء n=5 رسم کرده ایم .)

(۱) اگر 0 < c <1 باشد ناحیه رد عبارتست از :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum|x_i|>k\\ \gamma & \sum|x_i|=k\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

دقت شود که در ناحیه رد بالا $k\geq 4$ ؛ پس بیشترین مقدار α توسط ناحیه رد زیر بدست می آیند

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum|x_i|\geq 4\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$\alpha=p_{H_0}\left(\sum|x_i|\geq 4\right)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=0.187$$

(۲) اگر $1\leq c\leq 9$ باشد ناحیه رد به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum x_i<k_2 \;\; or \;\; \sum x_i>k_1\\ \gamma_1 & \sum x_i=k_1\\ \gamma_2 & \sum x_i=k_2\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

که در ناحیه رد بالا $k_1\geq 3, k_2\leq 2$ است

حال به عنوان مثال فرض کنید $\alpha=0.2$ باشد آنگاه ناحیه رد عبارتست از :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \sum|x_i|>4\\ \gamma & \sum|x_i|=0\\ 0 & 0w\end{cases}$$

$$0.2=p\left(\sum|x_i|>4\right)+\gamma\, p\left(\sum|x_i|=0\right)\Rightarrow\gamma=0.4$$

دقت کنید که این ناحیه رد به ازاء $c=1$ به وجود آمده است .(به نمودار زیر دقت کنید)

۲- در مساله دوم از فصل دوم می خواهیم به روش LRT به تر تیب آزمون های زیر را در سطح $\alpha=0.01$ **انجام دهیم .**

$$i)f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=1,2\\ \frac{1+\theta}{4} & x=3\\ \frac{1-\theta}{4} & x=4\end{cases}\qquad 0\le\theta\le1$$

$$H_0:\theta=0.5\qquad vs\qquad H_1:\theta\ne0.5$$

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=1,2\\ \frac{1}{2} & x=3\\ \frac{1}{4} & x=4\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}1 & x=1,2\\ \frac{3}{4} & x=3\\ \frac{1}{2} & x=4\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(x)<\lambda_0\\ \gamma & \lambda(x)=\lambda_0\\ 0 & 0w\end{cases}\Rightarrow\varphi(x)=\begin{cases}\gamma & x=4\\ 0 & 0w\end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.01=\gamma\, p(x=4)=\frac{\gamma}{8}\Rightarrow\gamma=0.08$$

$$ii)f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x=-1\\ (1-\theta)^2\theta^x & x=0,1,2,\ldots\end{cases}\qquad 0\le\theta\le1$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{2}\qquad vs\qquad H_1:\theta\ne\frac{1}{2}$$

$$L(\theta)=f_\theta(x)$$

به وضوح می توان بررسی کرد که $\hat{\theta}$ به صورت زیر است :

$$\hat{\theta}=\begin{cases}1 & x=-1\\ \dfrac{x}{x+2} & x=0,1,2\end{cases}$$

$$\sup_{H} L(\theta)=\begin{cases}1 & x=-1\\ \left(\dfrac{2}{2+x}\right)^{2}+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x} & x=0,1,2\end{cases}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\begin{cases}0.5 & x=-1\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2+x} & x=0,1,2\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=-1\\ \left(\dfrac{2+x}{2}\right)^{2+x}\dfrac{1}{4x^{x}} & x=0,1,2\end{cases}$$

حال برای بدست آوردن ناحیه رد از رسم نمودار $\lambda(x)$ کمک می گیریم

❉❉

❉❉

حال فرض H_0 رد می شود اگر $\lambda(x)<\lambda_0$ باشد پس داریم :

(۱) اگر $\lambda_0<\dfrac{1}{4}$ باشد ناحیه رد به صورت زیر است

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1 & x>c_1\\ \gamma & x=c_1\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

حال اگر $\lambda_0<\dfrac{1}{4}$باشد مقدار c_1 هم باید بزرگتر مساوی ۷ باشد پس ماکزیمم مقدار α در این حالت عبارتست از :

$$\alpha=p_{H_0}(x\geq 7)=\sum_{x=7}^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2^{8}}=0.004$$

(۲) اگر $\lambda_0<\dfrac{1}{4}$ باشد ناحیه رد به صورت زیر است

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}1 & x>6\\ \gamma & x=0\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

در این حالت ماکزیمم مقدار α توسط آزمون زیر بدست می آید :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x>6 \quad or \quad x=0\\ 0\end{cases}$$

$$\alpha=p(x>6)+p(x=0)=0.004+0.25=0.254$$

(۳) اگر $\frac{1}{4} < \lambda_0 < \frac{1}{2}$ در این حالت آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > k_3 \quad or \quad x = 0 \\ \gamma & x = k_3 \\ 0 & 0w \end{cases}$$

دقت کنید که در این حالت $k_3 \geq 6$ است .

(۴) اگر $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ باشد

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 6 \quad or \quad x = 0 \\ \gamma_1 & x = -1 \\ 0 & 0w \end{cases}$$

ماکزیمم مقدار α در این حالت ۰٫۷۵۴ است .

(۵) اگر $\frac{1}{2} < \lambda_0$ فرم کلی آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < c_1 \;\; or \;\; x > c_2 \\ \gamma_1 & x = c_1 \\ \gamma_2 & x = c_2 \\ 0 & 0w \end{cases}$$

در این حالت $c_1 \in \{1,2\}$, $c_2 \in \{3,4,5\}$ است .

به عنوان مثال در سطح $\alpha = 0.76$ آزمون به صورت زیر است (به نمودار توجه کنید)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \quad or \quad x \in \{0,-1\} \\ \gamma & x = 5 \\ 0 & 0w \end{cases}$$

حال در سطح $\alpha = 0.76$ ، γ به صورت زیر بدست می آید

$$0.76 = 0.754 + \gamma\, p(x = 5) \Rightarrow \gamma = 0.768$$

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \quad or \quad x \in \{0,-1\} \\ 0.768 & x = 5 \\ 0 & 0w \end{cases}$$

دقت کنید که بر اساس نمودار می توان به وضوح فهمید که این نمودار بر اساس $\lambda_0 = 0.515$ بدست می آید .

$$iii)\, f_{\theta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}-\theta & x=-2\\ \frac{1}{4}-\theta & x=-1\\ \frac{1}{4}-\theta & x=1\\ \frac{1}{4}-\theta & x=2\end{cases} \qquad -\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{4}$$

$$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq 0$$

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=-2\\ \frac{3}{8} & x=-1\\ \frac{3}{8} & x=1\\ \frac{1}{2} & x=2\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=-2\\ \frac{2}{3} & x=-1\\ \frac{2}{3} & x=1\\ \frac{1}{2} & x=2\end{cases} \qquad \Rightarrow\ \varphi(t)=\begin{cases}1 & \lambda(x)<\lambda_0\\ \gamma & \lambda(x)=\lambda_0\\ 0 & 0w\end{cases}$$

$$\varphi(t)=\begin{cases}\gamma & x=2\\ 0 & 0w\end{cases} \qquad 0.01=\gamma\, p_{H_0}(x=2)\Rightarrow\gamma=0.04$$

$$iv)\, f_{\theta}(x)=\begin{cases}\theta & x=-1,1\\ 1-2\theta & x=0\end{cases} \qquad 0\le\theta\le\frac{1}{2}$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{4} \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq\frac{1}{4}$$

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=-1,1\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=-1,1\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\gamma & \lambda(x)\le\frac{1}{4}\\ 0 & 0.w\end{cases}\Rightarrow\varphi(x)=\begin{cases}0.04 & x=1\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$v)\ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1-\theta}{2} & x=y_1\\ \frac{1}{2} & x=y_2\\ \frac{\theta}{2} & x=y_3\end{cases}\qquad 0\le\theta\le 1$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{4}\qquad vs\qquad H_1:\theta\ne\frac{1}{4}$$

$$\sup\nolimits_H L(\theta)=\frac{1}{2}\qquad x=y_1,y_2,y_3$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & x=y_1\\ 1 & x=y_2\\ \frac{1}{4} & x=y_3\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(x)<\frac{1}{4}\\ \gamma & \lambda(x)=\frac{1}{4}\\ 0 & 0.w\end{cases}\Rightarrow\varphi(x)=\begin{cases}\gamma & x=y_3\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$0.01=\gamma\left(p_{H_0}(x=y_3)\right)\Rightarrow\gamma=0.08$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0.08 & x=y_3\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$vi)\ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}-\theta & x=y_1\\ \frac{1}{2} & x=y_2\\ \frac{1}{4}+\theta & x=y_3\end{cases}\qquad -\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{4}$$

$$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq 0$$

$$\sup_H L(\theta)=\frac{1}{2} \qquad x=y_1,y_2,y_3$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=y_1,y_3\\ 1 & x=y_2\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\gamma & x=y_1\\ 0 & 0w\end{cases} \qquad \Rightarrow 0.01=\gamma\, p(x=y_1)\Rightarrow \gamma=0.04$$

$$vii)\; f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=y_1,y_2\\ \theta & x=y_3,y_4\\ \frac{1}{4}-\theta & x=y_5,y_6\end{cases} \qquad 0\le\theta\le\frac{1}{4}$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{8} \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq\frac{1}{8}$$

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=y_1,y_2\\ \frac{1}{4} & x=y_3,y_4\\ \frac{1}{4} & x=y_5,y_6\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}1 & x=y_1,y_2\\ \frac{1}{2} & x=y_3,y_4\\ \frac{1}{2} & x=y_5,y_6\end{cases}$$

پس آزمون به صورت زیر خواهد بود

$$\varphi(x)=\begin{cases}0.08 & x=y_3\\ 0 & 0w\end{cases}$$

$$viii)\ f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\theta}{12} & x=1\\ \dfrac{2-\theta}{12} & x=2\\ \dfrac{3-\theta}{12} & x=3\\ \dfrac{1-\theta}{12} & x=4\\ \dfrac{2-\theta}{12} & x=5\\ \dfrac{3-\theta}{12} & x=6\end{cases}\qquad 0\le\theta\le 1$$

$H_0:\theta=0 \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq 0$

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & x=1,4\\ \dfrac{1}{4} & x=2,5\\ \dfrac{1}{3} & x=3,6\end{cases}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{12} & x=1,4\\ \dfrac{1}{6} & x=2,5\\ \dfrac{1}{4} & x=3,6\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=1,4\\ \dfrac{2}{3} & x=2,5\\ \dfrac{3}{4} & x=3,6\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda<\dfrac{1}{2}\\ \gamma & \lambda=\dfrac{1}{2}\\ 0 & 0.w\end{cases}\quad\Rightarrow\varphi(x)=\begin{cases}\gamma & x=1\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$0.01=\gamma\left(p_{H_0}(x=1,4)\right)\Rightarrow\gamma=0.12$$

$$ix)\ f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & x=1\\ \dfrac{1-\theta}{4} & x=2\\ \dfrac{1-\theta}{4} & x=3\\ \dfrac{3\theta}{4} & x=4\end{cases} \qquad 0\le\theta\le 1$$

$$H_0:\theta=\frac{1}{4} \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq\frac{1}{4}$$

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & x=1\\ \dfrac{1}{4} & x=2\\ \dfrac{1}{2} & x=3\\ \dfrac{3}{4} & x=4\end{cases}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & x=1\\ \dfrac{3}{16} & x=2\\ \dfrac{3}{8} & x=3\\ \dfrac{3}{16} & x=4\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ \dfrac{3}{4} & x=2\\ \dfrac{3}{4} & x=3\\ \dfrac{1}{4} & x=4\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(x)<\frac{1}{4}\\ \gamma & \lambda(x)=\frac{1}{4}\\ 0 & 0.w\end{cases} \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}\gamma & x=4\\ 0 & x\neq 4\end{cases}$$

$$0.01=\gamma\left(p_{H_0}(x=4)\right) \Rightarrow \gamma=0.053 \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}0.053 & x=4\\ 0 & x\neq 4\end{cases}$$

۴- در مسا له ۳۷ از فصل دوم می خواهیم به روش LRT به ترتیب آزمون های زیر را در سطح $\alpha=0.05$ انجام دهیم

$$i)H_0:\mu=\mu_0 \quad , \quad \sigma=\sigma_0 \qquad vs \qquad H_0:\mu\neq\mu_0 \quad , \quad \sigma\neq\sigma_0$$
$$x_1,\ldots,x_n \quad U(\mu-\sigma,\mu+\sigma) \qquad \mu\in \qquad \sigma>0$$

❉❉

❉❉

بنا به نمودار بالا و ناحیه اشتراک داریم

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{2\sigma}\right)^n \mathrm{I}_{\left(\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{2},\,\infty\right)}(\sigma)$$

$$\hat{\sigma}=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{2} \qquad \hat{\mu}=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{2}$$

$$\sup L_H(\theta)=\frac{1}{\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)^n}$$

$$\sup L_{H_0}(\theta)=\frac{1}{2\sigma_0}$$

$$\lambda(x)=\frac{\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)^n}{2\sigma_0}<\lambda_0 \Rightarrow x_{(n)}-x_{(1)}<c$$

پس آزمون به صورت زیر است :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}-x_{(1)}<c\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

که c به صورت زیر تعیین می شود

$$\alpha=E_{H_0}\left[\varphi(x)\right]=p_{H_0}\left(x_{(n)}-x_{(1)}<c\right)$$
$$=p\left(\left(x_{(n)}-\mu\right)-\left(x_{(1)}-\mu\right)<c\right)=p\left(\frac{\left(x_{(n)}-\mu\right)}{\sigma_0}-\frac{\left(x_{(1)}-\mu\right)}{\sigma_0}<\frac{c}{\sigma_0}\right)$$

که در این صورت داریم :

$$\frac{x_{(n)}-\mu_0}{\sigma_0}=y_n \quad \frac{n}{2^n}(y+1)^{n-1} \qquad -1<y<1$$

$$\frac{x_{(1)}-\mu_0}{\sigma_0}=y_1 \quad \frac{n}{2^n}(1-y)^{n-1} \qquad -1<y<1$$

$$p\left(y_n-y_1<\frac{c}{\sigma_0}\right)=n\int_{-1}^{1}\left[F(y_1+a)-F(y_1)\right]^{n-1}f(y_1)\,dy_1 \qquad , \qquad a=\frac{c}{\sigma_0}$$

$$=n\int_{-1}^{1-a}\left[\frac{y_1+a+1}{2}-\frac{y_1+1}{2}\right]^{n-1}\frac{1}{2}dy_1+n\int_{1-a}^{1}\left[1-\frac{y_1+1}{2}\right]^{n-1}\frac{1}{2}dy_1$$

$$=\frac{n}{2^n}\left[\int_{-1}^{1-a}\left[a\right]^{n-1}dy_1+\int_{1-a}^{1}\left[1-y_1\right]^{n-1}dy_1\right]=\frac{n}{2^n}(2-a)a^{n-1}+\frac{1}{2^n}a^n$$

$$p\left(y_n-y_1<\frac{c}{\sigma_0}\right)=\frac{1}{2^n}\left[n\left(2-\frac{c}{\sigma_0}\right)\left(\frac{c}{\sigma_0}\right)^{n-1}+\left(\frac{c}{\sigma_0}\right)^{n}\right]=\alpha$$

$$n(2\sigma_0-c)c^{n-1}+c^n=\alpha(2\sigma_0)^n$$

پس c باید در رابطه بالا صدق کند .

$$ii)\,H_0:\theta_1=\theta_0 \quad , \quad \theta_2=\theta_0 \qquad vs \qquad H_1:\theta_1\neq\theta_{10} \quad , \quad H_1:\theta_1\neq\theta_{20}$$

$$x_1,\dots,x_n \quad U(\theta_1,\theta_2) \qquad , \qquad -\infty<\theta_1<\theta_2<\infty \qquad , \qquad \theta_1<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta_2$$

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{\theta_1-\theta_2}\right)^n \mathrm{I}_{\left(-\infty,x_{(1)}\right)}(\theta_1)\,\mathrm{I}_{\left(x_{(n)},\infty\right)}(\theta_2) \qquad \hat{\theta}_1=x_{(1)}\,,\,\hat{\theta}_2=x_{(n)}$$

$$\sup L_H(\theta)=\frac{1}{\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)^n} \qquad \sup L_{H_0}(\theta)=\frac{1}{\left(\theta_{20}-\theta_{10}\right)^n}$$

$$\lambda(x)=\left(\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta_{20}-\theta_{10}}\right)^n$$

پس فرض H_0 رد میشود اگر :

$$\lambda(x)<\lambda_0 \Rightarrow x_{(n)}-x_{(1)}<a$$

پس تابع آزمون در سطح α به صورت زیر خواهد بود :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}-x_{(1)}<a\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

که a مانند قسمت (i) بدست می آید

$$\alpha=p_{H_0}\left(x_{(n)}-x_{(1)}<a\right)=n\int_{\theta_{10}}^{\theta_{20}}\left[F(x_1+a)-F(x_1)\right]^{n-1}f(x_1)\,dx_1$$

$$=\frac{n}{\left(\theta_{20}-\theta_{10}\right)^n}\left[\int_{\theta_{10}}^{\theta_{20-a}}\left[(x_1+a-\theta_{10})-(x_1-\theta_{10})\right]^{n-1}f(x_1)\,dx_1+\int_{\theta_{20-a}}^{\theta_{20}}\left[\theta_{20}-x_1\right]^{n-1}f(x_1)\,dx_1\right]$$

$$=\frac{n}{\left(\theta_{20}-\theta_{10}\right)^n}\left[a^{n-1}(\theta_{20}-\theta_{10}-a)\right]+\frac{a^n}{\left(\theta_2-\theta_0\right)^n}=\alpha$$

$$= n\ a^{n-1}\left(\theta_{20}-\theta_{10}-a\right)+a^{n}=\alpha\left(\theta_{20}-\theta_{10}\right)^{n}$$

که a باید در رابطه بالا صدق کند .

$$iii)\ H_0:\alpha=\alpha_0 \quad , \quad \beta=\beta_0 \qquad vs \qquad H_1:\alpha\neq\alpha_0 \quad , \quad \beta\neq\beta_0$$

$$x_1,\ldots,x_n \quad \Gamma(\alpha,\beta) \qquad , \qquad 0<\alpha \qquad , \qquad 0<\beta$$

$$L(\theta)=\beta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\alpha-1}\frac{e^{-\beta\sum x_i}}{\Gamma^{n}(\alpha)}$$

که برای بدست آوردن $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ نیاز به روش های محوری داریم .

$$iv)\ H_0:\alpha=\alpha_0 \quad , \quad \beta=\beta_0 \qquad vs \qquad H_1:\alpha\neq\alpha_0 \quad , \quad \beta\neq\beta_0$$

$$x_1,\ldots,x_n \quad \beta eta(\alpha,\beta)$$

$$L(\theta)=\frac{\Gamma^{n}(\alpha+\beta)}{\Gamma^{n}(\alpha).\Gamma^{n}(\beta)}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{\beta-1}$$

که باز مانند قبل برای بدست آوردن $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ نیاز به روش های محور یداریم .

$$v)\ H_0:\mu=\mu_0 \quad , \quad \lambda=\lambda_0 \qquad vs \qquad H_1:\mu\neq\mu_0 \quad , \quad \lambda\neq\lambda_0$$

$$x_1,\ldots,x_n \quad IG(\mu,\lambda) \qquad , \qquad 0<\mu \qquad , \qquad 0<\lambda$$

$$L(\theta)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(x_i-\mu\right)^2\Big/2\mu^2x_i\right\}$$

به سادگی تحقیق می شود که

$$\hat{\mu}=\overline{x} \qquad \hat{\lambda}^{-1}=\frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{\overline{x}}\right)$$

$$\sup_H L(\theta)=\left(\frac{\hat{\lambda}}{2\pi}\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\lambda(x)=\left(\frac{\lambda_0}{\hat{\lambda}}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_0\left(x_i-\mu_0\right)^2\Big/2{\mu_0}^2x_i+\frac{n}{2}\right\}$$

ملاحظه می شود که توزیع آماره $\lambda(x)$ را به سادگی نمی توان بدست آورد و باید از توزیع مجانبی استفاده کنیم

$$\varphi(x_1\ldots x_n)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda(x)>\chi^2_{(2,1-\alpha)}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$vi)\ H_0:\theta=\theta_0 \quad , \quad \sigma=\sigma_0 \qquad vs \qquad H_1:\theta\neq\theta_0 \quad , \quad \sigma\neq\sigma_0$$

$$x_1,\ldots,x_n \quad C(\theta,\sigma) \qquad , \qquad \theta\in \qquad , \qquad 0<\sigma$$

$$L(\theta)=\frac{1}{(\sigma\pi)^n\prod_{i=1}^{n}\left\{1+\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma}\right)^2\right\}}$$

با توجه به آنچه در مثال ۳-۲۴ کتاب پارسیان گفته شده ، $\hat{\sigma},\hat{\theta}$ باید از روش های محوری بدست آیند .

$$vii)\, H_0:\mu=\mu_0 \quad , \quad \sigma=\sigma_0 \qquad vs \qquad H_1:\mu\neq\mu_0 \quad , \quad \sigma\neq\sigma_0$$

$$x_1,\ldots,x_n \quad LN(\mu,\sigma^2)$$

$$L(\theta)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right\}$$

فرض کنید $y_i=\ln x_i$ حال داریم :

$$\hat{\mu}=\bar{y} \qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

$$\lambda(x)=\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^{\,2}}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sigma_0^{\,2}}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu_0)^2\right\}$$

که فرض H_0 رد میشود اگر : $\lambda(x)<\lambda_0$

توزیع آماره $\lambda(x)$ را به سادگی نمی توان بدست آورد پس از توزیع مجانبی استفاده می کنیم

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda(x)>\chi^2_{(2,1-\alpha)}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

$$viii)\, H_0:\mu=\mu_0 \quad , \quad \lambda=\lambda_0 \qquad vs \qquad H_1:\mu\neq\mu_0 \quad , \quad \lambda\neq\lambda_0$$

$$x_1,\ldots,x_n \quad E(\mu,\lambda)$$

$$L(\theta)=\lambda^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\mathrm{I}_{\left(-\infty,x_{(1)}\right)}(\mu)$$

به سادگی تحقیق می شود که

$$\hat{\mu}=x_{(1)} \qquad \hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{(1)}\right)$$

$$\sup_H L(\theta)=\left(\hat{\lambda}\right)^{-n}e^{-n}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\lambda_0^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}$$

$$\lambda(x_1\ldots x_n)=\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda_0}\right)^n\exp\left\{n-\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)\right\}$$

که در اینجا نیز توزیع $\lambda(x)$ مشخص نمی شود پس از توزیع مجانبی استفاده می کنیم .

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & -2\ln\lambda(x_1 \dots x_n) > \chi^2_{(2,1-\alpha)} \\ 0 & 0.w \end{cases}$$

۵- فرض کنید $x_1 \dots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,1)$ باشد ، می خواهیم آزمون $H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$ را انجام دهیم اگر φ آزمونی در ارتباط با ناحیه بحرانی $\bar{x} \le c_1$ یا $\bar{x} \ge c_2$ که در آن $c_1 = \mu_0 - \frac{1.96}{\sqrt{n}}$, $\pi_\varphi(\mu_0) = 0.1$ باشد مقدار c_2 را بدست آورید .

$$\pi_\varphi(\mu_0) = 0.1 \Rightarrow p_{H_0}(\bar{x} \le c_1) + p_{H_0}(\bar{x} \ge c_2) = 0.1 \Rightarrow p(z \le -1.96) + p(\bar{x} \ge c_2) = 0.1$$

$$p_{H_0}(\bar{x} \ge c_2) = 0.075 \Rightarrow p\left(z > \frac{c_2 - \mu_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = 0.075 \Rightarrow c_2 = \frac{1.44}{\sqrt{n}} + \mu_0$$

۶- فرض کنید $x_1 \dots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\mu,\sigma)$ باشد :

الف) اگر σ معلوم باشد پر توان ترین آزمون یکنواخت در سطح $\alpha = 0.1$ را برای آزمون $H_0 : \mu = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu < 0$ بدست آورید ؛

ب) اگر σ مجهول باشد به روش LRT ، $H_0 : \mu = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 0$ را در سطح $\alpha = 0.1$ انجام دهید ؛

ج) می خواهیم آزمون زیر را در سطح $\alpha = 0.05$ انجام دهیم ، چه روشی را پیشنهاد می کنید ؟

$$H_0 : \mu = 0 \ , \ \sigma = 1 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 0 \ , \ \sigma \neq 1$$

الف) ابتدا می خواهیم MRT را بررسی کنیم

$$\frac{f_{\mu_1}}{f_{\mu_0}} = \frac{\sigma^n e^{-\sigma\sum(x_i-\mu_1)} \mathrm{I}_{(\mu_1,\infty)}(x_{(1)})}{\sigma^n e^{-\sigma\sum(x_i-\mu_0)} \mathrm{I}_{(\mu_0,\infty)}(x_{(1)})} = \begin{cases} 0 & \mu_0 < x_{(0)} < \mu_1 \\ e^{\sigma(\mu_1-\mu_0)} & \mu_1 < x_{(1)} \end{cases}$$

پس نسبت به $x_{(1)}$ خاصیت MRT داریم :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x_{(1)} < c \\ 0 & 0.w \end{cases} \qquad x_{(1)} \quad E(\mu, n\sigma)$$

$$0.1 = p\left(x_{(1)} < c\right), 1 - e^{-n\sigma(c-\mu_0)} \Rightarrow n\sigma(c - \mu_0) = 0.1 \Rightarrow c = \mu_0 + \frac{1}{n\sigma}$$

ب) $L(\mu,\sigma)=\sigma^n e^{-\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)}$ $\qquad \hat{\mu}=x_{(1)}\ ,\ \hat{\sigma}=\dfrac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{(1)}\right)\right)}$

و تحت فرض H_0 داریم : $\hat{\sigma}_0=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$$\sup_H L(\mu,\sigma)=\hat{\sigma}^n e^{-n} \qquad \sup_{H_0} L(\mu,\sigma)=\hat{\sigma}_0{}^n e^{-n}$$

$$\lambda=\frac{\hat{\sigma}_0^n}{\hat{\sigma}^n}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{(1)}\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)^n$$

و فرض H_0 رد می شود اگر :

$$\lambda\le\lambda_0\Rightarrow 1-\frac{nx_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}<\lambda_0^{\frac{1}{n}}=\lambda_1\Rightarrow\frac{nx_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}>\lambda^*$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{nx_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}>\lambda^*\\ 0 & 0w\end{cases}$$

حال تحت فرض H_0 داریم : $\dfrac{nx_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\quad F(2,2n)$

$$p_{H_0}\left(\frac{nx_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}>\lambda^*\right)=0.1\Rightarrow p\left(\frac{n^2x_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}>n\lambda^*\right)=0.1\Rightarrow n\lambda^*=F(2,2n,0.9)$$

ج) $\sup_H L(\mu,\sigma)=\hat{\sigma}^{-n}e^{-n} \qquad \sup_{H_0} L(\mu,\sigma)=e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$$\lambda(x)=\frac{1}{n}e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{(1)}\right)$$

حال چون آماره $\lambda(x)$ را به سادگی نمی توان بدست آورد باید از توزیع مجانبی استفاده کنیم ؛ پس آزمون به صورت زیر است ...

$$\varphi(x_1\ldots x_n)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda(x_1\ldots x_n)>\chi^2_{(2,1-\alpha)}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۷- فرض کنید $x_1 \ldots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $p_\alpha(\alpha,\beta)$ باشد می خواهیم :

الف) آزمون $H_1 : \alpha \neq 1$ $\quad vs \quad$ $H_0 : \alpha = 1$ را انجام دهیم ناحیه بحرانی به روش LRT را تعیین کنید ؛

ب) توزیع آماره آزمون تحت فرض H_0 را مشخص کنید .

$$L(\theta) = \frac{\alpha^n \beta^{\alpha n}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}} \mathrm{I}_{\left(-\infty, x_{(1)}\right)}(\beta) \qquad \hat{\beta} = x_{(1)} \qquad \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{x_{(1)}}}$$

$$\sup_H L(\theta) = L\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = \hat{\alpha}^n e^{-n - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta) = L\left(1, \hat{\beta}\right) = \exp\left\{\frac{-n}{\hat{\alpha}} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right\}$$

بنابراین
$$\lambda(x) = \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^n e^{-n\left(\frac{1}{\hat{\alpha}} - 1\right)}$$

با انتخاب $T = \frac{2n}{\hat{\alpha}}$, $\varphi(t) = t^n e^{-\frac{t}{2}}$, $c_n = \left(\frac{e}{2n}\right)^n$ ملاحظه می شود که $\lambda(x) = c_n \varphi(t)$

که با توجه به نمودار $\lambda(x)$ به سادگی تحقیق می شود که فرض H_0 را رد می کنیم اگر

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & T < a \ or \ T > b \\ & \end{cases}$$

که آماره T تحت فرض H_0 دارای توزیع χ^2_{2n-2} است .

۸- فرض کنید $x_1 \ldots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ باشد ، روشی را برای آزمون های زیر ارائه دهید :

$$i)\ H_0 : \mu = \sigma^2 \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq \sigma^2$$
$$ii)\ H_0 : \mu = \sigma \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq \sigma$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

$$\sup_H L(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{\frac{-n}{2}}$$

حال تحت فرض H_0 داریم :
$$L(\theta) = (2\pi\mu)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2\right)$$

که $\hat{\mu}_0$ در شرایط زیر صدق می کند

$$\hat{\mu}_0\left(1+\hat{\mu}_0\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \Rightarrow \hat{\mu}_0=\frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \bar{x}^2}}{2}$$

اما از آنجایی که $\mu=\sigma^2$ پس باید $\hat{\mu}_0>0$ باشد ، پس داریم : $\hat{\mu}_0=\frac{-1+\sqrt{1+4 \bar{x}^2}}{2}$

$$\lambda=\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2 \hat{\mu}_0} \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\mu}_0\right)^2+\frac{n}{2}\right\}$$

حال چون توزیع λ نا مشخص است از توزیع مجانبی استفاده می کنیم

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2 \ln \lambda(x)>\chi_{(1,1-\alpha)}^2 \\ 0 & 0w\end{cases}$$

این بار تحت فرض H_0 داریم :

$$ii\ ) L(\theta)=\left(2 \pi \mu^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{1}{2 \mu^2} \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right)$$

حال $\hat{\mu}_0$ عبارتست از

$$\hat{\mu}_0^2+\hat{\mu}_0 \bar{x}=\bar{x}^2 \Rightarrow \hat{\mu}_0=\frac{-\bar{x}+\sqrt{\bar{x}^2+4 \bar{x}^2}}{2}$$

$$\lambda(x)=\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2 \hat{\mu}_0^2} \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\mu}_0\right)+\frac{n}{2}\right\}$$

باز از توزیع مجانبی حل می شود

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2 \ln \lambda\left(x_1 \ldots x_n\right)>\chi_{(2,1-\alpha)}^2 \\ 0 & 0w\end{cases}$$

۹- فرض کنید $x_1 \ldots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0, \theta)$, $\theta \in(0,1]$ باشد می خواهیم به روش LRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_0: \theta=1 \qquad vs \qquad H_1: \theta \in(0,1]$$

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta} \mathrm{I}_{(0, \theta)}\left(x_{(n)}\right)$$

$$\sup_H L(\theta)=\frac{1}{x_{(n)}^n}$$

$$\lambda(x)=x_{(n)}^n<\lambda_0 \Rightarrow x_{(n)}<c$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x_{(n)}<c \\ 0 & 0w\end{cases}$$

$$\alpha = p_{H_0}\left(x_{(n)} < c\right) = \int_0^c ny^{n-1} = c^n \Rightarrow c = \alpha^{1/n}$$

۱۰- فرض کنید $x_1 \dots x_n$ یک نمونه تصادفی k تایی از توزیع $DU\left(\{1,2,\dots,N\}\right)$ باشد می خواهیم آزمون های زیر را به روش LRT انجام دهیم

$$i)\, H_0: N \le N_0 \qquad vs \qquad H_1: N > N_0$$
$$ii)\, H_0: N = N_0 \qquad vs \qquad H_1: N \ne N_0$$

$$i)\, L(\theta) = \frac{1}{N^k}\, \mathrm{I}_{(1,2,\dots,N)} x_{(n)}$$

$$\sup_H L(\theta) = \frac{1}{x_{(n)}^k} = L\left(x_{(n)}\right)$$

$$\sup_{H_0} L(\theta) = \begin{cases} L\left(x_{(n)}\right) & x_{(n)} < N_0 \\ 0 & x_{(n)} > N_0 \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 & x_{(n)} < N_0 \\ 0 & x_{(n)} > N_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} < c \\ 0 & 0w \end{cases}$$

که به وضوح می توان مشاهده کرد که آزمون به روش LRT و روش UMP یک نتیجه می دهد

$$ii)\, \lambda = \frac{L(N_0)}{L\left(x_{(n)}\right)} = \left(\frac{x_{(n)}}{N_0}\right)^n \mathrm{I}_{(0,N_0)} x_{(n)} = \begin{cases} \left(\dfrac{x_{(n)}}{N_0}\right)^n & x_{(n)} < N_0 \\ 0 & x_{(n)} > N_0 \end{cases}$$

پس بنا به نمودار λ نسبت به $x_{(n)}$ ، می توان مشاهده کرد که آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} < a \quad or \quad x_{(n)} > b \\ 0 & 0w \end{cases}$$

۱۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال های زیر باشد ؛ می خواهیم به روش LRT آزمون $H_1: \theta \ne \theta_0 \qquad vs \qquad H_0: \theta = \theta_0$ را در سطح $\alpha = 0.02$, $\alpha = 0.03$ انجام دهیم .

جدول

در سطح $\alpha = 0.03$ آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda<\frac{5}{8}\\ \gamma & \lambda=\frac{5}{8}\\ 0 & 0.w\end{cases}\Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}\gamma & x=1\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

γ به صورت زیر بدست می آید

$$0.03=\gamma\ p(x=1)\Rightarrow \gamma=\frac{0.03}{0.05}$$

پس آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{3}{5} & x=1\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۱۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد ؛ می خواهیم به روش LRT آزمون H_0 را در مقابل H_1 در سطح α انجام دهیم .

$$H=\left\{(\theta_1,\theta_2):0\le\theta_1\le\alpha<\frac{1}{2},0\le\theta_2\le 1,\alpha\right\}$$

جدول

$$\sup_H L(\theta)=\begin{cases}\frac{\alpha}{1-\alpha} & x=0\\ \frac{1/2-\alpha}{1-\alpha} & x=\pm1\\ \alpha & x=2\\ \alpha & x=-2\end{cases}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\begin{cases}\alpha & x=0\\ \frac{1}{2}-\alpha & x=\pm1\\ \frac{1}{2}\alpha & x=2\\ \frac{1}{2}\alpha & x=-2\end{cases}$$

$$\lambda(x)=\begin{cases}1-\alpha & x=0\\ 1-\alpha & x=\pm1\\ \frac{1}{2} & x=\pm2\end{cases}$$

آزمون در سطح α

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & \lambda\le \frac{1}{2}\\ 0 & 0.w\end{cases}\Rightarrow \varphi(t)=\begin{cases}1 & x=\pm 2\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۱۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد ؛ می خواهیم به روش LRT آزمون $H_1:\theta\ne\theta_0$ $\quad vs \quad$ $H_0:\theta=\theta_0$ را درسطح $\alpha=0.2$ انجام دهیم .

جدول

آزمون LRT در سطح $\alpha=0.2$

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & \lambda\le \frac{10}{17}\\ 0 & 0.w\end{cases}\Rightarrow \varphi(t)=\begin{cases}1 & x=3,4\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۱۴- فرض کنید $x_1\ldots x_n$, $y_1\ldots y_m$ دو نمونه تصادفی مستقل از هم به تر تیب با توزیع های $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ باشند :

الف) می خواهیم به روش LRT آزمون $H_1:\mu_1\ne\mu_2$ $\quad vs \quad$ $H_0:\mu_1=\mu_2$ را در سطح $\alpha=0.05$ انجام دهیم ؛

ب) می خواهیم به روش LRT آزمون $H_1:\sigma_1^2>3\sigma_2^2$ $\quad vs \quad$ $H_0:\sigma_1^2\le 3\sigma_2^2$ را در سطح $\alpha=0.01$ انجام دهیم .

قسمت(الف) دقیقا مشابه مثال ۹-۵ صفحه ی ۳۷۸ کتاب پارسیان است .

قسمت (ب)

$$L(\theta)=L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=(2\pi)^{-\frac{m+n}{2}}(\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}}(\sigma_2^2)^{-\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2\right\}$$

$$\sup_H L(\theta)=L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,\hat\sigma_1^2,\hat\sigma_2^2)=(2\pi)^{-\frac{(m+n)}{2}}(\hat\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}}(\hat\sigma_2^2)^{-\frac{m}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(m+n)}{2}}$$

که در آن $\hat\mu_1=\bar{x}$, $\hat\mu_2=\bar{y}$, $\hat\sigma_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}{m}$, $\hat\sigma_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{n}$

وتحت فرض H_0 داریم :

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\begin{cases}L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,\hat\sigma_1^2,\hat\sigma_2^2) & \frac{\hat\sigma_1^2}{3\hat\sigma_2^2}\le 1\\ L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,3\hat\sigma_0^2,\hat\sigma_0^2) & \frac{\hat\sigma_1^2}{3\hat\sigma_2^2}>1\end{cases}$$

بطوریکه $\Rightarrow \hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{1}{m+n}\left(\dfrac{n}{3}\hat{\sigma}_1^2 + m\hat{\sigma}_2^2\right)$

حال با انتخاب $T = \dfrac{(m-1)n\sigma_1^2}{(n-1)m3\sigma_2^2}$ داریم :

$$\lambda = \begin{cases} 1 & T < \dfrac{(m-1)n}{(n-1)m} \\ c_{n,m}\varphi(t) & T > \dfrac{(m-1)n}{(n-1)m} \end{cases}$$

که در آن داریم :

$$\varphi(t) = \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\left(1 + \dfrac{n-1}{m-1}t\right)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad c_{m,n} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{n-1}{m-1}\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}$$

حال بنا به نمودار λ در مقابل t داریم :

**

**

که به سادگی تحقیق می شود که فرض H_0 را رد می کنیم اگر :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & T \geq a \\ 0 & 0.w \end{cases} \qquad T \quad F(n-1, m-1)$$

$$0.01 = p(T > a) \Rightarrow F(n-1, m-1, 0.99) = a$$

۱۵- فرض کنید $x_1 \dots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, a\theta^2)$ باشد می خواهیم به روش LRT آزمون $H_1: a \neq 1 \quad vs \quad H_0: a = 1$ را در سطح $\alpha = 0.05$ انجام دهیم .

$$L(\theta) = \left(2\pi a\theta^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$\ell = -\frac{n}{2}\ln 2\pi a - \frac{n}{2}\ln\theta^2 - \frac{1}{2a\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{2a} + \frac{1}{2a^2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 = 0 \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{n\theta^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{\theta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta) + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{a\theta^3} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x} \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n\bar{x}^2}$$

حال تحت فرض H_0 داریم

$$L(\theta) = \left(2\pi\theta^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \theta^2=\frac{\theta\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2}{a\theta^3} \Rightarrow \theta^2+\theta\overline{x}=\overline{x}^2$$

$$\hat{\theta}_0=\frac{-\overline{x}+\sqrt{\overline{x}^2+4\overline{x}^2}}{2}$$

$$\sup_H L(\theta)=\left(\frac{2\pi\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\left(2\pi\hat{\theta}_0^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\theta}_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\theta}_0\right)^2}$$

$$\lambda(x)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)}{n\hat{\theta}_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\theta}_0\right)^2}{\hat{\theta}_0^2}-n\right)\right\}$$

که چون توزیع آماره $\lambda(x)$ مشخص نیست از توزیع مجانبی استفاده می شود .

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda(x)>\chi^2_{(1,0.95)}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۱۶- فرض کنید $x_1 \ldots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,a\theta)$ باشد می خواهیم بـه روش LRT آزمون $H_0: a=1 \quad vs \quad H_1: a\neq 1$ را در سطح $\alpha=0.01$ انجام دهیم .

$$L(\theta)=\left(2\pi a\theta\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2a\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2\right\}$$

$$\ell=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln a-\frac{n}{2}\ln\theta-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial a}=0 \Rightarrow -\frac{n}{2a}+\frac{1}{2a^2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2=0 \Rightarrow \hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2}{n\theta}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}=-\frac{n}{2\theta}+\frac{\theta\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2}{2a\theta^2} \Rightarrow \hat{\theta}=\overline{x} \Rightarrow \hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n\overline{x}}$$

حال تحت فرض H_0 داریم

$$\ell=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}=-\frac{n}{2\theta}+\frac{2\theta\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta\right)^2}{2\theta^2}=0 \Rightarrow n\theta+n\theta^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \Rightarrow \theta^2+\theta-\overline{x}^2=0$$

$$\hat{\theta}_0 = \frac{-1+\sqrt{1+4\bar{x}^2}}{2}$$

$$\sup_H L(\theta) = \left(\frac{2\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta) = \left(2\pi\hat{\theta}_0\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\hat{\theta}_0^2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \hat{\theta}_0\right)^2 \right\}$$

$$\lambda(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\hat{\theta}_0} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \hat{\theta}_0\right)}{\hat{\theta}_0} - n \right) \right\}$$

ملاحظه می شود که توزیع آماره $\lambda(x)$ را به سادگی نمی توان بدست آورد و باید از توزیع مجانبی استفاده کرد .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & -2\ln\lambda(x_1 \dots x_n) > \chi^2_{(2,1-\alpha)} \\ 0 & 0w \end{cases}$$

۱۷- فرض کنید $x_1 \dots x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(\mu-\theta, \mu+\theta)$ باشد می خواهیم به روش LRT آزمون $H_0: \mu = 0 \quad vs \quad H_1: \mu \neq 0$ را انجام دهیم .

الف) نشان دهید آماره آزمون به صورت $\lambda(x) = \left(\frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{2Z} \right)$ که در آن $Z = \max\left\{-x_{(1)}, x_{(n)}\right\}$ است ؛

ب) نشان دهید $\lambda(x)$, Z دارای توزیع های مستقل از هم هستند ؛

ج) تابع مشخصه $-2\ln\lambda(x)$ یعنی $\psi_n(t)$ را بدست آورده و $\lim_{n\to\infty} \psi_n(t)$ را محاسبه کنید ؛

د) توزیع مجانبی $-2\ln\lambda(x)$ را مشخص کنید .

الف)
$$L(\theta) = \left(\frac{1}{2\theta} \right)^n \prod_{i=1}^{n} \mathrm{I}_{(\mu-\theta, \mu+\theta)}(x_i)$$

حال به سادگی می توان نشان داد که

$$\hat{\theta} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{2} \qquad \hat{\mu} = \frac{x_{(n)} + x_{(1)}}{2}$$

$$\sup_H L(\theta) = \left(\frac{1}{x_{(n)} - x_{(1)}} \right)^n$$

اما تحت فرض H_0 داریم

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \mathrm{I}_{\left(\max\left\{-x_{(1)},x_{(n)}\right\},\infty\right)}(\theta)$$

$$Z=\hat{\theta}=\max\{-x_{(1)},x_{(n)}\} \qquad\qquad \sup_{H_0} L(\theta)=\left(\frac{1}{2Z}\right)^n$$

$$\lambda(x)=\left(\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{2Z}\right)^n$$

ب) تحت فرض H_0 آماره بنده کامل $\max\{-x_{(1)},x_{(n)}\}$ است توزیع $\lambda(x)$ نیز تحت فرض H_0 به علت مقیاسی بودن توزیع مستقل از پارامتر θ است زیرا :

$$\frac{x_i}{\theta}\Rightarrow \theta \text{ مستقل از } \qquad\qquad \frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta}\Rightarrow \theta \text{ مستقل از }$$

$$\frac{\max\{-x_{(1)},x_{(n)}\}}{\theta}\Rightarrow \theta \text{ مستقل از } \Rightarrow \text{چون } \lambda(x) \text{ تابعی از اینهاست}$$

$\lambda(x)$ نیز مستقل از θ است .

پس بنا به قضیه باسر $\lambda(x)$, Z مستقل از هم هستند .

د) χ_1^2 $\quad -2\ln\lambda(x)$

۱۸- فرض کنید $x_1\ldots x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $f_{\theta_1}(x)=\theta_1 x^{-(1+\theta_1)}$ و $y_1\ldots y_m$ یک نمونه تصادفی از توزیع $f_{\theta_2}(y)=\theta_2 x^{-(1+\theta_2)}$ باشند می خواهیم به روش LRT آزمون $H_0:\theta_1=\theta_2 \quad vs \quad H_1:\theta_1\neq\theta_2$ را در سطح $\alpha=0.01$ انجام دهیم ؛ نشان دهید که توزیع آماره آزمون تحت فرض H_0 بستگی به θ_1,θ_2 ندارد .

$$L(\theta)=\theta_1^n\theta_2^m e^{-(1+\theta_1)\sum_{i=1}^n \ln x_i-(1+\theta_2)\sum_{i=1}^m \ln y_i}$$

$$\ell=n\ln\theta_1+m\ln\theta_2-(1+\theta_1)\sum_{i=1}^n \ln x_i-(1+\theta_2)\sum_{i=1}^m \ln y_i$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta_1}=\frac{n}{\theta_1}-\sum_{i=1}^n \ln x_i=0\Rightarrow \hat{\theta}_1=\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta_2}=\frac{m}{\theta_2}-\sum_{i=1}^m \ln y_i=0\Rightarrow \hat{\theta}_2=\frac{m}{\sum_{i=1}^m \ln y_i}$$

تحت فرض H_0

$$L(\theta)=\theta_0^{n+m}e^{-(1+\theta)\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i+\sum_{i=1}^m \ln y_i\right)}$$

$$\hat{\theta}_0=\frac{n+m}{\sum_{i=1}^n \ln x_i+\sum_{i=1}^m \ln y_i}$$

$$\sup_H L(\theta)=\hat{\theta}_1^n\hat{\theta}_1^m e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i+1)+\sum_{i=1}^{m}(\ln y_i+1)\right)}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\hat{\theta}_0^{n+m} e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\sum_{i=1}^{m}\ln y_i+n+m\right)}$$

$$\lambda(x)=\frac{\hat{\theta}_0^{n+m}}{\hat{\theta}_1^n\hat{\theta}_1^m}=\frac{\left(\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\right)^{n+m}}{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^n\left(\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\right)^m}=\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\frac{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^n\left(\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\right)^m}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\sum_{i=1}^{m}\ln y_i\right)^{n+m}}=\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\right)^n}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}+1\right)^{n+m}}$$

با تعریف عبارات زیر داریم

$$T=\frac{m\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\qquad\qquad \varphi(t)=\frac{t^n}{\left(\frac{n}{m}t+1\right)^{n+m}}$$

$$c(n,m)=\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\left(\frac{n}{m}\right)^n$$

حال $\lambda(x)$ را بر حسب عبارات بالا می نویسیم

$$\lambda(x)=c(n,m)\varphi(t)\qquad \ni T\quad F(2n,2m)$$

که با توجه به نمودار $\lambda(x)$ به سادگی تحقیق می شود که فرض H_0 رد می شود اگر

$$\begin{cases} T<a \quad or \quad T>b \\ c_{m,n}\varphi(a)=c_{m,n}\varphi(b)=\lambda_0 \end{cases}$$

که مشاهده می کنید توزیع آماره آزمون تحت فرض H_0 بستگی به θ_1 , θ_2 ندارد .

۱۹- فرض کنید $x_1\dots x_n \quad \theta_1 x^{\theta_1-1}$ و $y_1\dots y_m \quad \theta_2 y^{\theta_2-1}$ باشند ؛ می خواهیم به روش LRT آزمون $H_0:\theta_1=\theta_2 \quad vs \quad H_1:\theta_1\neq\theta_2$ را در سطح $\alpha=0.01$ انجام دهیم ؛ نشان دهید که توزیع آماره آزمون تحت فرض H_0 بستگی به θ_1 ندارد .

به وضوح ثابت می شود که $$\hat{\theta}_1=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\qquad \hat{\theta}_2=-\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}$$

$$\sup_H L(\theta)=\hat{\theta}_1^n\hat{\theta}_1^m e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i+n)\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i+m)\right)}$$

حال تحت فرض H_0 داریم

$$\hat{\theta}_0=\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\hat{\theta}_0^{n+m}e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\sum_{i=1}^{m}\ln y_i+n+m\right)}$$

$$\lambda(x)=\frac{\hat{\theta}_0^{n+m}}{\hat{\theta}_1^{n}\hat{\theta}_1^{m}}=\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\frac{\left(-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^n\left(-\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\right)^m}{\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{m}\ln y_i\right)^{n+m}}=\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\right)^n}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}+1\right)^{n+m}}$$

با تعریف عبارات زیر داریم :

$$T=\frac{m\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sum_{i=1}^{m}\ln y_i}\qquad\qquad \varphi(t)=\frac{t^n}{\left(\frac{n}{m}t+1\right)^{n+m}}$$

$$c(n,m)=\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\left(\frac{n}{m}\right)^n$$

$$\lambda(x)=c(n,m)\varphi(t)\qquad \ni T \quad F(2n,2m)$$

که با توجه به نمودار $\lambda(x)$ به سادگی تحقیق می شود که فرض H_0 رد می شود اگر

$$\begin{cases} T<a \quad or \quad T>b \\ c_{m,n}\varphi(a)=c_{m,n}\varphi(b)=\lambda_0 \end{cases}$$

۲۰- فرض کنید $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(0,0,1,1,\rho)$ باشد می خواهیم به روش LRT آزمون $H_0:\rho=0 \qquad vs \qquad H_1:\rho\neq 0$ را در سطح $\alpha=0.05$ انجام دهیم .

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\rho\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)}$$

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ln x^2{}_i\sum_{i=1}^{n}y^2{}_i}}$$

$$\sup_{H} L(\theta)=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}\right)^2 e$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x^2{}_i+\sum_{i=1}^{n}y^2{}_i\right)}$$

$$\lambda(x)=\left(1-\hat{\rho}^2\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{\frac{\hat{\rho}^2}{2\left(1-\hat{\rho}^2\right)}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\hat{\rho}}{\left(1-\hat{\rho}^2\right)}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\frac{\hat{\rho}^2}{2\left(1-\hat{\rho}^2\right)}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right\}$$

$$=\left(1-\hat{\rho}^2\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{\frac{\hat{\rho}}{2\left(1-\hat{\rho}^2\right)}\left(\hat{\rho}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\hat{\rho}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\right\}$$

که چون توزیع آماره $\lambda(x)$ مشخص نیست از توزیع مجانبی استفاده می شود .

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda(x)>\chi^2_{(1,0.95)}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۲۱- فرض کنید $x_{i1},\dots,x_{in}$ونه های تصادفی مستقل از توزیع $N\left(\mu_i,\sigma_i\right)$; $i=1,2,3$ باشند می خواهیم به روش LRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2 \qquad vs \qquad H_1=H_0$ **نفی**

ناحیه رد آزمون مجانبی را برای n_i های بزرگ $i=1,2,3$ مشخص کنید .

حل : با توجه به مثال ۹-۷ صفحه ی ۳۸۲ کتاب پارسیان داریم :

$$\lambda\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{\hat{\sigma}_1^{n_1}\hat{\sigma}_2^{n_2}\hat{\sigma}_3^{n_3}}{\left(\frac{1}{n}\left(n_1\hat{\sigma}_1^2+n_2\hat{\sigma}_2^2+n_3\hat{\sigma}_3^2\right)\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda\left(x_1,x_2,x_3\right)>\chi^2_{(2,1-\alpha)}\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

۲۱- فرض کنید $x_1,\dots,x_k$ متغیر های تصادفی مستقل با توزیع $B\left(1,\theta_i\right)$ x_i ; $i=1,\dots,k$ می خواهیم به روش LRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$H_0:\theta_i=\theta_0\ ,\ i=1,\dots,k \qquad vs \qquad H_1=H_0$ **نفی**

ناحیه رد آزمون مجانبی را برای k های بزرگ مشخص کنید .

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{x_i}\left(1-\theta_i\right)^{1-x_i}$$

$$\ell=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i\ln\theta_1+\left(1-x_i\right)\ln\left(1-\theta_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta_i}=\frac{x_i}{\theta_i}-\frac{\left(1-x_i\right)}{\left(1-\theta_i\right)}=0\Rightarrow\hat{\theta}_i=x_i$$

$$\sup_H L(\theta)=\prod_{i=1}^{k}x_i^{x_i}\left(1-x_i\right)^{1-x_i}$$

$$\sup_{H_0} L(\theta)=\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{x_i}\left(1-\theta_i\right)^{1-x_i}$$

$$\lambda\left(x_1,\dots,x_3\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\theta_{i_0}}\right)^{x_i}\left(\frac{1-x_i}{1-\theta_{i_0}}\right)^{1-x_i}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2\ln\lambda(x_1,x_2,x_3)>\chi^2_{(2,1-\alpha)}\\ 0 & 0w\end{cases}$$

مسائل فصل ۱۰

۱- فرض کنید $x_1,x_2,...$ **دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیـع یکـسان** $N\left(0,\sigma^2\right)$ **باشـد ؛ مـی خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :**

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \qquad vs \qquad H_1:\sigma^2=\sigma_1^2$$

الف) برای زوج (α,β) **داده شده فاصله تقریبی SPRT را بدست آورید ؛**

ب) برای زوج (α,β) **داده شده تعداد متوسط اندازه نمونه به روش SPRT و اندازه نمونه لازم بـه روش لـم نیمن پیرسون را بدست آورده و با هم مقا یسه کنید .**

$$R_m(x_1..x_m)=\prod_{i=1}^{m}\frac{\sigma_0 e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}x_i^2}}{\sigma_1 e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}x_i^2}}=\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\exp\left\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^m x_i^2-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^m x_i^2\right\}$$

$$=\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^m\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m x_i^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right\}$$

برای زوج (α,β) کرانهای تقریبی برابر با :

$$A\approx\frac{1-\beta}{\alpha} \qquad \& \qquad B\approx\frac{\beta}{1-\alpha}$$

تا زمانی که $B<R_m<A$ باشد باید به نمونه گیری برای مشاهده بعدی ادامه دهیم یعنی در مر حله m ام به نمونه گیری ادامه خواهیم داد

$$B<\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^m\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m x_i^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right\}<A$$

$$b=\ln B<m\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^m x_i^2<\ln A=a$$

$$\frac{b-m\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)}<\sum_{i=1}^m x_i^2<\frac{a-m\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)}$$

ب) ابتدا از طریق لم نیمن پیرسن داریم

$$\alpha=p_{H_0}\left(\bar{x}^2\ge c\right)$$

$$\beta=p_{H_1}\left(\bar{x}^2<c\right)$$

$$\alpha = p\left(\chi_n^2 \geq \frac{nc}{\sigma_0^2}\right) \Rightarrow \chi^2_{(n,1-\alpha)} = \frac{nc}{\sigma_0^2} \Rightarrow c = \frac{\sigma_0^2}{n}\chi^2_{(n,1-\alpha)}$$

$$\beta = p_{H_1}\left(\chi_n^2 \geq \frac{nc}{\sigma_1^2}\right) \Rightarrow \chi^2_{(n,\beta)} = \frac{nc}{\sigma_1^2} \Rightarrow c = \frac{\sigma_1^2}{n}\chi^2_{(n,\beta)}$$

$$\frac{\chi^2_{(n,1-\alpha)}}{\chi^2_{(n,\beta)}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$$

و از طریق SPRT

$$R_1(x_1) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\, e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)x_1^2}$$

$$Z_1 = \ln R_1(x_1) = \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)x_1^2$$

$$E_{H_0}(Z_1) = \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sigma_0^2$$

$$E_{H_1}(Z_1) = \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sigma_1^2$$

$$E_{H_0}(N) \approx \frac{a\alpha + b(1-\alpha)}{\frac{1}{2}\ln k + \frac{1}{2}(1-k)} \qquad k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

$$E_{H_1}(N) \approx \frac{a(1-\beta) + b\beta}{\frac{1}{2}\ln k + \frac{1}{2}(1-k)}$$

حا ل به ازاء $\alpha = \beta = 0.05$ داریم : $\sigma_0^2 = 1 \,,\, \sigma_1^2 = 2 \qquad a = -b = 2.94$

$$E_{H_0}(N) = 27.4 \qquad E_{H_1}(N) = 17.5$$

از طریق لم نیمن پیرسن با جایگذاری مقادیر مختلف مقدار تقریبی n =۴۸ بدست می آید :

$$\frac{E_{H_0}(N)}{n} = \frac{27.4}{47} = 0.58 \qquad \frac{E_{H_1}(N)}{n} = \frac{17.5}{47} = 0.38$$

که تا حدودی فرض نصف بودن تعداد نمونه لازم در روش SPRT نسبت به MP برقرار است .

۲- فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل بـا توزیـع یکـسان $U(0,\theta)$ باشـد ؛ مـی خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad vs \qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

الف) با انتخاب $\alpha = \beta = 0.1$ فاصله تقریبی SPRT را بدست آورید ؛

ب) برای $\alpha = \beta = 0.05$; $E_{H_0}(N)$ و $E_{H_1}(N)$ را بدست آورید .

الف)

$$R_m\left(x_1 \dots x_m\right)=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^m \frac{\mathrm{I}_{(0,\theta_1)}\left(x_{(m)}\right)}{\mathrm{I}_{(0,\theta_0)}\left(x_{(m)}\right)}$$

$$A=9 \qquad B=\frac{1}{9} \qquad a=-b=2.2$$

$$\frac{1}{9}<\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^m \frac{\mathrm{I}_{(0,\theta_1)}\left(x_{(m)}\right)}{\mathrm{I}_{(0,\theta_0)}\left(x_{(m)}\right)}<9 \Rightarrow -2.2-m \ln \frac{\theta_0}{\theta_1}<\ln \mathrm{I}_{(0,\theta_1)}\left(x_{(m)}\right)-\ln \mathrm{I}_{(0,\theta_0)}\left(x_{(m)}\right)<2.2-m \ln \frac{\theta_0}{\theta_1}$$

ب)

$$Z_1=\ln R_1(x)=m \ln \frac{\theta_0}{\theta_1}+\left(\ln \mathrm{I}_{(0,\theta_1)}\left(x_1\right)-\ln \mathrm{I}_{(0,\theta_0)}\left(x_1\right)\right)$$

$$E_{H_0}=m \ln \frac{\theta_0}{\theta_1}+0\, p\left(0<x_1<\theta_0\right)+\infty\, p\left(\theta_0<x_1<\theta_1\right)$$

۳- فرض کنید $x_1, x_2, \dots$ دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان $E(\theta)$ باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_0: \theta=4 \qquad vs \qquad H_1: \theta=3$$

الف) با انتخاب $\alpha=\beta=0.1$ نواحی سه گانه را تعیین کنید ؛

ب) با انتخاب $\beta=0.01$ و $\alpha=0.05$ ، $E_{H_0}(N)$ و $E_{H_1}(N)$ را بدست آورید .

الف) بنا به مثال ۱۰-۲ صفحه ی ۴۲۲ داریم :

$$\ln 9+m \frac{\ln \frac{4}{3}}{4-3}<\sum_{i=1}^m x_i<\frac{-\ln 9}{4-3}+m \frac{\ln \frac{4}{3}}{4-3}$$

$$2.2+2.87\, m<\sum_{i=1}^m x_i<-2.2+2.87\, m$$

ب)

$$R_1\left(x_1\right)=\frac{\theta_1}{\theta_0} e^{-\theta_1 x_1+\theta_0 x_1}$$

$$Z_1=\ln \frac{\theta_1}{\theta_0}+\left(\theta_0+\theta_1\right) x_1$$

$$E_{H_0}\left(Z_1\right)=-0.037 \qquad E_{H_1}\left(Z_1\right)=0.0456 \qquad a=2.98 \quad b=-4.55$$

$$E_{H_0}(N)=\frac{2.98 \times 0.05-4.55 \times 0.95}{-0.037}=112.8, E_{H_1}(N)=\frac{2.98 \times 0.99-4.55 \times 0.01}{0.0456}=63.7$$

۴- فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون های زیر را انجام دهیم :

$$i\,)H_0 : \mu = 12, \sigma = 4 \qquad vs \qquad H_1 : \mu = 10, \sigma = 2$$

$$i\,)H_0 : \mu = 10, \sigma = 4 \qquad vs \qquad H_1 : \mu = 12, \sigma = 2$$

الف) با انتخاب $\alpha = \beta = 0.05$ نواحی سه گانه را تعیین کنید ؛

ب) با انتخاب $\alpha = \beta = 0.01$ تعداد متوسط اندازه نمونه به روش SPRT و اندازه لازم به روش لم نیمن پیرسن را بدست آورید و با هم مقایسه کنید .

۵- فرض کنید ز $x_1, x_2, \ldots$ دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان $NB\left(r,\theta\right)$ باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad vs \qquad H_1 : \theta = \theta_1 \quad \theta_1 < \theta_0$$

الف) برای زوج $\left(\alpha,\beta\right)$ داده شده فاصله تقریبی SPRT را بدست آورید ؛

ب) برای زوج $\left(\alpha,\beta\right)$ داده شده $E_{H_0}\left(N\right)$ و $E_{H_1}\left(N\right)$ را بدست آورید .

$$f_\theta\left(x_1 \ldots x_m\right) = \prod_{i=1}^{m} \binom{r + x_i - 1}{x_i} \theta^r \left(1-\theta\right)^{x_i} = \prod_{i=1}^{m} \binom{r + x_i - 1}{x_i} \theta^{mr} \left(1-\theta\right)^{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

$$R_m\left(x_1 \ldots x_m\right) = \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{\sum_{i=1}^{m} x_i} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{mr}$$

$$B < \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{\sum_{i=1}^{m} x_i} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{mr} < A \Rightarrow b < rm \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \sum_{i=1}^{m} x_i < a$$

$$\frac{b - rm \ln\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{a - rm \ln\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}$$

ب)

$$Z_1 = r \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) x_1$$

$$E_{H_0}\left(Z_1\right) = r \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \frac{r\left(1-\theta_0\right)}{\theta_0} = r \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \frac{r\left(1-\theta_1\right)}{\theta_0}$$

$$E_{H_1}\left(Z_1\right) = r \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \frac{r\left(1-\theta_1\right)^2}{\theta_1\left(1-\theta_0\right)}$$

$$E_{H_0}(N)=\frac{a\alpha+b(1-\alpha)}{E_{H_0}(Z_1)} \quad , \quad E_{H_1}(N)=\frac{a(1-\beta)+b\beta}{E_{H_1}(Z_1)}$$

۶- فرض کنید $x_1,x_2,...$ دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان $\beta(1,\theta)$ باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_0:\theta=\theta_0 \qquad vs \qquad H_1:\theta=1-\theta_0 \quad \left(0<\theta_0<\frac{1}{2}\right)$$

الف) فرض کنید k و j دو عدد صحیح و مثبت و $c=\ln\left(\frac{1-\theta_0}{\theta_0}\right)$ باشد ، اگر $\ln B=-jc$ و $\ln A=kc$ باشد ، مقادیر α و β را بدست آورید .

ب) مقادیر $E_{H_0}(N)$ و $E_{H_1}(N)$ را محاسبه کنید .

الف)

$$\left.\begin{array}{l} A=e^{kc}=\dfrac{1-\beta}{\alpha}\Rightarrow 1-\beta=\alpha e^{kc} \\ B=e^{-jc}=\dfrac{\beta}{1-\alpha}\Rightarrow \beta=e^{-jc}-\alpha e^{-jc} \end{array}\right\}\Rightarrow 1=e^{-jc}+\alpha\left(e^{kc}-e^{-jc}\right)$$

$$\alpha=\frac{1-e^{-jc}}{e^{kc}-e^{-jc}}$$

$$\beta=1-\frac{e^{kc}\left(1-e^{-jc}\right)}{e^{kc}-e^{-jc}}=\frac{e^{-jc}\left(e^{kc}-1\right)}{e^{kc}-e^{-jc}}$$

$$R_1(x_1)=\frac{(1-\theta_0)^{x_1}\theta_0^{1-x_1}}{(1-\theta_0)^{1-x_1}\theta_0^{x_1}}=\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\left(\frac{1-\theta_0}{\theta_0}\right)^{2x_1}$$

ب)

$$Z_1=\ln\frac{\theta_0}{1-\theta_0}+2x_1\ln\left(\frac{1-\theta_0}{\theta_0}\right)=-c+2cx_1$$

$$E_{H_0}(Z_1)=-c+2c\theta_0$$

$$E_{H_1}(Z_1)=-c+2c(1-\theta_0)=c-2c\theta_0$$

$$E_{H_0}(N)=\frac{k\left(1-e^{-jc}\right)+j\left(e^{kc}-1\right)}{(2\theta_0-1)\left(e^{kc}-e^{-jc}\right)}$$

$$E_{H_1}(N)=\frac{ke^{kc}\left(1-e^{-jc}\right)+je^{-jc}\left(e^{kc}-1\right)}{(1-2\theta_0)\left(e^{kc}-e^{jc}\right)}$$

۷- فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ **دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان** $p(\lambda)$ **باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :**

$H_0 : \lambda = 1 \qquad vs \qquad H_1 : \lambda = 2$

الف) برای زوج (α, β) **داده شده فاصله تقریبی SPRT را بدست آورید ؛**

ب) برای $\alpha = \beta = 0.05$ **،** $E_{H_0}(N)$ **و** $E_{H_1}(N)$ **را محاسبه کنید .**

الف)

$$R_m(x_1 \ldots x_m) = e^{m\lambda_0 - m\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

$$b < m\lambda_0 - m\lambda_1 + \sum_{i=1}^{m} x_i \, \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < a$$

$$\frac{b}{\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} + \frac{m(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{a}{\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} + \frac{m(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}$$

ب)

$$R_1(x_1) = e^{\lambda_0 - \lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{x_1}$$

$$Z_1 = \lambda_0 - \lambda_1 + x_1 \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$$E_{H_0}(Z_1) = (\lambda_0 - \lambda_1) + \lambda_0 \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$$E_{H_1}(Z_1) = (\lambda_0 - \lambda_1) + \lambda_1 \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$$a = -b = 2.944$$

$$E_{H_0}(N) = \frac{-2.65}{E_{H_0}(Z_1)} \qquad \& \qquad E_{H_1}(N) = \frac{2.65}{E_{H_1}(Z_1)}$$

۸- فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ **دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان پواسن بریده شده در صفر با پارامتر** λ **باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :**

$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad vs \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1$

الف) با انتخاب $\alpha = \beta = 0.05$ **نواحی سه گانه را تعیین کنید ؛**

ب) برای $\alpha = \beta = 0.01$ **و** $E_{H_0}(N)$ **و** $E_{H_1}(N)$ **را محاسبه کنید .**

الف)

$$X_1, X_2, \ldots \quad \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\left(\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\right) \qquad x = 1,2,\ldots$$

$$R_m\left(x_1 \ldots x_m\right) = e^{m\lambda_0 - m\lambda_1}\left(\frac{1-e^{-\lambda_0}}{1-e^{-\lambda_1}}\right)^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^m x_i}$$

$$B < e^{m(\lambda_0-\lambda_1)}\left(\frac{1-e^{-\lambda_0}}{1-e^{-\lambda_1}}\right)^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^m x_i} < A$$

$$b < m\left(\lambda_0 - \lambda_1 + \ln\left(\frac{1-e^{-\lambda_0}}{1-e^{-\lambda_1}}\right)\right) + \sum_{i=1}^m x_i \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) < a$$

$$\frac{-2.94}{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_0} + m\,\frac{\left(\lambda_0 - \lambda_1 + \ln\left(1-e^{-\lambda_0}\right) - \ln\left(1-e^{-\lambda_1}\right)\right)}{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_0} < \sum_{i=1}^m x_i$$

$$< \frac{2.94}{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_0} + m\,\frac{\left(\lambda_0 - \lambda_1 + \ln\left(1-e^{-\lambda_0}\right) - \ln\left(1-e^{-\lambda_1}\right)\right)}{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_0}$$

ب)

$$R_1\left(x_1\right) = e^{\lambda_0-\lambda_1}\left(\frac{1-e^{-\lambda_0}}{1-e^{-\lambda_1}}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{x_1}$$

$$Z_1 = \left(\lambda_0 - \lambda_1\right) + \ln\left(1-e^{-\lambda_0}\right) - \ln\left(1-e^{-\lambda_1}\right) + \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}x_1 = c + \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}x_1$$

$$E_{H_0}\left(Z_1\right) = c + \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{1-e^{-\lambda_0}}$$

$$E_{H_1}\left(Z_1\right) = c + \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{\lambda_1}{1-e^{-\lambda_1}}$$

$$a = -b = 4.6$$

$$E_{H_0}\left(N\right) = \frac{-4.508}{c + \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{1-e^{-\lambda_0}}} \qquad \& \qquad E_{H_1}\left(N\right) = \frac{4.508}{c + \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{\lambda_1}{1-e^{-\lambda_1}}}$$

۹- فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل با توزیـع یکـسان $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ، σ معلـوم باشد ؛ می خواهیم به روش SPRT آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu = \mu_0 + \delta \qquad \delta = \pm\delta_0$$

الف) برای زوج (α, β) داده شده نواحی سه گانه را تعیین کنید ؛

ب) برای $\mu_0 = 500\ ;\ \sigma = 50\ ;\ \delta = \pm 50\ ;\ \alpha = 0.05\ ;\ \beta = 0.1$ و $E_{H_0}\left(N\right)$ و $E_{H_1}\left(N\right)$ را محاسبه کنید .

الف)

$$R_m\left(x_1...x_m\right)=e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0-\delta)^2\right)}$$

$$B<e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0)^2+2\delta\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0)^2-m\delta^2\right)}<A$$

$$b<e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\delta\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0)^2-m\delta^2\right)}<a$$

$$\frac{\sigma^2 b}{\delta}+m\,\frac{\delta}{2}<\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\mu_0\right)<\frac{\sigma^2 a}{\delta}+m\,\frac{\delta}{2}$$

$$\frac{\sigma^2 b}{\delta}+m\left(\frac{\delta}{2}+\mu_0\right)<\sum_{i=1}^{m}x_i<\frac{\sigma^2 a}{\delta}+m\left(\frac{\delta}{2}+\mu_0\right)$$

ب)

$$Z_1=\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\delta\left(x_1-\mu_0\right)-\delta^2\right)$$

$$E_{H_0}\left(Z_1\right)=\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}$$

$$E_{H_1}\left(Z_1\right)=\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\delta\left(\mu_0+\delta-\mu_0\right)-\delta^2\right)=\frac{\delta^2}{2\sigma^2}$$

$$a=2.89\qquad b=-2.25$$

$$E_{H_0}\left(Z_1\right)=-\frac{1}{2}\qquad\qquad E_{H_1}\left(Z_1\right)=\frac{1}{2}$$

$$E_{H_0}\left(N\right)=3.986\qquad\qquad E_{H_1}\left(N\right)=4.752$$